

А.Е. Кононюк

**ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ
МАТЕМАТИКА**

Книга 8

Пространства

Часть 3

**Топологические
пространства**

**Киев
«Освіта України»**

2016



Кононюк Анатолий Ефимович



УДК 51 (075.8)

ББК В161.я7

К65

Рецензенты:

В.В.Довгай - к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет „КПІ”);

В.В.Гавриленко - д-р физ.-мат. наук, проф., *О.П.Будя* - к-т техн. наук, проф. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н.К.Печурин - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретно-непрерывная математика. (Пространства). — В 12-и кн. Кн.8. ч.3.— К.:Освіта України. 2016.—900 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)

ISBN 978-966-373-694-7 (книга 8. ч.3)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, используемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единую методологически взаимосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)

ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)

ISBN 978-966-373-694-7 (книга 8. ч.3)

© Кононюк А. Е., 2016

© Освіта України, 2016

Структура
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук (дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"



Оглавление

Предисловие	9
1. Геометрические объекты как начала топологии.....	10
1.1. Описание геометрических объектов.....	10
1.2. Преобразование декартовых прямоугольных координат	14
1.3. Модификации векторов и точек.....	20
1.4. Однородные координаты.....	28
1.5. Геометрия кривых линий.....	32
1.6. Геометрия двумерных кривых.....	46
1.7. Геометрия поверхностей	50
1.8. Кривизна линий на поверхности	64
1.9. Тензоры поверхности.....	76
1.10. Криволинейные координаты.....	90
1.11. Тензоры в криволинейных координатах.....	104
1.12. Ортогональные криволинейные координаты.....	113
1.13. Математическая модель геометрии объектов	116
2. Введение в топологию	118
2.1. Топология линий	118
2.1.1. Идея непрерывности.....	118
2.1.2. Чем занимается топология?	123
2.1.3. Простейшие топологические инварианты.....	127
2.1.4. Эйлерова характеристика графа.....	131
2.1.5. Индекс пересечения.....	136
2.1.6. Теорема Жордана.....	142

2.1.7. Что такое линия?.....	146
2.1.8. Кривая Пеано.....	153
2.2. Топология поверхностей.....	157
2.2.1. Теорема Эйлера.....	157
2.2.2. Поверхности.....	160
2.2.3. Эйлерова характеристика поверхности.....	167
2.2.4. Классификация замкнутых ориентируемых поверхностей.....	170
2.2.5. Классификация замкнутых неориентируемых поверхностей.....	178
2.2.6. Векторные поля на поверхностях.....	185
2.2.7. Проблема четырех красок.....	192
2.2.8. Раскрашивание карт на поверхностях.....	194
2.2.9. «Дикая сфера».....	199
2.2.10. Узлы.....	204
2.2.11. Коэффициент зацепления.....	212
2.3. Гомотопии и гомологии.....	218
2.3.1. Периоды многозначных функций.....	218
2.3.2. Фундаментальная группа.....	223
2.3.3. Клеточные разбиения и полиэдры.....	229
2.3.4. Накрытия.....	234
2.3.5. Степень отображения и основная теорема алгебры.....	241
2.3.6. Группа узла.....	246
2.3.7. Циклы и гомологии.....	252
2.3.8. Топологическое произведение.....	265
2.3.9. Расслоения.....	270
2.3.10. Теория Морса.....	275
2.3.11. Использование топологических методов в физике.....	281
3. ТОПОЛОГИЯ ОБОЛОЧЕК.....	293
3.1. Топологические объекты.....	293
3.2. Эйлерова характеристика оболочек.....	297
3.3. Связность оболочек.....	302
3.4. Ориентируемость оболочек.....	306
3.5. Оболочки для моделирования тел.....	310
3.6. Поверхностное и твердотельное моделирование.....	317
4. Теоретико-множественный подход представления топологии.....	318
4.1. Основные понятия из теории множеств.....	318
4.2. Топология в множестве.....	327
4.3. Базы.....	335
4.4. Метрические пространства.....	339
4.5. Подпространства.....	350
4.6. Расположение точек относительно множества.....	353
4.7. Упорядоченные множества.....	361
5. Непрерывность.....	374

5.1. Теоретико-множественное отступление: отображения.....	374
5.2. Непрерывные отображения.....	378
5.3. Гомеоморфизмы.....	389
6. Топологические свойства.....	401
6.1. Связность.....	401
6.2. Приложения понятия связности.....	409
6.3. Линейная связность.....	412
6.4. Аксиомы отделимости.....	418
6.5. Аксиомы счетности.....	427
6.6. Компактность.....	434
6.7. Секвенциальная компактность.....	442
6.8. Локальная компактность и паракомпактность.....	448
7. Топологические конструкции.....	455
7.1. Перемножение.....	455
7.2. Факторизация.....	463
7.3. Зверинец факторпространств.....	470
7.4. Проективные пространства.....	483
7.5. Конечные топологические пространства.....	487
7.6. Пространства непрерывных отображений.....	493
8. Элементы топологической алгебры.....	502
8.1. Алгебраическое отступление: группы и гомоморфизмы.....	503
8.2. Топологические группы.....	509
8.3. Конструкции.....	515
8.4. Действия топологических групп.....	524
9. Гомотопии и фундаментальная группа.....	529
9.1. Гомотопии.....	530
9.2. Гомотопические свойства умножения путей.....	537
9.3. Фундаментальная группа.....	541
9.4. Роль отмеченной точки.....	550
10. Накрытия и вычисление фундаментальной группы.....	554
10.1. Накрытия.....	554
10.2. Теоремы о накрывающих путях.....	560
10.3. Вычисление фундаментальных групп при помощи универсальных накрытий.....	563
11. Фундаментальная группа и отображения.....	571
11.2. Ретракции и неподвижные точки.....	571
11.3. Гомотопические эквивалентности.....	584
11.4. Накрытия и фундаментальная группа.....	590
12. Клеточная техника.....	603
12.1. Клеточные пространства.....	603
12.2. Клеточные конструкции.....	618
12.3. Одномерные клеточные пространства.....	625

12.4. Фундаментальная группа клеточного пространства.....	630
13. Топологический солитон.....	644
14. Топологические группы.....	676
14. 1. Некоторые общие свойства топологических групп.....	677
14.2. Локально компактные группы.....	681
14. 3. Обобщенные НИЛЬПОТЕНТНЫЕ и обобщенные разрешимые группы.....	692
14.4. Теоремы типа СИЛОВА.....	696
14. 5. Условия конечности в теории топологических групп.....	699
15. Узлы и косы.....	707
15.1. Атомы и узлы.....	714
15.2. Узлы, сплетенные из кос	724
15.3. Плоские диаграммы узлов	747
15.4. Арифметика узлов	757
15.5. Хирургия и инварианты	767
15.6. Полином Джонса и спиновые модели	778
15.7. Инварианты конечного порядка	790
15.8. Узлы и физика	803
16. Указания, комментарии, советы и ответы.....	815
Литература	899

ПРЕДИСЛОВИЕ

Простейшие идеи топологии возникают из непосредственного наблюдения за окружающим миром. Интуитивно ясно, что высказывания о геометрических свойствах фигур не вполне исчерпываются сведениями об их «метрических» свойствах (размерах, углах и т. д.). Остается еще «кое-что» за пределами старой геометрии. Какой бы длинной ни была линия (веревка, провод, длинная молекула), она может быть замкнутой или нет; если линия замкнута, то она может сложным образом «заузляться». Две (или более) замкнутые линии могут «зацепляться» одна с другой и притом различными способами. Тела, их поверхности, могут иметь «дырки». Эти свойства тел характеризуются тем, что они не меняются при деформациях, допускающих любые растяжения без разрывов. Такие свойства и называются топологическими. Кроме элементарных геометрических фигур, топологическими свойствами обладают многие чисто математические объекты, и именно это определяет их важность.

Однако легче подметить существование топологических свойств фигур, чем создать их «исчисление», т. е. раздел математики, обладающий точными понятиями, строгими законами и методами, математическими формулами, изображающими топологические величины.

Первые важные наблюдения и точные топологические соотношения были найдены еще Эйлером, Гауссом и Риманом. Тем не менее, без преувеличения можно сказать, что топология как раздел науки основана в конце XIX века А. Пуанкаре. Процесс построения топологии и решения ее внутренних задач оказался трудным и длительным: он продолжался не менее 70—80 лет, наполненных глубокими открытиями и, в ряде случаев, даже пересмотром основ. В нем принял участие ряд наиболее выдающихся математиков своего времени. На протяжении многих лет, приблизительно до конца 50-х годов, топология рассматривалась даже математиками других областей как красивая, но бесполезная игрушка. Автор этих строк должен откровенно признаться, что еще в студенческие времена, в 50-х годах XX века, выбрал себе эту область для будущей деятельности, увлеченный ее красотой и необычностью по сравнению с более традиционными разделами математики, и при этом значительное время (до конца 60-х годов) испытывал неудовлетворенность итогами развития этой области именно из-за недостатка приложений. Следует заметить, что ряд красивых топологических закономерностей в других разделах математики был уже к тому времени обнаружен — в теории функций и комплексном анализе, в качественной теории динамических

систем и уравнений с частными производными, в теории операторов и даже в алгебре.

Однако лишь с начала 70-х годов XX века началось интенсивное проникновение методов топологии в аппарат современной физики. Сейчас важность топологических методов для различных разделов физики уже не вызывает сомнений — для теории поля и общей теории относительности, физики анизотропных сплошных сред и низких температур, современной квантовой теории и т. д.

Компьютеры позволяют создавать численные модели различных объектов. С их помощью можно увидеть еще не существующий объект, получить его геометрические характеристики, выполнить исследование его физических свойств путем постановки численных экспериментов, внести необходимые изменения, подготовить производство и, наконец, изготовить объект. Инструментом для всего этого служат CAD/CAM/CAE системы. Общим элементом таких систем является математическая модель геометрии проектируемого объекта. В работе с системами геометрического моделирования используются различные области знания. Теоретической основой геометрического моделирования являются дифференциальная и аналитическая геометрии, вариационное исчисление, топология и разделы вычислительной математики. Геометрическое моделирование изучает методы построения кривых линий, поверхностей и твердых тел, методы выполнения над ними различных операций и методы управления численными моделями.

1. Геометрические объекты как источники визуальной информации

1.1. Описание геометрических объектов

Геометрические объекты. Нас будет интересовать информация о форме окружающих предметов (истин), их размерах и взаимном расположении, не вдаваясь в подробности физических свойств. Другими словами, мы будем изучать и моделировать информацию о геометрических свойствах реальных или воображаемых объектов (истин). Нашей конечной целью является построение математических моделей геометрии этих объектов (истин). Эти модели нужны для

принятия решений, для проведения исследований, для производства материальных ценностей.

Геометрическое моделирование изучает методы построения математической модели, описывающей геометрические свойства предметов окружающего мира. Оно базируется на аналитической и дифференциальной геометрии, вычислительной математике, вариационном исчислении, топологии и разрабатывает собственные математические методы моделирования.

Инструментом для геометрического моделирования служат математические методы решения тех или иных задач. Используемые методы позволяют описывать геометрические свойства предметов, создавать их математические модели и исследовать их путем проведения различных расчетов и численных экспериментов. При необходимости мы сможем редактировать моделируемые объекты и строить их графические отображения.

Для описания геометрических свойств окружающих предметов мы будем строить твердые тела или просто тела. Тела в свою очередь мы будем описывать точками, линиями и поверхностями. Все они обладают определенными общими свойствами, поэтому ими можно оперировать как объектами (истинами). Точки, линии, поверхности и тела будем называть геометрическими объектами (рис. 1.1).



Рис.1.1

Геометрические объекты будут служить основными элементами математической модели геометрии реальных или воображаемых объектов. Мы будем строить их в трехмерном евклидовом пространстве считая их неизменными во времени.

В большинстве случаев мы будем использовать декартовы прямоугольные системы координат. В декартовой системе координат базисные векторы имеют одинаковую длину и постоянное направление в любом месте пространства. Это упрощает описание объектов, так как базисные векторы при дифференцировании выступают в роли констант. Мы рассмотрим также описание геометрических объектов в криволинейных системах координат.

Обозначения. Для количественных характеристик геометрических объектов мы будем использовать скалярные величины, векторы, а также тензоры. Скалярные величины будем обозначать строчными буквами латинского или греческого алфавита. Векторы в пространстве будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, выделенными жирным шрифтом. Двухмерные векторы будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, выделенными жирным курсивом. Точки будем обозначать прописными латинскими буквами. Тензоры и матрицы будем обозначать прописными буквами латинского алфавита, выделенными жирным шрифтом.

Систему координат с началом в точке O и базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ будем обозначать через $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Для векторов в пространстве мы будем использовать записи типа

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T,$$

где r_1, r_2, r_3 — компоненты вектора \mathbf{r} . В данной главе нам удобно использовать обозначения компонент векторов с индексами, равными ее номеру. В других главах мы будем также использовать обозначения компонент векторов через x, y, z .

Для описания сложных геометрических объектов нам потребуются векторы как в трехмерном, так и в двухмерном пространстве, например, на области параметров поверхности. Для двухмерных векторов мы будем использовать запись типа

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = [p_1 \ p_2]^T,$$

где p_1, p_2 — компоненты вектора \mathbf{p} .

Операцию скалярного произведения векторов будем обозначать точкой: например,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Символом \times будем обозначать операцию векторного произведения векторов: например,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3.$$

Запись двух векторов рядом \mathbf{ab} будет означать операцию диадного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , например,

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}.$$

Точка. Геометрическое моделирование мы начнем изучать с простых объектов, переходя постепенно к более сложным. Точка R пространства в общем случае описывается координатами u^1, u^2, u^3 некоторой системы координат. В декартовой прямоугольной системе координат точку можно описать с помощью радиус-вектора $\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]^T$. Радиус-вектор определяет преобразование переноса, переводящее начальную точку декартовой системы координат в заданную точку пространства. Компоненты радиус-вектора точки равны ее координатам. Радиус-вектор в отличие от просто вектора связан с началом координат. Эта разница сказывается на формулах преобразования координат и на формулах изменения положения в пространстве.

1.2. Преобразование декартовых прямоугольных координат

Преобразования координат точек в пространстве. Рассмотрим, как изменяются декартовы прямоугольные координаты точки в пространстве при переходе от одной системы координат к другой. Пусть в пространстве заданы две декартовы прямоугольные системы координат: $Oe_1e_2e_3$ и $O'i_1i_2i_3$

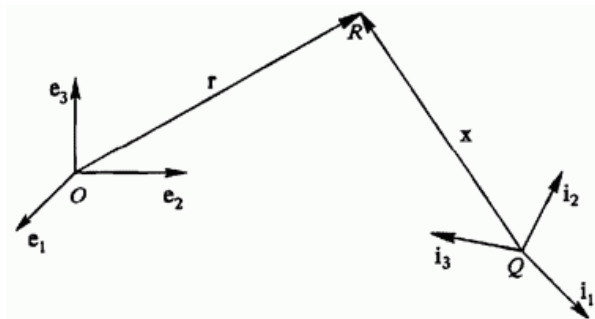


Рис. 2.1

Пусть положение некоторой точки R в первой системе описывается координатами r_1, r_2, r_3 которым соответствует вектор \mathbf{r} , а во второй системе положение этой же точки описывается координатами x_1, x_2, x_3 которым соответствует вектор \mathbf{x} (рис. 2.1).

Заметим, что равенствами

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3\end{aligned}$$

точка R описывается в разных системах координат. Обозначим через

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$$

вектор, направленный из точки O в точку Q. Если к вектору \mathbf{q} добавить вектор \mathbf{x} , то мы получим вектор \mathbf{r} . Сложение векторов мы выполним в

первой системе координат, так как именно в ней рассматриваемая точка описывается вектором \mathbf{r} . Для этого разложим орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ по ортам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{i}_2 &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{i}_3 &= a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где $a_{ij}, i, j=1, 2, 3$ — компоненты ортов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ в системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Сложив векторы \mathbf{q} и \mathbf{x} получим равенство

$$\begin{aligned}r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + q_1)\mathbf{e}_1 + \\ &+ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + q_2)\mathbf{e}_2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + q_3)\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

откуда следуют формулы преобразования координат точки при переходе из системы $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ в систему координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}r_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + q_1, \\ r_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + q_2, \\ r_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + q_3.\end{aligned}\quad (2.4)$$

В матричном представлении (2.4) имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q}, \quad (2.5)$$

где \mathbf{A}^T — транспонированная матрица поворота:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Строки матрицы \mathbf{A} составлены из компонент векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Умножив каждое из равенств (2.3) скалярно на $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ получим еще одно выражение для компонент матрицы \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_1, & a_{12} &= \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_2, & a_{13} &= \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_3, \\ a_{21} &= \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_1, & a_{22} &= \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_2, & a_{23} &= \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_3, \\ a_{31} &= \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_1, & a_{32} &= \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_2, & a_{33} &= \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно, что базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в системе координат с базисными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ выражаются через те же коэффициенты, которые присутствуют в (2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{i}_1 + a_{21}\mathbf{i}_2 + a_{31}\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{i}_1 + a_{22}\mathbf{i}_2 + a_{32}\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{i}_1 + a_{23}\mathbf{i}_2 + a_{33}\mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Действительно, если каждое из равенств (2.7) умножить скалярно на $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, то получим равенства (2.6).

Обозначим через $\mathbf{o} = o_1\mathbf{i}_1 + o_2\mathbf{i}_2 + o_3\mathbf{i}_3$ вектор, направленный из точки Q в точку O. Выполнив сложение векторов \mathbf{o} и \mathbf{r} во второй системе координат, мы получим вектор \mathbf{x} . Приравняв соответствующие компоненты векторов, получим формулы преобразования координат рассматриваемой точки при переходе из системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в систему координат $Q\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + o_1, \\ x_2 &= a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3 + o_2, \\ x_3 &= a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3 + o_3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если формулы (2.8) применить для точки Q, мы получим формулы, выражающие компоненты o_1, o_2, o_3 вектора \mathbf{o} через компоненты q_1, q_2, q_3 вектора \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} o_1 &= -a_{11}q_1 - a_{12}q_2 - a_{13}q_3, \\ o_2 &= -a_{21}q_1 - a_{22}q_2 - a_{23}q_3, \\ o_3 &= -a_{31}q_1 - a_{32}q_2 - a_{33}q_3. \end{aligned}$$

Подставив последние в (2.8), получим

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}(r_1 - q_1) + a_{12}(r_2 - q_2) + a_{13}(r_3 - q_3), \\x_2 &= a_{21}(r_1 - q_1) + a_{22}(r_2 - q_2) + a_{23}(r_3 - q_3), \\x_3 &= a_{31}(r_1 - q_1) + a_{32}(r_2 - q_2) + a_{33}(r_3 - q_3).\end{aligned}$$

В матричном представлении преобразования (2.8) имеют вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{o} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}). \quad (2.9)$$

Умножив равенство (2.9) слева на \mathbf{A}^T и прибавив вектор \mathbf{q} , в соответствии с формулой (2.5) мы должны получить вектор \mathbf{r} . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{E}, \\ \mathbf{A}^T &= \mathbf{A}^{-1}.\end{aligned} \quad (2.10)$$

Мы видим, что транспонированная матрица поворота равна своей обратной матрице, т. е. матрица поворота системы координат является ортогональной. Отсюда же следует, что определитель матрицы \mathbf{A} равен единице:

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}| = 1. \quad (2.11)$$

Преобразования компонент векторов в пространстве. Пусть некоторый пространственный вектор в системе координат $Oe_1e_2e_3$ описывается выражением $r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3$, а в системе координат $Qi_1i_2i_3$ этот же вектор описывается выражением $x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3$. С учетом формул (2.3) и (2.7) получим, что преобразования компонент векторов описываются формулами (2.4) и (2.8), в которых компоненты q_1, q_2, q_3 и o_1, o_2, o_3 следует положить равными нулю.

Преобразования координат двухмерных точек. Пусть на плоскости заданы две декартовы прямоугольные системы координат: Oe_1e_2 и Qj_1j_2

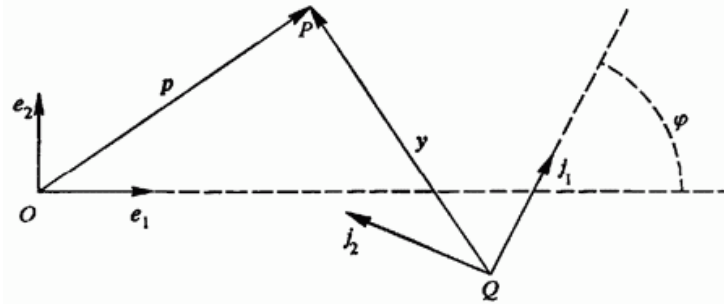


Рис. 2.2

Пусть положение некоторой точки P в первой системе описывается вектором $\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2$, а во второй системе положение этой же точки описывается вектором $\mathbf{y} = y_1\mathbf{j}_1 + y_2\mathbf{j}_2$ (рис. 2.2).

Разложим вектор \mathbf{q} , направленный из точки O в точку Q , а также орты $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ по ортам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{j}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{j}_2 &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (2.12)-(2.13)$$

Сложив векторы \mathbf{q} и \mathbf{y} , получим

$$p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 = (a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + q_1)\mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + q_2)\mathbf{e}_2.$$

Отсюда следуют формулы преобразования координат точки:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + q_1, \\ p_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + q_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Матричное представление (2.14) совпадает с (2.5): $\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} + \mathbf{q}$. Так как базисные векторы \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 имеют единичную длину, равенствам (2.13) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{j}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

если обе координатные системы правые или левые, и

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{j}_2 &= \sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

если одна из координатных систем правая, а другая — левая. Угол φ между векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{j}_1 отсчитывается от \mathbf{e}_1 в сторону вектора \mathbf{e}_2 . Пусть обе системы координат являются правыми (для систем разной ориентации следует изменить знак a_{21} и a_{22} на противоположный).

Матрица поворота систем координат, выраженная через угол φ имеет вид

$$A \equiv \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Преобразование координат (2.14) при переходе от системы с базисными векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 к системе координат с базисными векторами \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 примет вид

$$\begin{aligned} p_1 &= y_1 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi + q_1, \\ p_2 &= y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi + q_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Решив систему уравнений (2.16) относительно y_1 и y_2 получим обратное преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= (p_1 - q_1) \cos \varphi + (p_2 - q_2) \sin \varphi, \\ y_2 &= -(p_1 - q_1) \sin \varphi + (p_2 - q_2) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если в (2.17) положить $p_1=0, p_2=0$, то получим координаты точки O в системе с базисными векторами \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 , выраженные через компоненты q_1 и q_2

$$\begin{aligned}o_1 &= -q_1 \cos \varphi - q_2 \sin \varphi, \\ \dot{o}_2 &= q_1 \sin \varphi - q_2 \cos \varphi.\end{aligned}\quad (2.18)$$

В системе координат с базисными векторами \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 координаты o_1 и o_2 равны компонентам вектора \mathbf{o} , построенного из точки Q в точку O. С учетом формул (2.18) преобразование координат точки (2.17) будет иметь вид

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + o_1 = p_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi + o_1, \\ y_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + o_2 = -p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi + o_2.\end{aligned}$$

Выразим из (2.18) координаты q_1 и q_2 через координаты o_1 и o_2 и подставим их в (2.16). В результате получим

$$\begin{aligned}p_1 &= (y_1 - o_1) \cos \varphi - (y_2 - o_2) \sin \varphi, \\ p_2 &= (y_1 - o_1) \sin \varphi + (y_2 - o_2) \cos \varphi.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Матричные записи преобразований координат точки при переходе от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой в двухмерном пространстве и трехмерном пространстве совпадают.

Преобразования компонент двухмерных векторов. Пусть некоторый двухмерный вектор в системе координат Oe_1e_2 описывается выражением $p_1 e_1 + p_2 e_2$, а в системе координат Qj_1j_2 этот же вектор описывается выражением $y_1 j_1 + y_2 j_2$. С учетом формул (2.15) получим, что преобразования компонент двухмерных векторов описываются формулами (2.16) и (2.17), в которых компоненты q_1, q_2 следует положить равными нулю.

1.3. Модификации векторов и точек

Модификациями будем называть изменения положения и формы геометрических объектов. Многие линии, поверхности и тела описываются определенным образом связанным набором точек, векторов и скаляров. При изменении положения геометрического объекта в пространстве требуется выполнять соответствующие

модификации радиус-векторов точек и векторов, описывающих данный объект.

Сдвиг точки в пространстве. Простейшей модификацией точки является ее сдвиг в пространстве на вектор сдвига \mathbf{t} . Положение точки до модификации будем называть исходным и описывать радиус-вектором \mathbf{r}_0 , положение точки после модификации будем называть новым и описывать радиус-вектором \mathbf{r} . Положение точки после модификации будет описываться радиус-вектором, равным сумме радиус-вектора ее исходного положения \mathbf{r}_0 и вектора сдвига \mathbf{t}

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}. \quad (3.1)$$

Компоненты вектора \mathbf{r} равны сумме соответствующих компонент векторов \mathbf{r}_0 и \mathbf{t} .

Поворот точки в пространстве вокруг оси. Рассмотрим, как изменится радиус-вектор точки при ее повороте вокруг некоторой оси. Пусть начальное положение точки описывается радиус-вектором \mathbf{r}_0 , а ось вращения определяется точкой Q и ортом \mathbf{v} .

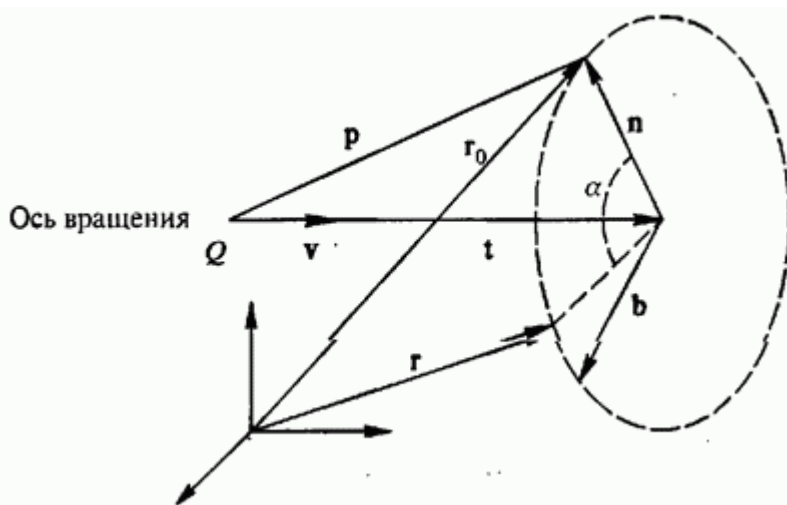


Рис. 3.1. Поворот точки вокруг оси

Пусть \mathbf{q} есть радиус-вектор точки Q . Выполним поворот точки вокруг оси на угол α против часовой стрелки, если взгляд направить навстречу вектору \mathbf{v} (рис. 3.1).

Построим вектор $\mathbf{p}=\mathbf{r}_0-\mathbf{q}$. Разложим вектор \mathbf{p} на две составляющие:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{t} + \mathbf{n}, \\ \mathbf{t} &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где вектор \mathbf{t} параллелен вектору \mathbf{v} , а вектор \mathbf{n} ортогонален вектору \mathbf{v} . При вращении вектор \mathbf{t} не изменится, а вектор \mathbf{n} повернется на угол α в сторону вектора

$$\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{v} \times (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p}. \quad (3.3)$$

Так как вектор \mathbf{v} имеет единичную длину, то вектор \mathbf{b} будет иметь длину, равную длине вектора \mathbf{n} . Кроме того, он ортогонален векторам \mathbf{v} и \mathbf{n} . После поворота на угол α вектор \mathbf{n} станет равным вектору $\mathbf{n} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha$. Следовательно, после поворота рассматриваемая точка будет определяться радиус-вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{q} + \mathbf{t} + \mathbf{n} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha = \\ &= \mathbf{q} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) \cos \alpha + \mathbf{v} \times \mathbf{p} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\mathbf{p}=\mathbf{r}_0-\mathbf{q}$. Преобразуем выражение

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 p_1 + v_1 v_2 p_2 + v_1 v_3 p_3 \\ v_2 v_1 p_1 + v_2 v_2 p_2 + v_2 v_3 p_3 \\ v_3 v_1 p_1 + v_3 v_2 p_2 + v_3 v_3 p_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}. \quad (3.5)$$

С учетом (3.5) выражение (3.4) примет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + (\mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} + \cos \alpha (\mathbf{E} - \mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} + \sin \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}). \quad (3.6)$$

Матрица поворота определяется равенством

$$\mathbf{A} = (1 - \cos \alpha) \mathbf{v}\mathbf{v} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{v}\times,$$

где

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A} является ортогональной. При транспонировании матрицы \mathbf{A} изменится только знак перед последним ее слагаемым, что соответствует повороту точки на угол $-\alpha$.

Симметрия точки относительно плоскости. Определим координаты точки \mathbf{r} , симметричной точке \mathbf{r}_0 относительно плоскости. Пусть плоскость симметрии определяется точкой Q и двумя ортами \mathbf{u} и \mathbf{v} (рис. 3.2).

Пусть \mathbf{q} есть радиус-вектор точки Q . Построим вектор $\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}$ и представим его в виде суммы трех векторов — проекции на орт \mathbf{u} и, проекции на орт \mathbf{v} и перпендикулярной плоскости составляющей \mathbf{n} :

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{n}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$. После зеркального отражения вектора \mathbf{p} его нормальная к плоскости составляющая изменит знак на противоположный.

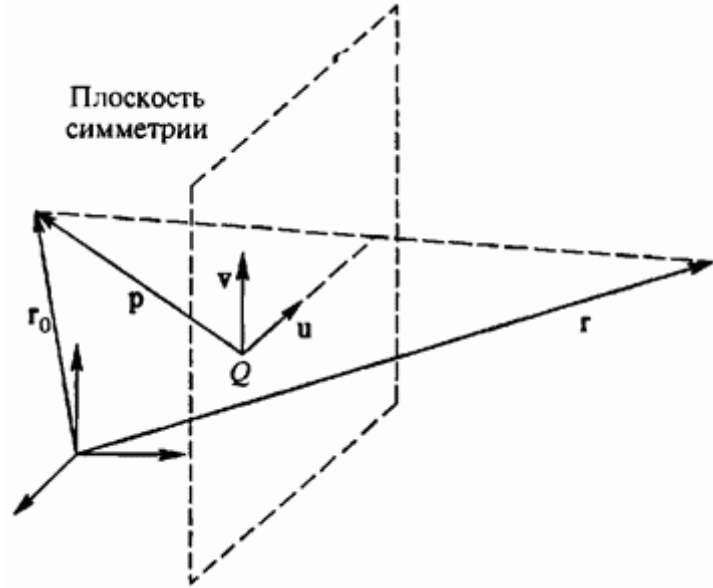


Рис. 3.2. Симметрия точки относительно плоскости

Положение симметричной точки будет описываться радиус-вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{q} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{q} + (2\mathbf{u}\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где матрица $\mathbf{A} = 2\mathbf{u}\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{E}$ — матрица симметрии, $\mathbf{u}\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\mathbf{v}$ — диадные произведения векторов.

Масштабирование в пространстве. Рассмотрим масштабирование проекций на координатные оси расстояния до точки \mathbf{r}_0 относительно некоторой другой точки \mathbf{Q} , остающейся неподвижной после масштабирования. Пусть \mathbf{q} есть радиус-вектор точки \mathbf{Q} . В общем случае при масштабировании проекции на координатные оси вектора $\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}$ могут изменяться в различное число раз, т. е. масштабирование может быть ортотропным. Пусть проекция вектора \mathbf{p} на орт \mathbf{e}_1 при масштабировании увеличивается в m_1 раз, проекция вектора \mathbf{p} на орт \mathbf{e}_2 увеличивается в m_2 раз, проекция вектора \mathbf{p} на орт \mathbf{e}_3 увеличивается в m_3 раз. Тогда положение рассматриваемой точки после модификации будет описываться радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}), \quad (3.9)$$

где \mathbf{A} — матрица масштабирования.

Модификация векторов в пространстве. Формулы модификации свободного вектора в пространстве получим из формул модификации радиус-вектора, положив в (3.1) $\mathbf{t}=0$, а в (3.6), (3.8), (3.9) — $\mathbf{q}=0$. Вектор в отличие от радиус-вектора не привязан ни к какой точке пространства и поэтому модификации вектора можно выполнить в местной системе координат, начало которой находится в точке Q , а координатные оси параллельны исходным координатным осям. После переноса начала местной системы координат в точку Q ее радиус-вектор будет равен нулю. Этим отличаются модификации вектора и радиус-вектора.

Сдвиг двухмерной точки. Рассмотрим модификации двухмерных точек. Векторная формула сдвига двухмерной точки на вектор \mathbf{t} совпадает с (3.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}. \quad (3.10)$$

Поворот двухмерной точки вокруг точки. Повороты двухмерной точки выполняются вокруг оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежит точка. Пусть начальное положение точки описывается радиус-вектором \mathbf{r}_0 , а неподвижная точка Q имеет радиус-вектор \mathbf{q} .

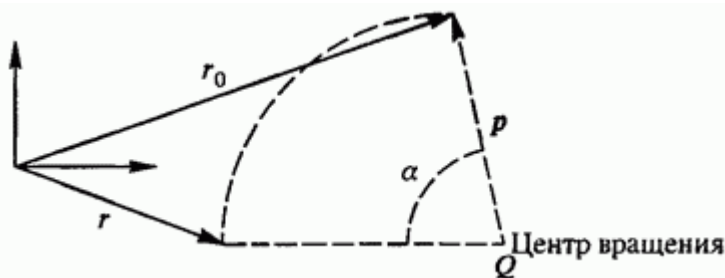


Рис. 3.3. Вращение двухмерной точки

Выполним поворот точки в плоскости на угол α против часовой стрелки, если взгляд направить на плоскость (рис. 3.3).

Построим вектор $\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}$ и вектор \mathbf{b} , который имеет длину вектора \mathbf{p} и повернут относительно него на прямой угол против часовой стрелки. Вектор \mathbf{b} получен с помощью преобразования

$$\mathbf{b} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}, \quad (3.11)$$

где двумерная матрица \mathbf{N} имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

После поворота на угол α вектор \mathbf{p} станет равным вектору $\mathbf{p} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha$. Следовательно, после поворота рассматриваемая точка будет определяться радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{p} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha = \mathbf{q} + \mathbf{p} \cos \alpha + \mathbf{N} \cdot \mathbf{p} \sin \alpha = \mathbf{q} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}), \quad (3.13)$$

где $\mathbf{A} = \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{N}$ — матрица поворота. Матрица \mathbf{A} является ортогональной. При транспонировании матрицы \mathbf{A} изменится только знак перед последним ее слагаемым, что соответствует повороту точки на угол — α .

Симметрия двумерной точки относительно линии. Определим координаты точки r , симметричной точке r_0 относительно линии. Пусть линия симметрии определяется точкой Q и ортом \mathbf{v} (рис. 3.4).

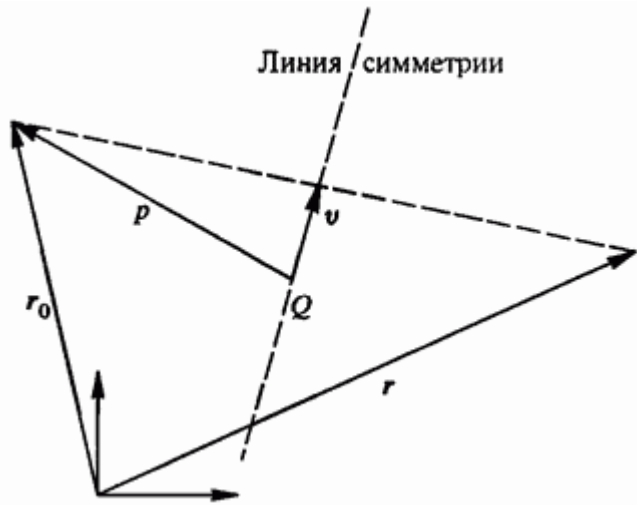


Рис. 3.4. Симметрия точки относительно линии

Пусть \mathbf{q} есть радиус-вектор точки Q . Построим вектор $\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}$ и представим его в виде суммы двух векторов — проекции на орт \mathbf{v} и перпендикулярной ему составляющей \mathbf{n} :

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{n}, \quad (3.14)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$. Преобразуем выражение

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 p_1 + v_1 v_2 p_2 \\ v_2 v_1 p_1 + v_2 v_2 p_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{v}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{v}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 \end{bmatrix}$ диадное произведение векторов. После зеркального отражения вектора \mathbf{p} его нормальная к линии составляющая изменит знак на противоположный. Положение симметричной точки будет описываться радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) = \mathbf{q} + (2\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{E})\mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}), \quad (3.16)$$

где матрица $\mathbf{A}=2\mathbf{v}\mathbf{v}-\mathbf{E}$ — матрица симметрии.

Масштабирование в двухмерном пространстве. Пусть задана неподвижная точка \mathbf{q} и требуется масштабировать относительно нее положения других точек. Положение точки с радиус-вектором \mathbf{r}_0 после масштабирования по координатным осям относительно неподвижной точки \mathbf{q} будет описываться радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}), \quad (3.17)$$

где p_1 и p_2 — компоненты вектора $\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}$, m_1 — коэффициент увеличения компоненты p_1 , m_2 — коэффициент увеличения компоненты p_2 .

Модификация двухмерных векторов. Модификации свободного двухмерного вектора получим из модификаций радиус-вектора, положив в (3.10) $\mathbf{t}=\mathbf{0}$, а в (3.14), (3.16), (3.17) — $\mathbf{q}=\mathbf{0}$. Вектор в отличие от радиус-вектора не привязан ни к какой точке двухмерного пространства и поэтому модификации вектора можно выполнить в местной системе координат, начало которой находится в точке \mathbf{Q} , а координатные оси параллельны исходным координатным осям. Этим отличаются модификации вектора и радиус-вектора.

1.4. Однородные координаты

Рассмотренные выше модификации поворота (3.6), симметрии (3.8), масштабирования (3.9) радиус-вектора точки описываются формулами, имеющими одинаковый вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{q}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0 + (\mathbf{q} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{t} = \mathbf{q} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$ — преобразованный вектор сдвига. Сдвиг (3.1) точки описывается этой же формулой с единичной матрицей \mathbf{A} и вектором \mathbf{t} , равным вектору сдвига. Аналогичный вид имеет преобразование координат точки (2.5). Преобразованиям координат и модификациям точки можно придать единый простой вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{R}_0. \quad (4.2)$$

Для этого нужно увеличить размерность векторов и матриц на единицу. Вектор, дополненный еще одной компонентой, называется расширенным вектором. Компоненты расширенного вектора называются однородными координатами.

Представим каждый радиус-вектор в расширенном виде

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad 1]^T \quad (4.3)$$

Матрица \mathbf{A}_t представляет собой матрицу \mathbf{A} , окаймленную снизу нулями, а справа — вектором сдвига \mathbf{t} в расширенном виде

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Индекс матрицы \mathbf{A}_t говорит о том, что она является расширенной, и включает вектор сдвига \mathbf{t} . Для преобразований (4.1) будем использовать запись

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}_0 \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{Q}) = \mathbf{A}_t \cdot \mathbf{R}_0, \quad (4.5)$$

считая, что расширенная матрица \mathbf{A}_t включает преобразование по матрице \mathbf{A} и сдвиг по вектору $\mathbf{t} = \mathbf{q} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$. Расширенный вектор \mathbf{Q} описывает точку, остающуюся неподвижной при преобразовании.

В некоторых случаях, например для построения рациональных кривых и поверхностей, наряду с координатами для точек необходим дополнительный параметр — так называемый вес (значимость) точки. Этот параметр точки в вычислениях преобразуется так же, как и координаты, поэтому его считают дополнительной координатой.

При наличии у точки дополнительной координаты w запись ее радиус-вектора в однородных координатах имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wr_1 \\ wr_2 \\ wr_3 \\ w \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w\mathbf{r} \\ w \end{bmatrix} \equiv [w\mathbf{r} \quad w]^T \quad (4.6)$$

При использовании однородных координат вычисления производятся для однородных компонент R_i , $i=1, 2, 3$, без выделения декартовых координат. Декартовы координаты точки получают на конечном этапе вычислений делением

$$r_1 = \frac{R_1}{R_4}, \quad r_2 = \frac{R_2}{R_4}, \quad r_3 = \frac{R_3}{R_4}.$$

Следует заметить, что векторы \mathbf{R} и $k\mathbf{R}$ в однородных координатах представляют одну и ту же точку. Для точек, имеющих вес, сдвиг, поворот, симметрия, масштабирование и другие модификации описываются общей формулой (4.2).

С помощью однородных координат и расширенных матриц удобно описывать преобразования координат. Например, переход из системы координат $Q\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ в систему $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ вместо равенств (2.4) может быть описан матричным равенством

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & q_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & q_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_q^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Обратное преобразование (2.8) может быть описано матричным равенством

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & o_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & o_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & o_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_o \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Компоненты o_1, o_2, o_3 связаны с компонентами q_1, q_2, q_3 соотношениями

$$\begin{aligned} o_1 &= -a_{11}q_1 - a_{12}q_2 - a_{13}q_3, \\ o_2 &= -a_{21}q_1 - a_{22}q_2 - a_{23}q_3, \\ o_3 &= -a_{31}q_1 - a_{32}q_2 - a_{33}q_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Матрицы преобразований (4.7) и (4.8) удовлетворяют равенству $\mathbf{A}_o \cdot \mathbf{A}_q^T = \mathbf{A}_q^T \mathbf{A}_o = \mathbf{E}$

Двухмерное пространство. Двухмерные точки в однородных координатах имеют аналогичный вид

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wp_1 \\ wp_2 \\ w \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Преобразования двумерных расширенных векторов аналогичны преобразованиям пространственных расширенных векторов. Например, преобразование координат (2.16) может быть описано матричным равенством

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & q_1 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Обратное преобразование (2.17) может быть описано матричным равенством

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & o_1 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & o_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

где компоненты o_1, o_2 связаны с компонентами q_1, q_2 соотношениями (2.18).

Использование однородных координат оказывается полезным и там, где дополнительная компонента точки отсутствует. В этом случае ее полагают равной единице.

1.5. Геометрия кривых линий

Кривой линией или просто кривой будем называть геометрическое место точек, координаты которых описываются непрерывными и однозначными функциями $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ параметра t , принимающего значения на отрезке $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$.

В декартовой прямоугольной системе координат $Oe_1e_2e_3$ кривую можно описать радиус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 r_i(t) \mathbf{e}_i, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (5.1)$$

Представление кривой в виде (5.1) называется параметрическим. Далее будем предполагать, что координатные функции $r_i(t)$ имеют непрерывные производные до любого порядка, который нам потребуется. Точку кривой $\mathbf{r}(t)$ будем называть обыкновенной, если в этой точке не обращается в нуль длина вектора первой производной по параметру $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/dt$. В противном случае точку кривой будем называть особой.

Положение точки кривой зависит от параметра t , который является ее внутренней координатой. Параметр t своими значениями однозначно определяет точки кривой. Но так как геометрически он ничем не связан с кривой, то для нее можно использовать другую параметризацию. Для этого достаточно ввести новый параметр v , который связан с параметром t функциональной зависимостью

$$t = t(v), \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \quad (5.2)$$

где $t_{\min} = t(v_{\min})$, $t_{\max} = t(v_{\max})$. Будем предполагать при этом, что функция $t(v)$ является взаимно однозначной и монотонно возрастающей. Когда параметр v пробегает свою область изменения от v_{\min} до v_{\max} , параметр t пробегает свою область изменения от t_{\min} до t_{\max} . Кривая (5.1), выраженная через параметр v , будет иметь вид

$$\mathbf{r}(v) = \mathbf{r}(t(v)), \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}.$$

При этом форма кривой останется прежней. Как параметр t , так и параметр v одинаково годятся, чтобы характеризовать точки рассматриваемой кривой, и выбор параметра зависит от нас. Мы будем пользоваться этим свойством кривых, чтобы согласовать параметрические длины кривых. Пусть имеются две кривые: первая $\mathbf{a}(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ вторая $\mathbf{c}(v)$, $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$, и нам нужно, чтобы параметрические длины кривых были одинаковыми.

Изменим параметризацию второй кривой так, чтобы пределы изменения ее параметров совпадали с пределами первой кривой. Для этого у второй кривой введем параметр t , связанный параметром v зависимостью

$$v(t) = v_{\min} \frac{t_{\max} - t}{t_{\max} - t_{\min}} + v_{\max} \frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}}. \quad (5.3)$$

Вторая кривая теперь будет иметь вид $\mathbf{c}=\mathbf{c}(t)=\mathbf{c}(v(t))$,

$t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$. В частном случае параметром кривой может служить длина ее дуги, отсчитываемая от начальной точки. В общем случае параметр t , как любая координатная система, может быть определен удобным для нас способом.

Для векторной функции, как и для скалярной, определяются производные. Производные векторной функции также представляют собой векторы. Для любых векторных функций $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{c}(t)$ и любой скалярной функции $\lambda(t)$ справедливы правила дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{a} + \mathbf{c})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt}, \\ \frac{d(\lambda\mathbf{a})}{dt} &= \mathbf{a} \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \\ \frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})}{dt} &= \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dt}, \\ \frac{d(\mathbf{a} \times \mathbf{c})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}. \end{aligned}$$

В декартовой прямоугольной системе координат производные векторной функции n -го порядка по ее параметру имеют простой вид

$$\mathbf{r}^{(n)} \equiv \frac{d^n \mathbf{r}}{dt^n} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^n r_i(t)}{dt^n} \mathbf{e}_i. \quad (5.4)$$

В криволинейной системе координат базисные векторы изменяют свою длину и направление при переходе от одной точки к другой и формулы для производных имеют более сложный вид.

Если координатные функции кривой в некоторой точке достаточное число раз дифференцируемы, то векторную функцию кривой в окрестности этой точки можно разложить в ряд Тейлора

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)\Delta t + \mathbf{r}''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots + \mathbf{r}^{(n)}(t)\frac{(\Delta t)^n}{n!} + \mathbf{q}_n \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{q}_n = \sum_{i=1}^3 \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \mathbf{e}_i \cdot \frac{d^{n+1} \mathbf{r}_i}{dt^{n+1}}$$

где $t \leq t_i \leq t + \Delta t$. Производные $\frac{d^{n+1} \mathbf{r}_i}{dt^{n+1}}$ вычислены при некоторых значениях параметра $t \leq t_i \leq t + \Delta t$. Вектор \mathbf{q}_n представляет собой остаточный член ряда Тейлора. Из свойств рядов Тейлора координатной функции $r_i(t)$ следует, что длина вектора \mathbf{q}_n не превосходит некоторое положительное число, постоянное для всех t из его области изменения для кривой, и что предел длины остаточного вектора стремится к нулю при увеличении числа членов усеченного ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{q}_n| = 0.$$

При изменении параметризации кривой $\mathbf{r}(t)$, $t(v)$ производные по новому параметру выражаются через производные по старому параметру следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dv} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dv}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dv^2} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \left(\frac{dt}{dv}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2t}{dv^2}, \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dv^3} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \left(\frac{dt}{dv}\right)^3 + 3 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \frac{dt}{dv} \frac{d^2t}{dv^2} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^3t}{dv^3}. \end{aligned}$$

Исследуем поведение кривой на бесконечно малом участке вблизи обыкновенной точки. Если существуют производные по параметру координатных функций, то кривая также имеет производные по параметру соответствующего порядка. Рассмотрим геометрический смысл производной векторной функции. Пусть при каком-либо значении параметра t радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ указывает на некоторую точку R . Перейдем к другому параметру $t_1=t+\Delta t$ при котором векторная функция $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ указывает на некоторую другую точку R_1 . Разность этих двух значений векторной функции $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ описывает хорду RR_1 (рис. 5.1).

Вектор

$$\mathbf{t} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad (5.6)$$

параллелен хорде RR_1 , но в общем случае не равен ей по длине. Устремим Δt к нулю, тогда точка R_1 будет приближаться к точке R , вектор (5.6) будет стремиться к касательной к кривой в точке R .

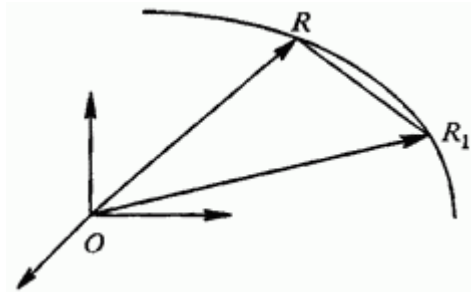


Рис. 5.1

Предел отношения (5.6) при $\Delta t \rightarrow 0$ является первой производной векторной функции

$$\mathbf{r}' \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i(t)}{dt} \mathbf{e}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{r_i(t + \Delta t) - r_i(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_i. \quad (5.7)$$

Таким образом, производная $\mathbf{r}'(t)$ кривой $\mathbf{r}(t)$ есть вектор, направленный по касательной к кривой в точке, определяемой параметром t . Заметим, что производная всегда направлена в сторону возрастания параметра. Зная первую производную радиус-вектора кривой, можно вычислить длину кривой. Длина кривой равна пределу, к которому стремится длина ломаной, вписанной в кривую. Таким образом, длина кривой равна интегралу

$$s = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} dt. \quad (5.8)$$

Натуральная параметризация кривой.

Длина вектора производной зависит от способа параметризации кривой. Существует способ параметризации, при котором длина вектора производной равна единице. Для этого используется параметризация, геометрически связанная с кривой, а именно: за параметр принимается длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой ее точки (например, начальной). Действительно, в этом случае длина хорды RR_1 стремится к длине дуги Δt , а длина вектора \mathbf{r}' стремится к единице, когда Δt стремится к нулю. Векторная зависимость

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad (5.9)$$

где s — длина дуги, называется уравнением кривой с натуральной параметризацией.

Натуральная параметризация удобна в теоретических исследованиях, так как она упрощает формулы. С практической точки зрения она не всегда удобна, так как требует знание длины дуги.

Сопровождающий трехгранник.

В каждой точке кривой можно построить плоскость, перпендикулярную ее первой производной. Такая плоскость называется нормальной плоскостью кривой. Плоскость, в которой

лежат и первая производная кривой и ее вторая производная, называется соприкасающейся плоскостью. Если вторая производная кривой параллельна первой производной или ее длина равна нулю, то в качестве соприкасающейся плоскости можно взять любую плоскость, в которой лежит первая производная кривой. Точка кривой, в которой векторы первой и второй производных кривой коллинеарны, называется точкой распрямления. Точки распрямления не зависят от способа параметризации кривой. Название соприкасающейся плоскости обусловлено тем, что она проходит через заданную точку кривой с наивысшим порядком касания, и ее можно определить как предельное положение плоскости, построенной по трем бесконечно близким точкам кривой.

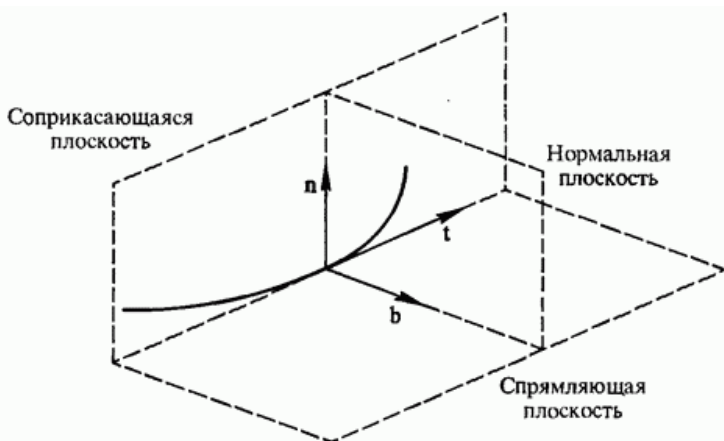


Рис. 5.2. Сопровождающий трехгранник кривой

Плоскость, перпендикулярная нормальной и соприкасающейся плоскостям, называется спрямляющей плоскостью (рис. 5.2).

Единичный вектор, направленный вдоль первой производной кривой, называется касательным вектором кривой в данной точке. Единичный вектор, направленный вдоль линии пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей и направленный в сторону второй производной (в сторону вогнутости кривой), называется главной нормалью кривой в данной точке. Единичный вектор, направленный вдоль линии пересечения нормальной спрямляющей плоскостей и образующий с касательным и нормальным вектором

правую тройку векторов, называется бинормалью кривой в данной точке.

Таким образом, с каждой точкой кривой связаны три взаимно перпендикулярные плоскости: нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая, а также три взаимно ортогональных вектора единичной длины: касательный \mathbf{t} , нормаль \mathbf{n} и бинормаль $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Совокупность трех перечисленных плоскостей и трех векторов \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} называется сопровождающим трехгранником кривой.

Тройка векторов \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} выражается через производные векторной функции кривой. Они помогут нам в исследовании строения кривой в бесконечно малой окрестности каждой ее точки. Тройка единичных векторов связана соотношениями

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}. \quad (5.10)$$

Формулы Френе-Серре.

Предположим, что нам известно уравнение кривой с натуральной параметризацией (5.9). В этом случае

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (5.11)$$

Из того, что длина первой производной равна единице и не меняется вдоль кривой, следует

$$\frac{d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})}{ds} = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad (5.12)$$

т. е. векторы первой и второй производной ортогональны. Следовательно, вторая производная кривой с натуральной параметризацией направлена по главной нормали:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = k\mathbf{n}. \quad (5.13)$$

Коэффициент k называется кривизной кривой линии. Ниже мы покажем, что обратная ей величина равна радиусу окружности, соприкасающейся с кривой в рассматриваемой точке. Бинормаль по определению ортогональна касательному вектору и главной нормали. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{t})}{ds} &= \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} + k\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0, \\ \frac{d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})}{ds} &= 2\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}$$

Таким образом, вектор $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ ортогонален векторам \mathbf{t} и \mathbf{b} и, следовательно, он параллелен главной нормали. Это принято записывать в виде

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n}. \quad (5.15)$$

Коэффициент χ называется кручением кривой линии. Равенства (5.13) и (5.15) определяют производные ортов \mathbf{t} и \mathbf{b} по длине дуги. Найдем производную нормали по длине дуги

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d(\mathbf{b} \times \mathbf{t})}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\chi\mathbf{n} \times \mathbf{t} + k\mathbf{b} \times \mathbf{n} = \chi\mathbf{b} - k\mathbf{t}. \quad (5.16)$$

Нами получены дифференциальные зависимости для векторов \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \chi\mathbf{b} - k\mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n}, \quad (5.17)$$

которые известны как формулы Френе-Серре. Они выражают производные векторов сопровождающего трехгранника в виде разложения по самим этим векторам. Используя (5.10), (5.11) и формулы Френе-Серре, выразим векторы \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} , кривизну и кручение кривой через производные радиус-вектора кривой по ее длине дуги следующим образом:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{1}{k} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},$$
$$k = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|, \quad \chi = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right) \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}.$$

Соприкасающаяся окружность.

Поясним, почему коэффициент k называют кривизной кривой. Построим окружность радиусом равным некоторой величине ρ . Ее уравнение с натуральной параметризацией в некоторой местной системе координат с осями $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ имеет вид

$$\mathbf{r}(s) = \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_1 + \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_2.$$

Нормаль к окружности и производные радиус-вектора окружности равны

$$\mathbf{n} = -\cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_1 - \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_2,$$
$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_1 + \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_2,$$
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \left(-\cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_1 - \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \mathbf{i}_2 \right) = \frac{\mathbf{n}}{\rho}.$$

Очевидно, что коэффициент пропорциональности к для окружности в формуле (5.13) равен $1/\rho$. Таким образом, если мы построим для

кривой соприкасающуюся с ней окружность (с таким же $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ как у кривой), то радиус этой окружности будет равен ρ (рис. 5.3).

Величина $\rho = 1/k$ называется радиусом кривизны кривой. Для произвольной кривой ее кривизна k и кручение χ являются функциями параметра t .

Поясним, почему коэффициент χ называют кручением кривой.

Построим в некоторой точке кривой сопровождающий трехгранник и посмотрим, как он будет себя вести при движении вдоль кривой.

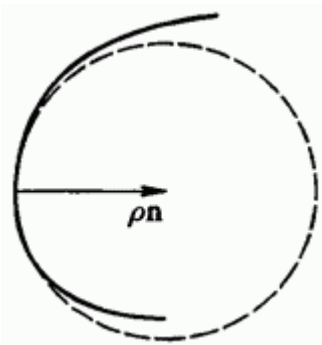


Рис. 5.3. Соприкасающаяся с кривой окружность

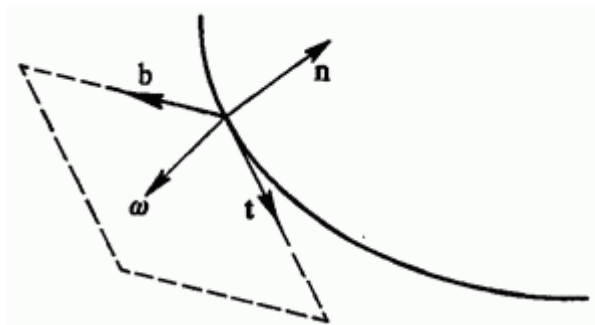


Рис. 5.4. Вектор Дарбу

Из (5.17) получим, что при увеличении параметра на небольшую величину Δt касательный вектор \mathbf{t} повернется в сторону главной нормали \mathbf{n} на угол k , а бинормаль \mathbf{b} повернется в сторону, противоположную главной нормали \mathbf{n} , на угол χ (рис. 5.4).

Если наблюдать этот процесс, «сидя на кончике вектора \mathbf{t} », то мы увидим, что главная нормаль \mathbf{n} и соприкасающаяся плоскость повернулись в сторону бинормали \mathbf{b} на угол χ . Теперь представим, что точка движется по кривой, проходя единицу длины ее дуги за единицу времени. В этом случае угловая скорость вращения сопровождающего трехгранника вокруг касательного вектора будет равна кручению кривой χ . Если кручение $\chi = 0$, то кривая является плоской. Справедливо и обратное утверждение. Если кручение кривой равно нулю, то соприкасающаяся плоскость во всех точках кривой одна и та же, все бинормали параллельны друг другу, а кривая является плоской.

Полный вектор угловой скорости вращения сопровождающего трехгранника по отношению к пути, проходимому по кривой, называется вектором Дарбу. Он равен

$$\boldsymbol{\omega} = k\mathbf{b} + \chi\mathbf{t}. \quad (5.19)$$

Вектор Дарбу придает механический смысл формулам Френе-Серре (5.17), с использованием которого последние имеют вид

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Натуральные уравнения кривой.

Кривизна и кручение полностью характеризуют форму кривой, если не считать ее положение и ориентацию в пространстве. Они также являются определенными функциями длины дуги как параметра

$$k = k(s) > 0, \quad \chi = \chi(s). \quad (5.20)$$

Так как длина дуги, кривизна и кручение не зависят от способа параметризации и от выбора координат в пространстве, то и функции $k(s)$ и $\chi(s)$ также от этого выбора не зависят. Уравнения (5.20) называются натуральными уравнениями кривой. Если две кривые имеют одинаковые натуральные уравнения, то они идентичны и отличаются только положением и ориентацией в пространстве. Функции $s(t)$, $k(t)$, $\chi(t)$ однозначно определяют кривую с точностью до положения и ориентации в пространстве.

Как правило, параметризация кривой не является натуральной. Определим орты \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} и коэффициенты k и χ для произвольной параметризации. Производные по параметру будем обозначать штрихами. Первую, вторую и третью производные радиус-вектора кривой по ее параметру представим следующим образом:

$$\mathbf{r}' \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = s' \mathbf{t}, \quad (1.5.1)$$

$$\mathbf{r}'' \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d(s'\mathbf{t})}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{t} + \frac{dt}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = s'' \mathbf{t} + s'^2 k \mathbf{n}, \quad (1.5.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''' \equiv \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} &= \frac{d(s''\mathbf{t} + s'^2 k \mathbf{n})}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3} \mathbf{t} + 3k \mathbf{n} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \mathbf{n} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{dk}{ds} + (\chi \mathbf{b} - k \mathbf{t}) k \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \\ &= (s''' - k^2 s'^3) \mathbf{t} + \left(3k s'' s' + s'^3 \frac{dk}{dt} \right) \mathbf{n} + k \chi s'^3 \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

(5.21)-(5.23)

Где s' , s'' , s''' — первая, вторая и третья производные длины дуги по параметру кривой. Из (5.21) получим формулу для вычисления производной длины дуги по параметру и формулу для вычисления касательного вектора \mathbf{t} :

$$\begin{aligned} s' &= |\mathbf{r}'| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}}, \\ \mathbf{t} &= \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|} \equiv \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'}{s'}. \end{aligned} \quad (5.24)-(5.25)$$

Умножив (5.21) векторно на (5.22), получим формулу для определения кривизны кривой и направления бинормали

$$k\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{s'^3}. \quad (5.26)$$

Умножив (5.26) векторно на (5.25) и используя равенство для двойного векторного произведения $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{t} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}'' - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}'') \mathbf{r}'$, получим формулу для вычисления направления вектора главной нормали

$$k\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{s'^4} = \frac{\mathbf{r}''}{s'^2} - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{s'^4} \mathbf{r}'. \quad (5.27)$$

Из правой части равенства (5.27) видно, что вектор $k\mathbf{n}$ является составляющей вектора $\mathbf{r}''/(s')^2$ перпендикулярной к касательному вектору \mathbf{t} (составляющая, параллельная \mathbf{t} , вычитается). Кривизна кривой равна длине вектора, стоящего в правой части

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}. \quad (5.28)$$

Соответственно, при $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| \neq 0$ радиус соприкасающейся окружности определится формулой

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}. \quad (5.28.1)$$

Умножив (5.26) скалярно на (5.23), получим формулу для определения кручения кривой

$$\chi = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{k^2 s'^6} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}. \quad (5.29)$$

Если кривизна кривой в данной точке не равна нулю, то, поделив обе части равенств (5.26) и (5.27) на кривизну (5.28), получим бинормаль и нормаль:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2 s'}.$$

Если известна векторная функция линии (5.1), то формулы (5.24)-(5.31) позволяют получить всю геометрическую информацию о кривой линии.

Из формул (5.28) и (5.29) видно, что кривизна всегда неотрицательна (в числителе и знаменателе стоят квадратные корни), а кручение может иметь любой знак. Если кривизна равна нулю, то направление главной нормали, бинормали и кручение не определены. Если кривизна равна нулю в каждой точке кривой, то она является прямой линией. Вектор главной нормали в этом случае может иметь произвольное направление в нормальной плоскости. Если векторы \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' , \mathbf{r}''' коллинеарны, то кручение кривой равно нулю и кривая является плоской.

1.6. Геометрия двумерных кривых

Кроме пространственных линий, для нас практическое значение будут иметь двумерные кривые на плоскости. В частности, двумерным пространством будет служить область параметров поверхностей.

Рассмотрим случай двумерной кривой. Пусть на плоскости определена декартова прямоугольная система координат с началом в точке O и базисными векторами e_1 и e_2 . Компоненты двумерных векторов будем обозначать через x и y .

Большинство формул для двумерных кривых можно получить из соответствующих формул для пространственных кривых, положив в них третью координату равной нулю и опустив ее и все векторы, ортогональные плоскости кривой (в их числе бинормаль). Радиус-вектор двумерной кривой $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ будет описываться выражением

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2. \quad (6.1)$$

Для двумерной кривой $\mathbf{r}(s)$ формулы Френе-Серре имеют вид

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t}, \quad (6.2)$$

где $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ — касательный вектор кривой, s — длина дуги кривой. Кривизна двумерной кривой определяется равенством

$$k = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|. \quad (6.3)$$

Натуральное уравнение двумерной кривой выражает ее кривизну как функцию дуги вдоль кривой и имеет вид

$$k = k(s).$$

Чтобы сохранить справедливость всех приведенных выше формул, следует переопределить операцию векторного произведения для двумерных векторов. Результатом векторного произведения двумерных векторов $\mathbf{r}_1 = [x_1 \ y_1]^T$ и $\mathbf{r}_2 = [x_2 \ y_2]^T$ будем считать скалярную величину, равную

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (6.4)$$

Выразим через координаты x и y производную длины дуги и кривизну двумерной кривой, используя формулы (5.24) и (5.26),

$$s' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$k = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{y''x' - x''y'}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}. \quad (6.5)-(6.6)$$

Эволюта и эвольвента. Для каждой обыкновенной точки кривой можно указать центр кривизны. Геометрическое место центров кривизны всех точек данной кривой называется эволютой этой кривой. Выражение для радиус-вектора эволюты $\mathbf{a}(t)$ получим, добавив к радиус-вектору кривой $\mathbf{r}(t)$ вектор нормали, деленный на кривизну кривой:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k} \mathbf{n}(t) = \mathbf{r} + \frac{1}{k^2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}. \quad (6.7)$$

При произвольной параметризации кривой нормаль выразим с помощью равенства (5.27) и получим

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}''(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')}{k^2 s'^4} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}''(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'). \quad (6.8)$$

Для двумерной кривой $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ запишем векторное равенство (6.8) отдельно для каждой координаты эволюты $\mathbf{a}(t) = [x_a(t) \ y_a(t)]^T$

$$x_a(t) = x + \frac{y''(x'^2 + y'^2) - x'(x'x'' + y'y'')}{(y''x' - x''y')^2} (x'^2 + y'^2) = x + y' \frac{x'^2 + y'^2}{x''y' - y''x'},$$

$$y_a(t) = y + \frac{y''(x'^2 + y'^2) - y'(x'x'' + y'y'')}{(y''x' - x''y')^2} (x'^2 + y'^2) = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'}. \quad (6.9)$$

В точках распрямления радиус-вектор соответствующей точки эволюты стремится к бесконечности. Если точка распрямления является точкой перегиба, то эволюта терпит в соответствующей точке разрыв. Эволюта в каждой своей точке касается нормали к исходной кривой в соответствующей точке. Эволюту можно определить как огибающую семейства нормалей.

Исходная кривая по отношению к своей эволюте является эвольвентой (разверткой). Для кривой $a(s)$ эвольвента описывается радиус-вектором

$$r(s) = a - (s - s_0) \frac{da}{ds} = a - (s - s_0)t, \quad (6.10)$$

где s — длина дуги кривой $a(s)$, $s_0 = \text{const}$. t — касательная к кривой. Для заданной плоской кривой можно построить множество эвольвент, в зависимости от s_0 (или от того, в какой точке кривой принять длину дуги равную нулю). На рис. 6.1 показана кривая $a(s)$ и ее эвольвента.

Эвольвента строится следующим образом. Положим, что длина дуги кривой $a(s)$ отсчитывается от точки C_0 .

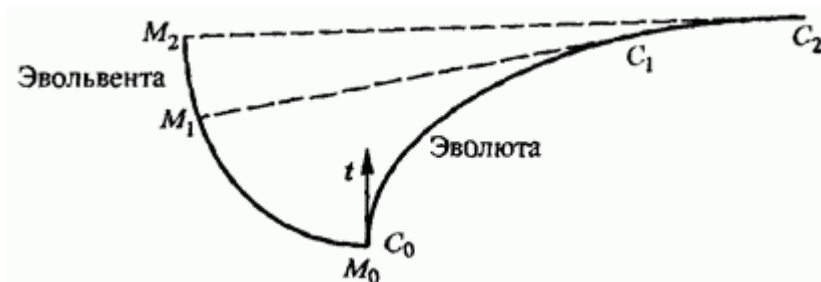


Рис. 6.1. Эволюта и эвольвента

Для получения точки M эвольвенты, соответствующей некоторой точке C_i исходной кривой, построим в точке C_i касательную и отложим на ней с учетом знака отрезок длиной, равной длине дуги $C_i C_0$, взятой с отрицательным знаком, если значение параметра в точке C_i , больше значения параметра в точке C_0 , и взятой с положительным знаком в противном случае. Можно сказать, что эвольвента представляет собой развертку исходной кривой.

Для доказательства равенства (6.10) покажем, что эволюта кривой есть кривая $a(s)$. Заметим, что параметр s является длиной дуги кривой $a(s)$ но не является длиной дуги для эвольвенты $r(s)$, поэтому радиус-вектора эволюты выразится правой частью формулы (6.8). Подставим в

формулу эволюты (6.8) значения векторной функции \mathbf{r} и ее производных, выраженные через векторную функцию \mathbf{a} и ее производные по параметру s :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} - (s - s_0)\mathbf{t}, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{t} - (s - s_0)k\mathbf{n} - \mathbf{t} = -(s - s_0)k\mathbf{n}, \\ \mathbf{r}'' &= (s - s_0)k^2\mathbf{t} - k\mathbf{n}, \\ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' &= (s - s_0)^2k^2, \\ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' &= (s - s_0)k^2, \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= |-(s - s_0)k\mathbf{n} \times ((s - s_0)k^2\mathbf{t} - k\mathbf{n})| = (s - s_0)^2k^3, \end{aligned}$$

где s — длина дуги кривой $a(s)$, k — ее кривизна, \mathbf{n} — главная нормаль и \mathbf{t} — касательная кривой $a(s)$.

В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}''(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') &= \mathbf{a} - (s - s_0)\mathbf{t} + \\ &+ \frac{((s - s_0)k^2\mathbf{t} - k\mathbf{n})(s - s_0)^2k^2 + (s - s_0)k\mathbf{n}(s - s_0)k^2}{(s - s_0)^4k^6}(s - s_0)^2k^2 = \mathbf{a}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

1.7 Геометрия поверхностей

Поверхностью будем называть геометрическое место точек, координаты которых описываются непрерывными и однозначными функциями $r_1(u, v)$, $r_2(u, v)$, $r_3(u, v)$ двух параметров u и v , принадлежащих непрерывной и связной двумерной области Ω . В декартовой прямоугольной системе координат $Oe_1e_2e_3$ поверхность можно описать радиус-вектором

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=1}^3 r_i(u, v)\mathbf{e}_i, \quad u, v \in \Omega. \tag{7.1}$$

Представление поверхности в виде (7.1) называется параметрическим. В общем случае область изменения параметров представляет собой

часть двумерной плоскости. В простейшем случае область изменения параметров поверхности представляет собой прямоугольник, который можно описать четырьмя числами $u_{\min}, u_{\max}, v_{\min}, v_{\max}$. Область изменения параметров для простейшего случая определяется неравенствами

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}.$$

Такую область изменения параметров могут иметь очень многие поверхности, но для построения математической модели детали сложной формы необходимы, поверхности общего вида. Два параметра u и v определяют точку поверхности. Если эти параметры сами являются функциями двух других параметров u_0 и v_0 , $u = u(u_0, v_0)$, $v = v(u_0, v_0)$ то поверхность будет описываться радиус-вектором

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}(u(u_0, v_0), v(u_0, v_0)), \quad u_0, v_0 \in \Omega_0,$$

зависящим от параметров u_0, v_0 . Новые параметры u_0, v_0 имеют свою область определения Ω_0 . Форма поверхности не зависит от способа ее параметризации и мы имеем возможность использовать удобную для нас параметризацию и область изменения параметров. Параметры поверхности являются координатами внутренней двумерной системы координат, в качестве которой для простоты мы будем выбирать декартову прямоугольную систему координат на плоскости.

Частные производные радиус-вектора поверхности $\mathbf{r}(u, v)$, по параметрам u и v представляют собой векторы. Будем обозначать частные производные радиус-вектора поверхности численными нижними индексами, соответствующими номеру параметра, по которому выполнено дифференцирование

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, & \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \\ \mathbf{r}_{11} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, & \mathbf{r}_{22} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}, \\ \mathbf{r}_{12} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} = \mathbf{r}_{21} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Далее будем предполагать, что координатные функции $r_i(u, v)$ имеют непрерывные производные по каждому параметру любого порядка, который нам потребуется. В дальнейшем ограничимся рассмотрением поверхностей, для которых векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 не коллинеарны и не обращаются в нуль. Такую точку поверхности $\mathbf{r}(u, v)$ будем называть обыкновенной. В противном случае точку поверхности будем называть особой. В обыкновенной точке существует единственная касательная к поверхности плоскость. Параметры u и v можно рассматривать как координаты двумерной точки в плоскости параметров, тогда радиус-вектор поверхности можно рассматривать как функцию точки плоскости параметров.

При изменении параметризации поверхности $\mathbf{r}(u, v)$, где $u = u(u_0, v_0)$, $v = v(u_0, v_0)$ производные ее радиус-вектора по новым параметрам выражаются через производные по старым параметрам следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_0} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_0} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_0} = \mathbf{r}_1 \frac{\partial u}{\partial u_0} + \mathbf{r}_2 \frac{\partial v}{\partial u_0}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v_0} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v_0} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v_0} = \mathbf{r}_1 \frac{\partial u}{\partial v_0} + \mathbf{r}_2 \frac{\partial v}{\partial v_0}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_0^2} &= \mathbf{r}_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial u_0} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{12} \frac{\partial u}{\partial u_0} \frac{\partial v}{\partial u_0} + \mathbf{r}_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial u_0} \right)^2 + \mathbf{r}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial u_0^2} + \mathbf{r}_2 \frac{\partial^2 v}{\partial u_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v_0^2} &= \mathbf{r}_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial v_0} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{12} \frac{\partial u}{\partial v_0} \frac{\partial v}{\partial v_0} + \mathbf{r}_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial v_0} \right)^2 + \mathbf{r}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial v_0^2} + \mathbf{r}_2 \frac{\partial^2 v}{\partial v_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_0 \partial v_0} &= \mathbf{r}_{11} \frac{\partial u}{\partial u_0} \frac{\partial u}{\partial v_0} + \mathbf{r}_{12} \frac{\partial u}{\partial u_0} \frac{\partial v}{\partial v_0} + \\ &\quad + \mathbf{r}_{21} \frac{\partial u}{\partial v_0} \frac{\partial u}{\partial u_0} + \mathbf{r}_{22} \frac{\partial v}{\partial u_0} \frac{\partial v}{\partial v_0} + \mathbf{r}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial u_0 \partial v_0} + \mathbf{r}_2 \frac{\partial^2 v}{\partial u_0 \partial v_0}. \end{aligned}$$

Если зафиксировать один из параметров, а другой изменять в некоторых пределах, то мы получим кривую линию, которая лежит на

поверхности. Такие кривые называются координатными линиями поверхности. Будем называть u -линиями поверхностные кривые, вдоль которых меняется только параметр u , а v -линиями — поверхностные кривые, вдоль которых меняется только параметр v . Производные \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 радиус-вектора поверхности представляют собой векторы, касательные к соответствующим координатным линиям.

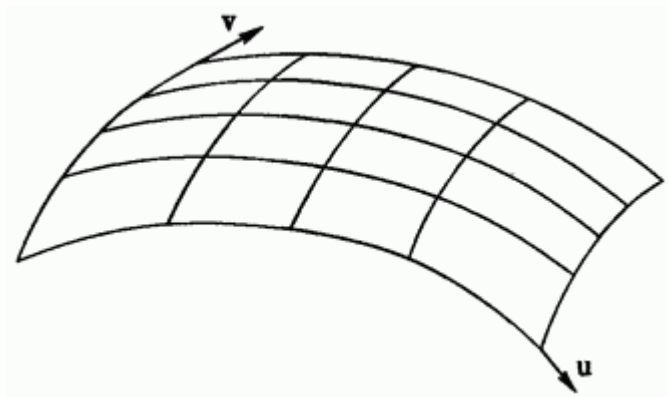


Рис. 7.1. Координатная сетка поверхности

Для поверхности можно построить семейство u -кривых при различных значениях v , и семейство v -кривых при различных значениях u . Два таких семейства кривых образуют координатную сетку на поверхности (рис. 7.1). На координатной сетке поверхности можно построить криволинейную систему координат в пространстве.

Произвольную линию на поверхности можно построить, если ввести зависимость параметров поверхности u и v от некоторого общего для них параметра t

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t). \quad (7.3)$$

Радиус-вектор линии на поверхности будет описываться зависимостью

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)). \quad (7.4)$$

Через каждую точку поверхности можно провести множество различных кривых (7.4). Найдем дифференциал радиус-вектора (7.4) вдоль некоторой кривой на поверхности:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(u, v) du + \mathbf{r}_2(u, v) dv, \quad (7.5)$$

где $du = u'dt$, $dv = v'dt$. В дальнейшем будем считать, что u' и v' не обращаются в нуль одновременно, так как в противном случае точка перестает быть обыкновенной. Вектор производной (7.4)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{dv}{dt} \equiv \mathbf{r}_1 u' + \mathbf{r}_2 v' \quad (7.6)$$

лежит в плоскости, определяемой векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Если зафиксировать точку на поверхности и провести через нее всевозможные кривые, изменяя зависимости (7.3), то производные всех этих кривых в рассматриваемой точке будут лежать в плоскости, определяемой векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Эта плоскость называется касательной плоскостью поверхности в данной точке (рис. 7.2).

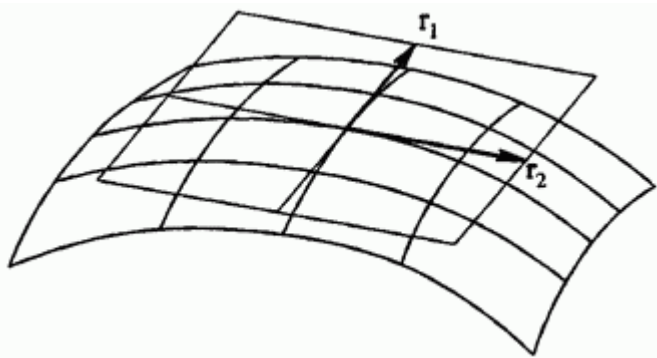


Рис. 7.2. Касательная плоскость и производные радиус-вектора поверхности

Дифференциал (7.5) имеет то же направление, что и производная (7.6). Из (7.5) видно, что направление дифференциала и производной (7.6) зависят от отношения $du:dt = u':v'$.

Пространственной кривой (7.4) соответствует двухмерная кривая

$$l_{uv}(t) = [u(t) \ v(t)]^T$$

на параметрической плоскости поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности.

Метрические свойства поверхности выражаются через метрические свойства кривых на них. Мы будем исследовать геометрию поверхности в малой окрестности некоторой ее точки R , определяемой параметрами u и v . Сместимся из точки R по какой-нибудь кривой на поверхности (7.3) в бесконечно близкую ей точку R_1 , определяемую параметрами $u+du$, $v+dv$ и вычислим длину дуги RR_1 . С точностью до слагаемых, линейно зависящих от бесконечно малых величин, длина дуги RR_1 равна длине дифференциала (7.5)

$$ds = |\mathbf{r}_1 du + \mathbf{r}_2 dv|.$$

Квадрат длины бесконечно малой дуги равен

$$ds^2 = (\mathbf{r}_1 du + \mathbf{r}_2 dv) \cdot (\mathbf{r}_1 du + \mathbf{r}_2 dv) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 du^2 + 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 du dv + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 dv^2. \quad (7.7)$$

Скалярные произведения векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , как и сами векторы, зависят только от выбора точки R и являются некоторой характеристикой поверхности в этой точке. Введем обозначения

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1, \\ g_{12} &= g_{21} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1, \\ g_{22} &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Тогда квадрат длины бесконечно малой дуги кривой на поверхности будет определяться формулой

$$ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2. \quad (7.9)$$

Выражение в правой части (7.9) является квадратичной формой дифференциалов du, dv . Оно называется первой основной квадратичной формой поверхности. Первая основная квадратичная форма является метрической характеристикой поверхности и служит для бесконечно малых измерений вдоль поверхности. Выражение (7.9) можно записать в матричном виде

$$ds^2 = [du \ dv] \cdot \mathbf{G} \cdot [du \ dv]^T, \quad (7.10)$$

где $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ — матрица первой квадратичной формы.

С помощью первой квадратичной формы можно вычислить длину дуги кривой на поверхности. Пусть задан участок кривой на поверхности $u=u(t), v=v(t), t_0 \leq t \leq t_1$. Интегрируя дифференциал длины дуги ds в пределах от t_0 до t_1 , получим длину соответствующего участка кривой

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{11}u'u' + 2g_{12}u'v' + g_{22}v'v'} dt. \quad (7.11)$$

Первая квадратичная форма поверхности позволяет вычислять углы между кривыми на поверхности. Пусть имеются две кривые на поверхности, проходящие через общую точку М. Обозначим через du, dv дифференциалы параметров поверхности, соответствующие бесконечно малому смещению вдоль первой кривой на поверхности, а через $\delta u, \delta v$ — дифференциалы параметров поверхности, соответствующие бесконечно малому смещению вдоль второй кривой. Эти бесконечно малые смещения определяются векторами

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 du + \mathbf{r}_2 dv, \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \delta u + \mathbf{r}_2 \delta v.$$

Данные дифференциалы направлены по касательным к кривым и к поверхности и поэтому угол между кривыми равен углу между векторами дифференциалов. Найдем косинус угла между кривыми на

поверхности как скалярное произведение касательных к ним векторов, деленное на произведение длин этих векторов:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{d\mathbf{r} \delta\mathbf{r}}) &= \frac{d\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}||\delta\mathbf{r}|} = \\ &= \frac{g_{11} du du + g_{12} du dv + g_{21} dv du + g_{22} dv dv}{\sqrt{(g_{11} du du + 2g_{12} du dv + g_{22} dv dv)(g_{11} du du + 2g_{12} du dv + g_{22} dv dv)}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Выражение (7.12) позволяет найти угол φ между координатной

u -линией и v -линией в некоторой точке поверхности, если мы положим в ней $du \neq 0, dv = 0, \delta u = 0, \delta v \neq 0$:

$$\cos \varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \quad (7.13)$$

Знак косинуса угла мы взяли совпадающим со знаком g_{12} следовательно, исходя из обозначения (7.8), угол φ мы измеряем между положительными направлениями координатных u -линии и v -линии в рассматриваемой точке. Если $g_{12} = 0$, то координатные линии в данной точке ортогональны.

Первая квадратичная форма используется и для вычисления площади поверхности или ее части. Пусть нам требуется вычислить площадь части поверхности, которая на параметрической плоскости имеет область Ω . Разобьем область Ω конечным числом

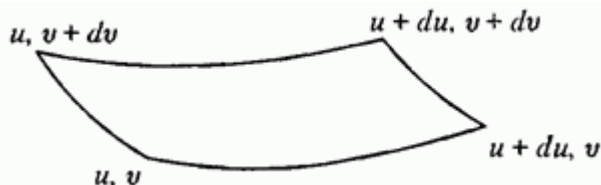


Рис. 7.3. Бесконечно малый элемент поверхности

координатных u -линий и v -линий. Рассматриваемая часть поверхности разобьется на конечное число так называемых криволинейных

четырёхугольников. Один из таких четырёхугольников показан на рис. 7.3.

Пусть стороны этого четырёхугольника равны du , dv . В первом приближении площадь четырёхугольника равна

$$dS = |\mathbf{r}_1 du \times \mathbf{r}_2 dv| = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| du dv.$$

Представим квадрат длины вектора $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 &= |\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2|^2 \sin^2 \varphi = \\ &= |\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = g_{11} g_{22} \left(1 - \frac{g_{12}^2}{g_{11} g_{22}}\right) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Таким образом, площадь четырёхугольника в первом приближении определится формулой

$$dS = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} du dv. \quad (7.15)$$

Будем теперь измельчать разбиение, увеличивая число координатных линий, таким образом, чтобы наибольшие из значений du , dv стремились к нулю. За искомую площадь примем предел, к которому стремится сумма площадей криволинейных четырёхугольников при бесконечном измельчении координатной сетки. Из теории кратных интегралов известно, что если функция $g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ непрерывна по u и v , то предел указанной суммы существует, не зависит от способа разбиения и равен двойному интегралу от указанной функции по области Ω изменения переменных u и v

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} du dv. \quad (7.16)$$

Заметим, что так как первая квадратичная форма в (7.9) определяет квадрат длины дуги, который в обыкновенной точке больше нуля при всех du , dv одновременно не равных нулю, то определитель матрицы G положителен:

$$g = |\mathbf{G}| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0. \quad (7.17)$$

Первая квадратичная форма поверхности используется для вычислений длин кривых на поверхности, углов между ними, площади поверхности. Те геометрические свойства поверхности, которые можно установить из знания первой квадратичной формы, называются внутренней геометрией поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхности.

Найдем нормаль к поверхности. Так как векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 лежат в касательной к поверхности плоскости, то их векторное произведение перпендикулярно к касательной плоскости. Поделив вектор $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ на его длину, определяемую выражением (7.14), получим формулу для единичной нормали к поверхности в рассматриваемой точке

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}. \quad (7.18)$$

Продолжим исследование поверхности вблизи некоторой ее точки R путем исследования кривых на ней. Рассмотрим некоторую кривую на

поверхности $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Вычислим приращение радиус-вектора кривой, которое он получит при бесконечно малом приращении ее параметра dt . Для этого используем разложение радиус-вектора в ряд Тейлора (5.5). Приращение радиус-вектора кривой $\Delta \mathbf{r}$ с точностью до второго порядка малости относительно dt равно

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} dt^2. \quad (7.19)$$

Найдем проекцию приращения радиус-вектора кривой $\Delta \mathbf{r}$ на нормаль к поверхности в данной точке. Для этого используем производные радиус-вектора кривой

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}_1 u' + \mathbf{r}_2 v', \\ \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}_{11} u'^2 + 2\mathbf{r}_{12} u'v' + \mathbf{r}_{22} v'^2 + \mathbf{r}_1 u'' + \mathbf{r}_2 v''. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Вектор \mathbf{r}' ортогонален вектору нормали, поэтому основную роль в проекции на нормаль приращения радиус-вектора $\Delta \mathbf{r}$ будет играть вторая производная. Проекция вектора \mathbf{r}'' на нормаль к поверхности \mathbf{m} характеризует искривление поверхности (именно поверхности, а не кривой). Если мы имеем кривую на плоскости, то как бы она искривлена ни была, проекция вектора \mathbf{r}'' на нормаль к плоскости будет равна нулю. Умножив скалярно (7.19) на нормаль к поверхности, получим

$$\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{m} dt^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{m} u'^2 + 2\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{m} u'v' + \mathbf{r}_{22} \cdot \mathbf{m} v'^2) dt^2.$$

Скалярные произведения векторов $\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{m}$, $\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{m}$, $\mathbf{r}_{22} \cdot \mathbf{m}$ зависят только от выбора точки на поверхности и являются некоторой ее характеристикой в этой точке. Введем обозначения

$$\begin{aligned} b_{11} &= \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{m}, \\ b_{12} &= b_{21} = \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{m}, \\ b_{22} &= \mathbf{r}_{22} \cdot \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Тогда для главной части отклонения кривой на поверхности от касательной плоскости получим значение

$$\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2} (b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2). \quad (7.22)$$

В (7.22) использовались обозначения (7.21). Выражение в скобках правой части (7.22) является квадратичной формой от дифференциалов du , dv . Оно называется второй основной квадратичной формой поверхности. Также как и первая квадратичная форма, вторая квадратичная форма является характеристикой поверхности и служит для определения искривленности поверхности. Выражение (7.22) можно записать в матричном виде

$$2\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{m} = [du \ dv] \cdot \mathbf{B} \cdot [du \ dv]^T, \quad (7.23)$$

где $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ — матрица второй квадратичной формы.

Компоненты второй квадратичной формы можно выразить несколько иначе. Используем тот факт, что вектор нормали \mathbf{m} всегда ортогонален векторам \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Дифференцируя равенства $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_1 = 0$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2 = 0$ по u и v , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{11} &= 0, \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{12} &= 0, \\ \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{21} &= 0, \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{22} &= 0, \end{aligned}$$

где \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 — частные производные вектора нормали по параметрам u и v . Подставим в эти равенства обозначения (7.21):

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_1, \\ b_{12} &= -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_1, \\ b_{21} &= -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_2, \\ b_{22} &= -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Далее вычислим дифференциалы

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 du + \mathbf{r}_2 dv, \\ d\mathbf{m} &= \mathbf{m}_1 du + \mathbf{m}_2 dv \end{aligned}$$

и перемножим их скалярно. В результате придем к равенству

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m} &= \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_1 du^2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_2) du dv + \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_2 dv^2 = \\ &= -(b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Дифференциалы $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{m}$ берутся в одной и той же точке поверхности при одних и тех же du , dv .

Деривационные формулы Вейнгартена.

Для построения эквидистантных поверхностей нам необходимо будет уметь определять производные вектора нормали. Вектор \mathbf{m} характерен тем, что он всегда имеет единичную длину, и поэтому его производные по параметрам u и v не содержат составляющих, параллельных \mathbf{m} , т. е. его производные лежат в касательной плоскости. Действительно,

$$\frac{\partial(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})}{\partial u} = 2\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \frac{\partial(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})}{\partial v} = 2\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m} = 0.$$

Используя это, представим производные нормали в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= -b_1^1 \mathbf{r}_1 - b_1^2 \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{m}_2 &= -b_2^1 \mathbf{r}_1 - b_2^2 \mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (7.26)$$

где $b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2$ — пока неизвестные коэффициенты разложения.

Знак минус выбран из соображений удобства в дальнейшем. Для определения этих коэффициентов умножим каждое из равенств (7.26) скалярно на \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Используя (7.8), получим две системы уравнений

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_1^1 g_{11} + b_1^2 g_{12}, \\ b_{12} &= b_1^1 g_{21} + b_1^2 g_{22}, \\ b_{21} &= b_2^1 g_{11} + b_2^2 g_{12}, \\ b_{22} &= b_2^1 g_{21} + b_2^2 g_{22}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Решая эти уравнения относительно искомых коэффициентов, получим

$$\begin{aligned} b_1^1 &= \frac{b_{11}g_{22} - b_{12}g_{12}}{g}, & b_1^2 &= \frac{b_{12}g_{11} - b_{11}g_{21}}{g}, \\ b_2^1 &= \frac{b_{21}g_{22} - b_{22}g_{12}}{g}, & b_2^2 &= \frac{b_{22}g_{11} - b_{21}g_{21}}{g}, \end{aligned} \quad (7.28)$$

где $g = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = |G|$ — определитель матрицы

G . Формулы (7.26) с учетом (7.28) называются деривационными формулами Вейнгартена. Они выражают частные производные нормали к поверхности через коэффициенты первой и второй квадратичных форм в рассматриваемой точке. Запишем эти формулы в матричном виде

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}' \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad (7.29)$$

где \mathbf{B}' — матрица коэффициентов (7.28).

Деривационные формулы Вейнгартена можно записать более кратко, если использовать матрицу, обратную матрице G . Для компонент матрицы, обратной матрице G , введем следующие обозначения:

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

где

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{21} = -\frac{g_{21}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}.$$

Матрица \mathbf{B}' с учетом (1.7.30) равна $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^{-1}$, а деривационные формулы Вейнгартена примут вид

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

1.8. Кривизна линий на поверхности

Теорема Менье.

Продолжим исследование поведения кривых на поверхности с помощью второй квадратичной формы. Установим зависимость кривизны кривой на поверхности от ориентации ее касательного вектора на соприкасающейся плоскости. Рассмотрим равенство

$$\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{m} = \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{m}u'^2 + 2\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{m}u'v' + \mathbf{r}_{22} \cdot \mathbf{m}v'^2 = b_{11}u'^2 + 2b_{12}u'v' + b_{22}v'^2. \quad (8.1)$$

Вторая производная радиус-вектора кривой на поверхности согласно (5.22) равна

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d(s'\mathbf{t})}{ds} = s''\mathbf{t} + s'^2k\mathbf{n}, \quad (8.2)$$

где \mathbf{n} — главная нормаль кривой на поверхности. Касательный вектор \mathbf{t} кривой лежит в касательной плоскости и ортогонален нормали поверхности \mathbf{m} , поэтому равенство (8.1) перепишем в следующем виде

$$ds^2k\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2. \quad (8.3)$$

Квадрат дифференциала длины дуги кривой определяется равенством (7.9). Обозначим угол между нормалью к поверхности и нормалью к кривой на этой поверхности через ω . Разделим последнее равенство на квадрат дифференциала длины дуги и получим выражение, связывающее кривизну кривой, угол между нормальями ω и коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности:

$$k \cos \omega = \frac{b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2}{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2}. \quad (8.4)$$

Для уяснения геометрического смысла последнего соотношения рассмотрим рис. 8.1, где показаны некоторая кривая на поверхности и соответствующее ей нормальное сечение поверхности, проходящее

через точку M кривой. Нормальное сечение поверхности есть кривая пересечения поверхности и плоскости, проходящей через нормаль к поверхности и касающейся кривой в точке M . Так как нормальное сечение лежит как на поверхности, так и на секущей плоскости, то нормаль к нему также лежит в этой плоскости и, следовательно, для него $|\cos\omega|=1$.

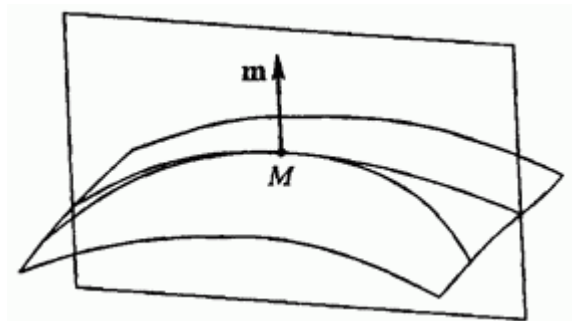


Рис. 8.1. Нормальное сечение поверхности

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм зависят только от положения точки M . А вот дифференциалы du, dv зависят от направления кривой на поверхности, поэтому величина $k\cos\omega$ зависит как от положения точки, так и от направления кривой на поверхности, определяемого отношением $du:dv$. Любая другая кривая на поверхности, проходящая через ту же точку M и имеющая общую касательную с рассматриваемым нормальным сечением, будет иметь одно и то же значение $k\cos\omega$, несмотря на то, что у нее другая кривизна. Кривизна такой кривой будет не меньше кривизны нормального сечения, так как нормальное сечение имеет максимальное значение $|\cos\omega|$. Обозначим кривизну нормального сечения через μ . Таким образом, кривизна нормального сечения определяется равенством

$$\mu = \frac{b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2}{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2}.$$

Угол ω есть угол между нормалью к поверхности и нормалью к кривой, он же равен углу между нормалью к поверхности плоскостью и

соприкасающейся плоскостью кривой. Таким образом, нормальное сечение имеет минимальную кривизну из всех кривых, проходящих через заданную точку в заданном направлении, и его кривизна является некоторой характеристикой поверхности. Кривизна нормального сечения называется нормальной кривизной поверхности в заданной точке и в заданном направлении. Если известна кривизна нормального сечения, то можно определить кривизну линии на поверхности, касательной к этому нормальному сечению, при условии, что известен угол между нормалью поверхности и главной нормалью кривой.

Этот факт констатирует

Теорема Менье. Радиус кривизны $\rho=1/k$ в заданной точке кривой на поверхности равен произведению радиуса кривизны $\rho_n=1/\mu$ соответствующего нормального сечения в этой точке на косинус угла между нормалью к поверхности и главной нормалью кривой:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\mu} \cos \omega = \frac{1}{\mu} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}. \quad (8.6)$$

В заданной точке поверхности можно построить бесчисленное множество нормальных сечений, которые отличаются направлением, определяемым отношением $du:dv$. Направление нормального сечения, для которого кривизна нормального сечения равна нулю, называется асимптотическим направлением в рассматриваемой точке. В каждой точке поверхности существует не более двух асимптотических направлений, если не считать те случаи, когда в точке все коэффициенты второй квадратичной формы равны нулю.

Мы рассмотрели проекцию вектора кривизны $k\mathbf{n}$ произвольной кривой на поверхности на нормаль к поверхности \mathbf{m} . Теперь рассмотрим оставшуюся часть вектора кривизны — его проекцию на касательную плоскость, равную

$$\mathbf{h} = k\mathbf{n} - \mathbf{m}(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}).$$

Длина этого вектора равна $k \sin \omega$ и называется геодезической кривизной линии на поверхности. Вектор \mathbf{h} совпадает с вектором кривизны кривой, являющейся ортогональной проекцией на

касательную плоскость рассматриваемой кривой на поверхности. Геодезическая кривизна нормального сечения равна нулю. Нормальная кривизна является характеристикой поверхности, а геодезическая кривизна является характеристикой линии на ней.

К поверхностям применяют такой термин, как изгибание. Изгибание — это изменение формы поверхности, не вызывающее ее деформации. При изгибаниях поверхности ее первая квадратичная форма не меняется, т.е. изгибания не меняют внутреннюю геометрию поверхности. Пусть мы нарисовали некоторую линию на поверхности. При изгибаниях поверхности в общем случае изменяется кривизна этой линии и нормальная кривизна поверхности вдоль линии. Геодезическая кривизна линий на поверхности при изгибаниях остается неизменной. Геодезической линией на поверхности называется кривая на поверхности, геодезическая кривизна которой в каждой точке равна нулю. Длина дуги геодезической линии, проходящей через две заданные точки, меньше длины дуги любой другой кривой на поверхности, соединяющей эти точки.

Рассмотрим случаи, когда кривизна нормального сечения не равна нулю. Если нормальное сечение касательно к координатной u -линии, то $dv=0$ и

$$\mu_u = \frac{b_{11}}{g_{11}},$$

где через μ_u обозначена нормальная кривизна поверхности в u -направлении. Аналогично нормальная кривизна поверхности μ_v в

v -направлении равна

$$\mu_v = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

Главные кривизны поверхности.

В заданной точке поверхности кривизна нормального сечения зависит от выбранного направления на ней. Выражение (8.5) перепишем в другом виде (используя равенство (7.25))

$$\mu(d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) = -(d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m}), \quad (8.7)$$

Обратим внимание на то, что кривизна нормального сечения зависит от направлений векторов $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ относительно друг друга. Зададимся целью найти такое направление движения по поверхности, при котором векторы $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ были бы коллинеарными.

Другими словами, попробуем найти направление на поверхности, определяемое отношением $du:dv$, для которого выполняется равенство

$$d\mathbf{m} = -\lambda d\mathbf{r}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 du + \mathbf{r}_2 dv &= -\frac{1}{\lambda}(\mathbf{m}_1 du + \mathbf{m}_2 dv) = \frac{1}{\lambda}(b_1^1 \mathbf{r}_1 + b_1^2 \mathbf{r}_2) du + \frac{1}{\lambda}(b_2^1 \mathbf{r}_1 + b_2^2 \mathbf{r}_2) dv = \\ &= \frac{1}{\lambda}(b_1^1 du + b_2^1 dv)\mathbf{r}_1 + \frac{1}{\lambda}(b_1^2 du + b_2^2 dv)\mathbf{r}_2, \quad (1)(8.8) \end{aligned}$$

где λ — неизвестный пока коэффициент. Мы можем считать \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 базисными векторами, по которым разложены векторы $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$. Для их коллинеарности нужно, чтобы коэффициенты при \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в правой и левой частях (8.8) были равны. Это равенство выразится следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

Для перехода к последнему равенству мы использовали соотношение $B' = B \cdot G^{-1}$. Итак, для определения искомого направления мы пришли к системе линейных алгебраических уравнений для du, dv

$$(B - \lambda G) \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = 0. \quad (8.9)$$

Данная система является однородной и имеет ненулевое решение, если определитель ее матрицы равен нулю. Раскрыв определитель, приходим к квадратному уравнению относительно λ , откуда в общем случае найдем два корня: λ_1, λ_2 . Подставив каждый из корней в любое из уравнений (1.8.9), получим два направления на поверхности, определяемые отношениями $du_1:dv_1, du_2:dv_2$.

Направления движения на поверхности, для которых векторы $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ коллинеарны, называются главными направлениями поверхности. Сравним соотношения (1.8.7) и (1.8.8) и увидим, что λ_1, λ_2 равны кривизне нормальных сечений в главных направлениях, которые обозначим через μ_1, μ_2 . Нормальные сечения в данной точке поверхности, касательные к которым идут по главным направлениям, называются главными сечениями, а их кривизны называются главными кривизнами в данной точке поверхности. Запишем квадратное уравнение, из которого определяются главные кривизны

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\lambda^2 - (b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - 2b_{12}g_{12})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0. \quad (8.10)$$

Из (8.10) легко получить сумму и произведение корней уравнения, т.е. сумму и произведение главных кривизн:

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - 2b_{12}g_{12}}{g}, \\ \mu_1\mu_2 &= \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{g}.\end{aligned}\tag{8.12}$$

Полусумма главных кривизн называется средней кривизной поверхности в данной точке, а произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной поверхности в данной точке.

Обозначим через $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ касательные векторы главных сечений. Покажем, что главные направления поверхности ортогональны друг другу. Выразим главные направления через производные радиус-вектора

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_1 &= \mathbf{r}_1 du_1 + \mathbf{r}_2 dv_1, \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{r}_1 du_2 + \mathbf{r}_2 dv_2.\end{aligned}$$

Их скалярное произведение равно

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = [du_1 \ dv_1] \cdot \mathbf{G} \cdot [du_2 \ dv_2]^T.\tag{8.13}$$

Покажем, что оно в общем случае равно нулю. Для этого систему двух уравнений (8.9) запишем для первого главного направления, первое из этих уравнений умножим на du_2 , второе уравнение умножим на dv_2 и сложим с первым, в результате получим равенство

$$[du_2 \ dv_2] \cdot (\mathbf{B} - \mu_1\mathbf{G}) \cdot [du_1 \ dv_1]^T = 0.$$

Аналогично получим второе равенство, поменяв местами главные направления,

$$[du_1 \ dv_1] \cdot (\mathbf{B} - \mu_2\mathbf{G}) \cdot [du_2 \ dv_2]^T = 0.$$

Вычтем последние два равенства одно из другого и получим равенство:

$$[du_1 \ dv_1] \cdot ((\mu_2 - \mu_1)\mathbf{G}) \cdot [du_2 \ dv_2]^T = 0, \quad (8.14)$$

из которого следует, что если главные кривизны различны, то выражение (8.13) равно нулю и главные направления ортогональны. Если главные кривизны поверхности равны, то за главные могут быть выбраны любые два ортогональных направления (такую ситуацию мы имеем на сфере и плоскости). Точка, в которой $\mu_2 = \mu_1$, называется точкой закругления.

Так как главные направления в общем случае ортогональны, то производные радиус-вектора поверхности и ее нормали в любом направлении можно разложить по единичным векторам $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ главных направлений:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \mathbf{t}_1 \cos \varphi + \mathbf{t}_2 \sin \varphi, \\ \frac{d\mathbf{m}}{ds} &= -\mu_1 \mathbf{t}_1 \cos \varphi - \mu_2 \mathbf{t}_2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

где угол φ отсчитывается в касательной плоскости от первого главного направления ко второму. Кривизна нормального сечения в произвольно выбранном направлении с учетом последних равенств и формул (7.25) и (8.4) определится равенством

$$\mu = -\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} = \mu_1 \cos^2 \varphi + \mu_2 \sin^2 \varphi. \quad (8.15)$$

Формула (8.15) называется формулой Эйлера. Она выражает кривизну произвольного нормального сечения в точке через главные кривизны и угол между нормальным сечением и первым главным направлением. Из этого равенства мы видим, что главные кривизны поверхности μ_1, μ_2 являются максимальной и минимальной кривизнами соответственно.

За определение главных направлений поверхности можно принять следующее: направления, для которых кривизна нормального сечения

принимает максимальное и минимальное значение, называются главными направлениями поверхности.

Гауссова кривизна поверхности (8.12) может быть использована для определения поведения поверхности в некоторой ее точке M . Так как знаменатель в (8.12) больше нуля, то знак гауссовой кривизны зависит от знака числителя, т. е. от знака определителя матрицы \mathbf{B} . Если $|\mathbf{B}| > 0$, то точка M называется эллиптической. Поведение поверхности в эллиптической точке показано на рис. 8.2.

При движении от точки M в любом направлении поверхность изгибается или в сторону нормали или в противоположную сторону в зависимости от знаков главных кривизн.

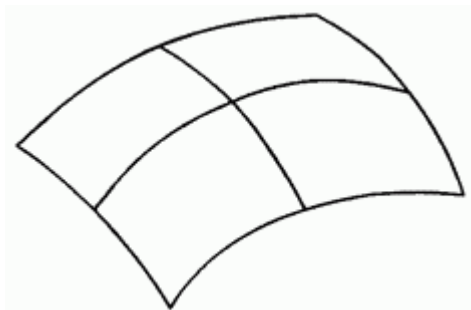


Рис. 8.2. Эллиптическая точка поверхности

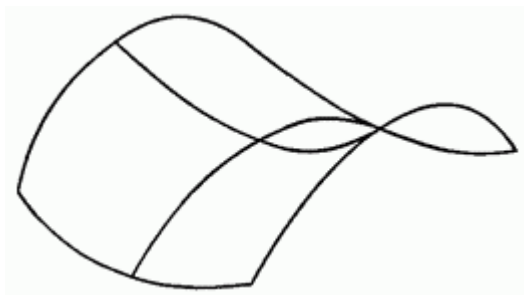


Рис. 8.3. Гиперболическая точка поверхности

Если $|\mathbf{B}| < 0$, то точка М называется гиперболической. Поведение поверхности в гиперболической точке показано на рис. 8.3. Так как в такой точке главные кривизны имеют разные знаки, то согласно (8.15) существуют такие нормальные сечения, для которых выполняется равенство

$$\mu_1 \cos^2 \varphi + \mu_2 \sin^2 \varphi = 0. \quad (8.16)$$

Касательные к нормальным сечениям под углами

$$\varphi = \pm \arctg \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{\mu_2}} \right) \quad (8.17)$$

расположены в касательной плоскости симметрично относительно главных направлений и определяют асимптотические направления в точке М. Если в точке $|\mathbf{B}| = 0$, то такая точка называется параболической. Поведение поверхности в параболической точке показано на рис. 8.4.

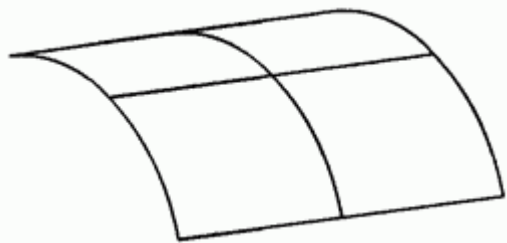


Рис. 8.3. Параболическая точка поверхности

В случае $\mu_1 = \mu_2 = 0$ каждое из направлений является асимптотическим. В противном случае главным направлением является асимптотическое направление, для которого кривизна равна нулю. Соответствующее нормальное сечение в точке М имеет точку распрямления.

Кривая на поверхности называется линией кривизны, если касательная в каждой точке к ней параллельна одному из главных направлений в этой точке поверхности. Линиями кривизны часто являются

координатные линии. Пусть координатные u -линии и v -линии являются линиями кривизны. В этом случае в каждой точке поверхности выполняются равенства

$$g_{12} = g_{21} = b_{12} = b_{21} = 0 \quad (8.18)$$

в силу ортогональности главных направлений.

Справедливо и обратное утверждение: если в каждой точке поверхности выполняются равенства (8.18), то координатные линии являются линиями кривизны. Действительно, в этом случае согласно (7.28) коэффициенты b_1^2 , b_2^1 в разложении (7.26) равны нулю и, следовательно, вдоль координатных линий производные нормалей коллинеарны производным радиус-вектора.

Третья квадратичная форма поверхности. Нормаль к поверхности, как и ее радиус-вектор, есть функция параметров u, v . Модуль дифференциала нормали к поверхности равен углу между нормальями в двух бесконечно близких точках, связанных параметрическим смещением du, dv . Квадрат этого угла определяется равенством

$$d\vartheta^2 = d\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_1 du^2 + 2\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1 du dv + \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2 dv^2. \quad (8.19)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_{11} &= \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_1, \\ f_{12} &= f_{21} = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1, \\ f_{22} &= \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Равенство (8.19) примет вид

$$d\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m} = f_{11} du^2 + 2f_{12} du dv + f_{22} dv^2. \quad (8.21)$$

В правой части (8.21) мы получили квадратичную форму от du, dv . Эта квадратичная форма называется третьей основной квадратичной

формой поверхности. Так же как первая и вторая квадратичные формы она является характеристикой поверхности в заданной точке. Выражение (8.21) можно записать в матричном виде

$$d\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m} = [du \ dv] \cdot \mathbf{F} \cdot [du \ dv]^T,$$

где $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$ — матрица третьей квадратичной формы.

Производные вектора нормали по параметрам поверхности ортогональны вектору нормали. Дифференцируя равенства $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_1 = 0$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_2 = 0$ по параметрам, получим еще одно выражение для коэффициентов третьей квадратичной формы поверхности

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_{11} &= -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_1 = -f_{11}, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_{12} &= -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = -f_{12}, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_{21} &= -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1 = -f_{21}, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_{22} &= -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2 = -f_{22}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Таким образом, коэффициенты третьей квадратичной формы отражают проекции на нормаль вторых производных вектора нормали.

Полученные нами три квадратичные формы связаны друг с другом уравнением. Получим его. Для этого выразим производные радиус-вектора и нормали по длине дуги в произвольном направлении, определяемом в касательной плоскости углом φ относительно первого главного направления, через касательные векторы главных сечений $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \mathbf{t}_1 \cos \varphi + \mathbf{t}_2 \sin \varphi, \\ \frac{d\mathbf{m}}{ds} &= -\mu_1 \mathbf{t}_1 \cos \varphi - \mu_2 \mathbf{t}_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Векторы

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} + \mu_1 \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\mu_1 - \mu_2)\mathbf{t}_2 \sin \varphi,$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} + \mu_2 \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\mu_2 - \mu_1)\mathbf{t}_1 \cos \varphi$$

коллинеарны главным направлениям, и, следовательно, ортогональны. Перемножив скалярно эти векторы, получим уравнение, связывающее квадратичные формы поверхности

$$d\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m} + (\mu_1 + \mu_2) d\mathbf{m} \cdot d\mathbf{r} + \mu_1 \mu_2 d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

или

$$[du \ dv] \cdot (\mathbf{F} + (\mu_1 + \mu_2)\mathbf{B} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{G}) \cdot [du \ dv]^T = 0. \quad (8.23)$$

Так как du, dv в общем случае не равны нулю, то для выполнения соотношения (8.23) должно выполняться матричное равенство

$$\mathbf{F} + (\mu_1 + \mu_2)\mathbf{B} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{G} = 0. \quad (8.24)$$

Это и есть уравнение, связывающее коэффициенты трех квадратичных форм поверхности. Из (8.24) следует, что коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности соотношением

$$\mathbf{F} = -(\mu_1 + \mu_2)\mathbf{B} - \mu_1 \mu_2 \mathbf{G}. \quad (8.25)$$

1.9. Тензоры поверхности

Далее мы рассмотрим уже известные нам квадратичные формы поверхности несколько с другой точки зрения, а также получим новые связывающие их уравнения. Квадратичные формы являются характеристикой поверхности в некоторой ее точке. Если изменить

параметризацию поверхности не изменяя поверхность, то изменятся коэффициенты квадратичных форм, но останутся неизменными формулы определения площади, главных направлений, главных кривизн, других характеристик поверхности и уравнения, связывающие коэффициенты квадратичных форм. При изменении параметризации квадратичные формы ведут себя аналогично тому, как ведут себя векторы при изменении пространственной системы координат, т. е. меняются описывающие их числа, но не меняются связывающие их соотношения. По аналогии с векторами можно считать, что коэффициенты квадратичных форм являются характеристиками некоторых объектов, связанных с поверхностью. Объекты, математические свойства которых могут быть описаны упорядоченной совокупностью чисел, преобразующихся по определенному закону при переходе от одной координатной системы к другой, называются тензорами. Операции над тензорами не зависят от системы координат, поэтому тензоры называют инвариантными геометрическими объектами. Они описываются своими компонентами, которых может быть довольно много, поэтому прежде чем уточнить определение тензора, мы договоримся о символике записи сумм компонентов объектов.

Соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Многие из приведенных выше формул примут компактный вид, если мы будем использовать соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Для этого наряду с нижними индексами для некоторых величин будем использовать верхние индексы и смешанные индексы. Так нижние индексы использовались нами для обозначения производных радиус-вектора поверхности и коэффициентов основных квадратичных форм в выражениях (7.9), (7.22), (8.21); верхние индексы использовались для обозначения компонент матрицы G^{-1} в (7.30); смешанные индексы использовались в формулах (7.28).

Соглашение о суммировании заключается в том, что в выражениях выполняется суммирование по повторяющемуся один раз снизу и один раз сверху индексу, при котором индекс пробегает значения от единицы до размерности пространства. Например,

$$a_i b_k^i \equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_k^i, \quad a_i b^{ijk} c_k \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_i b^{ijk} c_k.$$

Индексы, по которым производится суммирование, называют немymi, а остальные индексы называют свободными. Немые индексы отсутствуют в одной из частей равенства. Свободные индексы могут принимать значение номера одного из измерений пространства. Чтобы не путаться в индексах при большом их количестве, следует помнить о трех правилах:

- свободные индексы по обе стороны знака равенства занимают одинаковые позиции,
- индексы, по которым производится суммирование, встречаются один раз вверху и один раз внизу и только в одной части равенства,
- индекс параметра, по которому выполняется дифференцирование, является нижним.

Тензоры.

Далее параметры поверхности u и v будем обозначать с помощью верхних индексов через u^1 и u^2 , а их дифференциалы — через du^1 и du^2 соответственно. Использование верхних или нижних индексов для компонент некоторого объекта отражает зависимости, по которым изменяются компоненты этого объекта при переходе от одной системы координат к другой. Так при переходе от параметров u^1 и u^2 к параметрам $u^{1'}$ и $u^{2'}$ (u^1, u^2) производные радиус-вектора поверхности по новым параметрам будут связаны с производными радиус-вектора поверхности по старым параметрам соотношениями

$$\Gamma_{k'} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}} \Gamma_i, \quad k = 1, 2, \quad (9.1)$$

тогда как бесконечно малые приращения параметров будут связаны соотношениями

$$du^{k'} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^i} du^i, \quad k = 1, 2. \quad (9.2)$$

Закон преобразования компонент объекта при изменении системы координат и обуславливает место написания его индексов. Обозначим коэффициенты матриц преобразования параметров через

$$A^i_{k'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}},$$
$$A^{k'}_i = \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^i} \quad (9.3)-(9.4)$$

и запишем равенства (9.1) и (9.2), опустив знак суммы и используя вместо него соглашение о суммировании

$$\mathbf{r}_{k'} = A^i_{k'} \mathbf{r}_i,$$
$$du^{k'} = A^{k'}_i du^i, \quad (9.5)$$

где k', i принимают значения 1 и 2.

Якобиан матриц преобразования (9.3) и (9.4) должен быть отличен от нуля. Матрицы с компонентами (9.3) и (9.4) описывают однородные линейные преобразования.

При переходе к другой параметризации поверхности компоненты матриц G , V и G^{-1} изменяются по формулам

$$\begin{aligned}g_{k'n'} &= A^{i_{k'}} A^{j_{n'}} g_{ij}, \\b_{k'n'} &= A^{i_{k'}} A^{j_{n'}} b_{ij}, \\g^{k'n'} &= A^{k'_i} A^{n'_j} g^{ij}.\end{aligned}\quad (9.7)-(9.9)$$

Тензорами называются объекты, компоненты которых при изменении системы координат подвергаются линейным однородным преобразованиям, причем матрица преобразования для каждого нижнего индекса составлена из производных (9.3), а матрица преобразования для каждого верхнего индекса составлена из производных (9.4). Коэффициенты первой основной квадратичной формы играют особую роль — они являются компонентами метрического тензора двумерного пространства поверхности. Этот метрический тензор может быть представлен своими ковариантными компонентами в виде матрицы G (7.10) или своими контравариантными компонентами в виде матрицы G^{-1} (7.30). Тензор, представленный своими ковариантными компонентами, называется ковариантным тензором. Ковариантные компоненты имеют нижние индексы. Тензор, представленный своими контравариантными компонентами, называется контравариантным тензором. Контравариантные компоненты имеют верхние индексы. По количеству индексов у компонент тензору приписывают ранг. Так метрический тензор является тензором второго ранга.

С помощью коэффициентов метрического тензора производится «поднятие» и «опускание» индексов компонент других объектов этого пространства, что уже осуществлялось равенствами (7.28) и (7.27), связывающим коэффициенты b_i^k и b_{ij} :

$$\begin{aligned}b_i^k &= b_{ij} g^{jk}, \\b_{ij} &= b_i^k g_{jk}.\end{aligned}\quad (9.10)$$

В первом равенстве суммирование производится по индексу j , и объект выражается через смешанные компоненты b_i^k которые получаются из b_{ij} заменой индекса j на индекс, стоящий рядом с индексом j в компоненте метрического тензора g^{ik} . Во втором равенстве мы

получили ковариантные компоненты b_{ij} объекта через его смешанные компоненты b_i^k , а суммирование выполняется по индексу k .

Верхние и нижние индексы являются равноправными. Векторы \mathbf{g}_i образуют местный базис в заданной точке поверхности, по которому можно разложить любой другой вектор в этой точке.

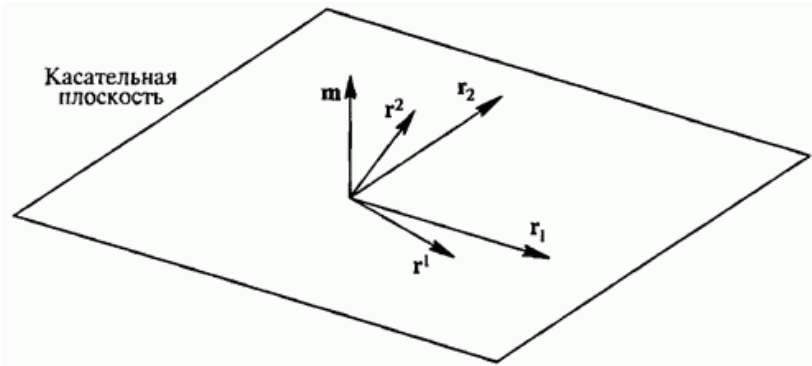


Рис. 9.1. Касательный и взаимный базисы поверхности в точке

Базис $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ называется касательным, так как его первые два вектора направлены по касательным к координатным линиям поверхности. Введем еще один базис, по которому также можно разложить любой другой вектор в этой точке. Этот базис представлен векторами $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{m}$.

Он называется взаимным упомянутому базису, и определяется равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}_1 &= 1, & \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}_2 &= 0, & \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{r}_1 &= 0, & \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{r}_2 &= 1, & \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{m} &= 0. \end{aligned}$$

Векторы $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ лежат в касательной плоскости, их ориентация показана на рис. 9.1.

Векторы $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ определим равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{m}}{\sqrt{g}} = \frac{\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{g} = \frac{(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)\mathbf{r}_2}{g} = \\ &= \frac{g_{22}\mathbf{r}_1 - g_{12}\mathbf{r}_2}{g} = g^{11}\mathbf{r}_1 + g^{12}\mathbf{r}_2 = g^{1i}\mathbf{r}_i, \\ \mathbf{r}^2 &= -\frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}}{\sqrt{g}} = -\frac{\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{g} = -\frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1)\mathbf{r}_2}{g} = \\ &= -\frac{g_{12}\mathbf{r}_1 - g_{11}\mathbf{r}_2}{g} = g^{21}\mathbf{r}_1 + g^{22}\mathbf{r}_2 = g^{2i}\mathbf{r}_i. \quad (1.9.12) \end{aligned} \quad (9.12)$$

Эти равенства можно получить другим способом: разложить векторы $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ по векторам $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ аналогично тому, как были разложены производные нормали $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ в (7.26), и найти коэффициенты разложения, что в результате даст

$$\mathbf{r}^k = g^{ki}\mathbf{r}_i.$$

Умножив скалярно векторы взаимного базиса, получим выражение для контравариантных компонент метрического тензора поверхности

$$g^{ki} = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^i. \quad (9.13)$$

Формулы Гаусса и Петерсона-Кодацци.

Найдем разложение вторых производных радиус-вектора поверхности \mathbf{r}_{ij} по местному базису поверхности в этой же точке, представленному векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$. Для этого запишем их в виде

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{m}, \quad (9.14)$$

где Γ_{ij}^k — неизвестные пока коэффициенты разложения векторов \mathbf{r}_{ij} по векторам \mathbf{r}_k . Коэффициенты разложения векторов \mathbf{r}_{ij} вектору \mathbf{m} равны коэффициентам второй квадратичной формы b_{ij} , так как при скалярном умножении (9.14) на \mathbf{m} мы должны получить равенства (7.21). Умножим (9.14) скалярно на $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и получим систему уравнений для Γ_{ij}^k

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} &= \Gamma_{ij,1}, \\ \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} &= \Gamma_{ij,2},\end{aligned}\quad (9.15)$$

где введено обозначение $\Gamma_{ij,1} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_1$, $\Gamma_{ij,2} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_2$. Коэффициенты $\Gamma_{ij,k}$ могут быть выражены через производные коэффициентов первой основной квадратичной формы. Для этого выпишем известные равенства

$$\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k = g_{jk}, \quad \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_i = g_{ki}, \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = g_{ij}.$$

Эти равенства выражают одно и то же, просто в них циклически переставляются индексы i, j, k , которые могут принимать значения от единицы до размерности пространства. Продифференцируем первое равенство по u^i , второе — по u^j , третье — по u^k и получим

$$\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_{ki} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}, \quad \mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}, \quad \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Если сложим первые два равенства и вычтем из них третье, то получим формулу для определения коэффициентов $\Gamma_{ij,k}$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (9.16)$$

Теперь решим систему уравнений (9.15) относительно $\Gamma_{ij,k}$ и получим равенства

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 &= \frac{g_{22}}{g} \Gamma_{ij,1} - \frac{g_{12}}{g} \Gamma_{ij,2} = g^{11} \Gamma_{ij,1} + g^{12} \Gamma_{ij,2}, \\ \Gamma_{ij}^2 &= \frac{g_{11}}{g} \Gamma_{ij,2} - \frac{g_{21}}{g} \Gamma_{ij,1} = g^{12} \Gamma_{ij,1} + g^{22} \Gamma_{ij,2}.\end{aligned}$$

С использованием соглашения о суммировании последние равенства и равенства (9.15) примут вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}{}^n &= g^{nk} \Gamma_{ij, k}, \\ \Gamma_{ij, n} &= g_{kn} \Gamma_{ij}{}^k.\end{aligned}\quad (9.17)-(9.18)$$

Подставим в последние равенства значения (9.16) и получим окончательное выражение для коэффициентов в разложении (9.14)

$$\Gamma_{ij}{}^n = \frac{1}{2} g^{nk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right).\quad (9.19)$$

Коэффициенты $\Gamma_{ij, k}$ называются символами Кристоффеля 1-рода, а коэффициенты $\Gamma_{ij}{}^k$ — символами Кристоффеля 2-рода. Они выражаются через коэффициенты первой основной квадратичной формы поверхности и их частные производные по параметрам. Символы Кристоффеля не являются компонентами тензора.

В (9.14) мы выразили производные векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ по параметрам. Формулы (9.14) называются деривационными формулами Гаусса. Совместно с деривационными формулами Вейнгартена (7.26) они представляют собой деривационные формулы для локального базиса $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ на поверхности. Перепишем их в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^i} &= \Gamma_{1i}{}^1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_{1i}{}^2 \mathbf{r}_2 + b_{1i} \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u^i} &= \Gamma_{2i}{}^1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_{2i}{}^2 \mathbf{r}_2 + b_{2i} \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^i} &= -b_i{}^1 \mathbf{r}_1 - b_i{}^2 \mathbf{r}_2.\end{aligned}\quad (9.20)$$

Эти формулы аналогичны формулам Френе-Серре (5.17) для кривых. Они выражают производные векторов локального базиса $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ в виде разложения по самим этим векторам. Дифференцируя формулы (8.9) еще раз и пользуясь имеющимися разложениями первых

производных, можно получить вторые производные локального базиса, а за ними — третьи производные и так далее.

Например, вторые производные вектора нормали равны

$$\begin{aligned} m_{ij} &= -\frac{\partial b_i^k}{\partial u^j} \mathbf{r}_k - b_i^k \mathbf{r}_{kj} = -\frac{\partial b_i^k}{\partial u^j} \mathbf{r}_k - b_i^k (\Gamma_{kj}^n \mathbf{r}_n + b_{kj} \mathbf{m}) = \\ &= -\left(\frac{\partial b_i^k}{\partial u^j} - b_i^n \Gamma_{nj}^k \right) \mathbf{r}_k - b_i^k b_{kj} \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Найдем разложение производных векторов $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ по взаимному базису поверхности в этой же точке, представленному векторами $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{m}$, дифференцированием формул (1.9.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}^1}{\partial u^i} &= \mathbf{r}_{2i} \times \mathbf{m} \frac{1}{\sqrt{g}} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{m}_i \frac{1}{\sqrt{g}} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{m} \frac{1}{2g\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial u^i} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{2i}^k \mathbf{r}_k \times \mathbf{m} - \frac{1}{\sqrt{g}} b_i^k \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_k - \mathbf{r}^1 \Gamma_{ki}^k = \\ &= -\Gamma_{2i}^1 \mathbf{r}^2 + \Gamma_{2i}^2 \mathbf{r}^1 + b_i^1 \mathbf{m} - \mathbf{r}^1 (\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2) = -\Gamma_{1i}^1 \mathbf{r}^1 - \Gamma_{2i}^1 \mathbf{r}^2 + b_i^1 \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial u^i} &= -\mathbf{r}_{1i} \times \mathbf{m} \frac{1}{\sqrt{g}} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_i \frac{1}{\sqrt{g}} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m} \frac{1}{2g\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial u^i} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{1i}^k \mathbf{r}_k \times \mathbf{m} + \frac{1}{\sqrt{g}} b_i^k \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_k - \mathbf{r}^2 \Gamma_{ki}^k = \\ &= \Gamma_{1i}^1 \mathbf{r}^2 - \Gamma_{1i}^2 \mathbf{r}^1 + b_i^2 \mathbf{m} - \mathbf{r}^2 (\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2) = -\Gamma_{1i}^2 \mathbf{r}^1 - \Gamma_{2i}^2 \mathbf{r}^2 + b_i^2 \mathbf{m}, \end{aligned}$$

где использовались деривационные формулы (9.20) и равенство

$$\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^i} = \Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2 = \Gamma_{ki}^k, \quad (9.24)$$

Равенство (9.24) следует из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u^i} &= \frac{\partial (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})}{\partial u^i} = 2\mathbf{r}_{1i} \cdot (g_{22}\mathbf{r}_1 - g_{12}\mathbf{r}_2) + 2\mathbf{r}_{2i} \cdot (g_{11}\mathbf{r}_2 - g_{21}\mathbf{r}_1) = \\ &= 2g\mathbf{r}_{1i} \cdot (g^{11}\mathbf{r}_1 + g^{12}\mathbf{r}_2) + 2g\mathbf{r}_{2i} \cdot (g^{22}\mathbf{r}_2 + g^{21}\mathbf{r}_1) = 2g\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{r}_k g^{kj} = 2g\Gamma_{ki}^k. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Мы получили деривационные формулы для взаимного базиса $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ на поверхности, выражающего производные векторов взаимного базиса $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{m}$ в виде разложения по самим этим векторам

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}^1}{\partial u^i} &= -\Gamma_{1i}^1 \mathbf{r}^1 - \Gamma_{2i}^1 \mathbf{r}^2 + b_i^1 \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial u^i} &= -\Gamma_{1i}^2 \mathbf{r}^1 - \Gamma_{2i}^2 \mathbf{r}^2 + b_i^2 \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^i} &= -b_{i1} \mathbf{r}^1 - b_{i2} \mathbf{r}^2.\end{aligned}\tag{9.26}$$

Функции $g_{ij}(u^1, u^2)$, $b_{ij}(u^1, u^2)$ однозначно определяют поверхность с точностью до положения и ориентации в пространстве, аналогично тому, как функции $s(t)$, $k(t)$, $\chi(t)$ определяют кривую. Функции $g_{ij}(u^1, u^2)$, $b_{ij}(u^1, u^2)$ не являются независимыми, они связаны между собой уравнениями, которые мы получим ниже.

Дифференцируя равенство (9.14) по одному из параметров, получим вторую производную вектора \mathbf{r}_i

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial u^n \partial u^j} &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^n} \mathbf{r}_k + \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_{kn} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^n} \mathbf{m} + b_{ij} \mathbf{m}_n = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^n} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kn}^m - b_{ij} b_n^m \right) \mathbf{r}_m + \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^n} + \Gamma_{ij}^k b_{kn} \right) \mathbf{m}.\end{aligned}\tag{9.27}$$

Изменим последовательность дифференцирования вектора \mathbf{r}_i в (9.27), что приведет к смене мест индексов n, j :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial u^j \partial u^n} &= \frac{\partial \Gamma_{in}^k}{\partial u^j} \mathbf{r}_k + \Gamma_{in}^k \mathbf{r}_{kj} + \frac{\partial b_{in}}{\partial u^j} \mathbf{m} + b_{in} \mathbf{m}_j = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial u^j} + \Gamma_{in}^k \Gamma_{kj}^m - b_{in} b_j^m \right) \mathbf{r}_m + \left(\frac{\partial b_{in}}{\partial u^j} + \Gamma_{in}^k b_{kj} \right) \mathbf{m}.\end{aligned}\tag{9.28}$$

Левые части равенств (9.27) и (9.28) равны, следовательно, должны быть равны и правые их части. Вычитая (9.28) из (9.27), получим равенство

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kn}^m - \Gamma_{in}^k \Gamma_{kj}^m + b_{in} b_j^m - b_{ij} b_n^m \right) \mathbf{r}_m + \\ + \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^n} - \frac{\partial b_{in}}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k b_{kn} - \Gamma_{in}^k b_{kj} \right) \mathbf{m} = 0.\end{aligned}\tag{9.29}$$

Так как в обыкновенной точке векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ некопланарны, то для выполнения векторного равенства (9.29) должны выполняться следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kn}^m - \Gamma_{in}^k \Gamma_{kj}^m &= b_{ij} b_n^m - b_{in} b_j^m, \\ \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^n} - \Gamma_{in}^k b_{kj} &= \frac{\partial b_{in}}{\partial u^j} - \Gamma_{ij}^k b_{kn}. \end{aligned} \quad (9.30)-(9.31)$$

Эти уравнения связывают между собой коэффициенты первой и второй основных квадратичных форм поверхности. Уравнение (9.30) называется уравнением Гаусса. Уравнения (9.31) называются уравнениями Петперсона-Кодацци. Правая часть равенства (9.30) является тензором, следовательно, и его левая часть также представляет собой тензор. Этот тензор называется тензором кривизны или тензором Римана и обозначается

$$R_{jni}^m = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial u^j} + \Gamma_{kn}^m \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{in}^k. \quad (9.32)$$

Умножим обе части уравнения Гаусса на δ_{in} и, произведя суммирование, опустим в нем верхний индекс

$$\frac{\partial \Gamma_{ij,l}}{\partial u^n} - \frac{\partial \Gamma_{in,l}}{\partial u^j} + \Gamma_{kn,l} \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{kj,l} \Gamma_{in}^k = b_{ij} b_{nl} - b_{in} b_{jl}. \quad (9.33)$$

Аналогично получим ковариантные компоненты тензора кривизны

$$R_{jni l} = \frac{\partial \Gamma_{ij,l}}{\partial u^n} - \frac{\partial \Gamma_{in,l}}{\partial u^j} + \Gamma_{kn,l} \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{kj,l} \Gamma_{in}^k. \quad (9.34)$$

В силу симметрии символов Кристоффеля по первым двум индексам тензор кривизны (9.34) обладает определенной симметрией, он кососимметричен по первой паре индексов и по второй паре индексов: $R_{jni l} = R_{iljn} = -R_{nijl} = -R_{jnli}$. Для поверхностей равенство (9.34) эквивалентно одному равенству

$$\frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} + \Gamma_{k2,2} \Gamma_{11}^k - \Gamma_{k1,2} \Gamma_{12}^k = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} = \mu_1 \mu_2 \mathcal{E}. \quad (9.35)$$

Мы использовали равенство (8.12) для гауссовой кривизны поверхности. Таким образом, гауссова кривизна поверхности может быть определена через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Уравнения Петерсона-Кодацци (9.31) сводятся к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \Gamma_{12}^k b_{k1} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \Gamma_{11}^k b_{k2}, \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \Gamma_{21}^k b_{k2} &= \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \Gamma_{22}^k b_{k1}. \end{aligned} \quad (9.36)-(9.37)$$

Если над тензором кривизны (9.32) выполнить операцию свертки по индексам n, m , то мы получим ковариантные компоненты тензора Риччи

$$R_{ji} = R_{j1i}^1 + R_{j2i}^2 = R_{jni}^n = b_{ij}b_n^n - b_{in}b_j^n = (b_{ij}b_{nk} - b_{in}b_{jk})g^{kn}. \quad (9.38)$$

Операция свертывания заключается в том, у тензора выбираются два индекса, один верхний, другой нижний, и выполняется суммирование всех компонент тензора, в которых два выбранных индекса имеют одинаковые значения. Так как для поверхностей индексы принимают значения 1 и 2, то ковариантные компоненты тензора Риччи поверхности равны

$$R_{ij} = \mu_1 \mu_2 g_{ij}.$$

Найдем уравнения, которым должна удовлетворять геодезическая кривая на поверхности $u^1 = u^1(s), u^2 = u^2(s)$, где s — длина дуги кривой. По определению, проекция вектора кривизны геодезической кривой kn на касательную плоскость к поверхности должна быть равна нулю. Найдем вектор кривизны произвольной кривой на поверхности

$$\begin{aligned} kn &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = r_{11} \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 + 2r_{12} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + r_{22} \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 + r_1 \frac{d^2 u^1}{ds^2} + r_2 \frac{d^2 u^2}{ds^2} \equiv \\ &\equiv r_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + r_k \frac{d^2 u^k}{ds^2} = r_k \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + r_k \frac{d^2 u^k}{ds^2} + mb_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

По определению, вектор геодезической кривизны равен проекции вектора кривизны кривой на касательную плоскость к поверхности, т. е. он равен вектору

$$\mathbf{q} = \left(\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{r}_k,$$

откуда следует, что координатные функции $u^i(s)$, $i=1, 2$ геодезической кривой должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0. \quad (9.40)$$

Сама геодезическая кривизна линии на поверхности равна длине вектора геодезической кривизны \mathbf{q} , приведенного выше.

Для моделируемых нами поверхностей будет известна их векторная функция. От нас будет требоваться умение получить всю необходимую информацию о поверхности по ее радиус-вектору. Выпишем полученные выше равенства, выразив все величины через радиус-вектор поверхности и его производные. Итак, задана векторная функция \mathbf{r} двух параметров u^1, u^2 принимающих значение на связной области Ω :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad u^1, u^2 \in \Omega.$$

По ее производным найдем вектор нормали, взаимный базис и коэффициенты квадратичных форм:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &\equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, & g_{ij} &= \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, & g &= |\mathbf{G}| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}, \\ \mathbf{m} &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}}, & \mathbf{r}^1 &= \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{m}}{\sqrt{g}}, & \mathbf{r}^2 &= \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_1}{\sqrt{g}}, \\ g^{ij} &= \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j, & b_{ij} &= \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{m}, & b_i^j &= -\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}^j. \end{aligned} \quad (9.41)$$

По вторым и третьим производным найдем символы Кристоффеля и дериационные формулы базисов поверхности в заданной точке

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{ik} &\equiv \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^k}, & \mathbf{r}_{ijk} &\equiv \frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}, & \Gamma_{ij,k} &= \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k, & \Gamma_{ij}^k &= \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^k, \\
 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jk}, & \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} &= \mathbf{r}_{ijk} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{m}_k, \\
 \frac{\partial \Gamma_{ij,k}}{\partial u^n} &= \mathbf{r}_{ijn} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{kn}, & \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^n} &= \mathbf{r}_{ijn} \cdot \mathbf{r}^k + \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}^{kn}, \\
 \mathbf{r}_{ik} &\equiv \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^j \mathbf{r}_j + b_{ik} \mathbf{m}, & \mathbf{r}^i_k &\equiv \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^k} = -\Gamma_{kj}^i \mathbf{r}^j + b_k^i \mathbf{m}, \\
 \mathbf{m}_i &\equiv \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^i} = -b_{ik} \mathbf{r}^k = -b_i^k \mathbf{r}_k, \\
 \mathbf{m}_{ij} &\equiv \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial u^i \partial u^j} = -(\mathbf{r}_{ijk} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{m}_j + \mathbf{r}_{jk} \cdot \mathbf{m}_i) \mathbf{r}^k - b_{ik} b_j^k \mathbf{m}.
 \end{aligned} \tag{9.42}$$

В равенствах (9.41) и (9.42) верхние и нижние индексы принимают значения от 1 до 2. Вся необходимая информация о поверхности может быть получена на основе равенств (9.41) и (9.42) при известной векторной функции (7.1). Из них мы видим, что для описания поверхности требуются производные ее радиус-вектора до третьего порядка включительно.

1.10. Криволинейные координаты

Наряду с декартовыми прямоугольными системами координат можно использовать и другие в общем случае криволинейные координатные системы. Такие координатные системы нужны также в неевклидовых пространствах. В криволинейной системе координат при дифференцировании векторных функций приходится учитывать изменение базисных векторов системы, что значительно усложняет описание геометрических объектов. Но в определенных случаях криволинейные координаты удобнее, чем декартовы. Мы уже сталкивались с двухмерной криволинейной системой координат, которая строилась по параметрическим линиям на поверхности. Мы вынуждены были ими пользоваться, так как в общем случае на криволинейной поверхности невозможно построить единую двухмерную декартову прямоугольную систему координат.

Мы рассмотрим криволинейные системы координат, чтобы знать, какие трудности нас ожидают при их использовании и чтобы уметь эти

трудности преодолевать. Так как геометрические объекты не зависят от системы координат, то для их описания можно построить и использовать математический аппарат, инвариантный по отношению к системе координат.

Пусть мы имеем в распоряжении эталон единицы длины и инструмент для измерения углов. С их помощью в той точке пространства, в которой мы находимся, можно построить декартову прямоугольную систему координат с началом в этой точке и базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Координаты точек в ней обозначим через x_1, x_2, x_3 . Пусть имеются непрерывные дифференцируемые и однозначные функции

$$u^1 = u^1(x^1, x^2, x^3), \quad u^2 = u^2(x^1, x^2, x^3), \quad u^3 = u^3(x^1, x^2, x^3), \quad (10.1)$$

такие, что обратные им функции

$$x^1 = x^1(u^1, u^2, u^3), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2, u^3), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2, u^3) \quad (10.2)$$

также являются непрерывными дифференцируемыми и однозначными. Потребуем, чтобы определитель матрицы Якоби системы (10.2) был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10.3)$$

Если один из параметров в (1.10.2) зафиксировать ($u^i = \text{const}$), то мы получим некоторую поверхность в пространстве, которую назовем поверхностью i -группы. Функции (10.2) должны быть такими, чтобы поверхности одной группы не пересекались друг с другом. В этом случае параметры u^1, u^2, u^3 могут служить координатами точек в рассматриваемом пространстве. Поверхность i -группы называют i -й

координатной поверхностью, а линии пересечения координатных поверхностей разных групп называют координатными линиями.

Метрический тензор.

В каждой точке $R(u^1, u^2, u^3)$ пространства можно построить локальную систему координат с началом в данной точке и базисными функциями $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, определенными следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \lim_{\delta u^1 \rightarrow 0} \frac{R(u^1 + \delta u^1, u^2, u^3) - R(u^1, u^2, u^3)}{\delta u^1}, \\ \mathbf{r}_2 &= \lim_{\delta u^2 \rightarrow 0} \frac{R(u^1, u^2 + \delta u^2, u^3) - R(u^1, u^2, u^3)}{\delta u^2}, \\ \mathbf{r}_3 &= \lim_{\delta u^3 \rightarrow 0} \frac{R(u^1, u^2, u^3 + \delta u^3) - R(u^1, u^2, u^3)}{\delta u^3}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

В силу (10.3) векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ некопланарны и могут быть использованы в качестве базиса для разложения по нему любого другого вектора в этой точке пространства. Этот базис будем называть касательным базисом. Базисные векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ в каждой точке различны, и поэтому по ним можно производить разложение только тех векторов, которые вычислены в этой же точке пространства. Базисный вектор \mathbf{r}_k направлен по касательной к k -й координатной линии в данной точке, его длина в общем случае отлична от единицы.

Квадрат длины бесконечно малого отрезка, заданного бесконечно малыми приращениями координат du^1, du^2, du^3 , равен

$$ds^2 = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j.$$

Коэффициенты

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2, u^3) = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{10.5}$$

являются ковариантными компонентами метрического тензора в точке $R(u^1, u^2, u^3)$.

При переходе к другой криволинейной системе координат $u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}$ ковариантные компоненты метрического тензора $g_{k'n'}$ в новой системе координат связаны с компонентами g_{ij} соотношениями

$$g_{k'n'} = A^i_{k'} A^j_{n'} g_{ij},$$

где

$$A^i_{k'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}}.$$

Аналогичными соотношениями связаны и базисные векторы криволинейных систем

$$\mathbf{r}_{k'} = A^i_{k'} \mathbf{r}_i. \quad (10.6)$$

Матрицу, составленную из ковариантных компонент метрического тензора, будем обозначать через G , как и матрицу коэффициентов первой квадратичной формы поверхности. Обратную ей матрицу будем обозначать через G^{-1} .

Для касательного базиса $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ в каждой точке можно построить взаимный базис $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ по правилу

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^k = \delta_i^k, \quad (10.7)$$

где δ_i^k — символы Кронекера, они принимают значения δ_i^k при $i=k$ и $\delta_i^k=0$ при $i \neq k$. Для нахождения векторов взаимного базиса представим их в виде разложения по касательному базису с неизвестными коэффициентами. Из приведенных выше условий получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов. После ее решения получим коэффициенты

разложения векторов взаимного базиса по векторам касательного базиса

$$\mathbf{r}^k = g^{ki} \mathbf{r}_i, \quad (1.10.8)$$

где g^{ki} — коэффициенты матрицы G^{-1} . Коэффициенты $g^{ki} = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^i$ называются контравариантными компонентами метрического тензора, заданного в системе координат u^1, u^2, u^3 . При переходе к другой криволинейной системе координат $u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}$ контравариантные компоненты метрического тензора в новой системе координат связаны с компонентами g^{ki} соотношениями

$$g^{n'j'} = A^{n'k} A^{j'i} g^{ki},$$

где

$$A^{j'i} = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^i}.$$

Аналогичными соотношениями связаны и векторы взаимных базисов криволинейных систем

$$\mathbf{r}^{i'} = A^{i'k} \mathbf{r}^k. \quad (10.9)$$

Так как G^{-1} является обратной матрицей G , то их произведение равно единичной матрице, откуда следует, что смешанные компоненты метрического тензора равны функции δ_i^k

$$g_{ij} g^{jk} = g_i^k = \delta_i^k.$$

Векторы взаимного базиса и касательного базиса связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{\sqrt{g}}, & \mathbf{r}^2 &= \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{\sqrt{g}}, & \mathbf{r}^3 &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}}, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^3 \sqrt{g}, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}^3 \times \mathbf{r}^1 \sqrt{g}, & \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2 \sqrt{g}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где g равен определителю матрицы G . Последние соотношения можно записать в виде

$$\mathbf{r}^k = e^{ijk} \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j}{\sqrt{g}}, \quad \mathbf{r}_k = e_{ijk} \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j \sqrt{g},$$

или

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = e_{ijk} \mathbf{r}^k \sqrt{g}, \quad \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = e^{ijk} \frac{\mathbf{r}_k}{\sqrt{g}},$$

где используются символы Леви-Чивита e^{ijk} , e_{ijk} . Величины e^{ijk} , e_{ijk} равны 0, если в среди индексов встречаются одинаковые; равны 1 для последовательности индексов 1, 2, 3 и получающейся из нее круговой перестановкой последовательностей 2, 3, 1 и 3, 1, 2; равны -1 при нарушении этого порядка (для последовательности индексов 3, 2, 1 и получающейся из нее круговой перестановкой последовательностей 2, 1, 3 и 1, 3, 2).

В криволинейной системе координат произвольный вектор \mathbf{a} может быть разложен по касательному или взаимному базису и представлен в виде

$$\mathbf{a} = a^j \mathbf{r}_j = a_i \mathbf{r}^i.$$

Результатом операции скалярного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} является число, которое в зависимости от представления векторов равно

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a_i b_j g^{ij} = a^i b_i = a_i b^i. \quad (10.11)$$

Их векторное произведение может быть представлено в виде

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a^i b^j e_{ijk} \sqrt{g} \mathbf{r}^k = a_i b_j e^{ijk} \frac{\mathbf{r}^k}{\sqrt{g}}, \quad (10.12)$$

где использовались равенства

$$e^{ijk} \frac{1}{\sqrt{g}} = (\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \cdot \mathbf{r}^k, \quad e_{ijk} \sqrt{g} = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_k.$$

Величины

$$e^{ijk} = e^{ijk} \frac{1}{\sqrt{g}} = (\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \cdot \mathbf{r}^k, \quad \varepsilon_{ijk} = e_{ijk} \sqrt{g} = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_k$$

являются соответственно контравариантными и ковариантными компонентами тензора Леви-Чивита.

Символы Кристоффеля. Найдем изменение векторов касательного базиса при переходе из точки $R(u^1, u^2, u^3)$ в бесконечно близкую к ней точку $R(u^1 + \delta u^1, u^2 + \delta u^2, u^3 + \delta u^3)$. С точностью до линейных слагаемых относительно δu^i , $i = 1, 2, 3$ изменение базисных векторов можно представить в виде

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} \delta u^j = \mathbf{r}_{ij} \delta u^j = \Gamma_{ij}{}^k \mathbf{r}_k \delta u^j, \quad (10.13)$$

где $\Gamma_{ij}{}^k$ — неизвестные пока коэффициенты разложения производных \mathbf{r}_{ij} касательного базиса по самому базису $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$

Умножив равенство

$$\mathbf{r}_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}{}^k \mathbf{r}_k \quad (10.14)$$

скалярно на $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ получим систему уравнений для $\Gamma_{ij}{}^k$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} + \Gamma_{ij}^3 g_{13} &= \Gamma_{ij,1} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_1, \\ \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} + \Gamma_{ij}^3 g_{23} &= \Gamma_{ij,2} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_2, \\ \Gamma_{ij}^1 g_{31} + \Gamma_{ij}^2 g_{32} + \Gamma_{ij}^3 g_{33} &= \Gamma_{ij,3} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_3.\end{aligned}\quad (10.15)$$

Коэффициенты $\Gamma_{ij,k} \equiv \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k$ могут быть выражены через производные ковариантных ком понент метрического тензора. Для этого выпишем известные равенства

$$\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k = g_{jk}, \quad \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_i = g_{ki}, \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = g_{ij},$$

в которых циклически переставляются индексы i, j, k ; индексы могут принимать значения от единицы до размерности пространства. Продифференцируем первое равенство по u^i , второе — по u^j , третье — по u^k и получим

$$\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_{ki} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}, \quad \mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}, \quad \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Если сложим первые два равенства и вычтем из них третье, то получим формулу для определения коэффициентов $\Gamma_{ij,k}$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (10.16)$$

Теперь решим систему уравнений (10.15) относительно Γ_{ij}^k и получим равенства

$$\Gamma_{ij}^n = g^{nk} \Gamma_{ij,k}. \quad (10.17)$$

Саму систему (10.15) перепишем в виде

$$\Gamma_{ij,n} = g_{nk} \Gamma_{ij}^k. \quad (10.18)$$

Подставим в (10.17) равенства (10.16) и получим окончательное выражение для коэффициентов в разложении (10.13)

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} g^{nk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (10.19)$$

Коэффициенты $\Gamma_{ij,k}$ называются символами Кристоффеля 1-го рода, а коэффициенты Γ_{ij}^k называются символами Кристоффеля 2-го рода. Они выражаются через компоненты метрического тензора и их частные производные по криволинейным координатам. Символы Кристоффеля не являются компонентами тензора. Как можно заметить, соотношения (10.15)-(10.19) идентичны соотношениям (9.15)-(9.19) для оболочек с той лишь разницей, что размерность пространства параметров оболочки на единицу меньше.

Мы использовали те же обозначения для компонент метрического тензора, символов Кристоффеля, касательного и взаимного базиса. Все полученные для них соотношения справедливы для пространства любой размерности.

Векторная функция.

В декартовой прямоугольной системе координат компоненты радиус-вектора точки равны координатам этой точки пространства. В криволинейной системе понятие; радиус-вектора как преобразования, переводящего начальную точку координатной системы в заданную точку пространства, теряет смысл.

Линию в криволинейной системе координат можно описать как совокупность функций $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$, $u^3 = u^3(t)$ параметра t . Пусть приращению $\delta(t)$ параметра кривой соответствуют приращения координатных функций δu^1 , δu^2 , δu^3 . Тогда вектор $\mathbf{r}_1 \delta u^1$, $\mathbf{r}_2 \delta u^2$, $\mathbf{r}_3 \delta u^3$ будет направлен по касательной к кривой. Если поделить его на δt и устремить δt к нулю, то в пределе мы получим вектор производной кривой

$$\mathbf{a}(t) = \frac{du^i(t)}{dt} \mathbf{r}_i = a^i(t) \mathbf{r}_i. \quad (10.20)$$

Производная кривой представляет собой векторную функцию параметра t .

Поверхность в криволинейной системе координат может быть описана как совокупность функций $u^1 = u^1(v, w)$, $u^2 = u^2(v, w)$, $u^3 = u^3(v, w)$ двух параметров v и w . Касательные к v -линиям и w -линиям поверхности векторы обозначим через v и w . Эти векторы определяются равенствами

$$\mathbf{v}(v, w) = \frac{\partial u^i(v, w)}{\partial v} \mathbf{r}_i = v^i(v, w) \mathbf{r}_i,$$

$$\mathbf{w}(v, w) = \frac{\partial u^i(v, w)}{\partial w} \mathbf{r}_i = w^i(v, w) \mathbf{r}_i,$$

и представляют собой векторные функции параметров поверхности. Свойства поверхности могут быть определены с помощью кривых на ней, поэтому далее мы будем исследовать некоторую векторную функцию $\mathbf{a}(t)$ параметра t .

При вычислении производной векторной функции нужно учитывать то, что базисные векторы в каждой точке пространства в общем случае различные. В декартовой системе координат базисные векторы во всех точках пространства одинаковы по величине и направлению, поэтому при дифференцировании они выступают в роли констант. Пусть изменению параметра δt кривой соответствует приращение координат δu^1 , δu^2 , δu^3 . Найдем приращение векторной функции $\mathbf{a}(t)$ связанной с этой кривой. Потребуем, чтобы максимальная из величин δu^i стремилась к нулю при $\delta t \rightarrow 0$. Приращение векторной функции в местном базисе точки $u^1(t)$, $u^2(t)$, $u^3(t)$ равно

$$\delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \delta t) - \mathbf{a}(t) = a^i(t + \delta t)(\mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i) - a^i(t)\mathbf{r}_i = a^i(t + \delta t)(\mathbf{r}_i + \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k \delta u^j) - a^i(t)\mathbf{r}_i.$$

Поделив это равенство на δt и устремив δt к нулю, получим формулу для производной векторной функции

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da^i}{dt} \mathbf{r}_i + a^i \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k \frac{du^j}{dt} = \frac{da^i}{dt} \mathbf{r}_i + a^n \Gamma_{nj}^i \mathbf{r}_i \frac{du^j}{dt} = \left(\frac{da^i}{dt} + a^n \Gamma_{nj}^i \frac{du^j}{dt} \right) \mathbf{r}_i. \quad (10.21)$$

Выражение

$$\frac{Da^i}{dt} = \frac{da^i}{dt} + a^n \Gamma_{nj}^i \frac{du^j}{dt} \quad (10.22)$$

называется абсолютной или ковариантной производной контравариантных компонент векторной функции в направлении кривой $u^1(t), u^2(t), u^3(t)$.

Касательный базис и взаимный базис в некоторой точке пространства равноправны, поэтому вектор $\mathbf{a}(t)$ кривой может быть разложен также по взаимному базису в точке кривой

$$\mathbf{a}(t) = a_i \mathbf{r}^j, \quad (10.23)$$

где a_i — ковариантные компоненты вектора \mathbf{a} . Для вывода производной $\mathbf{a}(t)$ в данном представлении нужно знать, как меняются векторы взаимного базиса при переходе из точки $R(u^1, u^2, u^3)$ в бесконечно близкую к ней точку $R_1(u^1 + \delta u^1, u^2 + \delta u^2, u^3 + \delta u^3)$. Дифференцируя равенства (1.10.7), получим

$$\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial u^j} = -\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} \cdot \mathbf{r}^k = -\Gamma_{ij}^n \Gamma_{n} \cdot \mathbf{r}^k = -\Gamma_{ij}^k, \quad (10.24)$$

откуда следует, что $-\Gamma_{ij}^k$ являются коэффициентами разложения производных $\partial \mathbf{r}^k / \partial u^j$ по взаимному базису

$$\mathbf{r}^k_j \equiv \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial u^j} = -\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}^i. \quad (10.25)$$

Действительно, если мы скалярно умножим равенство (10.25) на \mathbf{r}_i , то получим равенства (10.24). Таким образом, с точностью до линейных слагаемых относительно δu^j изменение векторов взаимного базиса равно

$$\delta \mathbf{r}^k = \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial u^j} \delta u^j = -\Gamma_{ij}{}^k \mathbf{r}^i \delta u^j. \quad (10.26)$$

Используя покомпонентное представление (10.23), получим формулу для производной векторной функции кривой

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_i}{dt} \mathbf{r}^i - a_i \Gamma_{kj}{}^i \mathbf{r}^k \frac{du^j}{dt} = \frac{da_i}{dt} \mathbf{r}^i - a_n \Gamma_{ij}{}^n \mathbf{r}^i \frac{du^j}{dt} = \left(\frac{da_i}{dt} - a_n \Gamma_{ij}{}^n \frac{du^j}{dt} \right) \mathbf{r}^i. \quad (10.27)$$

Выражение

$$\frac{Da_i}{dt} = \frac{da_i}{dt} - a_n \Gamma_{ij}{}^n \frac{du^j}{dt} \quad (10.28)$$

называют абсолютной или ковариантной производной ковариантных компонент векторной функции в направлении кривой $u^1(t)$, $u^2(t)$, $u^3(t)$.

Как можно видеть, производная векторной функции представляет собой также векторную функцию. Дифференцируя представления

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{Da_i}{dt} \mathbf{r}^i, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{Da^i}{dt} \mathbf{r}_i$$

и, используя формулы (10.21) и (10.27), можно получить для векторной функции $\mathbf{a}(t)$ производные более высокого порядка.

Параметр t кривой определяет некоторую точку пространства, поэтому компоненты векторной функции зависят от координат точек, через которые проходит кривая. Представим, что в каждой точке пространства задана векторная функция $\mathbf{a}(u^1, u^2, u^3)$. Такая векторная функция определяет в пространстве векторное поле.

Ковариантные производные.

Найдем изменение векторного поля при переходе из точки $R(u^1, u^2, u^3)$ в бесконечно близкую к ней точку вдоль одной из координатных

линий. Пусть этому переходу соответствует изменение координаты u^i на бесконечно малую величину δu^i .

Приращение векторного поля в представлении через контравариантные компоненты $\mathbf{a}(u^1, u^2, u^3) = a^i \mathbf{r}_i$ с точностью до линейных по δu^i членов равно

$$\delta \mathbf{a} = \frac{\partial a^i}{\partial u^j} \delta u^j \mathbf{r}_i + a^i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} \delta u^j.$$

Поделив обе части этого равенства на δu^j и устремив δu^i к нулю, получим формулу для производной векторного поля в представлении через контравариантные компоненты

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = \frac{\partial a^i}{\partial u^j} \mathbf{r}_i + a^i \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k = \left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j} + a^n \Gamma_{nj}^i \right) \mathbf{r}_i. \quad (10.29)$$

Выражение

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial u^j} + a^n \Gamma_{nj}^i \quad (10.30)$$

называется ковариантной производной контравариантных компонент векторного поля.

Приращение векторного поля в представлении через ковариантные компоненты $\mathbf{a}(u^1, u^2, u^3) = a_i \mathbf{r}^i$ с точностью до линейных по δu^i членов равно

$$\delta \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} \delta u^j \mathbf{r}^i + a_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^j} \delta u^j.$$

Отсюда получим формулу для производной векторного поля в представлении через ковариантные компоненты

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} \mathbf{r}^i - a_i \Gamma_{kj}^i \mathbf{r}^k = \left(\frac{\partial a_i}{\partial u^j} - a^n \Gamma_{ij}^n \right) \mathbf{r}^i. \quad (10.31)$$

Выражение

$$\nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} - a_n \Gamma_{ij}^n \quad (10.32)$$

называют ковариантной производной ковариантных компонент векторного поля.

Итак, нами получены формулы (10.22) и (10.28) для вычисления производных вектора кривой $\mathbf{a}(t)$ по параметру t в произвольной криволинейной системе координат. Формулы (10.22), (10.28), (10.30), (10.32) представляют собой аппарат абсолютного дифференцирования, который дает формулы вычисления производных векторных функций в любой системе координат. Ценой универсальности этого аппарата является необходимость вычисления производных базисных векторов по координатам выбранной системы координат. Для вычисления производной вектора нужно знать его разложение по касательному или взаимному базису точки, в которой он задан.

Покажем, что компоненты метрического тензора можно выносить из-под знака ковариантной производной ∇_j . Дифференцируя равенства $g_{ki} = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_i$ и $g^{ki} = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^i$ и используя (10.14) и (10.25), получим выражения для производных компонент метрического тензора

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} &= g_{kn} \Gamma_{ij}^n + g_{ni} \Gamma_{kj}^n, \\ \frac{\partial g^{ki}}{\partial u^j} &= -g^{kn} \Gamma_{nj}^i - g^{ni} \Gamma_{nj}^k. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Подставив в равенство (10.30) соотношения $a^i = g^{ik} a_k$ и (10.34), получим

$$\begin{aligned}\nabla_j a^i &= \nabla_j (g^{ik} a_k) = g^{ik} \frac{\partial a_k}{\partial u^j} + a_k \frac{\partial g^{ki}}{\partial u^j} + a_k g^{nk} \Gamma_{nj}^i = \\ &= g^{ik} \frac{\partial a_k}{\partial u^j} - a_k g^{ni} \Gamma_{nj}^k = g^{ik} \left(\frac{\partial a_k}{\partial u^j} - a_n \Gamma_{kj}^n \right) = g^{ik} \nabla_j a_k.\end{aligned}\quad (10.35)$$

Во время преобразований мы меняли обозначение немых индексов. Это вполне допустимо, так как немой индекс не входит в результат и, следовательно, может быть обозначен любой буквой. Аналогично подставив в равенство (10.32) соотношения $a_i = g_{ik} a^k$ и (10.33), получим

$$\begin{aligned}\nabla_j a_i &= \nabla_j (g_{ik} a^i) = g_{ik} \frac{\partial a^i}{\partial u^j} + a^i \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - a^k g_{kn} \Gamma_{ij}^n = \\ &= g_{ik} \frac{\partial a^i}{\partial u^j} + a^k g_{ni} \Gamma_{kj}^n = g_{ik} \left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j} + a^n \Gamma_{nj}^i \right) = g_{ik} \nabla_j a^i.\end{aligned}\quad (10.36)$$

Из равенств (10.35) и (10.36) следует вывод о том, что компоненты метрического тензора можно выносить из-под знака ковариантной производной.

1.11 Тензоры в криволинейных координатах

В криволинейных координатах мы рассмотрим понятие тензора — объекта, операций над которым не зависят от координатной системы. Одним из тензоров является метрический тензор. Компоненты первой квадратичной формы поверхности являются компонентами метрического тензора параметрического пространства поверхности. Примерами тензоров могут служить тензор деформации и тензор напряжений сплошной среды, тензор инерции твердого тела, тензор кривизны пространства. Тензоры, заданные для каждой точки некоторой области пространства, образуют тензорное поле. Тензоры описываются своими компонентами.

Криволинейная поверхность представляет собой двухмерный аналог искривленного пространства. Продолжим аналогию между трехмерным пространством и поверхностью — представителем двухмерных пространств. Если нам известны компоненты метрического тензора как функции используемой системы координат, то мы можем по ним выполнить исследование некоторых свойств самого пространства, в частности его кривизны. Выше мы рассмотрели тензор кривизны поверхности. Компоненты аналогичного тензора можно вычислить и для трехмерного пространства.

Тензор кривизны.

В искривленных пространствах последовательность дифференцирования по координатам в общем случае играет роль. При изменении последовательности дифференцирования появляются дополнительные слагаемые. Пусть дана некоторая векторная функция $\mathbf{a} = a_i(u^1, u^2, u^3) = \mathbf{r}^i$. Рассмотрим некоторую поверхность $u^i = u^i(t, w)$, $i=1, 2, 3$ в пространстве. Всегда можно выбрать поверхность так, чтобы она проходила через любую заданную точку или линию. Вычислим абсолютный дифференциал $G_t \mathbf{a}$ векторной функции при бесконечно малом смещении из точки u^1, u^2, u^3 в точку

$u^1 + \frac{\partial u^1}{\partial t} dt, u^2 + \frac{\partial u^2}{\partial t} dt, u^3 + \frac{\partial u^3}{\partial t} dt$ вдоль поверхности в направлении первого ее параметра

$$D_t \mathbf{a} = \left(\left(\frac{\partial a_i}{\partial w^j} - a_n \Gamma_{ij}^n \right) \mathbf{r}^i \frac{\partial w^j}{\partial t} \right) dt = \left(\frac{\partial a_i}{\partial t} - a_n \Gamma_{ij}^n \frac{\partial w^j}{\partial t} \right) \mathbf{r}^i dt \equiv (D_t a)_i \mathbf{r}^i dt.$$

Аналогично вычислим абсолютный дифференциал $D_w \mathbf{a}$ векторной функции при бесконечно малом смещении из той же точки u^1, u^2, u^3 в

точку $u^1 + \frac{\partial u^1}{\partial w} dw, u^2 + \frac{\partial u^2}{\partial w} dw, u^3 + \frac{\partial u^3}{\partial w} dw$ вдоль поверхности в направлении второго ее параметра

$$D_w \mathbf{a} = \left(\left(\frac{\partial a_i}{\partial w^j} - a_n \Gamma_{ij}^n \right) \mathbf{r}^i \frac{\partial w^j}{\partial w} \right) dw = \left(\frac{\partial a_i}{\partial w} - a_n \Gamma_{ij}^n \frac{\partial w^j}{\partial w} \right) \mathbf{r}^i dw \equiv (D_w a)_i \mathbf{r}^i dw.$$

Полученные дифференциалы можно также рассматривать как векторные функции тех же параметров в той же точке. Вычислим теперь дифференциал векторной функции $G_t \mathbf{a}$ вдоль поверхности в направлении второго ее параметра и дифференциал векторной функции $D_w \mathbf{a}$ вдоль поверхности в направлении первого ее параметра

$$\begin{aligned}
 D_w D_t \mathbf{a} &= \left(\frac{\partial(D_t \mathbf{a})_i}{\partial w} - (D_t \mathbf{a})_n \Gamma_{ij}^n \frac{\partial w^j}{\partial w} \right) \mathbf{r}^i dw = \\
 &= \left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial t \partial w} - \frac{\partial a_n}{\partial w} \Gamma_{ij}^n \frac{\partial w^j}{\partial t} - a_n \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial w} \frac{\partial w^j}{\partial t} - a_n \Gamma_{ij}^n \frac{\partial^2 w^j}{\partial t \partial w} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial a_n}{\partial t} \Gamma_{ir}^n \frac{\partial u^r}{\partial w} + a_m \Gamma_{nj}^m \frac{\partial w^j}{\partial t} \Gamma_{ir}^n \frac{\partial u^r}{\partial w} \right) \mathbf{r}^i dt dw, \\
 D_t D_w \mathbf{a} &= \left(\frac{\partial(D_w \mathbf{a})_i}{\partial t} - (D_w \mathbf{a})_n \Gamma_{ij}^n \frac{\partial w^j}{\partial t} \right) \mathbf{r}^i dt = \\
 &= \left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial w \partial t} - \frac{\partial a_n}{\partial t} \Gamma_{ij}^n \frac{\partial w^j}{\partial w} - a_n \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial t} \frac{\partial w^j}{\partial w} - a_n \Gamma_{ij}^n \frac{\partial^2 w^j}{\partial w \partial t} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial a_n}{\partial w} \Gamma_{ir}^n \frac{\partial u^r}{\partial t} + a_m \Gamma_{nj}^m \frac{\partial w^j}{\partial w} \Gamma_{ir}^n \frac{\partial u^r}{\partial t} \right) \mathbf{r}^i dw dt.
 \end{aligned}$$

Полученные выражения отличаются тем, что в них переставлены местами производные по t и по w . Первые и четвертые слагаемые обоих выражений равны. Второе слагаемое первого выражения равно пятому слагаемому второго выражения (если немой индекс r переобозначить через j). Вычтем из первого выражения второе и получим (используя возможность переобозначения немых индексов)

$$\begin{aligned}
 D_w D_t \mathbf{a} - D_t D_w \mathbf{a} &= \left(-a_n \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial w} \frac{\partial w^j}{\partial t} + a_m \Gamma_{nj}^m \frac{\partial w^j}{\partial t} \Gamma_{ir}^n \frac{\partial u^r}{\partial w} + \right. \\
 &\quad \left. + a_n \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial t} \frac{\partial w^j}{\partial w} - a_m \Gamma_{nj}^m \frac{\partial w^j}{\partial w} \Gamma_{ir}^n \frac{\partial u^r}{\partial t} \right) \mathbf{r}^i dw dt = \\
 &= \left(\left(-\frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial u^r} + \Gamma_{qj}^n \Gamma_{ir}^q \right) \frac{\partial w^j}{\partial t} \frac{\partial u^r}{\partial w} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ir}^n}{\partial w^j} - \Gamma_{qr}^n \Gamma_{ij}^q \right) \frac{\partial w^j}{\partial t} \frac{\partial u^r}{\partial w} \right) a_n \mathbf{r}^i dw dt = \\
 &= \left(-\frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial u^r} + \Gamma_{kj}^n \Gamma_{ir}^k + \frac{\partial \Gamma_{ir}^n}{\partial w^j} - \Gamma_{kr}^n \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial w^j}{\partial t} \frac{\partial u^r}{\partial w} a_n \mathbf{r}^i dw dt = \\
 &= R_{rji}^n \frac{\partial w^j}{\partial t} \frac{\partial u^r}{\partial w} a_n dw dt \mathbf{r}^i, \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$R_{rji}^n = \frac{\partial \Gamma_{ir}^n}{\partial w^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial u^r} + \Gamma_{kj}^n \Gamma_{ir}^k - \Gamma_{kr}^n \Gamma_{ij}^k. \quad (11.2)$$

Коэффициенты R_{rji}^n являются компонентами тензора кривизны пространства. Тензор кривизны называют тензором Римана. Он зависит лишь от точки пространства, в которой вычислен.

Если в качестве поверхности $u^i = u^i(t, w)$ взять одну из координатных поверхностей $u^1 = u^1(u^2, u^3)$, $u^2 = u^2(u^3, u^1)$, $u^3 = u^3(u^1, u^2)$,

проходящую через рассматриваемую точку, то выражение (11.1) примет вид

$$D_r D_j \mathbf{a} - D_j D_r \mathbf{a} = R_{rji}{}^n a_n \mathbf{r}^i du^r du^j, \quad (11.3)$$

так как $dw=du^r$, $dt=du^j$. Левая часть (11.3) называется вторым альтернативным дифференциалом векторной функции. Если векторную функцию взять в виде разложения по касательному базису $\mathbf{a}=a^i(u^1, u^2, u^3)=r_i$, то проведя аналогичный вывод, получим следующее выражение для второго альтернативного дифференциала векторной функции

$$D_r D_j \mathbf{a} - D_j D_r \mathbf{a} = -R_{rji}{}^n a^i \mathbf{r}_n du^r du^j. \quad (11.4)$$

Из формулы (11.3) видно, что тензор кривизны кососимметричен по первым двум индексам

$$R_{rji}{}^n = -R_{jri}{}^n. \quad (11.5)$$

Компоненты тензора кривизны (11.2) являются трижды ковариантными и один раз контравариантными. С помощью компонент метрического тензора можно получить полностью ковариантные компоненты тензора кривизны

$$R_{rjik} = g_{nk} R_{jri}{}^n.$$

Если над тензором кривизны выполнить операцию свертки по индексам n, r , то мы получим тензор Риччи, ковариантные компоненты которого равны

$$R_{ji} = R_{jni}{}^n. \quad (11.6)$$

В евклидовом пространстве все компоненты тензора кривизны равны нулю:

$$R_{rj i}^n = \frac{\partial \Gamma_{ir}^n}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial u^r} + \Gamma_{kj}^n \Gamma_{ir}^k - \Gamma_{kr}^n \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Двухмерное пространство на некоторой поверхности в общем случае не является евклидовым и имеет ненулевой тензор кривизны. Плоская поверхность представляет собой пример евклидова двухмерного пространства. Хотя координатные линии на плоскости могут быть кривыми, все компоненты тензора кривизны плоского пространства равны нулю. Пространства, для которых компоненты тензора кривизны везде равны нулю, по аналогии с поверхностями называются плоскими. Изучением пространств с ненулевым тензором кривизны занимается риманова геометрия.

Ковариантные производные компонент тензора.

Метрический тензор является тензором второго ранга, а векторы являются тензорами первого ранга. По аналогии с записью векторов в виде $\mathbf{a} = a_i \mathbf{r}^i = a^i \mathbf{r}_i$ можно записать тензор второго ранга, например, метрический в виде суммы диад базисных векторов

$$\mathbf{G} = g_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k = g^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k. \quad (11.7)$$

Дифференцируя тензор в данном представлении по правилу дифференцирования суммы и произведения функций, получим выражение для ковариантных производных компонент тензора второго ранга

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k)}{\partial u^j} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k + g_{ik} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^j} \mathbf{r}^k + g_{ik} \mathbf{r}^i \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial u^j} = \\ &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k - g_{ik} \Gamma_{nj}^i \mathbf{r}^n \mathbf{r}^k - g_{ik} \mathbf{r}^i \Gamma_{nj}^k \mathbf{r}^n = \\ &= \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - g_{nk} \Gamma_{ij}^n - g_{in} \Gamma_{kj}^n \right) \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k = \nabla_j g_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k)}{\partial u^j} &= \frac{\partial g^{ik}}{\partial u^j} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k + g^{ik} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} \mathbf{r}_k + g^{ik} \mathbf{r}_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial u^j} = \\ &= \frac{\partial g^{ik}}{\partial u^j} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k + g^{ik} \Gamma_{ij}^n \mathbf{r}_n \mathbf{r}_k + g^{ik} \mathbf{r}_i \Gamma_{kj}^n \mathbf{r}_n = \\ &= \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^j} + g^{nk} \Gamma_{nj}^i + g^{in} \Gamma_{kj}^k \right) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k = \nabla_j g^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k, \end{aligned} \quad (11.8)-(11.9)$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_j g_{ki} &= \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - g_{ni} \Gamma_{kj}^n - g_{kn} \Gamma_{ij}^n, \\ \nabla_j g^{ki} &= \frac{\partial g^{ki}}{\partial u^j} + g^{ni} \Gamma_{nj}^k + g^{kn} \Gamma_{nj}^i\end{aligned}\quad (11.10)$$

— ковариантные производные компонент метрического тензора. Как и следовало ожидать, из соотношений (10.33) и (10.34) ковариантные производные компонент метрического тензора равны нулю. Равенства (11.10) и (11.11) представляют собой определения ковариантных производных ковариантных и контравариантных компонент тензоров второго ранга (вместо компонент метрического тензора могут быть подставлены компоненты любого другого тензора второго ранга, так как при выводе никакие свойства компонент не использовались).

Аналогично записи векторов в виде $\mathbf{a} = a_i \mathbf{r}^i = a^i \mathbf{r}_i$ можно записать тензор произвольного ранга в виде суммы произведений его компонент на соответствующие базисные векторы, например, $\mathbf{T} = t_m^{ki} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m$. Каждому верхнему индексу компоненты тензора соответствует вектор касательного базиса \mathbf{r}^i , а каждому нижнему индексу — вектор взаимного базиса \mathbf{r}_i . Используя аналогию с векторами, можно получить формулы для ковариантных производных компонент тензора произвольного ранга. Например, дифференцируя правую часть выражения \mathbf{r}^i правилам дифференцирования суммы и произведения функций

$$\begin{aligned}\frac{\partial (t_m^{ki} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m)}{\partial u^j} &= \frac{\partial t_m^{ki}}{\partial u^j} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m + t_m^{ki} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial u^j} \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m + t_m^{ki} \mathbf{r}_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} \mathbf{r}^m + t_m^{ki} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \frac{\partial \mathbf{r}^m}{\partial u^j} = \\ &= \frac{\partial t_m^{ki}}{\partial u^j} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m + t_m^{ki} \Gamma_{kj}^n \mathbf{r}_n \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m + t_m^{ki} \Gamma_{ij}^n \mathbf{r}_k \mathbf{r}_n \mathbf{r}^m - t_m^{ki} \Gamma_{nj}^m \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^n = \\ &= \frac{\partial t_m^{ki}}{\partial u^j} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m + t_m^{ni} \Gamma_{nj}^k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m + t_m^{kn} \Gamma_{nj}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m - t_n^{ki} \Gamma_{mj}^n \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m = \\ &= \left(\frac{\partial t_m^{ki}}{\partial u^j} + t_m^{ni} \Gamma_{nj}^k + t_m^{kn} \Gamma_{nj}^i - t_n^{ki} \Gamma_{mj}^n \right) \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m = \nabla_j t_m^{ki} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m\end{aligned}$$

и взяв компоненты при одинаковых триадах базисных векторов результата, получим выражения для ковариантных производных смешанных компонент тензора третьего ранга

$$\nabla_j t_m^{ki} = \frac{\partial t_m^{ki}}{\partial u^j} + t_m^{ni} \Gamma_{nj}^k + t_m^{kn} \Gamma_{nj}^i - t_n^{ki} \Gamma_{mj}^n. \quad (11.12)$$

Из полученного результата можно сформулировать общее правило вычисления ковариантной производной компонент тензора произвольного ранга. Кроме частной производной данной компоненты

$\frac{\partial t_{***}^{***}}{\partial u^j}$ (индексы заменены точками) в ковариантной производной добавляются еще несколько сумм, каждая сумма соответствует одному из индексов. Так каждому нижнему индексу соответствует сумма вида $- t_{***}^{***} \Gamma_{*j}^n$, а каждому верхнему индексу соответствует сумма вида $+ t_{***}^{*n} \Gamma_{nj}^*$, где значение соответствующего индекса (обозначенного точкой) переходит от компоненты к символам Кристоффеля, а по индексу n роизводится суммирование. В символической записи это выглядит так:

$$\nabla_j t_{***}^{***} = \frac{\partial t_{***}^{***}}{\partial u^j} + \dots + t_{***}^{*n} \Gamma_{nj}^* + \dots - \dots - t_{***}^{***} \Gamma_{*j}^n - \dots$$

Оператор Гамильтона.

Ковариантные производные компонент тензора в свою очередь являются компонентами некоторого нового тензора $\mathbf{T} = \nabla_j t_m^{ki} \mathbf{r}^j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m$. Символ ∇ обозначает набла-оператор или оператор Гамильтона, формальная запись которого представляется в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial u^j} \mathbf{r}^j = \frac{\partial}{\partial u^1} \mathbf{r}^1 + \frac{\partial}{\partial u^2} \mathbf{r}^2 + \frac{\partial}{\partial u^3} \mathbf{r}^3. \quad (11.13)$$

Оператору Гамильтона приписывают атрибуты вектора: он может действовать на тензоры тензорно (результатом является тензор, ранг которого на единицу выше ранга исходного тензора), скалярно (при этом ранг результата на единицу меньше ранга исходного тензора) и векторно (при этом ранг результата равен рангу исходного тензора):

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{a} &= \mathbf{r}^j \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = \mathbf{r}^j \mathbf{r}^i \left(\frac{\partial a_i}{\partial u^j} - a_n \Gamma_{ij}^n \right) = \nabla_j a_i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^i = \text{grad } \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{r}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}^i \left(\frac{\partial a_i}{\partial u^j} - a_n \Gamma_{ij}^n \right) = \nabla_j a^j = \text{div } \mathbf{a}, \\ \nabla \times \mathbf{a} &= \mathbf{r}^j \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = \mathbf{r}^j \times \mathbf{r}^i \left(\frac{\partial a_i}{\partial u^j} - a_n \Gamma_{ij}^n \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{jik} \mathbf{r}_k \nabla_j a_i = \text{rot } \mathbf{a}.\end{aligned}\tag{11.14)-(11.16}$$

Например, в результате действия его на скаляр f (тензор нулевого ранга) получим градиент скаляра

$$\nabla f = \mathbf{r}^j \frac{\partial f}{\partial u^j} = \mathbf{r}^1 \frac{\partial f}{\partial u^1} + \mathbf{r}^2 \frac{\partial f}{\partial u^2} + \mathbf{r}^3 \frac{\partial f}{\partial u^3} = \text{grad } f.$$

Для тензора $\mathbf{T} = t_m^{ki} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m$ результат действия оператора Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{T} &= \mathbf{r}^j \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^j} = \nabla_j t_m^{ki} \mathbf{r}^j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m = \text{grad } \mathbf{T}, \\ \nabla \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{r}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^j} = \nabla_j t_m^{ji} \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m = \text{div } \mathbf{T}, \\ \nabla \times \mathbf{T} &= \mathbf{r}^j \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^j} = \frac{e^{jqn}}{\sqrt{g}} g_{kq} \nabla_j t_m^{ki} \mathbf{r}_n \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m = \frac{e^{jkn}}{\sqrt{g}} \nabla_j t_{km}^i \mathbf{r}_n \mathbf{r}_i \mathbf{r}^m = \text{rot } \mathbf{T}.\end{aligned}$$

Оператор Гамильтона может воздействовать несколько раз на один и тот же объект. Так скалярное произведение операторов Гамильтона называется оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} - g^{ik} \Gamma_{ik}^j \frac{\partial}{\partial u^j}.\tag{11.17}$$

Например, действие оператора Лапласа на скаляр записывается в виде

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \text{div grad } f.$$

В декартовой прямоугольной системе координат оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}. \quad (11.18)$$

Оператор Гамильтона используется при описании тензорных (в частом случае скалярных или векторных) полей. Приведенные формулы позволяют записывать уравнения для математических объектов безотносительно к какой-либо системе координат. Если некоторый вектор $\mathbf{a}=\mathbf{a}(u^1, u^2, u^3)$ является функцией своего положения в пространстве, то дифференциал этого вектора $d\mathbf{a}$ с использованием оператора Гамильтона можно выразить следующим образом:

$$d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} du^j = du^n \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}^j \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^j} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a})^\top \cdot d\mathbf{r}, \quad (11.19)$$

где мы использовали обозначение $d\mathbf{r}=du^n \mathbf{r}_n$.

Формулы для векторных функций.

Итак, мы получили формулы для работы с геометрическими объектами в криволинейной системе координат. Для моделируемых нами кривых и поверхностей всегда будем считать известными определяющие их координатные функции. Умея вычислять производные векторных функций в криволинейной системе координат, мы сможем получить всю геометрическую информацию об объекте. Для этого необходимо знать зависимости (10.2), которые по формулам (10.4) позволят вычислить касательный базис. Всю остальную геометрическую информацию можно описать в терминах криволинейной системы координат. Полученные выше формулы позволяют представлять векторные функции и их производные в виде разложения их по касательному или взаимному базису с помощью соотношений

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{r}^k = g^{ki} \mathbf{r}_i, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jk}, \\ \Gamma_{ij}^n &= \frac{1}{2} g^{nk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right), \quad \mathbf{a} = a_k \mathbf{r}^k = a^k \mathbf{r}_k, \\ \mathbf{a}'(t) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da^i}{dt} + a^n \Gamma_{nj}^i \frac{du^j}{dt} \right) \mathbf{r}_i = \left(\frac{da_i}{dt} - a_n \Gamma_{ij}^n \frac{du^j}{dt} \right) \mathbf{r}^i. \end{aligned} \quad (11.20)$$

1.12. Ортогональные криволинейные координаты

Описание геометрии объектов в криволинейных координатах является достаточно сложным. На практике в большинстве случаев используются ортогональные криволинейные координаты. В ортогональной системе координат координатные линии различного семейства взаимно ортогональны. Взаимно ортогональны и векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ касательного базиса, так как они направлены по касательным к соответствующим координатным линиям.

В ортогональной криволинейной системе координат векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ касательного базиса и соответствующие им векторы $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ взаимного базиса совпадают по направлению, но длина их в общем случае различна; недиагональные компоненты метрического тензора равны нулю: т. е. $g_{ij}=0, g^{ij}=0$ при $i \neq j$, а $g^{ii}=1/g^{ii}$.

Часть символов Кристоффеля в ортогональной криволинейной системе координат равна нулю и, следовательно, многие формулы упрощаются.

Цилиндрическая система координат.

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую систему координат. Параметрами цилиндрической системы являются полярный радиус $u^1=r$ полярный угол $u^2=\varphi$ и вертикальная ось $u^3=z$.

Цилиндрические координаты r, φ, z связаны с декартовыми координатами x^1, x^2, x^3 равенствами

$$r = \sqrt{x^1 x^1 + x^2 x^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{x^2}{x^1}, \quad z = x^3.$$

Обратные зависимости имеют вид

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi, \quad x^3 = z.$$

Матрица Якоби перехода от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической системе координат равна:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Компоненты метрического тензора в новой системе координат определяются по формуле

$$g_{kn} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^j}{\partial u^n} \delta_j^i,$$

где δ_j^i — символы Кронекера (10.7). Цилиндрическая система координат является ортогональной, компоненты метрического тензора и отличные от нуля символы Кристоффеля в ней равны

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = r, \quad \Gamma_{22,1} = -r,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Как можно заметить, в цилиндрических координатах длины первого и третьего векторов касательного базиса равны единице, а длина второго вектора, соответствующего полярному углу, равна r .

Векторные функции в цилиндрической системе координат будем выражать с помощью векторов касательного и взаимного базисов следующим образом:

$$\mathbf{a} = a^r \mathbf{e}_r + a^\varphi \mathbf{e}_\varphi + a^z \mathbf{e}_z = a_r \mathbf{e}^r + a_\varphi \mathbf{e}^\varphi + a_z \mathbf{e}^z. \quad (12.1)$$

Частные производные векторов касательного базиса (10.14) по цилиндрическим координатам равны

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -r \mathbf{e}_r, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{10.25}$$

Частные производные векторов взаимного базиса (10.25) по цилиндрическим координатам равны

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{e}^r}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}^r}{\partial \varphi} &= r \mathbf{e}^\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}^r}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{e}^\varphi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \mathbf{e}^\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}^\varphi}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{r} \mathbf{e}^r, & \frac{\partial \mathbf{e}^\varphi}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{e}^z}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}^z}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}^z}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned}$$

Мы видим, что некоторые векторы касательного и взаимного базисов цилиндрической системы координат изменяются при переходе от одной точки пространства к другой. Все это в общем случае усложняет описание геометрических объектов, но в некоторых частных случаях использование криволинейных систем является оправданным. Формула (10.21) для производной векторной функции в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da^r}{dt} - r a^\varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{da^\varphi}{dt} + \frac{a^\varphi}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{a^r}{r} \frac{d\varphi}{dt} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{da^z}{dt} \mathbf{e}_z.
 \tag{10.26}$$

Пример кривой.

Рассмотрим векторную функцию, описывающую один виток цилиндрической спирали в цилиндрической системе координат. Пусть ось спирали параллельна \mathbf{e}_z и проходит через начало координат, ее радиус равен ρ , а шаг равен h . Опишем спираль функциями координат:

$$\mathbf{r}(t) = \rho, \quad \varphi(t) = t, \quad z(t) = h \frac{t}{2\pi}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Касательная спирали в соответствии с (10.20) описывается векторной функцией

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{e}_\varphi + \frac{h}{2\pi} \mathbf{e}_z.$$

Производная векторной функции спирали в соответствии с формулой (12.3) равна

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\rho \mathbf{e}_r.$$

В каждой точке спирали она направлена к ее оси и имеет длину ρ .

В дальнейшем при построении кривых линий и поверхностей мы будем использовать декартову прямоугольную систему координат, как наиболее удобную для вычисления производных векторных функций в евклидовом пространстве. При этом будем использовать нижние индексы, так как в декартовой прямоугольной системе координат ковариантные и контравариантные компоненты равны.

1.13. Математическая модель геометрии объектов

Моделирование реального или воображаемого объекта представляет собой совокупность действий, которые позволяют создавать его математическую модель, редактировать ее, изменять ее положение и ориентацию в пространстве и обеспечивать взаимодействие с другими моделями. Взаимодействием мы называем выполнение различных операций над моделями: установление зависимости параметров одной модели от параметров других моделей, определение взаимного положения моделей. Для выполнения этих действий необходима информация об объекте. Геометрическая информация об объекте может храниться в виде структуры данных или может вычисляться.

Определим математическую модель реального или воображаемого объекта как совокупность данных и функций, позволяющих получить необходимую информацию об объекте и изменять его модель требуемым образом (рис. 13.1).

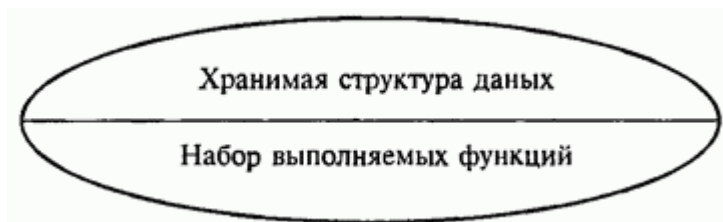


Рис. 13.1. Математическая модель

Программную реализацию структуры данных и функций называют классом. Геометрические объекты будут иметь свои данные и свои функции. Для построения точки в структуре ее данных достаточно хранить три координаты и иметь функции выполнения операций над радиус-векторами. Для построения произвольной линии нужно знать зависимость ее радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ от параметра, область изменения параметра и иметь функции вычисления производных радиус-вектора. Для построения поверхности нужно знать зависимость ее радиус-вектора $\mathbf{r}(u, v)$ от параметров, область изменения параметров и иметь функции вычисления частных производных радиус-вектора. Тело мы будем описывать совокупностью ограничивающих его поверхностей, дополненной информацией об их связях друг с другом.

С математической точки зрения все геометрические объекты равноправны. Для них существует ряд общих выполняемых функций. Все геометрические объекты могут быть подвержены модификациям сдвига, поворота, масштабирования, симметрии, поэтому они должны иметь функции, соответствующие этим действиям. Кроме того, для работы с геометрическим объектом нужны функции создания объекта (конструкторы), удаления объекта (деструктор), функция создания копии объекта, функции доступа к данным объекта, функции редактирования данных объекта. Математическая модель должна быть дополнена функциями, обеспечивающими взаимодействие объектов и выполнение над ними различных операций.

Мы рассмотрели теоретические основы геометрического моделирования. Дальнейшее изложение будет посвящено конкретным моделям и методам их построения.

2. Введение в топологию

2.1. Топология линий

2.1.1. Идея непрерывности

В основе, в истоках каждого отдела математики можно видеть основную идею, которая пронизывает всё его здание и определяет его лицо. Основной идеей топологии является идея *непрерывности*. Она встречается уже в математическом анализе, но, подчиненная другим идеям анализа, не получает там заметного развития. Свое полное и всестороннее развитие идея непрерывности получает в топологии. Приведем два примера применения этой идеи.

Пример 1. Покажем, что кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

с произвольными действительными коэффициентами a, b, c имеет, по крайней мере, один действительный корень. Запишем уравнение (1) (при $x \neq 0$) в виде

$$x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right) = 0. \quad (2)$$

При очень большом $|x|$ слагаемые $\frac{a}{x}, \frac{b}{x^2}, \frac{c}{x^3}$ очень малы по модулю, а выражение в скобках мало отличается от единицы и потому положительно. Следовательно, при очень большом $|x|$ левая часть уравнения (2) имеет тот же знак, что и x^3 , т. е. тот же знак, что и x . Иначе говоря, при большом отрицательном x (точка x_0 на рис. 1) левая часть уравнения (1) отрицательна, а при большом положительном x (точка x_1) она положительна.

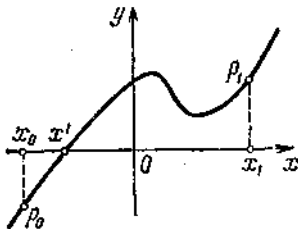


Рис.1

Так как график является *непрерывной кривой*, то, переходя с одной стороны оси абсцисс на другую (из точки p_0 в точку p_1), он пересечет эту ось хотя бы в одной точке. Точка x' пересечения графика с осью абсцисс и дает корень уравнения (1).

Задачи

1. Докажите, что всякое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.
2. Докажите, что если в уравнении (1) свободный член c отрицателен, то это уравнение имеет хотя бы один положительный корень.

Пример 2. Покажем, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать квадрат.

Проведем две параллельные прямые l, l' так, чтобы кривая K была расположена в полосе между ними, и будем перемещать сначала прямую l , а затем l' параллельно себе, до тех пор, пока они не коснутся кривой K . Полученные прямые m, m' (рис. 2, а) называются параллельными между собой *опорными прямыми* линии K .

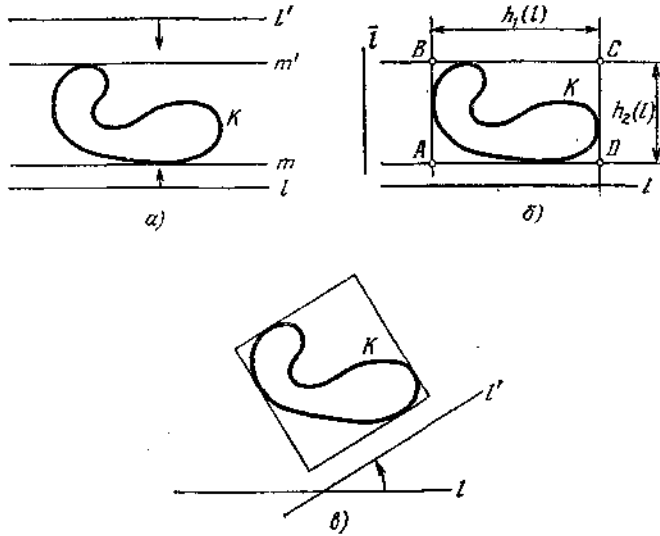


Рис. 2.

Проведем еще две опорные прямые, перпендикулярные l (рис. 2, б). Мы получим описанный вокруг линии K прямоугольник $ABCD$. Докажем, что при некотором направлении прямой l прямоугольник $ABCD$ превратится в квадрат.

Обозначим длину стороны AD , параллельной l , через $h_1(l)$, а длину стороны AB , перпендикулярной l , — через $h_2(l)$. Описанный прямоугольник будет квадратом при $h_1(l) - h_2(l) = 0$.

Пусть \bar{l} — прямая, перпендикулярная l . Описанный прямоугольник со сторонами, параллельными и перпендикулярными \bar{l} , совпадает с тем же прямоугольником $ABCD$, но параллельной \bar{l} является сторона AB , а перпендикулярной \bar{l} — сторона AD , т. е. $h_1(\bar{l}) = |AB| = h_2(l)$,

$h_2(\bar{l}) = |AD| = h_1(l)$. Таким образом,

$$h_1(\bar{l}) - h_2(\bar{l}) = -(h_1(l) - h_2(l)). \quad (3)$$

Будем теперь поворачивать прямую l , пока она не совпадет с \bar{l} . При этом описанный прямоугольник будет плавно меняться, а разность $h_1(l) - h_2(l)$ будет непрерывно зависеть от l . Но при переходе от l к \bar{l} эта разность меняет знак (см. (3)). Следовательно, при своем непрерывном изменении она (при некотором положении прямой l)

обращается в нуль, т. е. описанный прямоугольник превращается в квадрат (рис. 2, в).

Задачи

3. Докажите, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать ромб с углом 60° .
4. Докажите, что если диаметр плоской фигуры не превосходит d (т. е. расстояние между любыми ее точками не больше d), то существует правильный шестиугольник, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными сторонами равно d .
5. Докажите, что если диаметр пространственной фигуры не превосходит d , то существует правильный октаэдр, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными гранями равно d .

В топологии рассматриваются функции наиболее общего вида. Задать функцию — это значит каждой точке x некоторого множества A (области определения функции) поставить в соответствие определенную точку $f(x)$ некоторого другого множества B . Говорят в этом случае также, что задано *отображение* f множества A в множество B . Кратко это записывают в виде $f: A \rightarrow B$.

Пример 3. Обозначим через A контур равностороннего треугольника, а через B — описанную вокруг него окружность (рис. 3).

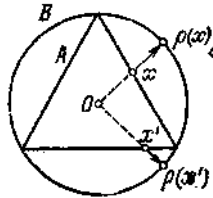


Рис. 3.

Тогда *центральное проектирование* p точек множества A на окружность является отображением $p: A \rightarrow B$. Функция $f: A \rightarrow B$ навивается *непрерывной* в точке $x_0 \in A$, если для x , «мало» отличающихся от x_0 , значения $f(x)$ и $f(x_0)$ тоже «мало» отличаются друг от друга.

Более точно, *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для любого x , отстоящего от x_0 менее чем на δ , соответствующее значение $f(x)$*

отстоит от $f(x_0)$ менее чем на ε . Это определение имеет смысл, если и в множестве A , и в множестве B определено расстояние между точками.

Чтобы яснее понять, что такое непрерывность отображения, рассмотрим пример разрыва, т. е. нарушения непрерывности отображения. Возьмем обычную резинку, которую применяют в аптеке для упаковки лекарств. Она имеет форму окружности. Будем ее осторожно деформировать, и вдруг она в некоторой своей точке a разорвется. Что это вначит? Некоторая ее часть B (рис. 4, а) которая была «близка» к a (т. е. находилась от нее на нулевом расстоянии), после разрыва (теперь ее обозначим через B') оказывается вовсе не близкой к a' (новое положение точки a).

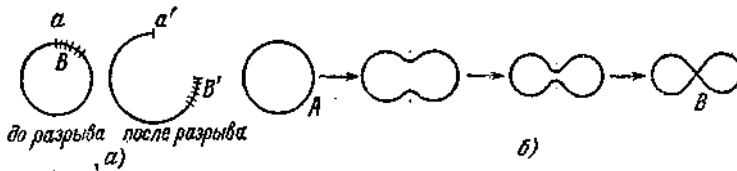


Рис. 4.

Итак, разрыв в точке a — это такое событие, когда некоторая часть B , фигуры, бывшая раньше близкой к a (пишем: Bda), становится неблизкой к новому положению a' точки a .

Теперь понятно следующее определение:

Отображение $f: x \rightarrow x'$ называется непрерывным в точке a , если всякая часть B отображаемой фигуры, бывшая близкой к a (т. е. Bda), после отображения переходит в положение B' , близкое к точке $a' = f(a)$ (т. е. $B'da'$).

Можно доказать, что это определение эквивалентно приведенному выше определению.

Если отображение $f: A \rightarrow B$ непрерывно в каждой точке x_0 множества A , то говорят просто, что отображение f непрерывно.

Наглядно непрерывность отображения можно себе представить, сказав, что «близкие» точки множества A переходят в «близкие» точки множества B , т. е. при отображении f не происходит разрывов, нарушения цельности множества A . Заметим, что при этом различные точки множества A могут образовывать «спайки» (рис. 4, б), «складки» и т. п.

Задачи

6. Докажите, что отображение, рассмотренное в примере 3, непрерывно.
7. Для произвольного действительного a обозначим через $f(a)$ наибольший из корней уравнения $x^3 - 3x + a = 0$. Является ли функция $f(x)$ непрерывной?

2.1.2. Чем занимается топология?

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *взаимно однозначным*, если в каждую точку множества B отображается точно одна точка множества A . Это означает, что, во-первых, никакие две различные точки множества A не переходят в одну и ту же точку множества B (не «склеиваются» при отображении f) и, во-вторых, каждая точка множества B поставлена в соответствие некоторой точке множества A (т. е. A отображается на всё множество B , а не на его часть). Для взаимно однозначного отображения $f: A \rightarrow B$ можно определить *обратное отображение* $f^{-1}: B \rightarrow A$ (которое каждой точке $y \in B$ ставит в соответствие точку множества A , переходящую в y при отображении f).

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *гомеоморфным отображением* (или *гомеоморфизмом*), если оно, во-первых, взаимно однозначно и, во-вторых, взаимно непрерывно, т. е. не только само отображение f непрерывно, но и обратное отображение f^{-1} также непрерывно.

Наглядно гомеоморфизм можно представлять себе как такое отображение одного множества на другое, которое происходит и без разрывов, и без склеиваний. Например, будем считать, что фигуры A, B «изготовлены» из очень прочного и эластичного материала, и будем допускать любые растяжения и искривления этого материала без разрывов и без образования складок и склеек; если мы сможем при этих условиях «наложить» фигуру A на B , то они гомеоморфны. Так, контур треугольника (или, вообще, любого многоугольника) гомеоморфен окружности.

Пример 4. Поверхность шара, поверхность куба, цилиндра — все гомеоморфны между собой. Однако эти поверхности не гомеоморфны *тору* (который можно наглядно представить себе как поверхность баранки или автомобильной камеры, рис. 5).



Рис. 5.

Поверхность гири (рис. 6) гомеоморфна тору.



Рис. 6,

Пример 5. Будем представлять себе буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита.

Пример 6. Пусть A — полуокружность с центром o , из которой исключены концевые точки m, n , а B — касательная к полуокружности, параллельная диаметру mn (рис. 7). Центральное проектирование $p: A \rightarrow B$ из центра o является гомеоморфизмом. Таким образом, прямая гомеоморфна полуокружности без концевых точек.

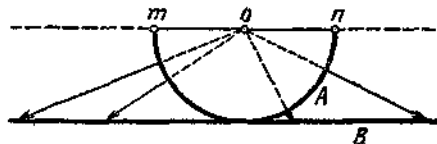


Рис. 7.

В свою очередь полуокружность гомеоморфна отрезку (ее можно распрямить). Следовательно, *прямая гомеоморфна открытому отрезку* (т. е. отрезку, из которого выброшены концевые точки).

Задачи

8. Докажите, что фигура, являющаяся объединением боковой поверхности цилиндра и его нижнего основания («стакан»), гомеоморфна кругу.

9. Докажите, что плоскость гомеоморфна открытому кругу (т. е. кругу, к которому не причисляются точки ограничивающей его окружности), а также сфере, из которой «выколота» (удалена) одна точка.

10. Докажите, что фигуры, изображенные на рис. 8 (лента, гомеоморфная боковой поверхности цилиндра, и дважды перекрученная лента) гомеоморфны между собой (На рис. 8 (и следующих) поверхности изображены «толстыми», т. е. как бы изготовленными из не-какого материала. Читатель должен иметь в виду, что это сделано только для наглядности, и должен представлять себе «математические» поверхности, не имеющие толщины.)

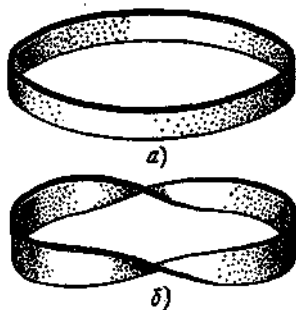


Рис. 8

Поучительно сравнить понятие гомеоморфизма и понятие конгруэнтности фигур. В геометрии рассматриваются отображения, сохраняющие расстояния между точками. Они называются *движениями* (или перемещениями). В результате движения каждая фигура перекладывается на новое место как твердое целое, без изменения расстояний. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью движения, называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые, как не отличающиеся (с геометрической точки зрения) друг от друга. В топологии рассматриваются отображения, более общие, чем движения, а

именно гомеоморфные отображения. Две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые, не отличающиеся друг от друга. *Те свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфных отображениях, называются топологическими свойствами фигур, или топологическими инвариантами* (от латинского слова *invariant* — неизменный).

Изучением топологических свойств фигур и занимается топология.

Задачи

11. Если фигура A состоит лишь из конечного числа точек, то через $n(A)$ обозначим число ее точек если же фигура A содержит бесконечно много точек, то условимся писать $n(A)=\infty$. Является ли $n(A)$ топологическим инвариантом?

12. Фигура A называется *вложимой в плоскость*, если она гомеоморфна некоторой фигуре, лежащей в плоскости. Например, «стакан» (задача 8) вложим в плоскость. Является ли свойство фигуры быть вложимой в плоскость топологическим инвариантом?

Не следует думать, что любые две гомеоморфные между собой фигуры можно перевести одну в другую, изгибая, растягивая и перемещая их (без разрывов и склеиваний) в пространстве. Например, фигуры, изображенные на рис. 8, нельзя перевести одну в другую таким способом, они «неодинаково расположены» в пространстве. Верхнюю ленту нужно разрезать и затем, дважды перекрутив, снова склеить по тем же самым точкам; лишь после этого ее удастся совместить со второй лентой. Этот прием (разрезание фигуры, а затем, после надлежащего растяжения, перемещения ее частей — обратное склеивание) часто используется в топологии для доказательства гомеоморфности двух фигур.

«Одинаковость расположения» двух фигур в пространстве (или в объемлющей их фигуре) уточняется понятием *изотопии*. Говорят, что две гомеоморфные фигуры A и B *изотопны* в объемлющей их фигуре P (или, иначе, *топологически одинаково расположены* в P), если существует гомеоморфное отображение фигуры P на себя, при котором фигура A переходит в B . Ленты на рис. 8 гомеоморфны, но не изотопны друг другу в пространстве (доказательство этого будет дано ниже). О свойствах расположения можно говорить, если задана *пара фигур*: фигура A и объемлющая ее фигура P . Изучением свойств

расположения (т. е. изучением топологических инвариантов пары фигур) также занимается топология.

Задачи

13. Линия A (рис. 9) не разрезает тор T на две части, а линия C разрезает. Изотопны ли A и C в фигуре T ? Изотопны ли A и C в трехмерном пространстве?

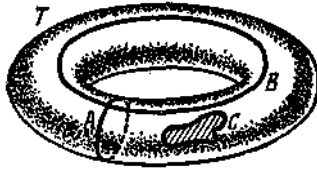


Рис. 9.



Рис. 10.

14. Докажите, что меридиан A и параллель B тора T (см. рис. 9) изотопны в T .

15. Докажите, что в фигуре восьмерки (рис. 10) любые две точки, отличные от x , изотопны.

2.1.3. Простейшие топологические инварианты

Выше (пример 4) мы говорили, что поверхность шара (т. е. сфера) не гомеоморфна тору, и вряд ли у читателя возникло сомнение в этом. Но как доказать, что две фигуры не являются гомеоморфными? Ведь из того, что мы не сумели найти гомеоморфного отображения одной фигуры на другую, не вытекает еще с достоверностью, что такого гомеоморфного отображения не существует.

Для доказательства того, что две фигуры не гомеоморфны друг другу, пользуются *топологическими инвариантами*. Пусть, например, с помощью некоторого правила каждой фигуре ставится в соответствие определенное число, причем так, что числа, соответствующие двум гомеоморфным фигурам, всегда оказываются равными. Тогда это число выражает некоторое свойство фигуры, сохраняющееся при гомеоморфных отображениях, т. е. являющееся топологическим инвариантом. Если теперь две фигуры A и B таковы, что соответствующие им числа оказались различными, то эти фигуры не могут быть гомеоморфными.

Пример 7. Буква Π представляет собой фигуру, состоящую из двух «кусков», из двух не связанных между собой частей. Остальные буквы русского алфавита, кроме $\dot{Й}$, $\ddot{Е}$, состоят из одного связного куска.

Число связанных «кусков», из которых состоит фигура (говорят также: *число компонент* фигуры), является топологическим инвариантом; если две фигуры гомеоморфны, то обе они состоят из одинакового числа компонент. Поэтому буква Ы не гомеоморфна, например, букве О, букве П, букве Ц и т. д.

Пример 8. На фигуре восьмерки (см. рис. 10) имеется такая точка x , что после удаления из восьмерки точки x вместе с близлежащими точками (рис. 11) мы получаем несвязную фигуру (содержащую более одной компоненты).



Рис. 11

Точку, обладающую этим свойством, называют *разбивающей точкой* фигуры. Никакая отличная от x точка x' восьмерки не является разбивающей (рис. 12).

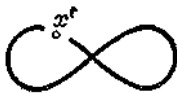


Рис. 12.

Понятия «разбивающая точка», «неразбивающая точка» топологически инвариантны: если x есть разбивающая точка фигуры A , а $f: A \rightarrow B$ — гомеоморфное отображение, то $f(x)$ есть разбивающая точка фигуры B . Поэтому **число** разбивающих точек данной фигуры есть ее топологический инвариант, число неразбивающих точек — также топологический инвариант.

Задачи

16. Для каждой из букв русского алфавита укажите, сколько разбивающих и неразбивающих точек она содержит. Докажите, что буквы О, Г, Т, Ы попарно не гомеоморфны.

17. Докажите, что для любого натурального n существует фигура, содержащая ровно n разбивающих точек, а также фигура, содержащая ровно n неразбивающих точек.

Пример 9. Пусть A — некоторая фигура, составленная из конечного числа дуг, и x — ее точка. Число дуг фигуры A , сходящихся в точке x , называется *индексом* точки x в фигуре A . В фигуре буквы Ж (рис. 13)

точка a имеет индекс 1, точка b имеет индекс 2, точка c — индекс 3, а точка d — индекс 4.

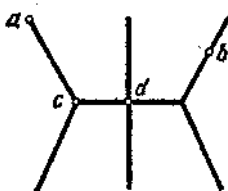


Рис. 13

Число точек индекса 1, содержащихся в фигуре A , число точек индекса 3, индекса 4 и т. д.— все это различные топологические инварианты фигуры A .

Задачи

18. Докажите, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны.
19. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при выполнении которого фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

Фигуры, состоящие из конечного числа дуг, называют в топологии *конечными графами*. В конечном графе имеется конечное число *вершин* и некоторые из этих точек соединяются непересекающимися дугами (*ребрами* графа); при этом две вершины графа можно соединять несколькими ребрами и, кроме того, допускаются замкнутые ребра («петли»), которые начинаются и кончаются в одной и той же вершине.

Задачи

20. Пусть G — конечный граф. Через $a_k(G)$ обозначим число вершин этого графа, имеющих индекс k . Докажите, что число ребер графа G равно $\frac{1}{2}(a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \dots)$.
21. Докажите, что во всяком конечном графе число вершин, имеющих нечетный индекс, четно.

Пример 10. Граф называется *уникурсальным*, если его можно «нарисовать одним росчерком», т. е. пройти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа

быть уникальным является, очевидно, топологически инвариантным. Однако этот топологический инвариант не является новым, а выражается через понятие индекса точки (см. задачу 24).

Задачи

22. Докажите, что если каждая вершина конечного графа имеет индекс, не меньший двух, то этот граф содержит линию, гомеоморфную окружности и составленную из ребер графа.

23. Докажите, что если все вершины конечного связного графа имеют четный индекс, то этот граф можно «нарисовать одним росчерком», начав движение из произвольно заданной его вершины и возвращаясь в ту же вершину.

24. Докажите, что связный граф тогда и только тогда уникарсален, когда он содержит не более двух вершин нечетного индекса.

С уникарсальными графами тесно связана задача о кенигсбергских мостах, рассмотренная еще Эйлером. В то время в Кенигсберге (ныне Калининград областной) было 7 мостов (рис. 14) через реку Прегель. Вопрос состоит в том, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти

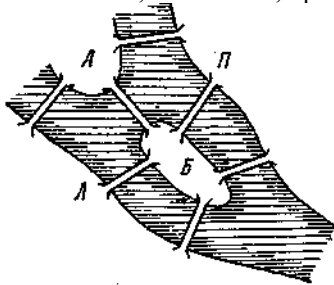


Рис. 14.

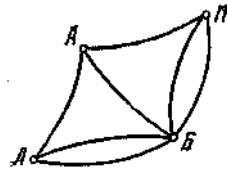


Рис. 15.

через каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города некоторый граф: вершина $Л$ обозначает левый берег, $П$ — правый берег, A и B острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис. 15). В этом графе все четыре вершины имеют нечетный индекс. Следовательно, граф не уникарсален, и потому требуемого маршрута прогулки не существует.

Задачи

25. Докажите, что, добавив еще один мост (где угодно на плане рис. 14), мы получим схему города, в котором можно пройти через каждый мост трчно по одному разу.

26. *Полным графом* называется конечный граф без петель, у которого любые две вершины соединены точно одним ребром. В каком случае полный граф уникурсален?

2.1.4. Эйлерова характеристика графа

Всякий граф можно постепенно «построить», добавляя одно ребро за другим. Например, можно в требуемом графе перенумеровать заранее все ребра, а затем вычерчивать последовательно первое ребро, второе, третье и т. д.

Пример 11. На рис. 16 показан граф, который мы хотим построить, и выбрана нумерация его ребер (некоторые ребра прерваны, чтобы показать наглядно их возможное расположение в пространстве).

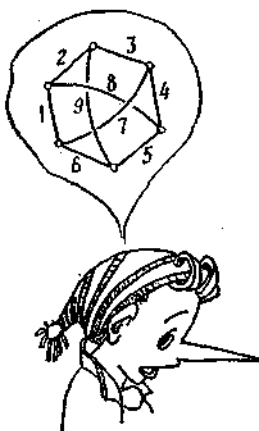


Рис. 16

Нумерация ребер на рис. 16 выбрана так, что при последовательном вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы. Если бы, однако, мы занумеровали ребра в обратном порядке, то при вычерчивании у нас получился бы несвязный

граф, содержащий три отдельно взятых ребра, и лишь потом, при вычерчивании новых ребер, мы получили бы связный граф. Естественно возникает вопрос: во всяком ли связном графе существует такая нумерация ребер, что при последовательном вычерчивании графа (в соответствии с этой нумерацией) все время получаются связные графы? Ответ на этот вопрос утвердителен (см. задачу 28). Иначе говоря, *всякий связный граф может быть получен следующим образом: мы берем одно ребро, затем присоединяем к нему еще одно ребро так, чтобы снова получился связный граф, затем присоединяем еще одно ребро (так, чтобы снова получился связный граф) и т. д.* Это утверждение можно назвать «теоремой о вычерчивании связных графов».

Задача

27. Докажите, что любой связный граф можно вычертить «одним росчерком», если разрешить проходить каждое ребро точно два раза.

28. Выведите из предыдущей задачи доказательство теоремы о вычерчивании связного графа.

29. Докажите, что любые две вершины связного графа G можно соединить в G *простой цепочкой ребер*, т. е. такой, что объединение ребер этой цепочки гомеоморфно отрезку.

Указание: если цепочка ребер, соединяющая a и b , дважды проходит через некоторую вершину c , то она содержит «замкнутую цепочку» (начинающуюся и кончающуюся в c), которую можно удалить.

30. Докажите, что если любые две вершины графа G можно соединить не менее чем двумя различными простыми цепочками, то граф G не имеет вершин индекса 1. Верна ли обратная теорема?

Контуром в графе называется замкнутая цепочка ребер, объединение которых представляет собой линию, гомеоморфную окружности (рис. 17).

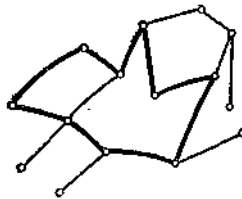


Рис. 17.

Связный граф, не содержащий ни одного контура, называется *деревом* (рис. 18).

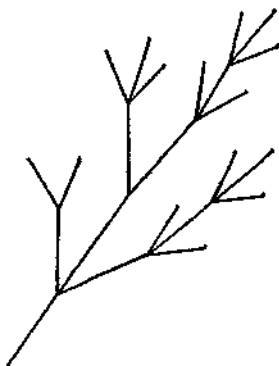


Рис. 18.

Мы докажем, что для любого дерева, имеющего V вершин и P ребер, справедливо соотношение

$$V - P = 1. \quad (4)$$

Для доказательства проведем индукцию по числу ребер P . При $P = 1$ (дерево имеет одно ребро и две вершины) соотношение (4) справедливо. Предположим, что для любого дерева, имеющего n ребер, соотношение (4) уже доказано, и пусть G — дерево, имеющее $n + 1$ ребро. Так как граф G связан, то его можно получить из некоторого связанного графа G' добавлением одного ребра r (это вытекает из «теоремы о вычерчивании связанного графа»). Граф G' содержит n ребер и тоже не содержит контуров, т. е. является деревом. По предположению индукции для дерева G' соотношение (4) справедливо, и потому в G' имеется $n + 1$ вершина. Заметим теперь, что только один конец добавляемого ребра r является вершиной графа G' (в противном случае, взяв в G' простую цепочку, соединяющую вершины a и b , и добавив к этой цепочке ребро r , мы получили бы контур в графе G ; рис. 19). Следовательно, при добавлении ребра r в графе G появляется одно новое ребро и одна новая вершина (рис. 20).

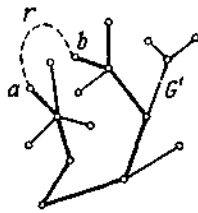


Рис. 19.

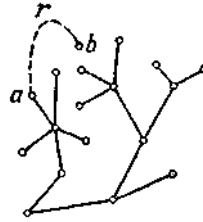


Рис. 20.

Иначе говоря, граф G имеет $n + 2$ вершины и $n + 1$ ребро, и потому соотношение (4) для него справедливо. Проведенная индукция доказывает равенство (4) для любого дерева.

Разность $V - P$, где V — число вершин, а P — число ребер графа G , называется *эйлеровой характеристикой* этого графа и обозначается через $\chi(G)$. Таким образом, *эйлерова характеристика любого дерева равна 1*.

Задачи

31. Граф, не содержащий контуров, называется *лесом*. Докажите, что если G — лес, то число деревьев, которые «растут» в нем (т. е. число компонент графа G), равно $\chi(G)$.

32. Докажите, что если G — дерево, то каждые две его вершины соединены только одной простой цепочкой. Верно ли обратное?

Пусть теперь G — связный граф, не являющийся деревом. Тогда в G имеется контур; пусть r_1 — какое-либо ребро, входящее в этот контур (рис. 21).

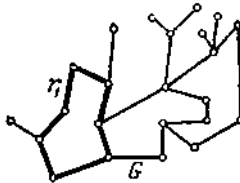


Рис. 21.

Удалив из G ребро r_1 , мы получим «вязный граф G' (поскольку концы выброшенного ребра r_1 соединены в G' простой цепочкой — оставшейся частью контура), причем вершины у графа G' — те же, что и у G . Если G' еще не является деревом, т. е. в G' также есть контур

(рис. 22), то мы можем взять произвольное ребро r_2 этого контура и, выбросив его, получить связный граф G'' с теми же вершинами, что и у G , и т. д.

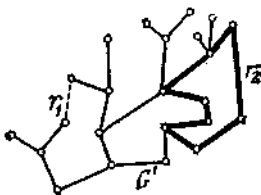


Рис. 22.

После выбрасывания какого-то ребра r_k мы получим связный граф G^* , содержащий все вершины графа G и уже не имеющий контуров, т. е. являющийся деревом. Оно называется *максимальным деревом* графа G , а ребра r_1, r_2, \dots, r_k называются *перемычками*.

Если V — число вершин графа G , то максимальное дерево G^* имеет те же V вершин. Согласно (4) G^* имеет $V - 1$ ребро, и потому число ребер графа G равно $V - 1 + k$ (чтобы из G^* получить G , надо «возвратить» k выброшенных ребер-перемычек). Следовательно,

$$\chi(G) = V - (V - 1 + k) = 1 - k. \quad (5)$$

Так как $k \geq 1$, то $\chi(G) \leq 0$. Таким образом, для любого связного графа G справедливо соотношение $\chi(G) \leq 1$; равенство достигается в том и только в том случае, если G — дерево

Далее, согласно (5) число перемычек $k = 1 - \chi(G)$. Иначе говоря, для получения графа G надо к его максимальному дереву добавить $1 - \chi(G)$ ребер-перемычек, каждое из которых соединяет две (возможно, совпадающие) вершины максимального дерева.

Задачи

33. Если связный граф G получается из некоторого дерева добавлением нескольких замкнутых ребер («петель»), то в G имеется единственное максимальное дерево. Верно ли обратное?

34. Докажите, что если граф G содержит l компонент, то $\chi(G) \leq l$. В каком случае достигается равенство?

35. Будем говорить, что в графе G задана *система токов*, если каждому ребру сопоставлено направление и неотрицательное число (ток), причем выполняется *правило Кирхгофа*: для каждой вершины сумма входящих в нее токов равна сумме исходящих. Докажите, что если G — дерево, то в нем существует только тривиальная система токов (все токи равны нулю).

36. Пусть G — связный граф, G^* — его максимальное дерево, а r_1, r_2, \dots, r_k — переемычки. Докажите, что если произвольно занять токи на ребрах r_1, r_2, \dots, r_k , то их можно однозначно дополнить токами на остальных ребрах так, чтобы получилась система токов в G .

Указание. Для каждой переемычки r_i существует единственный контур, содержащий ее и не содержащий других переемычек. Если пустить по этому контуру ток такой величины и направления, как указано на переемычке r_i , а затем взять сумму всех этих «контурных токов», то мы и получим требуемую систему токов на графе G . Если бы существовали две различные системы токов, совпадающие на переемычках, то их разность была бы нетривиальной системой токов на дереве G^* .

2.1.5. Индекс пересечения

В следующих двух примерах рассматриваются графы, не вложимые в плоскость.

Пример 12 («домики и колодцы»). На плоскости даны шесть точек D_1, D_2, D_3 (домики) и K_1, K_2, K_3 (колодцы); можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу, так чтобы никакие две тропинки не пересекались? Ответ отрицательный: если мы проведем все тропинки, кроме одной (рис. 23), то для последней тропинки уже «не будет места» на плоскости. Таким образом, граф P_1 изображенный на рис. 23, не вложим в плоскость.

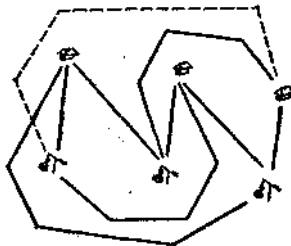


Рис. 23.

Пример 13. Обозначим через P_2 полный граф с пятью вершинами. На рис. 24 одно ребро прервано: для него «нет места» на плоскости.

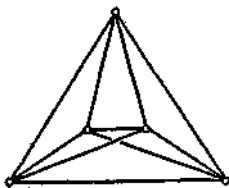


Рис. 24.

Таким образом, граф P_2 также не вложим в плоскость. Интересно отметить, что построенные графы P_1, P_2 являются «эталоном» графов, не вложимых в плоскость: *если граф не вложим в плоскость, то он обязательно содержит граф, гомеоморфный P_1 или P_2* . Это было доказано польским математиком К. Куратовским.

Задачи

37. Докажите, что граф, рассмотренный в примере 11 (рис. 16), не вложим в плоскость.
38. Ребрами графа служат стороны и наименьшие диагонали (слегка приподнятые над плоскостью, чтобы они попарно не пересекались) правильного n -угольника. Докажите, что при четном n этот граф может быть вложен в плоскость, а при нечетном — нет.
39. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали правильного $2n$ -угольника. Докажите, что при $n \geq 3$ этот граф не вложим в плоскость, но его можно расположить на торе.
40. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали правильного $(2n + 1)$ -угольника. Докажите, что при $n \geq 2$ этот граф не вложим в плоскость. Можно ли его расположить на торе?

Рассуждения, приведенные в примерах 12 и 13 («нет места» на плоскости) являются не доказательствами, а лишь пояснениями. Ниже мы изложим строгое доказательство того, что графы P_1, P_2 не вложимы в плоскость.

Пусть a, b — два отрезка на плоскости, ни один из которых не содержит конечных точек другого отрезка. Если эти отрезки пересекаются, то будем писать $J(a, b) = 1$, а если нет, то $J(a, b) = 0$. Число $J(a, b)$ назовем *индексом пересечения отрезков a и b* .

Конечное множество отрезков на плоскости будем называть *цепью*.

Отрезки, составляющие цепь, назовем ее *звеньями*, а точки, являющиеся концами звеньев,— *вершинами*.

Пусть x и y — две такие цепи, что ни одна из них не содержит ни одной вершины другой цепи. Отрезки, составляющие цепь x , обозначим через a_1, \dots, a_m , а отрезки, составляющие цепь y , — через b_1, \dots, b_n . Если сумма $\sum_{i,j} J(a_i, b_j)$ (т. е. сумма индексов пересечения каждого

из отрезков a_1, \dots, a_m с каждым из отрезков b_1, \dots, b_n) *четна*, то будем писать $J(x, y) = 0$, а если эта сумма *нечетна*, то $J(x, y) = 1$. Число $J(x, y)$ назовем *индексом пересечения* цепей x и y (точнее, индексом пересечения по модулю 2).

Цепь, в каждой вершине которой сходится четное число звеньев, будем называть *циклом* (по модулю два). Мы докажем, что *индекс пересечения двух циклов на плоскости всегда равен нулю*.

В самом деле, так как каждая вершина цикла имеет индекс, не меньший двух, то этот цикл содержит ломаную, гомеоморфную окружности (см. задачу 17). Если из цикла выбросить эту замкнутую ломаную, то останется снова цикл (каждая вершина имеет четный индекс). В оставшемся цикле можно снова выделить ломаную, гомеоморфную окружности, и т. д. Итак, *каждый цикл можно представить как объединение конечного числа ломаных, гомеоморфных окружности (причем эти ломаные попарно не имеют общих отрезков)*.

Поэтому для доказательства того, что индекс пересечения двух циклов x, y на плоскости всегда равен нулю, достаточно установить это в случае, когда каждый из циклов x, y представляет собой ломаную, гомеоморфную окружности. Сдвинув чуть-чуть вершины циклов x и y (что не изменит их индекс пересечения), мы можем добиться того, чтобы звенья, составляющие циклы x и y , были попарно не параллельными. Выберем теперь прямую l , не параллельную ни одной прямой, соединяющей какую-либо вершину цикла x с какой-либо вершиной цикла y .

Будем непрерывно перемещать цикл x (как твердое целое) параллельно прямой l (рис. 25).

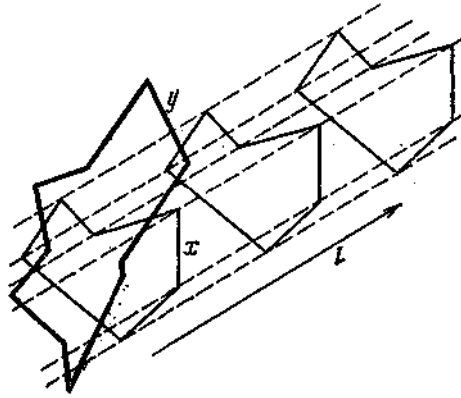


Рис. 25.

Индекс пересечения $J(x, y)$ мог бы изменяться лишь в те моменты, когда вершины одного из циклов x, y попадают на стороны другого (вершины цикла x не могут попасть в вершины цикла y в силу выбора прямой l). Однако в момент, когда некоторое звено a цикла x проходит через вершину q цикла y , число точек пересечения не меняет своей четности (рис. 26—28).



Рис. 26.

То же происходит и при прохождении вершин цикла x через стороны цикла y . Поэтому индекс пересечения $J(x, y)$ не меняется. Но в конце концов цикл x попадает в положение, в котором он не имеет общих точек с y (рис. 25), так что индекс пересечения становится равным нулю. Следовательно, и первоначально было $J(x, y)=0$. Теперь мы в состоянии доказать, что граф P_1 (пример 12), не вложим в плоскость. Две тропинки, ведущие от разных домиков к разным колодцам, условимся называть *несмежными*. Проведем (в виде ломаных линий) все требуемые тропинки (возможно, с пересечениями) и обозначим через I число точек пересечения по всем парам несмежных тропинок. Мы покажем, что *при любом способе проведения тропинок число I нечетно*.

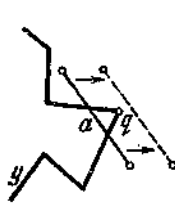


Рис. 27.

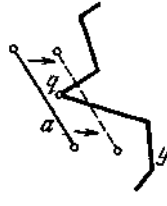


Рис. 28.

Предположим, что мы меняем положение одной тропинки, скажем, тропинки D_1K_1 . Первоначальное ее положение обозначим через x , а новое — через x' (рис. 29).

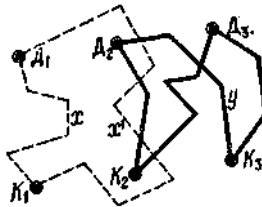


Рис. 29.

Несмежными с D_1K_1 являются четыре тропинки, соединяющие два оставшихся домика D_2, D_3 с двумя оставшимися колодцами K_2, K_3 . Они образуют цикл $D_2K_2D_3K_3D_2$, который мы обозначим через y . Ломаные x и x' , вместе взятые, также образуют цикл. Так как индекс пересечения любых двух циклов равен нулю, то $J(x, y) = J(x', y)$. Иначе говоря, число точек пересечения тропинки x с циклом y (т. е. со всеми несмежными ей тропинками) имеет ту же четность, что и число точек пересечения тропинки x' с циклом y . Таким образом, при замене тропинки x тропинкой x' число I не меняет своей четности. Но тогда ясно, что для любых двух расположений тропинок на плоскости число I имеет одну и ту же четность. Действительно, последовательно заменяя сначала одну тропинку первого расположения соответствующей тропинкой второго расположения, затем еще одну и т. д., мы постепенно заменим первое расположение тропинок вторым, а четность числа I , в силу доказанного, меняться не будет.

На рис. 23 имеется только одна точка пересечения тропинок, а потому для любого расположения тропинок число I нечетно. Следовательно, провести все тропинки без пересечений (т. е. так, чтобы было $I = 0$) невозможно и потому граф P_1 не вложим в плоскость.

Задачи

41. Докажите, что граф P_2 , рассмотренный в при мере 13, не вложим в плоскость.
42. Докажите, что на сфере (как и на плоскости) индекс пересечения любых двух циклов равен нулю. Покажите, что на торе существуют два цикла, индекс пересечения которых равен 1.

Пусть теперь a и b — два направленных отрезка, ни один из которых не содержит концов другой отрезка. Если, идя по направлению первого отрезка a мы увидим, что второй отрезок b пересекает его справа налево, то будем писать $J(a, b) = 1$; если слева направо, то $J(a, b) = -1$; наконец, если a и b не пересекаются, то $J(a, b) = 0$. Число $J(a, b)$ будем называть индексом пересечения направленных отрезков a и b .

Цепью (точнее, «целочисленной цепью» — в отличие от цепей по модулю 2, рассматривавшихся ранее) будем теперь называть конечное множество направленных отрезков на плоскости. *Индекс пересечения целочисленных цепей* x, y (рассматриваемых в определенном порядке: x — первая цепь; y — вторая) определяется, как и прежде;

$$J(x, y) = \sum_{i,j} J(a_i, b_j),$$

где a_1, \dots, a_m — направленные отрезки, составляющие цепь x , а b_1, \dots, b_n — направленные отрезки, составляющие цепь y . Наконец, цепь условимся называть *циклом* (точнее, целочисленным циклом), если для каждой вершины число входящих в нее направленных отрезков равно числу исходящих.

Задачи

43. *Направленным контуром* условимся называть замкнутую ломаную, гомеоморфную окружности, на звеньях которой отмечено стрелками некоторое направление обхода (так, что в каждой вершине имеется одно входящее звено и одно исходящее). Направленный контур является циклом. Докажите, что всякий цикл (целочисленный) можно представить как объединение конечного числа направленных контуров, которые попарно не имеют общих звеньев.
44. Докажите, что индекс пересечения любых двух целочисленных циклов равен нулю.

45. На рис. 30 цикл x состоит из двух отдельных направленных контуров.

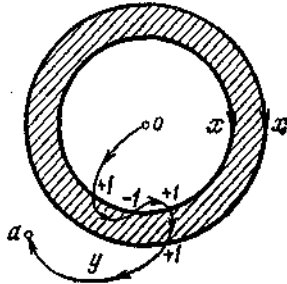


Рис. 30

Докажите, что точка a в том и только в том случае принадлежит внешней области кольца, если для любой направленной ломаной y , идущей от o к a , выполнено условие $J(x, y) = 2$. В каком случае точка a лежит внутри заштрихованной кольцевой области?

2.1.6. Теорема Жордана

Выше (см. рис. 25—28) мы доказали, что индекс пересечения любых двух циклов на плоскости равен нулю. Возможно, читатель готов предложить более простое доказательство: в каждой точке пересечения замкнутая ломаная x либо входит во внутреннюю область замкнутой ломаной y , либо выходит из внутренней области во внешнюю; так как число точек входа равно числу точек выхода (поскольку они чередуются), то общее число точек пересечения чётно.

Однако это доказательство можно признать корректным, если уже выяснен смысл понятия «внутренняя область», а это понятие вовсе не является таким простым, как кажется на первый взгляд. Выяснению его и посвящен этот пункт.

Замкнутая линия, гомеоморфная окружности, называется *простой замкнутой линией*. Теорема Жордана состоит в том, что *всякая простая замкнутая линия, расположенная на плоскости, разбивает эту плоскость на две области (внутреннюю и внешнюю)*. Поясним смысл этой теоремы. Возьмем две точки, p и q , не лежащие на простой замкнутой линии l . Если p и q можно соединить ломаной, не пересекающей l , то считают, что точки p и q лежат в одной и той же области относительно линии l . Если же любая ломаная, соединяющая p и q , пересекает l , то считают, что p и q лежат в разных областях.

Теорема Жордана утверждает, что линия l определяет на плоскости две области. Кажущаяся «очевидность» теоремы Жордана объясняется

лишь тем, что мы имеем в виду очень простые линии (окружность, контур выпуклого многоугольника и т. п.).

Пример 14. На рис. 31 изображена простая замкнутая ломаная.

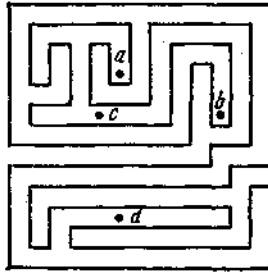


Рис. 31.

Однако вовсе не «очевидно», что она разрезает плоскость на две области; не сразу можно понять, в какой области (внутренней или внешней) лежат точки a, b, c, d .

Приведем доказательство теоремы Жордана. При этом ограничимся случаем, когда l — не произвольная простая замкнутая линия на плоскости, а простая замкнутая ломаная.

Пусть b_1, b_2, \dots, b_n — последовательные звенья ломаной l . Возьмем точки p, p' , симметричные относительно звена b_1 . Через точку p проведем отрезок, параллельный звену b_1 , до точки пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_1 и b_2 (рис. 32).

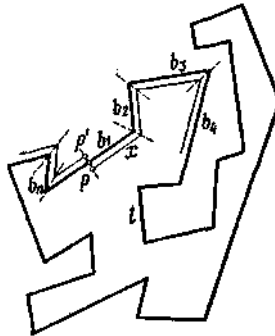


Рис. 32.

Из этой точки проведем отрезок, параллельный b_2 , до пересечения с биссектрисой угла между b_2 и b_3 и т. д. В результате мы получим ломаную x , звенья которой находятся на одном и том же расстоянии от соответствующих звеньев ломаной l . Если при этом расстояние $|pp'|$

достаточно мало, то линия x не пересекает линии l и, обойдя вокруг нее, должна вернуться либо в точку p , либо в p' . Однако в точку p' ломаная x прийти не может: если бы она соединяла точки p и p' , то, присоединив к x отрезок pp' , мы получили бы цикл, который с циклом l пересекается в единственной точке, т. е. индекс пересечения этих двух циклов был бы равен 1, что невозможно. Итак, x представляет собой замкнутую ломаную, один раз обходящую ломаную l . Аналогично получается ломаная x' , выходящая из p' один раз обходящая l и возвращающаяся в p' .

Пусть теперь c — произвольная точка, не лежащая на линии l . Тогда ее можно соединить, не пересекая l , либо с p , либо с p' , мы можем провести из точки c луч, пересекающий линии x , x' , и от точки c пройти до первой точки пересечения этого луча с какой-либо из линий x , x' , а затем по этой линии дойти до точки p или p' .

Нетрудно понять, что если из точки c проведены две различные ломаные y , z , не пересекающие l и оканчивающиеся в p или p' , то обе они оканчиваются в одной и той же точке. В самом деле, если бы они оканчивались в разных точках (рис. 33), то ломаная $y \cup z$ вместе с отрезком pp' составляла бы цикл, индекс пересечения которого с циклом l равен 1, что невозможно.

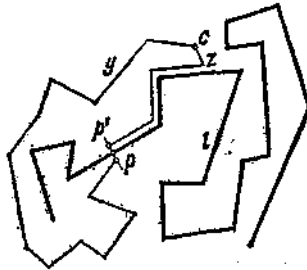


Рис. 33

Обозначим теперь через U множество всех точек плоскости, которые можно, не пересекая l , соединить с точкой p , а через V — множество точек, которые можно, не пересекая l , соединить с p' . Тогда U , V и будут теми двумя областями, на которые, как утверждает теорема Жордана, линия l разбивает плоскость. В самом деле, если точки c_1 , c_2 принадлежат одной области (скажем, U), то существуют ломаные y_1 , y_2 не пересекающие l , которые соединяют c_1 , c_2 с точкой p . Объединение их представляет собой ломаную, соединяющую c_1 и c_2 , и не пересекающую l . Итак, две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей l . Если же точки c_1 , c_2 принадлежат различным областям, то их нельзя соединить ломаной,

не пересекающей l (иначе, как и выше, мы получили бы цикл, имеющий с l индекс пересечения 1).

Заметим, что все «далекие» точки плоскости расположены в одной и той же области относительно линии l . Поэтому одна из двух областей, определяемых линией l , — неограниченная, а другая — ограниченная. Неограниченную область называют *внешней*, а ограниченную — *внутренней*.

Задачи

46. Если ломаная l сложная (см. рис. 31), то трудно определить «на глаз», во внутренней или внешней области лежит точка c (т. е. можно ли, отправляясь из c , выйти из «лабиринта», образованного линией l). Докажите, что если луч, исходящий из точки c и не проходящий через вершины ломаной l , пересекает l в четном числе точек, то c лежит во внешней области, а если в нечетном, то во внутренней.

47. Докажите, что всякая простая замкнутая линия на сфере разбивает сферу на две области.

48. На плоскости проведены k ломаных линий, каждая из которых соединяет две заданные точки p и q . Докажите, что если других общих точек ломаные попарно не имеют, то плоскость разбита на k областей.

Укажем (без доказательства), что *любые две простые замкнутые линии l_1, l_2 на плоскости изотопны между собой*, т. е. существует гомеоморфное отображение плоскости на себя, которое переводит l_1 в l_2 . Это предложение отличается от теоремы Жордана, оно утверждает нечто большее. В самом деле, пусть l_1 — окружность, а l_2 — произвольная простая замкнутая линия на плоскости. Гомеоморфное отображение плоскости на себя, переводящее l_1 в l_2 , переводит внешнюю область окружности l_1 во внешнюю область линии l_2 , а внутреннюю область окружности l_1 (т. е. открытый круг) — во внутреннюю область линии l_2 . Таким образом, *объединение простой замкнутой линии l_2 и ее внутренней области гомеоморфно кругу*. Теорема Жордана об этом ничего не говорит, утверждая лишь существование двух областей, внутренней и внешней.

2.1.7. Что такое линия?

Евклид определяет линию как «длину без ширины». Это, конечно, не определение, а лишь наглядное описание линий. Следующий пример показывает, однако, что это описание вряд ли можно считать удачным.

Пример 15. Возьмем квадрат площади 1 (рис. 34, а) и выбросим из него крест (рис. 34, б), причем ширину полосок креста подберем так, чтобы площадь креста была равна $1/4$.

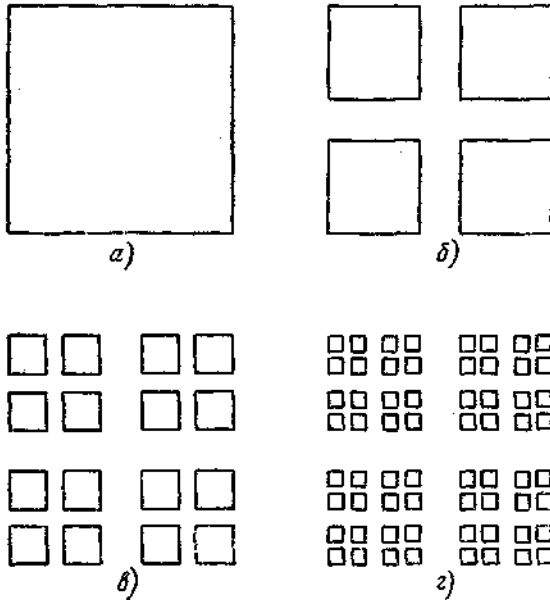


Рис. 34.

В каждом из оставшихся квадратов снова вырежем по кресту (рис. 34, в), причем так, чтобы сумма площадей крестов была равна $1/8$. В каждом из оставшихся 16 маленьких квадратов вновь выбросим по кресту (рис. 34, г) так, чтобы сумма площадей выбрасываемых кусков была, равна $1/16$, и т. д. Обозначим через A «предельную фигуру», т. е. пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$, где A_n — фигура, которая остается после проведения n этапов построения. Фигура A как бы «рассыпается» на отдельные точки (ибо остающиеся квадратики делаются все меньше) и тем не менее имеет положительную площадь. В самом деле, сначала мы выбросили из квадрата $1/4$ его площади, затем $1/8$,

затем $1/16$ и т. д. В пределе у нас остается фигура A , имеющая площадь $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right)$. Так как сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, записанной в скобках, равна $1/2$, то площадь предельной фигуры A равна $1/2$.

Построим теперь *простую дугу* (т. е. фигуру, гомеоморфную отрезку), которая проходит через все точки множества A . Для этого возьмем изогнутую полосу, содержащую четыре квадрата, полученных на первом этапе построения (рис. 35, а). Затем сделаем полосу более узкой и изогнутой, так что она будет содержать все квадраты, полученные на втором этапе (рис. 35, б), затем на третьем (рис. 35, в) и т. д.

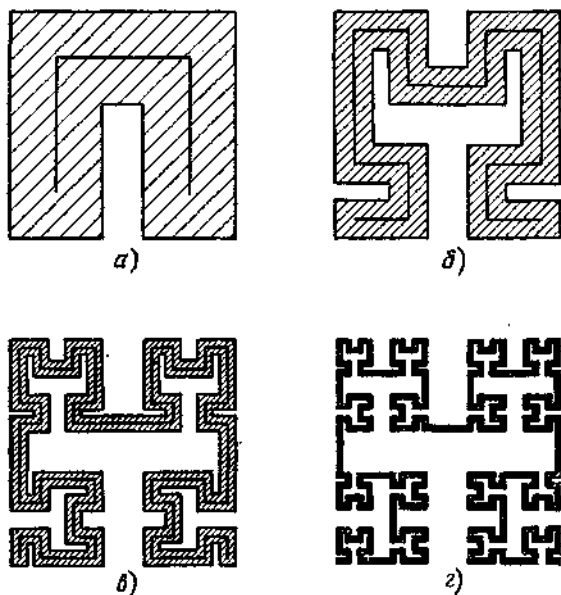


Рис. 35.

После n этапов этого построения мы получаем полосу B_n , которая содержится в предыдущих полосках и содержит фигуру A_n (а следовательно, и фигуру A). Пересечение $B_1 \cap B_2 \cap \dots$ этих полосок, т. е. их «предельную фигуру», обозначим через B ; она также содержит A , и потому площадь фигуры B не меньше $1/2$. Рис. 35 наглядно показывает, что B является чрезвычайно «извилистой» линией

(простой дугой). Эта линия имеет положительную площадь, т. е. вряд ли может быть названа «длиной без ширины».

Евклид дает также описание линии как «границы поверхности». Однако и понятие «граница», как мы сейчас увидим, таит в себе много неожиданного. Мы привыкли считать, что к каждому участку линии плоскость примыкает «с двух сторон». Например, если l — простая замкнутая линия, то обе области, U и V , определяемые линией 2, примыкают к ней на всем ее протяжении (т. е. как угодно близко к любой точке $x \in l$ имеются и точки области U и точки области V). Кажется «наглядно очевидным», что линия не может быть совместной границей более чем двух областей на плоскости, которые примыкают к этой линии на всем ее протяжении. Однако здесь интуиция нас обманывает.

Пример 16. Покажем, что на плоскости существует линия, являющаяся *совместной границей трех областей*. Такие линии обнаружил японский математик Вада.

Предположим, что имеется окруженная морем земля и на ней два озера: теплое и холодное. Для подведения воды от озер и моря к суше проводятся каналы. В первый день от теплого озера отводится канал (не сообщающийся с морской водой и водой холодного озера) так, чтобы не далее чем на расстоянии l от каждой точки суши была вода теплого озера (рис. 36).

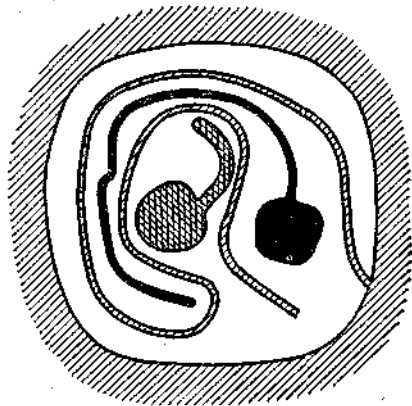


Рис. 36

Во второй день канал отводится от холодного озера, причем он нигде не сообщается с морем, теплым озером и построенным на день раньше каналом, и работа продолжается до тех пор, пока от каждой точки оставшейся суши не далее чем на расстоянии l будет вода холодного

озера. В третий день канал таким же порядком отводится от моря.

В следующие три дня каналы продолжают далее, причем так, чтобы на расстоянии, меньшем $1/2$, от каждой точки оставшейся суши была вода обоих озер и морская вода. В следующие за ними три дня густота сети каналов увеличивается, так что любая вода будет не далее чем на $1/4$ от каждой точки оставшейся суши, и т. д. Заметим, что после каждого дня работы оставшаяся суша будет связным куском, так что мы можем покрывать ее на следующий день еще более плотной сетью каналов.

В пределе мы получим сеть теплой, холодной и морской вод, которые нигде вместе не сливаются. То, что останется от суши, будет уже «линией», причем как угодно близко от любой точки этой линии будет холодная, теплая и морская вода. Иначе говоря, на всем протяжении этой линии к ней будут «примыкать» три области: море с его каналами, холодное озеро с его каналами и теплое озеро с его каналами.

Евклид дает еще и третье описание линии: «поверхность имеет два измерения, линия имеет одно измерение, точка не имеет ни одного измерения». Определить, что такое размерность (число измерений) фигуры, пытались многие математики. Окончательное выяснение смысла этого понятия и создание теории размерности является заслугой математика П. С. Урысона, безвременно погибшего в возрасте 23 лет в 1924 году.

Говорят, что множество A , расположенное в фигуре X , отделяет точку a от точки b , если не существует в фигуре X связного множества, которое содержит точки a и b и не пересекается с A . Например, поверхность шара (сфера) отделяет в пространстве внутренние точки шара от внешних (рис. 37, а).

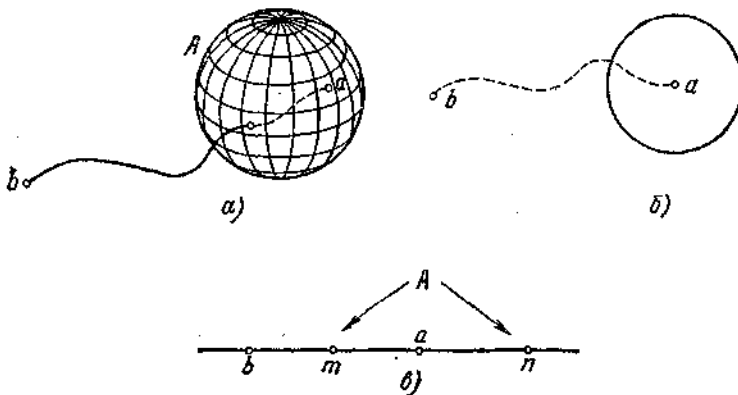


Рис. 37.

Таким образом, в трехмерном пространстве отделение точек можно производить с помощью двумерных фигур. На плоскости (которая представляет собой двумерную фигуру) точку вместе с близкими к ней точками можно от остальных точек отделить с помощью одномерной фигуры (т. е. линии, рис. 37, б). Наконец, на прямой (т. е. одномерной фигуре) точку a вместе с близкими к ней точками можно от остальных точек прямой отделить с помощью фигуры A_i состоящей из двух точек m, n (см рис. 37, в), т. е. с помощью нульмерной фигуры. Итак, в фигуре, имеющей n измерений (или, как говорят, в n -мерной фигуре), отделение точки вместе с близкими к ней точками от остальной части фигуры можно производить с помощью фигур, имеющих на одно измерение меньше, чем вся фигура. Возникает мысль дать определение нульмерных фигур, через них определить одномерные фигуры (т. е. линии), затем с помощью одномерных определить двумерные фигуры и т. д.

Будем говорить, что *фигура X нульмерна, если в ней не существует никакой связной фигуры, содержащей более одной точки*. Например, фигура, состоящая из конечного числа точек, нульмерна. Фигура A в примере 15 также нульмерна.

Если определено уже, какие фигуры считаются $(n - 1)$ -мерными, то n -мерная фигура определяется как фигура, не являющаяся $(n - 1)$ -мерной, в которой любую точку вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части фигуры с помощью множества размерности $n - 1$ (или меньше). Это и есть урысоновское определение размерности.

Пример 17. Любой граф является одномерной фигурой, т. е. линией. Действительно, точку a вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части графа конечным (т. е. нульмерным) множеством: отделяющее множество содержит две точки, если a — внутренняя точка ребра (унарно. 38), и k точек, если a — вершина индекса k (a_2 на рис.38).

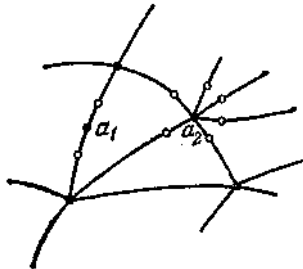


Рис. 38.

Пример 18. Интересный пример линии был построен польским математиком Серпинским. Разделим квадрат на девять квадратов и выбросим средний из них (рис. 39, а). Каждый из восьми оставшихся квадратов снова разделим на девять квадратиков и выбросим средний (рис. 39, б).

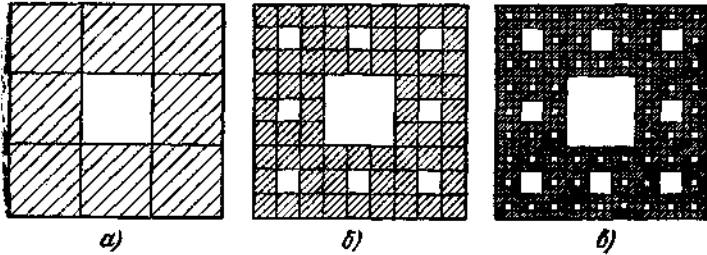


Рис. 39.

Затем так же поступим с каждым из оставшихся квадратиков (рис. 39, в) и т. д. В пределе мы получим некоторую одномерную фигуру S , т. е. линию («ковёр Серпинского»).

Фигура S является универсальной плоской линией: *если линия l вложима в пловковтль, то она вложима в ковер Серпинского, т. е. существует линия $l' \subset S$, гомеоморфная l* . Ясно, что линии, не вложимые в плоскость, не могут быть вложены и в ковер Серпинского. Однако существует в пространстве линия (аналог ковра Серпинского, рис. 40), в которую, как доказал австрийский математик Менгер, *можно вложить любую линию*.

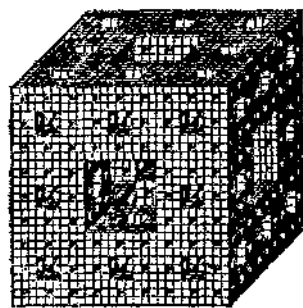
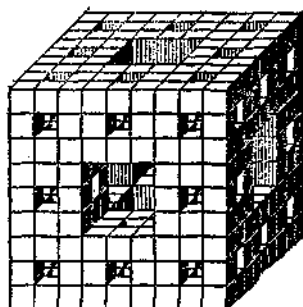
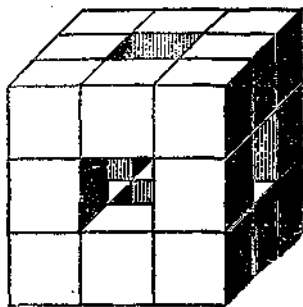


Рис. 40.

Задачи

49. Существует ли на плоскости линия, являющаяся совместной границей двадцати областей?
50. Докажите, что диагональ квадрата, в котором построен ковер Серпинского S , пересекает S по нульмерному множеству.

Выведите отсюда, что ковер Серпинского является одномерной фигурой, т. е. линией.

51. Докажите, что свойство фигуры быть линией, является топологическим инвариантом,

2.1.8. Кривая Пеано

Часто дают еще одно наглядное описание: «линия есть след движущейся точки».

Пример 19. Пусть движущаяся точка пробегает фигуру буквы Φ двумя способами, показанными на рис. 41 (сплошной линией указан путь, пройденный в некоторый момент, а штриховой — дальнейшее движение).

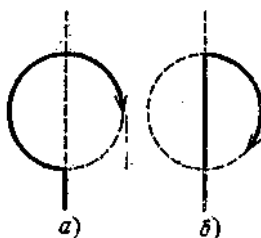


Рис. 41

В обоих случаях точка пробегает одно и то же множество, т. е. «след» движущейся точки одинаков, но пути различны.

Дадим точное определение понятия пути. Пусть в некоторой фигуре A движется точка, начиная от момента $t = 0$ до момента $t = 1$. Для каждого момента t , где $0 \leq t \leq 1$, известно положение $a(t)$ движущейся точки, т. е. каждой точке t отрезка $[0; 1]$ поставлена в соответствие точка $a(t) \in A$. Получается отображение отрезка $[0; 1]$ в фигуру A , причем отображение непрерывное, так как точка $a(t)$ «непрерывно» перемещается с изменением t . Это отображение и представляет собой путь. Мы приходим к следующему определению: *всякое непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ в фигуру A называется путем* (в этой фигуре).

Любую простую дугу можно представлять себе как путь (ведь простая дуга получается с помощью гомеоморфного отображения отрезка, а гомеоморфное отображение непрерывно). В частности, линию, рассмотренную в примере 15 (имеющую «площадь»), можно рассматривать как «след движущейся точки». Уже это показывает, что

понятие пути является не слишком простым. Следующий пример еще более подтверждает это.

Пример 20. Покажем, что можно построить путь, который проходит через каждую точку квадрата. Иными словами, существует непрерывное отображение отрезка на весь квадрат; такие пути называются *кривыми Пеано*. Для получения кривой Пеано построим в квадрате Q все более извивающиеся «полоски-лабиринты»; будем делить квадрат на $4, 16, 64, \dots, 4^n, \dots$ конгруэнтных квадратиков (рис. 42), а затем уберем некоторые из их сторон (рис. 43), причем перегородки, оставленные на каком-то этапе построения, сохраняются и на всех последующих. Средние линии этих полосок (штриховая линия на рис. 43) и дадут в пределе *путь, заполняющий весь квадрат Q , т. е. кривую Пеано*.

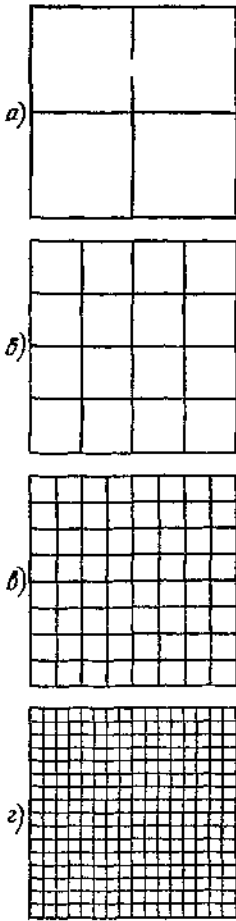


Рис. 42.

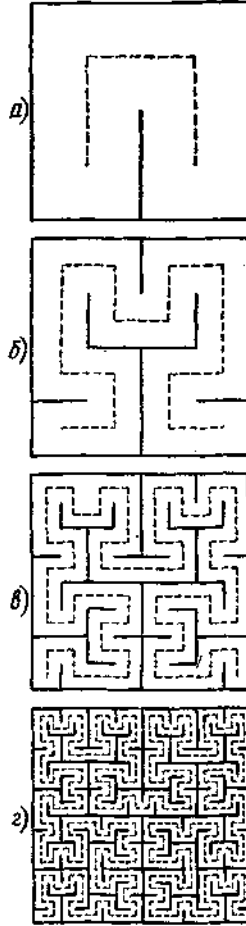


Рис. 43.

Более точно этот путь можно определить следующим образом. Рассмотрим непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ на первую штриховую ломаную линию (рис. 43, а), при котором отрезок $[0; 1/4]$ отображается на часть этой ломаной, лежащую в левой нижней четверти большого квадрата, отрезок $[1/4; 1/2]$ — на часть, лежащую в левом верхнем квадрате, а отрезки $[1/2; 3/4]$ и $[3/4; 1]$ — на части, лежащие в правых (верхнем и нижнем) квадратах. Это отображение обозначим через $f_1(t)$ (где $0 \leq t \leq 1$). Далее, через $f_2(t)$ обозначим отображение отрезка $[0; 1]$ на вторую штриховую ломаную (рис. 43, б),

при котором отрезки $[0, 1/16]$ $[1/16, 2/16]$, ..., $[15/16, 1]$ отображаются на последовательные части этой ломаной, лежащие в шестнадцати квадратах второго этапа. Аналогично, $f_3(t)$ будет отображением отрезка $[0; 1]$ на пунктирную ломаную третьей этапа (рис. 43, в) и т. д. Предел последовательности функций $f_1(t), f_2(t), f_3(t) \dots$ представляет собой отображение $f_1[0; 1] \rightarrow Q$, т. е. некоторый путь в квадрате Q ; это и есть кривая Пеано. Легко пояснить, что этот предел существует. Возьмем, например, точку $1/3 \in [0; 1]$. Так как $1/3$ лежит во второй четверти отрезка $[0; 1]$, т. е. $1/3 \in [1/4, 1/2]$, то точка $f_1(1/3)$ лежит в левом верхнем квадрате на рис. 42, а. Далее, так как $1/3 \in [5/16, 6/16]$, то $f_2(1/3)$ лежит в шестом по порядку квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 43, б (т. е. в левом верхнем квадрате на рис. 42, б). Так как $1/3 \in [21/64, 22/64]$, то $f_3(1/3)$ лежит в 22-м квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 43, в (т. е. в левом верхнем квадрате на рис. 42, в), и т. д. Предел этой последовательности уменьшающихся квадратов (вложенных последовательно один в другой), т. е., в данном случае, левая верхняя вершина квадрата и есть точка $f(1/3)$. Таким же образом определяется точка $f(t)$ для любого $t \in [0; 1]$.

Заметим, что кривая Пеано не является простой дугой: она имеет бесконечно много точек «склеивания» (т. е. в квадрате имеется бесконечно много точек, через которые построенный путь $f(t)$ проходит более, чем один раз).

Задачи

52. Докажите, что в квадрате Q имеются точки, через которые построенная кривая Пеано $f(t)$ проходит четыре раза, но нет точек, через которые она проходит пять раз.
53. Существует ли «пространственная кривая Пеано», т. е. путь в кубе, заполняющий весь этот куб?
54. Расположим в горизонтальной плоскости квадрат Q и рассмотрим путь $f(t)$, представляющий собой кривую Пеано в этом квадрате. Через $g(t)$ обозначим точку в пространстве, расположенную над точкой $f(t)$ на высоте t (рис. 44).

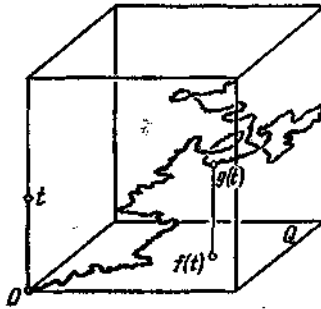


Рис 44.

Докажите, что когда t пробегает отрезок $[0; 1]$, точка $g(t)$ пробегает путь в пространстве, представляющий собой простую дугу. Докажите, что проекция этой простой дуги на горизонтальную плоскость заполняет весь квадрат Q . Иными словами, построенная линия (простая дуга) представляет собой замысловатую «крышу» над всем квадратом Q .

Этот пример показывает, что не только понятие пути, но даже понятие простой дуги не является таким простым, каким оно интуитивно кажется с первого взгляда.

2.2. ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

2.2.1. Теорема Эйлера

В следующей таблице указано число вершин, ребер и граней пяти правильных многогранников.

Название многогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

Из рассмотрения этой таблицы видно, что для каждого правильного многогранника имеет место соотношение:

$$B - P + \Gamma = 2, \quad (6)$$

где B — число вершин многогранника, P — число его ребер, Γ — число граней. Соотношение (6) легко проверяется также для пирамид, призм и других многогранников. Эйлер впервые подметил и доказал это замечательное свойство многогранников.

Уточним формулировку теоремы Эйлера. Прежде всего заметим, что любая грань каждого из рассмотренных многогранников гомеоморфна кругу. Далее, поверхность каждого из рассмотренных многогранников (или, вообще, любого выпуклого многогранника) гомеоморфна сфере: если o — произвольная внутренняя точка многогранника, а S — сфера с центром o , содержащая внутри себя этот многогранник, то проекция поверхности многогранника на сферу S из центра o представляет собой искомым гомеоморфизм. Таким образом, теорема Эйлера в уточненной формулировке принимает следующий вид: *для всякого многогранника, поверхность которого гомеоморфна сфере, а каждая грань гомеоморфна кругу, справедливо соотношение (6).*

Можно придать этой теореме чисто топологическую формулировку. Для этого заметим, что все вершины и ребра многогранника образуют связный граф, который разбивает поверхность многогранника на отдельные грани (т. е. куски, гомеоморфные кругу). Мы получаем следующее (более общее, чем теорема Эйлера) утверждение»
Пусть на сфере (или гомеоморфной ей поверхности) начерчен связный граф G , имеющий B вершин и P ребер и разбивающий сферу на Γ областей («граней»); тогда справедливо соотношение (6). Идея доказательства этой теоремы содержится в задаче 55.

Задачи

55. Пусть G — связный граф, начерченный на сфере, G^* — его максимальное дерево и k — число перемычек (т. е. ребер графа G , не содержащихся в G^*). Докажите, что граф G^* определяет на сфере лишь одну область (грань), и потому для него соотношение (6) справедливо.

Докажите, что добавление каждой перемычки увеличивает число граней на одну, и получите отсюда доказательство теоремы Эйлера.

56. Докажите, что для любого связного графа, расположенного на плоскости, справедливо соотношение (6) (k числу «граней» надо причислять и наружную, неограниченную область).

57. Пусть G — граф, вложимый в плоскость. Докажите, что при любом способе его вложения в плоскость он разбивает плоскость на $r = B + P + 1$ областей, где r — число компонент графа G , а B и P — число его вершин и ребер.

58. Выпуклый n -угольник разбит на треугольники, примыкающие друг к другу целыми сторонами (рис. 45), причем на сторонах n -угольника расположены m вершин разбиения, а внутри него p вершин.

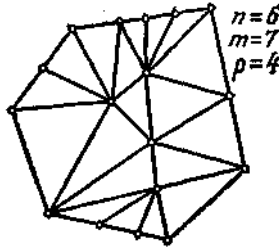


Рис. 45.

Докажите, что n -угольник разбит на $m + n + 2p - 2$ треугольников.

59. Обозначим через n_3 число треугольных граней выпуклого многогранника, через n_4 — число его четырехугольных граней и т. д. Докажите, что

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + \dots$$

В каком случае имеет место равенство?

60. Говорят, что связный граф, расположенный на сфере, определяет *топологически правильное разбиение* сферы, если каждая грань этого разбиения является n -угольником (т. е. ограничена замкнутой цепочкой из n ребер) и в каждой вершине сходятся k граней. Докажите, что в этом случае

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{P},$$

где P — число ребер. Выведите отсюда, что кроме разбиений, топологически эквивалентных пяти правильным многогранникам, существуют лишь два типа топологически правильных разбиений, которые показаны на рис. 46.

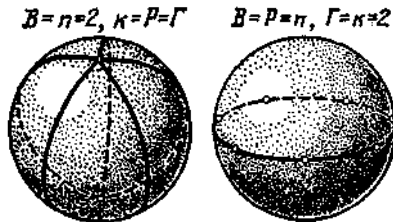


Рис. 46.

2.2.2. Поверхности

Пример 21. На рис. 47 изображена «книжка с тремя листами». Вблизи точек x , y , z эта фигура устроена по-разному.

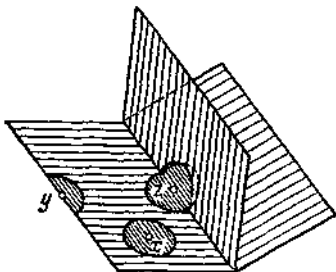


Рис. 47.

Окрестность точки y имеет вид полукруга, причем точка y лежит на его границе. В этом случае говорят, что точка y лежит на крае фигуры. Окрестность точки z состоит из трех полукругов, соединенных по общему диаметру; говорят, что в этом месте фигура *разветвляется* (т. е. к некоторой линии примыкает три или более «листов» рассматриваемой фигуры). Наконец, точка x имеет окрестность в виде круга, причем точка x лежит внутри этого круга; здесь фигура не имеет ни края, ни разветвления.

Фигура, у которой каждая точка x имеет окрестность, гомеоморфную кругу (внутри которого лежит точка x), называется *поверхностью*. Поверхность не имеет краев и разветвлений. Сфера и тор являются поверхностями. Рассматривают также *поверхности с краем*; они имеют края, но не имеют разветвлений. Круг — поверхность с краем. Сфера, в которой вырезаны несколько круглых отверстий (рис. 48), также является поверхностью с краем.

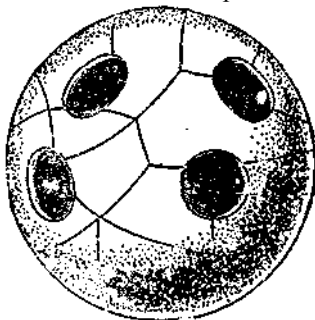


Рис. 48.

Пример 22. Если на торе вырезать круглую дыру, то мы получим поверхность с краем, которая называется *ручкой* (рис. 49).

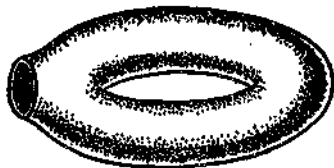


Рис. 49.

Пример 23. Интересный пример поверхности с краем был описан в 1862—1865 годах в работах немецких математиков Мёбиуса и Листинга. Она получается следующим образом. Лента прямоугольной формы (рис. 50, *а*) один раз перекручивается (рис. 50, *б*) и затем ее концы склеиваются.

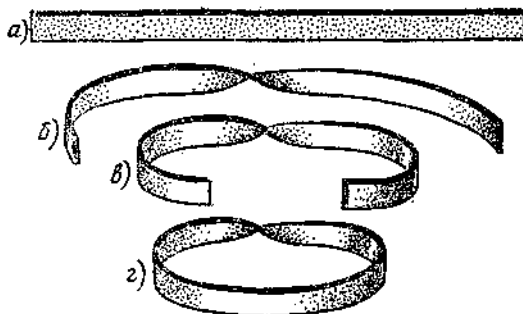


Рис. 50.

Полученная поверхность с краем (рис. 50, *з*) называется *лентой Мёбиуса*. Эта поверхность имеет лишь одну сторону. Например, перемещая кисточку по ленте Мёбиуса (рис. 51), мы приходим к тому же месту, с которого начинали закрашивание, но с обратной стороны.

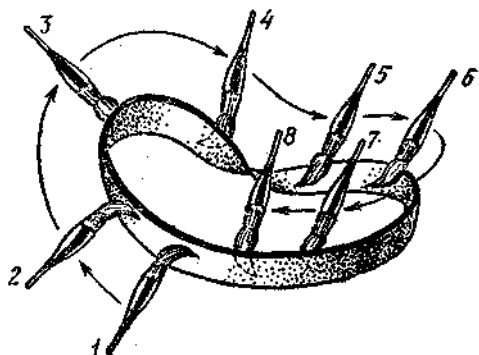


Рис. 51.

Перемещая кисточку дальше, мы закрасим всю ленту Мёбиуса и убедимся, что у нее нет «второй стороны». Разумеется, наглядное описание односторонней поверхности с помощью «окрашивания» возможно лишь для «толстой поверхности», изготовленной из некоторого материала; математически же поверхность не имеет толщины. Поэтому приведем другое описание «односторонности». В каждой точке a ленты Мёбиуса можно провести два противоположных вектора, перпендикулярных к ней в этой точке (рис. 52, а).

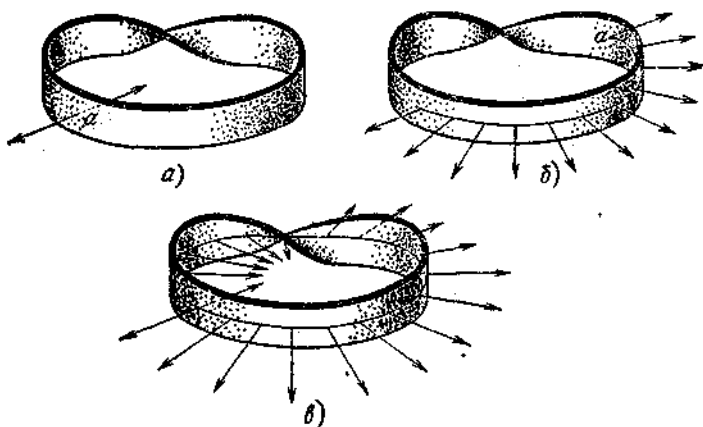


Рис. 52.

Эти векторы называют *нормальными* к ленте Мёбиуса в точке a . Выберем одну из них и начнем перемещать точку a вместе с нормалью по ленте Мёбиуса (рис. 52, б). Когда точка a обойдет всю ленту Мёбиуса, перемещающаяся нормаль перейдет не в свое первоначальное положение, а в противоположное (рис. 52, в). Итак, *на ленте Мёбиуса существует такой замкнутый путь (обход), что при прохождении этого пути нормаль к поверхности приходит в положение, противоположное первоначальному*. Поверхности, обладающие такими обходами, и называются *односторонними*. Однако, говоря о нормалях, мы изучаем не только саму поверхность, но и ее расположение в пространстве. Поэтому приведем «внутреннее» определение односторонних поверхностей. Условимся вокруг точки a , из которой проведена нормаль, описывать небольшую окружность и на ней отмечать стрелкой направление, которое из конца проведенной нормали наблюдается как направление против часовой стрелки (рис. 53, а).

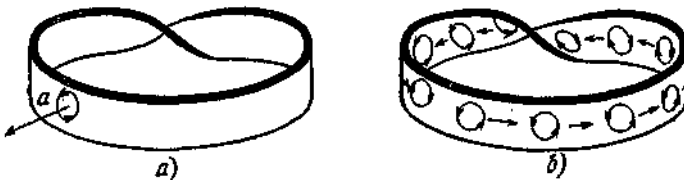


Рис. 53.

Если точка a перемещается, то вместе с ней перемещается и нормаль, а также окружность с имеющимся на ней направлением. Когда мы обведем окружность по всей ленте Мёбиуса, направление на окружности изменится на противоположное (так как нормаль изменит свое направление, рис. 53, б). Итак, на ленте Мёбиуса имеется такой замкнутый путь (обход), что при перемещении окружности вдоль этого пути направление на окружности меняется на противоположное. Такие обходы называются *обращающими ориентацию*. Если на поверхности нет обращающих ориентацию обходов, то она называется *ориентируемой* (или двусторонней), если есть — *неориентируемой* (или односторонней). С наглядной точки зрения ориентируемость означает, что всю поверхность можно покрыть маленькими окружностями и выбрать на них такие направления, что близкие окружности будут ориентированы одинаково. Пусть теперь Q_1 и Q_2 — две поверхности, у каждой из которых имеется край, гомеоморфный окружности (рис. 54).

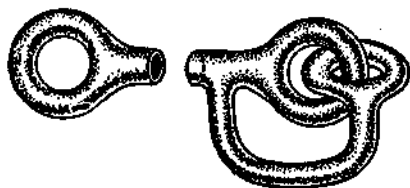


Рис. 54.

Соединив («склеив») края этих поверхностей, мы получим одну новую поверхность. Говорят, что дыра, имеющаяся в поверхности Q_1 , заклеивается поверхностью Q_2 (или наоборот).

Пример 24. Рассмотрим сферу, в которой вырезано p круглых дыр, и заклеим каждую из дыр ручкой. Полученная поверхность (рис. 55, *a*) называется *сферой с p ручками*.

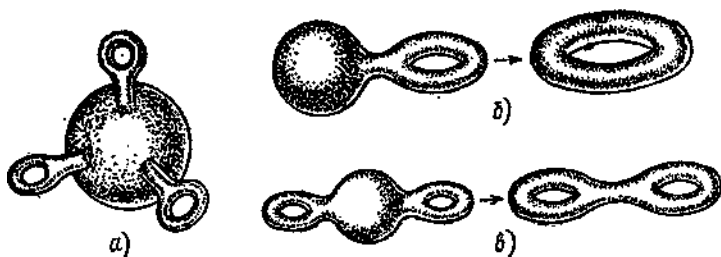


Рис. 55.

Сфера с одной ручкой гомеоморфна тору (рис. 55, б), а сфера с двумя ручками — поверхности «крנדеля» (получающейся склеиванием двух ручек, рис. 55, в).

Задачи

61. Докажите, что граф «домики и колодцы» (пример 12) можно расположить (без самопересечений) на ленте Мебиуса.
62. У «зубчатой» фигуры, изображенной на рис. 56, *a*, склеиваются с перекручиванием каждые два отрезка, обозначенные одинаково (рис. 56, б).

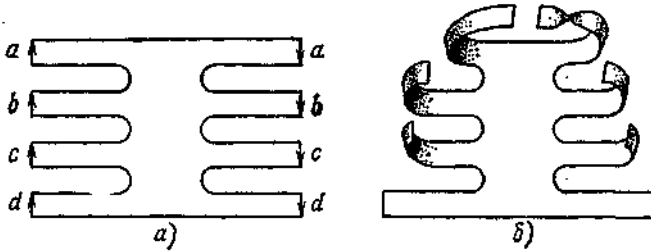


Рис. 56,

Докажите, что получающаяся поверхность является односторонней, а ее край гомеоморфен окружности.

63. В шаре высверлены три сквозных цилиндрических отверстия, не соединяющихся между собой. Докажите, что поверхность получившегося тела гомеоморфна сфере с тремя ручками.

64. В шаре высверлены три сквозных цилиндрических отверстия, оси которых проходят через центр шара. Докажите, что поверхность получившегося тела гомеоморфна сфере с пятью ручками.

65. Если попарно склеить противоположные стороны квадрата с учетом указанных на рис. 57, а направлений, то получится тор (рис. 57, б, в, г).

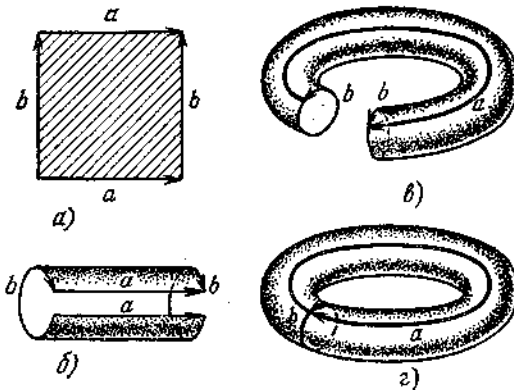


Рис. 57.

Какая поверхность получится, если склеивание произвести с учетом направлений на рис. 58 (сторона с остается не склеенной)?

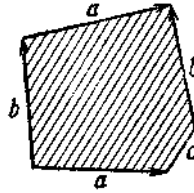


Рис. 58.

66. Какая поверхность получится, если в $4k$ -угольнике, показанном на рис. 59, попарно склеить одинаково обозначенные стороны с учетом направлений?

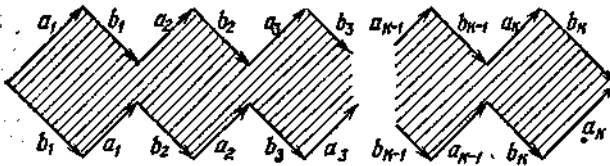


Рис. 59.

Мы подходим к формулировке теоремы о *топологической классификации поверхностей*, полученной в прошлом столетии Мёбиусом и французским математиком Жорданом. Условимся рассматривать только *замкнутые поверхности* (которые не имеют края и допускают разбиение на конечное число многоугольников).

Плоскость, например, не является замкнутой по верхности: конечный граф, начерченный на плоскости не разбивает ее на области, которые все гомеоморфны кругу. Задача топологической классификации поверхностей заключается в том, чтобы *указать такие попарно не гомеоморфные замкнутые поверхности, что любая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из них*. Иначе говоря, нужно перечислить *все топологически различные замкнутые поверхности*.

Решение этой задачи рассмотрим сначала для *ориентируемых* поверхностей. Обозначим через P_0 сферу, а через P_k — сферу с k ручками. Оказывается, что *поверхности*

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_k, \dots \quad (7)$$

и дают полную топологическую классификацию замкнутых ориентируемых поверхностей, т. е. здесь перечислены все топологически различные типы таких поверхностей. Доказательство будет дано в следующих двух пунктах.

2.2.3. Эйлерова характеристика поверхности

Пусть Q — поверхность (с краем или без края, двусторонняя или односторонняя), которая допускает разбиение на многоугольники; это означает, что на поверхности можно «нарисовать» граф, разбивающий ее на конечное число кусков, гомеоморфных кругу. Обозначим число вершин и ребер графа через V и P , а число многоугольников, на которые Q разбивается этим графом, — через Γ . Число

$$\chi(Q) = V - P + \Gamma \quad (8)$$

называется *эйлеровой характеристикой* поверхности Q . Строго говоря, число (8) определяется не самой поверхностью Q , а выбором ее разбиения на многоугольники. Однако теорема Эйлера показывает, что для поверхности Q , гомеоморфной сфере, эйлерова характеристика не зависит от выбора разбиения на многоугольники: $\chi(Q) = 2$ (см. (6))

Мы докажем, что и для любой поверхности Q ее эйлерова характеристика $\chi(Q)$ не зависит от выбора разбиения на многоугольники, а определяется самой поверхностью, является ее топологическим инвариантом.

В самом деле, пусть на поверхности Q «нарисованы» два графа G_1, G_2 , каждый из которых задает разбиение на многоугольники. Числа вершин, ребер и граней разбиения, определяемого графом G_1 , обозначим через V_1, P_1, Γ_1 , а соответствующие числа для разбиения, определяемого графом G_2 , — через V_2, P_2, Γ_2 . Вообще говоря, графы G_1 и G_2 могут пересекаться в бесконечном числе точек. Однако, «пошевелив» граф G_1 , мы сможем добиться того, чтобы G_1 и G_2 пересекались лишь в конечном числе точек.

Далее, если граф $G_1 \cup G_2$ несвязен, то, «пошевелив» графы G_1, G_2 , можно добиться того, чтобы они имели общие точки и, следовательно, их объединение было связным. Итак, мы можем предполагать, что графы G_1 и G_2 пересекаются лишь в конечном числе точек и имеют связное объединение $G_1 \cup G_2$. Считая новыми вершинами все точки пересечения графов G_1 и G_2 , а также все вершины этих графов, мы найдем, что $G_1 \cup G_2$ является конечным связным графом (его ребрами являются куски ребер графов G_1 и G_2 , на которые они разбиваются вершинами графа $G_1 \cup G_2$).

Обозначим через V и P число вершин и ребер графа $G_1 \cup G_2$, а через Γ — число граней, на которые он разбивает поверхность Q . Идея состоит в том, чтобы доказать равенства

$$\left. \begin{aligned} B_1 - P_1 + \Gamma_1 &= B - P + \Gamma, \\ B_2 - P_2 + \Gamma_2 &= B - P + \Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

из которых и будет следовать, что $B_1 - P_1 + \Gamma_1 = B_2 - P_2 + \Gamma_2$. Оба равенства (9) доказываются одинаково; докажем первое. Пусть M — некоторый многоугольник («грань»), определяемый графом G_1 . Обозначим число вершин и ребер графа $G_1 \cup G_2$, расположенных внутри M (не на контуре), через B' и P' , а число вершин (а значит, и ребер) этого графа, расположенных на контуре многоугольника M , через q . Далее, число граней, определяемых графом $G_1 \cup G_2$ и содержащихся в M , обозначим через Γ' . На рис. 60 имеем $B' = 4, P' = 12, \Gamma' = 9, q = 15$.

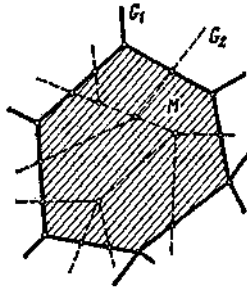


Рис. 60.

Вырежем теперь многоугольник M (вместе с имеющейся на нем частью графа $G_1 \cup G_2$) из поверхности Q . Так как M гомеоморфен кругу и, значит, полусфере, то его можно второй («нижней») полусферой дополнить до поверхности, гомеоморфной сфере (рис. 61).

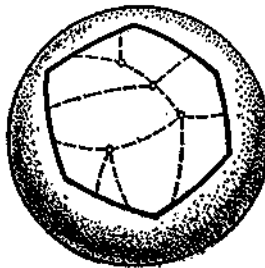


Рис. 61.

На этой сфере расположен связный граф, имеющий $B' + q$ вершин, $P' + q$ ребер и определяющий $\Gamma' + 1$ граней (Γ' граней содержится в M и

еще одной гранью является нижняя полусфера). Следовательно, согласно (6), $(B' + q) - (P' + q) + (\Gamma' + 1) = 2$, т. е.

$$B' - P' + \Gamma' = 1. \quad (10)$$

Если теперь (возвращаясь к поверхности Q , на которой начерчен граф $G_1 \cup G_2$) мы выбросим из графа $G_1 \cup G_2$ его часть, расположенную внутри M , то получится новый граф, для которого, однако, число $B - P + \Gamma$ останется таким же, как и для графа $G_1 \cup G_2$. В самом деле, вместо B' вершин, P' ребер и Γ' граней, имевшихся внутри M , мы теперь будем иметь 0 вершин, 0 ребер и одну грань (сам многоугольник M), т. е. число $B' - P' + \Gamma'$ заменится на $0 - 0 + 1$, а это, согласно (10), ничего не меняет.

Теперь ясно, что если мы из графа $G_1 \cup G_2$ выбросим его части, расположенные внутри всех многоугольников, определяемых графом G_{1i} , то получим новый граф G^* , для которого число $B - P + \Gamma$ будет таким же, как и для графа $G_1 \cup G_2$. Иначе говоря,

$$B^* - P^* + \Gamma^* = B - P + \Gamma, \quad (11)$$

где B^* и P^* — число вершин и ребер графа G^* , а Γ^* — число определяемых им граней.

Заметим, наконец, что граф G^* получается из G_1 добавлением нескольких новых вершин на ребрах. Добавление каждой новой вершины увеличивает число ребер на 1 (поскольку добавленная вершина разбивает одно из ребер на два). Следовательно, если переход от графа G_1 к G^* осуществляется добавлением k новых вершин, то $B^* = B_1 + k$, $P^* = P_1 + k$. Кроме того, $\Gamma^* = \Gamma_1$ (так как граф G^* определяет те же грани, что и граф G_1). Таким образом,

$$\begin{aligned} B^* - P^* + \Gamma^* &= (B_1 + k) - (P_1 + k) + \Gamma_1 = \\ &= B_1 - P_1 + \Gamma_1, \end{aligned}$$

а это, согласно (11), и дает первое из соотношений (9).

Итак, эйлерова характеристика поверхности не зависит от ее разбиения на многоугольники, а определяется самой поверхностью. Кроме того, эйлерова характеристика является *топологическим инвариантом*: если поверхности Q_1 и Q_2 гомеоморфны, то $\chi(Q_1) = \chi(Q_2)$. В самом деле, при гомеоморфизме $f_1: Q_1 \rightarrow Q_2$ граф G_1 , начерченный на поверхности Q_1 , переходит в граф $G_2 = f_1(G_1)$, начерченный на Q_2 , причем вершин, ребер и граней на поверхности Q_2 будет столько же, сколько и на поверхности Q_1 .

Задачи

67. Докажите, что сфера с вырезанными в ней q дырами имеет эйлерову характеристику $2 - q$.
68. Пусть Q_1 и Q_2 — две поверхности, каждая из которых имеет край, гомеоморфный окружности. Докажите, что, склеивая эти края (см. рис. 54), мы получим поверхность, эйлерова характеристика которой равна $\chi(Q_1) + \chi(Q_2)$.
69. Чему равна эйлерова характеристика круга? Ручки? Ленты Мёбиуса?
70. Докажите, что эйлерова характеристика поверхности P_k равна $2 - 2k$.
71. На торе осуществлено топологически правильное разбиение (см. задачу 60). Докажите, что каждая грань является либо треугольником, либо четырехугольником, либо шестиугольником. Приведите примеры правильных разбиений каждого из этих типов.
72. На замкнутой поверхности Q нарисован граф с V вершинами и P ребрами. Он разбивает поверхность Q на Γ областей (среди которых, возможно, есть не гомеоморфные кругу). Докажите, что $V - P + \Gamma \geq \chi(Q)$.
- Указание.** Для того чтобы разрезать поверхность Q на многоугольники (гомеоморфные кругу), достаточно последовательно применить одну или несколько операций следующего вида: а) добавление новой вершины на одном из ребер графа; б) добавление ребра, имеющего лишь одну общую вершину с начерченным графом; в) добавление ребра, соединяющего две вершины уже начерченного графа. Проверьте, что при каждой из этих операций число $V - P + \Gamma$ может лишь уменьшиться.
73. На замкнутой поверхности Q начерчен граф с V вершинами и P ребрами; поверхность Q разбивается этим графом на Γ областей. Докажите, что если каждая из областей имеет на своей границе не менее k ребер, то $(k - 2)P \leq kV - k\chi(Q)$.

2.2.4. Классификация замкнутых ориентируемых поверхностей

Поверхности (7) попарно не гомеоморфны, так как имеют разные эйлеровы характеристики (задача 70). Таким образом, для доказательства теоремы, сформулированной в конце пункта 2.2, остается установить, что любая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей (7). Доказательство проведем в несколько этапов.

А) Пусть Q — некоторая связная замкнутая ориентируемая поверхность. Начертим на ней связный граф G , разбивающий ее на грани, гомеоморфные кругу. Для каждой вершины графа G возьмем на поверхности Q маленький кружок, содержащий внутри себя эту вершину. Эти кружки будем называть *шапочками*. Далее, для каждого ребра графа G возьмем узкую *полоску*, идущую вдоль этого ребра и соединяющую шапочки, которые соответствуют концам взятого ребра. Если удалить из поверхности Q все шапочки и все полоски, то от каждой грани останется кусок, гомеоморфный кругу; этот кусок будем называть *сердцевиной* грани. На рис. 62, на котором изображен кусок поверхности Q , шапочки заштрихованы, полоски покрыты точками, а сердцевины оставлены белыми.

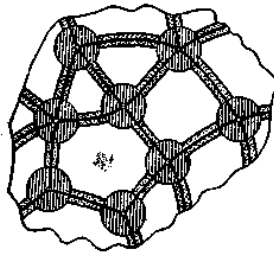


Рис. 62.

Идея заключается в том, чтобы разрезать поверхность Q на шапочки, полоски, сердцевинки, а затем снова склеить ее из этих кусков, прослеживая шаг за шагом, что получается при склеивании. Прежде всего вырежем из поверхности Q все сердцевинки граней; оставшуюся часть поверхности обозначим через Q_0 . Ее край состоит из всех контуров сердцевин.

Б) Выделим в графе G максимальное дерево (на рис. 63 оно вычерчено жирно), и ВСЕ ПОЛОСКИ, соответствующие перемычкам (т. е. ребрам графа G , не входящим в это дерево), рассечем в середине.

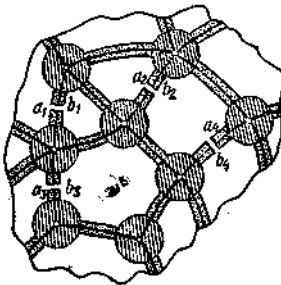


Рис. 63.

Отрезки $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_pb_p$, по которым производится рассечение полосок, назовем *хордами*. Рассечение будем производить постепенно: рассечение по хорде a_1b_1 превращает Q_0 в поверхность Q_1 ; если в Q_1 произвести рассечение по хорде a_2b_2 , получим поверхность Q_2 ; \dots ; наконец, рассекая Q_{p-1} по хорде a_pb_p , получим поверхность Q_p . Для получения из Q_p поверхности Q_0 нужно вновь произвести склеивание по хордам.

В) Прежде чем осуществлять эти обратные склеивания, заметим, что *поверхность Q_p гомеоморфна кругу*. В самом деле, будем вычерчивать максимальное дерево графа G , беря одно ребро, еще одно, еще одно и т. д. — так, чтобы все время получалось дерево. Полоска и две шапочки, соответствующие первому ребру и его концам, составляют поверхность, гомеоморфную кругу (рис. 64, а). Добавление полоски и шапочки, соответствующих второму ребру, снова дает поверхность, гомеоморфную кругу (рис. 64, б).

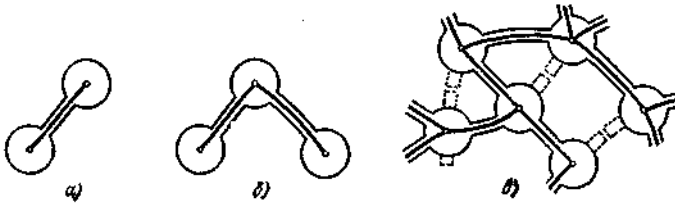


Рис. 64.

Вообще, при каждом проведении ребра, к уже имевшейся поверхности, гомеоморфной кругу, приклеиваются одна полоска и одна шапочка, что вновь дает поверхность, гомеоморфную кругу. В конце концов, вычертив максимальное дерево графа G , мы получим гомеоморфную кругу поверхность, составленную из всех шапочек и тех полосок, которые соответствуют ребрам максимального дерева. Для получения поверхности Q_p остается приклеить *полуполоски*, образовавшиеся из оставшихся полосок после рассечения по хордам (пунктир на рис. 64, в). Но каждое приклеивание полуполоски оставляет поверхность гомеоморфной кругу.

Мы покажем теперь, что *каждая из поверхностей $Q_p, Q_{p-1}, \dots, Q_1, Q_0$ гомеоморфна сфере, в которой вырезаны несколько дыр и часть из них заклеена ручками*. Относительно поверхности Q_p это очевидно: она гомеоморфна кругу, т. е. сфере, в которой вырезана одна дыра и не вклеено ни одной ручки.

Г) Рассмотрим при каждом $i = 1, \dots, p$ переход от поверхности Q_{i-1} к поверхности Q_i (т. е. рассечение по хорде $a_i b_i$) и обратный переход от Q_i к Q_{i-1} . Здесь могут представиться две возможности: точки a_i и b_i

расположены на одной и той же компоненте края поверхности Q_{i-1} или на разных компонентах.

Если a_i и b_i расположены на разных компонентах края поверхности Q_{i-1} , то рассечение по хорде $a_i b_i$ приводит к уменьшению числа дыр на одну (рис. 65, а и б).

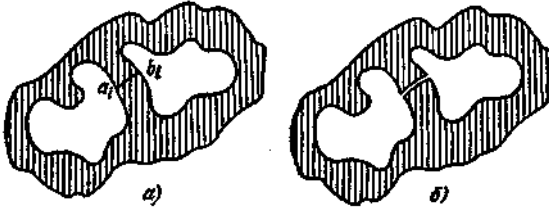


Рис. 65.

Следовательно, обратный переход (от Q_i к Q_{i-1}) сводится к вырезанию одной новой дыры. Поэтому, если Q_i получалась из сферы вырезанием нескольких дыр и заклеиванием части из них ручками, то это же справедливо и для Q_{i-1} .

Д) Пусть теперь концы хорды $a_i b_i$ принадлежат одной компоненте края поверхности Q_{i-1} (рис. 66).

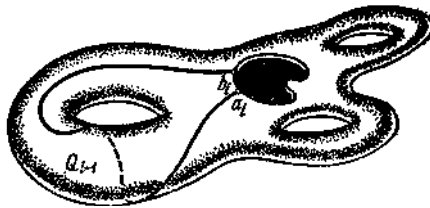


Рис. 66

Получающаяся при рассечении поверхность Q_i (рис. 67) гомеоморфна поверхности (рис. 68), получающейся из Q_{i-1} двумя разрезами: сначала по замкнутой линии l , не пересекающейся с краем поверхности Q_{i-1} (это дает промежуточную поверхность Q^{*}_i , (рис. 69), а затем по хорде $a_i c_i$, концы которой лежат на разных компонентах края поверхности Q^{*}_i . Обратный переход от Q_i (см. рис. 68) к Q^{*}_i (рис. 69), как мы видели в пункте Г), сводится к вырезанию одной дыры. Остается рассмотреть переход от Q^{*}_i к Q_{i-1} .

Итак, пусть Q^{*}_i получается из Q_{i-1} разрезанием по контуру l , не пересекающемуся с краем поверхности Q_{i-1} .



Рис. 67.

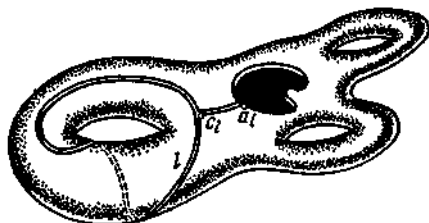


Рис. 68.



Рис. 69.



Рис. 70.

Если вместо того, чтобы производить этот разрез, мы вырежем из Q_{i-1} узкую полосу L , заключающую внутри себя линию l (рис. 70), то получится поверхность, гомеоморфная Q_i^* . Полоска L гомеоморфна либо ленте Мёбиуса, либо боковой поверхности цилиндра. В самом деле, если эту полосу разрезать (рис. 71), то ее можно распрямить в

узкую прямоугольную ленту; следовательно, L можно получить склеиванием концов прямоугольной ленты, и надо лишь проследить, происходит это склеивание с перекручиванием или нет.



Рис. 71.

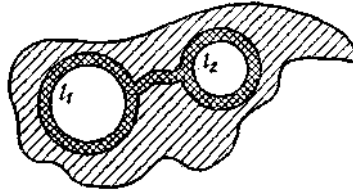


Рис. 72.

Но ленте Мёбиуса полоска L гомеоморфна быть не может, так как на ленте Мёбиуса имеется обход, обращающий ориентацию, а исходная поверхность Q (и все поверхности Q_0, Q_{1b}, \dots, Q_p) ориентируемы. Итак, L гомеоморфна боковой поверхности цилиндра. Следовательно, после разрезания по линии l она распадается на две части, и потому поверхность Q^*_i имеет по сравнению с Q_{i-1} две новые компоненты края l_1, l_2 . Обратный переход от Q^*_i к Q_{i-1} заключается в склеивании двух контуров дыр l_1, l_2 , имеющихся на поверхности Q^*_i .

Окружим контуры l_1, l_2 узкими кольцевыми полосками и соединим их полоской друг с другом. Мы получим на поверхности Q^*_i фигуру («очки», рис. 72), гомеоморфную кругу с двумя дырами (рис. 73). Склеивание контуров l_1 и l_2 должно производиться с учетом противоположной ориентации на них, так как иначе полоска, заштрихованная на рис. 74, превратилась бы при склеивании в ленту Мёбиуса, что невозможно в силу ориентируемости поверхности Q_{i-1} . Следовательно, склеивание контуров l_1 и l_2 равносильно вклеиванию в поверхность Q^*_i ручки (рис. 75). Итак, переход от Q_i к Q^*_i сводится к вырезыванию одной дыры, а переход от Q^*_i к Q_{i-1} — к уменьшению числа дыр и вклеиванию одной ручки. Поэтому, если Q_i получалось из сферы вырезанием нескольких дыр и заклеиванием части из них ручками, то это же справедливо и для Q_{i-1} .

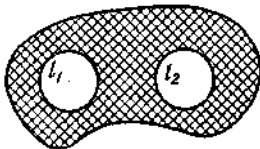


Рис. 73.

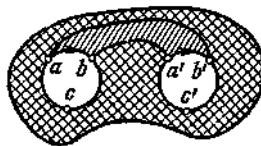


Рис. 74.



Рис. 75,

Е) Проведенная индукция показывает, что Q_0 получается из сферы вырезанием $k+r$ дыр и заклеиванием k из них ручками ($k \geq 0, r \geq 0$). Остается заметить, что при переходе от Q_0 к исходной поверхности Q в поверхность Q_0 вновь вклеиваются все сердцевинки, т. е. каждая из r дыр, имеющихся в поверхности Q_0 , заклеивается кругом. Таким образом, Q получается из сферы вырезанием k дыр и заклеиванием их всех ручками, т. е. Q гомеоморфна одной из поверхностей (7).

Задачи

74. Сформулируйте и докажите теорему о топологической классификации ориентируемых поверхностей с краем.
75. На поверхности P_k проведено q контуров, не пересекающихся друг с другом, причем после разрезания по всем этим контурам по верхность остается связной. Докажите, что $q \leq k$.
76. На замкнутой поверхности Q осуществлено топологически правильное разбиение: каждая грань — пятиугольник, в каждой вершине сходятся по четыре грани. Докажите, что если число граней не кратно восьми, то поверхность Q неориентируема.
77. На замкнутой поверхности Q проведены три линии p, q, r , гомеоморфные отрезку, которые имеют общие концы и попарно не имеют других общих точек. Докажите, что если разрез по одной из линий $p \cup q, p \cup r, q \cup r$ оставляет поверхность связной, то хотя бы одна из двух других также обладает этим свойством.
78. Если на одной из граней правильного додекаэдра (рис. 76,а) продолжить все стороны до пересечения, то мы получим правильную пятиконечную звезду (рис. 76, б). Две такие звезды, построенные на смежных гранях (рис. 76, в) имеют общий отрезок ad . Условимся, однако, считать, что эти звезды примыкают друг к другу только по отрезкам ab и cd , а отрезок bc будем считать «лишним» пересечением этих звезд, происходящим из-за «неудачного» расположения этих звезд в пространстве. После построения аналогичных звезд для всех граней додекаэдра (рис. 76, г) мы получим некоторую поверхность Q , расположенную в пространстве с самопересечениями («лишними» линиями пересечения будут ребра исходного додекаэдра).

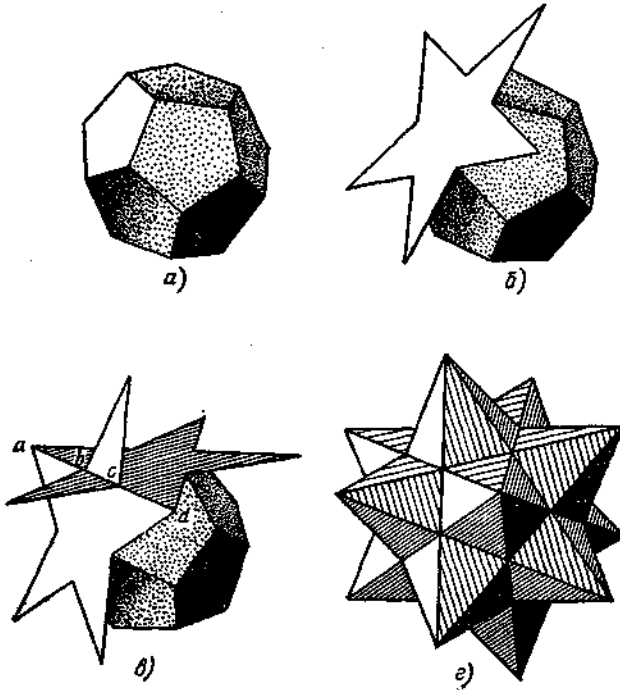


Рис. 76.

Докажите, что эта поверхность является ориентируемой и имеет эйлерову характеристику $\chi(Q) = -16$, а значит, гомеоморфна сфере с девятью ручками.

Можно построить и иную поверхность, связанную с додекаэдром. Добавим к контуру каждой звезды такие отрезки, как bc (рис. 76, в), так что получится замкнутая пятизвенная ломаная (самопересекающаяся). Затем расправим эти ломаные, устранив самопересечения (так что сторонами станут отрезки типа ad), и на каждую из них натянем грань (прямоугольник). Тогда получится поверхность, состоящая из двенадцати пятиугольных граней, причем число вершин (таких, как a , d) будет также равно 12, а число ребер 30. Докажите, что эта поверхность ориентируема и имеет эйлерову характеристику $\chi = -6$, а значит, гомеоморфна сфере с четырьмя ручками.

79. Построим на каждой грани куба «четырёхконечную звезду» (с искривленными лучами; см. рис. 77, а) так, чтобы соседние звезды соприкасались краями лучей (рис. 77, б). После построения таких звезд на всех гранях куба получится поверхность, расположенная

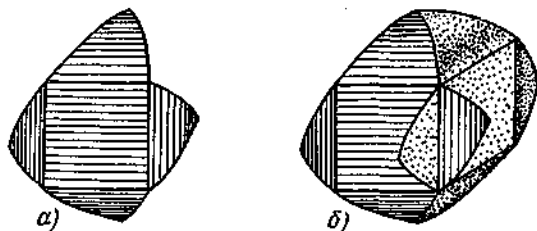


Рис. 77.

в пространстве с самопересечениями («лишними» линиями пересечения будут ребра куба). Докажите, что эта поверхность гомеоморфна P_3 .

80. Какие поверхности получатся, если построить «трехконечные звезды» (аналогично тому, как описано в условии задачи 79) на гранях тетраэдра, октаэдра, икосаэдра?

2.2.5. Классификация замкнутых неориентируемых поверхностей

Замкнутую неориентируемую поверхность можно расположить в пространстве лишь с самопересечениями.

Пример 25. На рис. 78, а изображена поверхность с краем l , а на рис. 78, б — ее разрез через «горлышко».

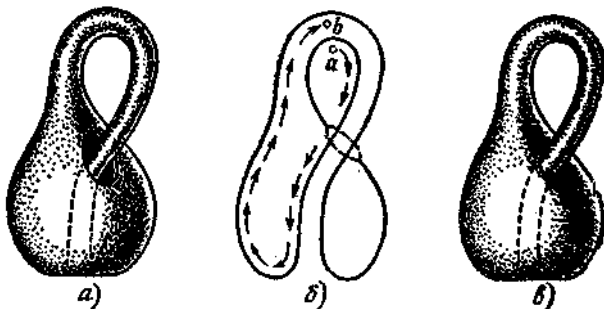


Рис. 78.

Заклеивание дыры l кругом дает замкнутую поверхность (рис. 78, в), которая, однако, пересекает себя. В действительности самопересечения не должно быть — мы хотим считать, что оно возникает лишь из-за «неудачного» расположения поверхности в пространстве. Полученная поверхность называется *бутылкой Клейна*. Она одно-

сторонняя: начав движение от точки, расположенной на внешней поверхности горлышка, можно пройти внутрь горлышка (рис. 78, б).

Пример 26. Так как *край ленты Мёбиуса гомеоморфен окружности* (рис. 79), то можно попытаться приклеить ленту Мёбиуса своим краем к краю дыры, вырезанной в некоторой поверхности.



Рис. 79.

На рис. 80, а изображена лента Мёбиуса (кольцо с перекручиванием), а на рис. 80, б — кусок поверхности Q с вырезанной в ней дырой. Если «разогнуть» внутреннюю «лопасть» поверхности Q , то легко увидеть (рис. 80, в), что в ней вырезана дыра, гомеоморфная кругу.

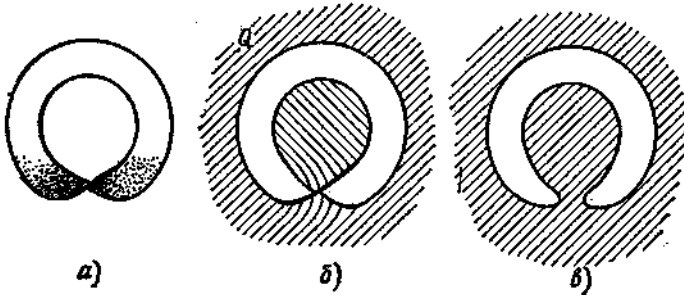


Рис. 80.

Так как поверхности, изображенные на рис. 80, а и б, имеют одинаковый край, то можно склеить их краями, т. е. *вклеить ленту Мёбиуса в круглую дыру, вырезанную в поверхности Q* . Правда, при этом лента Мёбиуса окажется пересекающей с поверхностью Q , но мы будем считать, что пересечение возникает лишь из-за «неудачного» расположения в пространстве.

Заклеивание дыры лентой Мёбиуса можно описать и иначе. Разрежем ленту Мёбиуса по ее средней линии. Для этого мы должны сначала склеить боковые стороны прямоугольника (с перекручиванием — чтобы получилась лента Мёбиуса), а затем произвести разрез по линии *тпр* (рис. 81, а). Но можно выполнить действия в обратном порядке: сначала разрезать прямоугольник по линии *тпр* (рис. 81, б), а затем произвести склеивание боковых отрезков (с учетом направления стрелок). Для склеивания повернем нижнюю половину прямоугольника «наизнанку» (рис. 81, в) и расположим половинки, как на рис. 81, г. Теперь нетрудно произвести необходимые склеивания (рис. 81, д).

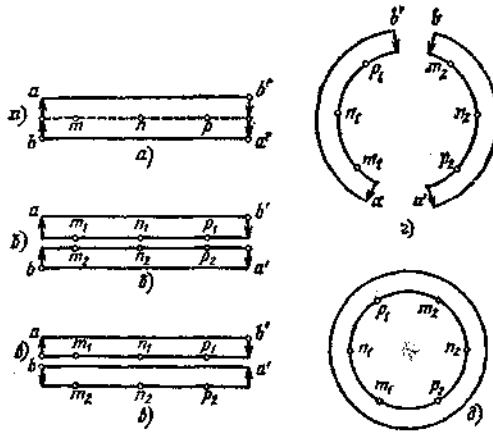


Рис. 81.

Мы видим, что разрезание ленты Мёбиуса по средней линии дает фигуру, гомеоморфную кольцу. На рис. 81 показаны точки, получившиеся из точек m, n, p при разрезании по средней линии. На рис. 81, α одинаково обозначенные точки являются диаметрально противоположными. Обратное склеивание снова превращает кольцо в ленту Мёбиуса. Следовательно, если на одной окружности кольца склеить между собой каждые две диаметрально противоположные точки, то мы получим ленту Мёбиуса.

Пусть теперь l — контур круглой дыры на некоторой поверхности Q . Вырежем из поверхности узкую полоску (кольцо) вокруг дыры l и обозначим через V наружный контур этого кольца (рис. 82).

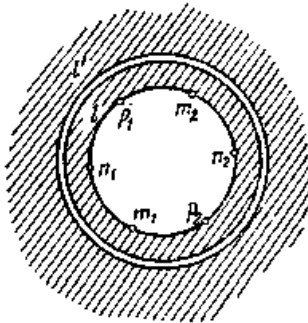


Рис. 82

Тогда получится поверхность, гомеоморфная Q (только с несколько большей дырой V), и отдельно кольцо. Склеим теперь на контуре l

отрезанного кольца каждые две диаметрально противоположные точки; тогда кольцо превратится в ленту Мёбиуса. Эту ленту Мёбиуса мы и вклеим в дыру V . В результате мы вклеим в поверхность Q (точнее, в поверхность, гомеоморфную ей) ленту Мёбиуса. Но разрезание поверхности по контуру Γ и обратное склеивание этого разреза можно было и не делать: достаточно было просто склеить на контуре l каждые две диаметрально противоположные точки. Итак, *склеивание каждой двух диаметрально противоположных точек на контуре круглой дыры равносильно вклеиванию в эту дыру ленты Мёбиуса.*

Пример 27. В проективной геометрии к точкам обычной (евклидовой) плоскости присоединяются *несобственные* (бесконечно удаленные) точки. Присоединение бесконечно удаленных точек производится таким образом, что к каждой прямой, проходящей в евклидовой плоскости, присоединяется одна бесконечно удаленная точка, причем для всех параллельных между собой прямых эта бесконечно удаленная точка одна и та же (т. е. параллельные прямые «пересекаются в бесконечности»), а для непараллельных прямых бесконечно удаленные точки различны. Плоскость, пополненная бесконечно удаленными точками, называется *проективной плоскостью*. Чтобы выяснить топологическую структуру проективной плоскости, рассмотрим полусферу с центром o , касающуюся плоскости и расположенную так, что диаметрально плоскость полусферы параллельна плоскости (рис. 83).

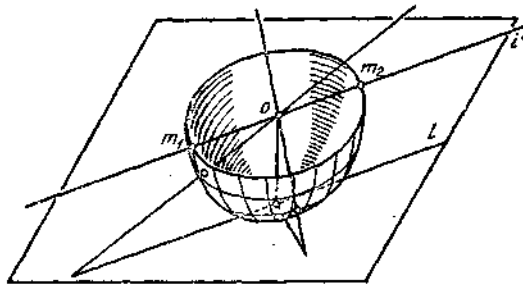


Рис. 83.

Центральное проектирование из точки o является гомеоморфным отображением открытой полусферы (получающейся выбрасыванием из полусферы всех точек ограничивающей ее окружности) на всю евклидову плоскость.

Проведем теперь через точку касания полусферы прямую l на плоскости, а через точку o — прямую l' , параллельную l . Прямые l и l'

«пересекаются в бесконечности» так, что точки m_1 и m_2 , в которых прямая l' пересекается с краем полусферы, «проектируются» (вдоль прямой Γ) в одну и ту же точку — в бесконечно удаленную точку прямой l . Следовательно, отображение полусферы с краем на плоскость, пополненную бесконечно удаленными точками (т. е. на проективную плоскость), не является взаимно однозначным: двум различным точкам m_1, m_2 на крае полусферы соответствует одна и та же точка проективной плоскости. Чтобы это отображение стало взаимно однозначным (и гомеоморфным), нужно склеить между собой каждые две диаметрально противоположные точки на крае полусферы. Иначе говоря, проективная плоскость гомеоморфна полусфере, к краю которой приклеена лента Мёбиуса (или сфере с одной дырой, которая заклеена лентой Мёбиуса). Из этого следует, что проективная плоскость (в отличие от евклидовой) является односторонней поверхностью.

Теперь мы можем сформулировать вторую половину теоремы Мёбиуса—Жордана о классификации поверхностей, а именно, дать перечисление всех топологически различных типов замкнутых неориентируемых поверхностей. Обозначим через N_q поверхность, получающуюся из сферы вырезыванием в ней q дыр и заклеиванием их всех лентами Мёбиуса. Оказывается, что *поверхности*

$$N_1, N_2, \dots, N_q, \dots \quad (12)$$

и дают полную топологическую классификацию замкнутых неориентируемых поверхностей.

Задачи

81. Докажите, что если в поверхности N_q вырезать круглую дыру, то получающаяся поверхность с краем может быть расположена в трехмерном пространстве без самопересечений.

Указание: получающаяся поверхность гомеоморфна рассмотренной в задаче 62.

82. Докажите, что эйлериона характеристики шпирхюсти N_q равна $2 - q$.

83. На сфере вырезаны $m + n + p$ дыр; m из них заклеены ручками, а n — лентами Мёбиуса. Докажите, что эйлера характеристика получившейся поверхности с краем равна $2 - 2m - n - p$.

84. Докажите, что граф «4 домика и 4 колодца» (ребрами которого являются соединяющие тропинки — по одной от каждого домика к каждому колодцу) не может быть размещен без самопересечений на проективной плоскости, но может быть расположен на торе.

85. На поверхности Q удалось начертить граф « m домиков и n колодцев». Докажите, что $\chi(Q) \leq m + n - \frac{mn}{2}$.

86. Какой из поверхностей (12) гомеоморфна бутылка Клейна? Проективная плоскость?
87. Какие поверхности получаются, если на рис. 84, *a*, *б*, *в*, *г* склеить (с учетом направлений) стороны, помеченные одинаковыми буквами?

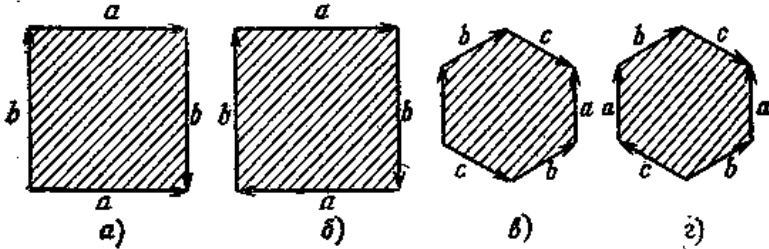


Рис. 84.

88. В трехмерном пространстве R^3 взята лента Мёбиуса, а в четырехмерном пространстве R^4 , содержащем R^3 , взята точка $p \notin R^3$. К ленте Мёбиуса добавлены все прямолинейные отрезки, соединяющие p с точками, лежащими на крае ленты Мёбиуса. Докажите, что получившаяся поверхность гомеоморфна проективной плоскости. Докажите, что любая поверхность N_p может быть расположена в R^4 без самопересечений.

Поверхности (12) попарно не гомеоморфны, так как имеют различные эйлеровы характеристики (задача 82). Поэтому для доказательства того, что поверхности (12) дают полную топологическую классификацию замкнутых неориентируемых поверхностей, остается установить, что каждая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей (12). Это доказывается точно так же, как и в пункте 12. Разница будет, во-первых, в том, что лента L (см. рис. 70) теперь может оказаться гомеоморфной ленте Мёбиуса (поскольку рассматриваются неориентируемые поверхности). В этом случае поверхность Q^*_i , получившаяся после вырезания полоски L , будет иметь одну новую компоненту края (так как край полоски L , т. е. ленты Мёбиуса, гомеоморфен окружности). Наоборот, Q_{i+1} получается из Q^*_i приклеиванием полоски L к одному из контуров, принадлежащих краю поверхности Q^*_i , т. е. Q_{i+1} получается из Q^*_i заклеиванием одной дыры лентой Мёбиуса. Во-вторых, разница будет в том, что склеивание контуров l_1 и l_2 на рис. 72—73 теперь может производиться с учетом не обязательно противоположной ориентации на них (что равносильно вклеиванию ручки, рис. 75), но, возможно, с учетом одинаковой ориентации контуров. В этом случае поверхность Q_{i-1} получается из Q^*_i заклеиванием двух дыр лентами Мёбиуса (задача

89). Таким образом, рассуждение, проведенное в пункте 1.2.4, показывает, что *любая замкнутая неориентируемая поверхность Q получается из сферы вырезанием $k + q$ дыр и заклеиванием k дыр ручками, а q дыр — лентами Мёбиуса*. При этом $q \geq 1$, так как при $q = 0$ мы получили бы ориентируемую поверхность P_k , а по условию поверхность Q была неориентируемой. Остается заметить, что если в поверхность вклеена хотя бы одна лента Мёбиуса, то вклеивание ручки равносильно вклеиванию двух лент Мёбиуса (задача 90). Поэтому поверхность Q , получающаяся из сферы вырезанием $k+g$ дыр и вклеиванием k ручек и q лент Мёбиуса (где $q \geq 1$), гомеоморфна сфере, в которой вырезаны $2k + q$ дыр и все они заклеены лентами Мёбиуса. Иначе говоря, Q гомеоморфна одной из поверхностей (12).

Задачи

89. В круге вырезаны две дыры, и их контуры l_1, l_2 склеены с учетом одинаковой ориентации на них. Докажите, что это эквивалентно заклеиванию обеих дыр лентами Мёбиуса.

Указание. Произведем дополнительные разрезы по линиям $amna'$, $erqe'$ (рис. 85, а) и перевернем «наизнанку» отрезанный кусок (рис. 85, б). Теперь склеивание контуров l_1 и l_2 осуществляется непосредственно (рис. 85, в) и остается вновь склеить проведенные разрезы, т. е. склеить «диаметрально противоположные» точки на двух контурах.

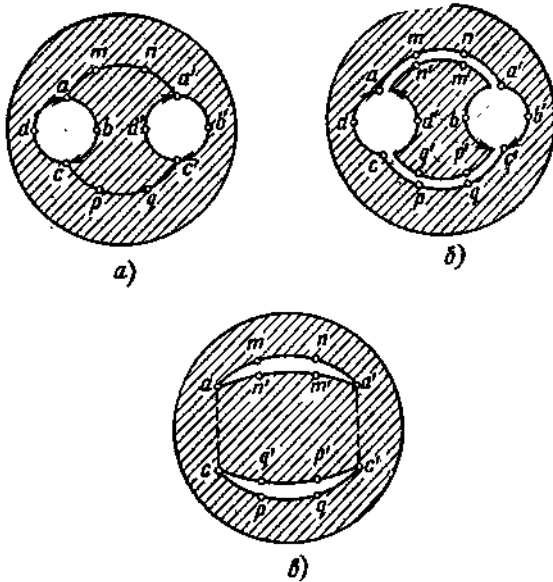


Рис. 85.

90. В круге вырезаны три дыры и одна из них заклеена лентой Мёбиуса, а контуры двух других дыр склеены с учетом противоположной ориентации на них (ручка). Докажите, что это равносильно заклеиванию всех трех дыр лентами Мёбиуса.

Указание. Проведем дополнительный разрез m_1abm_2 , а затем вывернем отрезанный кусок «наизнанку» (рис. 86). Мы получаем «серповидную» дыру, на контуре которой склеиваются каждые две «диаметрально противоположные» точки, и еще два контура, которые надо склеить с учетом одинаковой ориентации на них.

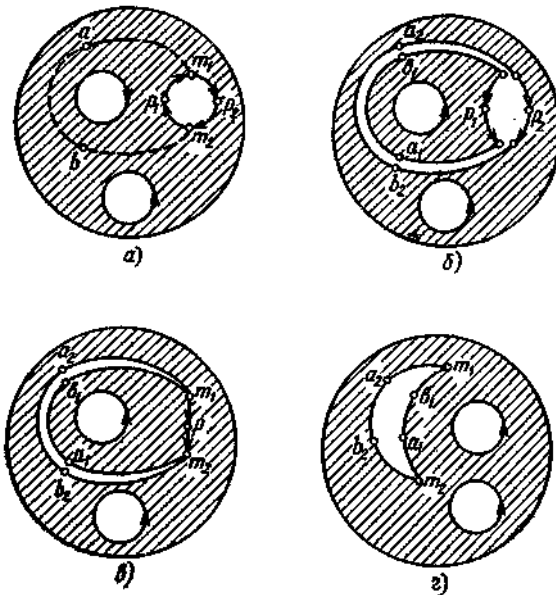


Рис. 86.

91. Сформулируйте и докажите теорему о топологической классификации неориентируемых поверхностей с краем.

2.2.6. Векторные поля на поверхностях

Вопрос, который рассматривается в этом пункте, заключается в следующем. Можно ли на заданной ориентируемой поверхности Q построить непрерывное поле направлений, т. е. выбрать в каждой ее

точке такой ненулевой касательный вектор, что при переходе от точки к точке вектор меняется непрерывно?

Пример 28. На сфере направление с севера на юг (рис. 87, а) имеет особые точки в полюсах; в этих точках векторы направлены в разные стороны и непрерывность нарушается.

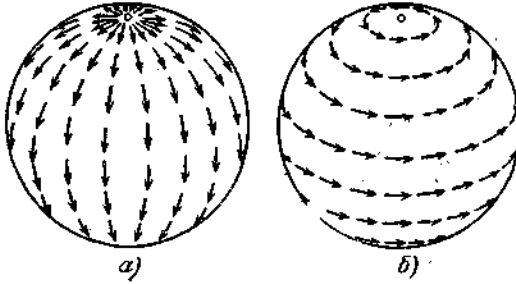


Рис. 87

То же можно сказать о направлении с запада на восток (рис. 87, б). Вообще, как мы увидим дальше, на всей сфере не существует непрерывного поля направлений. Это иногда формулируют в виде «теоремы о еже»: если из каждой точки поверхности сферы растет «колючка» (ненулевой вектор, не обязательно касающийся сферы) и направления «колючек» от точки к точке меняются непрерывно, то найдется хотя бы одна «колючка», перпендикулярная к сфере.

Действительно, в противном случае, спроектировав каждую «колючку» aq на касательную плоскость, проведенную в точке a , из которой эта «колючка» растет (рис. 88), мы получили бы на всей сфере непрерывное поле ненулевых касательных векторов, а это невозможно.

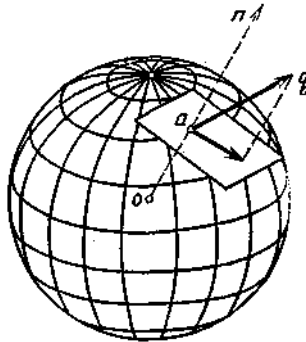


Рис. 88.

На рис. 89, *а, б* показан вид векторных полей, рассмотренных в примере 28, вблизи северного полюса, а на рис. 89, *в* — более сложная особая точка (так называемое *седло*). Когда мы один раз обойдем особую точку (например, против часовой стрелки), направления векторов совершат в случаях, изображенных на рис. 89, *а*) и *б*) один поворот в том же направлении (рис. 90, *а, б*), а в случае рис. 89, *в*) — один поворот, но уже в противоположном направлении (рис. 90, *в*).

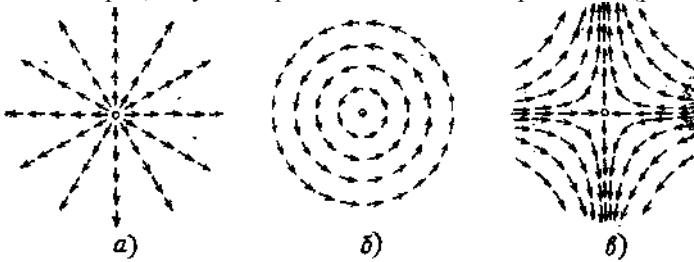


Рис. 89.

В связи с этим говорят, что особая точка на рис. 89, *а*) (и на рис. 89, *б*) имеет индекс $+1$, а особая точка на рис. 89, *в*) — индекс -1 .

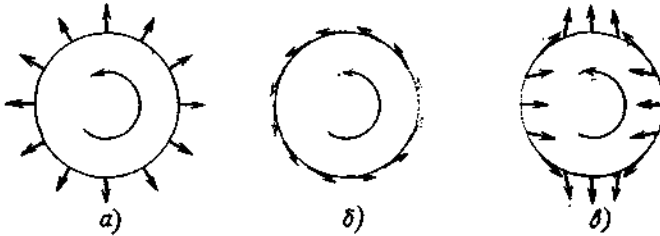


Рис. 90.

Выдающийся французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912) доказал, что *если на замкнутой ориентируемой поверхности Q задано поле ненулевых касательных векторов, непрерывное всюду, кроме конечного числа особых точек, то сумма индексов всех особых точек равна $\chi(Q)$.*

Пример 29. Так как $\chi(P_k) = 2 - 2k$, то $\chi(P_k) \neq 0$ при $k \neq 1$.

Следовательно, на ориентируемой поверхности, отличной от тора P_1 , не существует непрерывного поля ненулевых касательных векторов без особых точек. На торе же векторное поле существует (например, можно взять векторы, направленные вдоль параллелей).

Доказательство теоремы Пуанкаре проведем в два этапа: сначала докажем, что для любых двух векторных полей сумма индексов

одинакова, а затем построим поле, для которого эту сумму легко вычислить.

Пусть на поверхности Q заданы два ненулевых векторных поля с конечным числом особых точек. Вектор первого поля в точке x обозначим через $v_1(x)$, а вектор второго поля — через $v_2(x)$. Разобьем Q на маленькие многоугольники так, чтобы в каждом многоугольнике было не более одной особой точки каждого поля и все особые точки лежали внутри многоугольников.

Заметим, что если x не является особой точкой поля v_1 , то вблизи точки x мы можем повернуть векторы этого поля, оставляя его непрерывным (рис. 91: по мере увеличения радиуса окружности векторы поворачиваются все меньше).

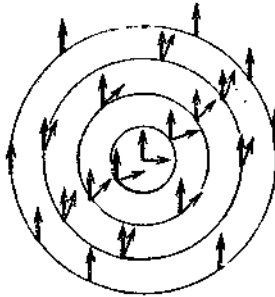


Рис 91

Пользуясь этим, повернем векторы поля v_1 вблизи вершин таким образом, чтобы в каждой вершине x_0 векторы $v_1(x_0)$ и $v_2(x_0)$ совпали (рис. 92).

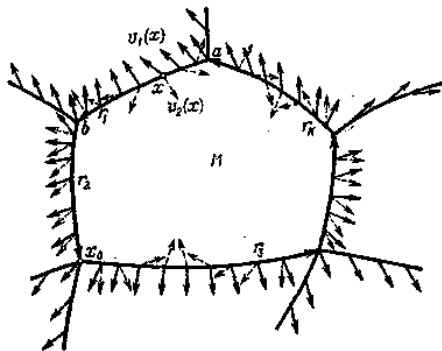


Рис. 92.

Так как поверхность Q ориентируема, то на ней можно указать положительное направление отсчета углов (скажем, против часовой стрелки, если смотреть на поверхность с внешней стороны). Возьмем теперь некоторое ребро r_1 (рис. 92) и выберем на нем направление, (например, от вершины a к b). Будем сначала, двигаясь от a к b в этом направлении, следить за вектором $v_1(x)$, а потом, возвращаясь от b к a , следить за вектором $v_2(x)$. Когда мы пробежим ребро r_1 туда и обратно, вектор, за которым мы следим, непрерывно перемещаясь, вернется к прежнему положению (поскольку $v_1(a) = v_2(a)$ и $v_1(b) = v_2(b)$). Число оборотов, которое совершает этот вектор (учитывая выбранное направление отсчета углов), обозначим через $d(r_1)$. На рис. 92 имеем $d(r_1) = 1$, $d(r_2) = 0$, $d(r_3) = -1$. Заметим, что если на ребре r_2 взять противоположное направление (от b к a), то $d(r_1)$ изменит знак (так как вектор, за которым мы следим, будет поворачиваться в обратном направлении).

Пусть M — один из многоугольников. Когда мы обойдем его контур (в положительном направлении), вектор $v_1(x)$ совершит некоторое число оборотов — обозначим это число через $z_1(M)$, — а вектор $v_2(x)$ совершит $z_2(M)$ оборотов.

Обозначим через r_1, r_2, \dots, r_k стороны многоугольника M и зададим на них направления, соответствующие положительному обходу его контура (см. рис. 92). Обойдем контур (начиная от точки a) в положительном направлении, следя за вектором $v_1(x)$, а затем (после возвращения в a) обойдем контур в противоположном направлении, наблюдая за вектором $v_2(x)$. В результате наблюдаемый вектор совершит $z_1(M) - z_2(M)$ оборотов. Но мы можем следить за поворотами векторов «по частям»: наблюдая $v_1(x)$ при движении по ребру r_1 и $v_2(x)$ при обратном движении по ребру r_1 ; далее, наблюдая $v_1(x)$ при прохождении ребра r_2 и $v_2(x)$ при обратном движении по ребру r_2 и т. д. В этом случае мы насчитаем $d(r_1) + d(r_2) + \dots + d(r_k)$ оборотов. Так как суммарный поворот не зависит от того, в каком порядке складывать углы поворота вектора на каждом из ребер, то

$$z_1(M) - z_2(M) = d(r_1) + d(r_2) + \dots + d(r_k). \quad (13)$$

Из формулы (13) нетрудно вывести соотношение

$$\sum z_1(M) = \sum z_2(M), \quad (14)$$

в котором суммирование производится по всем многоугольникам. В самом деле, просуммируем равенства (13) по всем многоугольникам. В правой части получившейся суммы каждое ребро Γ встретится дважды, так как к нему примыкают два многоугольника M_1 и M_2 (рис. 93).

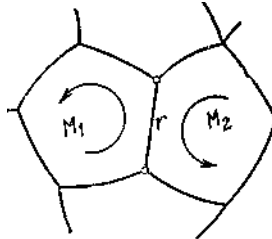


Рис. 93.

Но при положительном обходе контура M_1 ребро r получит одно направление, а при положительном обходе контура M_2 — противоположное направление. Следовательно, в правой части один раз встретится $d(r)$, а второй раз $-d(r)$. Так как это произойдет с каждым ребром, то $\sum z_1(M) - \sum z_2(M) = 0$.

Пусть M — некоторый многоугольник и x_0 — особая точка поля $v_1(x)$, расположенная в нем. Построим систему простых замкнутых линий, соединяющую контур многоугольника M с окружностью, обходящей точку x_0 (рис. 94).

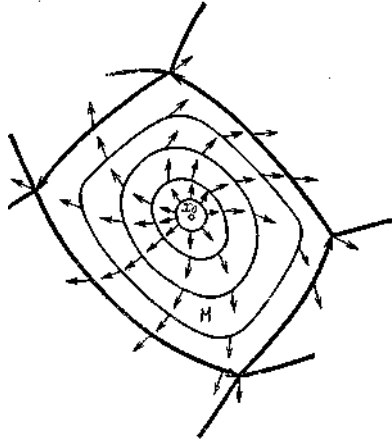


Рис. 94.

При переходе от одной линии к близкой ей число оборотов вектора $v_1(x)$ должно измениться мало, поскольку поле $v_1(x)$ непрерывно. Но число оборотов является целым и потому «мало» измениться не может, т. е. остается постоянным при переходе от линии к линии. Но при обходе по контуру многоугольника M число оборотов равно $z_1(M)$, а при обходе по окружности вокруг точки x_0 получается индекс этой

точки. Таким образом, число $z_1(M)$ равно индексу особой точки x_0 (если внутри M нет особых точек, то $z_1(M) = 0$). Из этого вытекает, что число $\sum z_1(M)$ равно сумме индексов всех особых точек поля $v_1(x)$. Аналогично, число $\sum z_2(M)$ равно сумме индексов поля $v_2(x)$. Из этого в силу (14) вытекает, что у *обоих полей сумма индексов одинакова*. Этим завершён первый этап.

Выберем теперь внутри каждого многоугольника «центр», а на каждом ребре — «середины», и построим векторное поле, как показано на рис.95: вдоль ребер векторы направлены от вершин к «середине», из вершин векторы выходят, а к «центрам» многоугольников приходят.

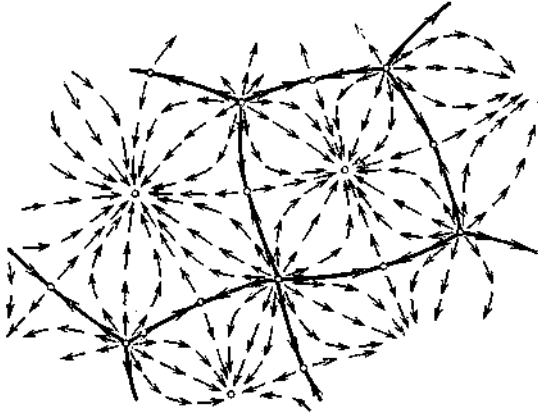


Рис. 95.

Особыми точками этого поля на поверхности Q будут вершины, «середины» и «центры». При этом (рис. 96) индекс каждой особой точки в вершине и в «центре» равен $+1$, а индекс «середины» ребра равен -1 (седло).



Рис. 96.

Следовательно, для этого поля (а потому и для любого другого) сумма индексов всех особых точек равна

$$B \cdot (+1) + P \cdot (-1) + \Gamma \cdot (+1) = \chi(Q).$$

Задачи

92. Докажите, что на всякой замкнутой поверхности существует векторное поле с единственной особой точкой.
93. Докажите, что на всякой поверхности с краем существует векторное поле без особых точек (направление векторов в точках края должно касаться поверхности, но может не быть касательным к краю).
94. Докажите, что теорема Пуанкаре остается справедливой для ориентируемой поверхности с краем, если в каждой точке края вектор направлен по касательной к этому краю.
95. Докажите теорему Брауэра: если $f: K \rightarrow K$ — произвольное непрерывное отображение круга K в себя, то существует (хотя бы одна) неподвижная точка, т. е. такая точка $x \in K$, которая переходит при отображении f в себя: $f(x) = x$.
- Указание.** Если бы неподвижных точек не было, то, построив векторы, идущие из каждой точки x в точку $f(x)$, мы получили бы ненулевое непрерывное векторное поле без особенностей.

2.2.7. Проблема четырех красок

Области, на которые конечный граф G разбивает плоскость, назовем «странами». На рис. 97 страны А и Б пограничны /примыкают друг к другу по общему ребру).

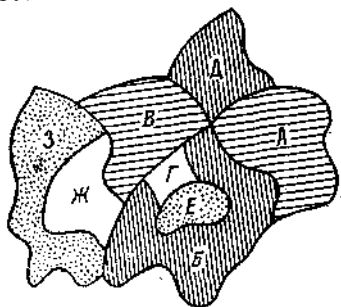


Рис. 97

Страны Б и В также пограничны (у них даже два общих ребра). Страны А и В не являются пограничными: хотя у них есть общая точка (вершина), но нет общих ребер.

Мы хотим раскрасить страны в разные цвета, чтобы получилась «политическая карта». Разумеется, чтобы страны были хорошо видны, необходимо пограничные страны окрашивать в разные цвета.

Однако в целях экономии количества красок разрешается непограничные страны окрашивать одним цветом. Какое минимальное количество красок нужно иметь, чтобы можно было раскрасить любую карту на плоскости?

Эта задача была сформулирована в 1852 году лондонским студентом Гутри, который обнаружил, что для различения графств на карте Англии достаточно четырех красок, и выдвинул гипотезу о том, что четырех цветов достаточно для раскраски любой карты. Спустя почти сорок лет английский математик Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Постепенно проблема четырех красок приобретала все больший интерес. В 1968 году Оре и Стемпл доказали, что любую карту, имеющую *не более 40 стран*, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время считается, что справедливость гипотезы четырех красок установлена. Слово «считается» употреблено в связи с тем, что известные сейчас решения этой проблемы базируются на применении ЭВМ и связаны с выполнением огромного, необозримого количества вычислений, причем проверка правильности вычислений практически невыполнима. Первое «машинное» решение было получено в 1976 году американскими математиками К. Аппелем и В. Хакеном. С помощью машины (которая «помогала» им постепенно усовершенствовать первоначальную программу) они разбили все возможные карты на почти 2000 (четко указанных) типов и составили машинную программу их исследования. Для каждого из этих типов машина решала (по составленной программе) задачу: *может ли в рассматриваемом типе карт найтись такая, которая не раскрашивается в четыре цвета?* Когда, выполнив десятки миллиардов арифметических и логических операций, машина давала ответ «Нет», переходили к следующему типу карт и т. д. Полу чив ответ «Нет» для всех типов карт, Аппель и Хакен объявили, что ими получено машинное решение проблемы четырех красок.

Однако гарантии в правильности этого «машинного» решения все же нет. Ведь в каком-то (скажем, семнадцатом) типе карт машина могла ответить «Нет» не в результате безупречного анализа, а из-за мимолетного сбоя в электронной схеме (что бывает нередко). Не зная об этом, вычислители переходят к восемнадцатому, девятнадцатому ... типу карт, фактически пропустив исследование семнадцатого типа. Не будет гарантии в правильности решения даже в том случае, если мы, затратив много месяцев, повторим уникальный машинный эксперимент: может быть, где-то в многомиллиардной цепочке вычислений, связанных с тем же семнадцатым типом, и в нашей машине произойдет сбой?

Новое машинное решение было предложено в 1978 году Д. Коэном. Число типов карт было у него существенно меньшим, причем результат машинных вычислений по каждому типу и подтипу он получал не в виде готового «Нет», а в форме, допускающей «ручную» проверку. Его не интересовало, каким путем шла машина при исследовании данного подтипа и сколько операций это потребовало; исследование подтипа считалось завершенным, когда машина находила достаточно короткий путь проверки окончательного «Нет». Решение проблемы четырех красок, найденное Коэном, изложено в книге среднего объема и формата. По его мнению, проверка этого решения может быть, при желании, выполнена вручную одним человеком в течение двух-трех лет (!) ежедневной восьмичасовой работы. Однако «скептики» считают, что и это решение малопримемло: вряд ли человек, занимавшийся с утра до вечера в течение двух лет нудным перебором вариантов, может гарантировать, что он нигде не допустил ни одной ошибки.

Задачи

96. На плоскости (или на сфере) начерчен граф, все вершины которого имеют четные индексы. Докажите, что получившаяся карта может быть раскрашена в два цвета.

Указание: воспользуйтесь понятием индекса пересечения.

97. Докажите, что для раскраски любой карты на плоскости (или на сфере) достаточно пяти цветов.

98. На некоторой поверхности начерчен такой граф, что из каждых двух пограничных стран хотя бы одна является треугольником. Докажите, что эту карту можно раскрасить в четыре цвета.

99. Проведено n «перегородок», идущих от одной из концентрических окружностей к другой. Сколько нужно цветов для раскрашивания получившейся карты?

2.2.8. Раскрашивание карт на поверхностях

Пример 30. Хивуд доказал, что *любую карту на торе можно раскрасить семью красками* (это вытекает из доказываемого ниже неравенства (16)). Он привел также пример, показывающий, что меньше, чем семью цветами, обойтись нельзя. При склеивании противоположных сторон прямоугольника (рис. 98) превращается в тор с

семью странами на нем (рис. 99). Каждая две страны пограничны, т. е. все семь стран должны быть раскрашены в разные цвета.

Если любая карта на поверхности Q допускает раскраску в n цветов, но существует карта, для раскраски которой нельзя обойтись меньшим числом цветов, то n называется *хроматическим числом* поверхности Q ; оно обозначается через $\text{col}(Q)$. Для сферы и тора имеем, согласно сказанному выше, $\text{col}(P_0) = 4$, $\text{col}(P_1) = 7$. Вообще, для произвольной замкнутой поверхности Q , отличной от бутылки Клейна N_2 , хроматическое число дается *формулой Хивудай*

$$\text{col}(Q) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}}{2} \right\rceil, \quad (15)$$

где квадратные скобки означают *целую часть*, а для бутылки Клейна имеем $\text{col}(N_2) = 6$.

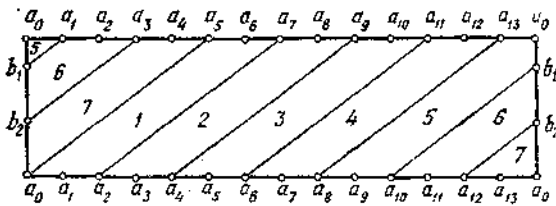


Рис. 98.

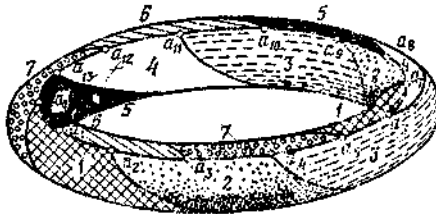


Рис. 99.

Эти результаты получены усилиями нескольких поколений математиков. Хивуду принадлежит доказательство неравенства

$$\text{col}(Q) \leq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}}{2} \right\rceil. \quad (16)$$

Оставалось установить, что на поверхности Q , отличной от бутылки Клейна, существует карта, для раскраски которой нельзя обойтись меньшим, чем указано в (15), числом цветов. Вначале такие карты были построены для нескольких первых поверхностей в последовательностях (7), (12). Доказательство существования требуемой карты для любой неориентируемой поверхности было

получено Рингелем (1954), а для ориентируемой — Рингелем и Янгсом (1968).

Приведем доказательство неравенства (16). Пусть на поверхности Q начерчена карта, требующая для своей раскраски c цветов, где $c = \text{col}(Q)$. Выберем внутри каждой страны точку («столицу»). Для каждых двух пограничных стран проведем по территории этих стран одну «железную дорогу», соединяющую их столицы (рис. 100), причем так, чтобы различные «железные дороги» не пересекались.

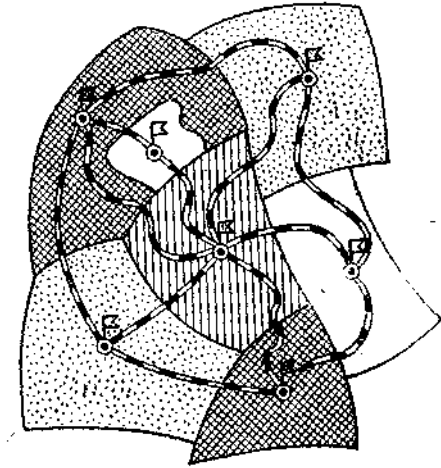


Рис. 100.

Вместо окраски страны в некоторый цвет мы можем водрузить в ее «столице» флаг, имеющий этот цвет; если при этом две «столицы» соединены «железной дорогой» (т. е. страны пограничны), то их флаги должны иметь разный цвет. Таким образом, надо «окрасить» вершины графа G^* (ребрами которого являются «железные дороги») таким образом, чтобы любые две смежные вершины (соединенные ребром) имели разный цвет. Ясно, что *хроматическое число* графа G^* , т. е. наименьшее число цветов, требуемых для такой его раскраски, равно c .

Выбросим из G^* некоторую вершину a и все примыкающие к ней ребра. Если при переходе к получившемуся графу G' хроматическое число не уменьшилось, то вместо G^* можно взять более простой граф G' . Возможно, в G' тоже можно провести выбрасывание вершины и т. д.

В конце концов мы получим «неупрощаемый» граф G^{**} , содержащийся в G^* , т. е. хроматическое число графа G^{**} равно c , но

выбрасывание любой вершины графа G^{**} и примыкающих к ней ребер приводит к уменьшению хроматического числа. Число вершин и ребер графа G^{**} обозначим через V и P , а число областей, на которые этот граф разбивает поверхность Q , — через Γ . Тогда (см. задачу 72)

$$V - P + \Gamma \geq \chi(Q). \quad (17)$$

К каждой вершине графа G^{**} примыкает не менее $c - 1$ ребер. В самом деле, допустим, что к вершине $b \in G^{**}$ примыкает k ребер $[bq_1], \dots, [bq_k]$, где $k < c - 1$.

Выбросив из G^{**} вершину b и эти ребра, мы получим граф G'' с меньшим, чем c , хроматическим числом. Раскрасим этот граф в $c - 1$ цвет. Так как $k < c - 1$, то из $c - 1$ цвета, в которые окрашен граф G'' , хотя бы один цвет не использован для окраски вершин $q_1 \dots q_k$.

Окрасив вершину b в этот неиспользованный цвет, мы получим окраску графа G^{**} в $c - 1$ цвет, что, однако, противоречит выбору графа G^{**} .

Итак, к каждой вершине графа G^{**} примыкает не менее $c - 1$ ребра. Из этого (см. задачу 20) вытекает неравенство

$$(c - 1) V \leq 2P. \quad (18)$$

Далее, каждая из областей, определяемых графом G^{**} , имеет не менее трех ребер. Действительно, наличие «одноугольника» (рис. 101, *а*) означало бы существование «железной дороги», идущей из столицы в ту же самую столицу (без захода в другие столицы), а наличие «двуугольника» (рис. 101, *б*) означало бы, что некоторые две «столицы» соединены двумя дорогами; но мы таких дорог не проводили.

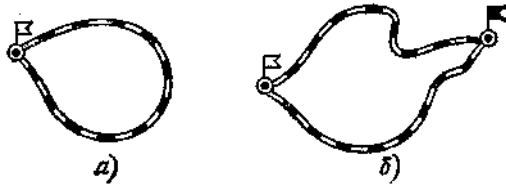


Рис. 101.

Пересчитав теперь ребра по всем Γ областям, мы насчитаем не менее 3Γ ребер; при этом каждое ребро засчитывается дважды (так как к нему примыкают две области).

Следовательно, $3\Gamma \leq 2P$, т. е. $\frac{2}{3}P - \Gamma \geq 0$. Прибавляя это

неравенство к (17), получаем $V - \frac{1}{3}P \geq \chi(Q)$ или, иначе,

$2P \leq 6V - 6\chi(Q)$. Учитывая (18), получаем теперь $(c - 1)V \leq 6V - 6\chi(Q)$, т. е.

$$c - 1 \leq 6 - \frac{6\chi(Q)}{B}, \quad (19)$$

Теперь нетрудно завершить доказательство. Пусть сначала поверхность Q гомеоморфна сфере: $Q = P_0$. Тогда $\chi(Q) = 2$, т. е. доказываемое неравенство (16) принимает вид $\text{col}(Q) \leq 4$. Это неравенство справедливо, поскольку проблема четырех красок решена. Пусть теперь $Q = N_1$, т. е. $\chi(Q) = 1$. Доказываемое неравенство (16) принимает вид $\text{col}(Q) \leq 6$. Это неравенство справедливо, так как из (19) следует, что $c - 1 \leq 6 - \frac{6}{B}$ и потому $c - 1 \leq 5$ (поскольку число $c - 1$ — целое).

Пусть, наконец, Q — замкнутая поверхность, отличная от P_0 и N_1 . Тогда $\chi(Q) \leq 0$ (задачи 70, 82). Так как $B \geq c$ (иначе граф G^{**} можно было бы раскрасить в $c - 1$ цвет), то $-\frac{6\chi(Q)}{B} \leq -\frac{6\chi(Q)}{c}$, и потому, согласно (19),

$$c - 1 \leq 6 - \frac{6\chi(Q)}{c}, \quad \text{т. е. } c^2 - 7c + 6\chi(Q) \leq 0.$$

Это означает, что число c принадлежит отрезку, концами которого являются корни квадратного трехчлена $x^2 - 7x + 6\chi(Q)$ (корни действительны, поскольку $6\chi(Q) \leq 0$). Следовательно, c не превосходит большего из этих корней, т. е.

$$c \leq \frac{1}{2} (7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}).$$

Таким образом, неравенство (16) справедливо и в этом случае.

Задачи

100. Поверхность Q получается из сферы вырезыванием $k + q$ дыр и заклеиванием k из них ручками. Докажите, что $\text{col}(Q) = \text{col}(P_k)$.
101. Поверхность Q получается из сферы вырезыванием $k + q$ дыр и заклеиванием q из них лентами Мёбиуса. Докажите, что $\text{col}(Q) = \text{col}(N_q)$. В частности, хроматическое число ленты Мёбиуса равно 6.
102. Приведите пример карты на проективной плоскости (или на ленте Мёбиуса), которую нельзя раскрасить пятью цветами.
103. Чему равно хроматическое число графа, вершинами и ребрами которого служат вершины и ребра n -угольника?
104. Каково хроматическое число графа « m домиков и n колодцев»?
105. Докажите, что существует граф, не вложимый в заданную поверхность.
106. Граф G с хроматическим числом 2 имеет n вершин. Какое максимальное число ребер может иметь этот граф?

107. Докажите, что если на заданной поверхности начерчена карта с достаточно маленькими странами, то ее можно раскрасить в 7 цветов.

108. Докажите, что если на поверхности Q можно начертить граф, имеющий хроматическое число c , то $\text{col}(Q) \geq c$.

109. Докажите, что на бутылке Клейна можно начертить полный граф с шестью вершинами. Выведите отсюда, что $\text{col}(N_2) \geq 6$.

2.2.9. «Дикая сфера»

Мы рассмотрим здесь вопросы, связанные с пространственной теоремой Жордана, но прежде поговорим об *индексе пересечения* в пространстве. Пусть Q — поверхность (возможно, имеющая край), составленная из плоских многоугольников, и G — граф, ребрами которого являются прямолинейные отрезки. Будем говорить, что G и Q *находятся в общем положении*, если вершины графа не принадлежат Q , а его ребра не имеют общих точек с ребрами поверхности Q . Если при этом число точек пересечения графа с поверхностью *четно*, то будем писать $J(G, Q) = 0$, а если *нечетно*, то $J(G, Q) = 1$. Число $J(G, Q)$ назовем *индексом пересечения* графа G с поверхностью Q . Как и в п. 1.1.5, доказываем, что *если поверхность Q не имеет края, а граф G представляет собой цикл (т. е. в каждой его вершине сходится четное число ребер), то $J(G, Q) = 0$.*

Задачи

110. Условимся говорить, что объединение конечного числа многоугольников в пространстве представляет собой *двумерный цикл* (по модулю 2), если эти многоугольники не имеют общих внутренних точек и к каждому ребру (мы считаем «ребрами» стороны многоугольников) примыкает четное число многоугольников. Докажите, что равенство $J(G, Q) = 0$ остается справедливым, если G — одномерный, а Q — двумерный цикл (по модулю два), причем они находятся в пространстве в общем положении.

111. Пусть Q — двумерный цикл по модулю 2, который будем представлять себе «спаянным» из металлических многоугольников. Докажите, что области, на которые он разбивает пространство, можно «залить жидкостями» двух цветов, так, чтобы к каждому многоугольнику примыкали с двух сторон разные по цвету «жидкости».

112. Докажите, что существует «пространственная карта», требующая для своей раскраски (или «заливки разноцветными жидкостями») не менее 1982 цветов.

113. Конечное множество ориентированных многоугольников в пространстве, которые не имеют общих внутренних точек (но могут иметь общие ребра и вершины), образуют *двумерный целочисленный цикл*, если для каждого направленного ребра число положительно примыкающих к нему многоугольников (M_1 и M_4 на рис. 102) равно числу отрицательно примыкающих (M_2 и M_3 на рис 102).

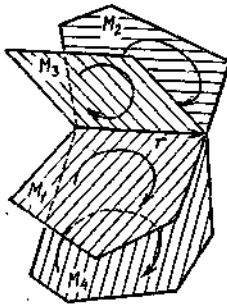


Рис. 102.

Докажите, что если G — одномерный целочисленный цикл, а Q — двумерный целочисленный цикл в пространстве, то их индекс пересечения

$$J(G, Q) = \sum_{i,j} J(r_i, M_j)$$

равен нулю; здесь суммирование распространено на все направленные отрезки r_1, \dots, r_k , составляющие цикл G , и все ориентированные многоугольники M_1, \dots, M_n , составляющие цикл Q , причем $J(r_i, M_j) = +1$ или $J(r_i, M_j) = -1$, в зависимости от того, соответствуют ли ориентации *правилу буравчика* (рис. 103, а) или нет (рис. 103, б).

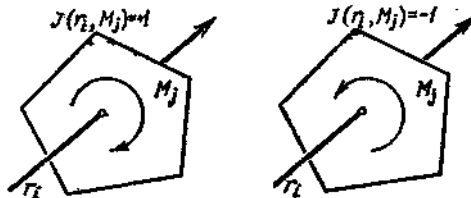


Рис. 103.

114. Пусть Q — двумерный целочисленный цикл, p и q — не принадлежащие ему точки. Проведем направленную ломаную x , идущую от точки p к q . Докажите, что индекс пересечения $J(x, Q)$ не зависит от выбора ломаной x , а определяется только точками p и q .

115. Пусть Q — двумерный цикл по модулю 2. Докажите, что его многоугольники можно ориентировать так, чтобы получился целочисленный цикл.

116. Пусть Q — двумерный целочисленный цикл. Докажите, что если существует направленная ломаная x (незамкнутая), для которой $J(x, Q) = n$, то Q разбивает пространство не менее, чем на $n+1$ областей. Верно ли обратное?

С помощью понятия индекса пересечения по модулю 2 доказывается (примерно так же, как в п. 6) пространственный аналог теоремы Жордана: *всякая замкнутая поверхность Q , расположенная в трехмерном пространстве без самопересечений, разбивает пространство на две области; одна из них — ограниченная (она называется внутренней), а другая (внешняя) — неограниченная.* Заметим, что (хотя об этом не говорится в формулировке теоремы) поверхность, вложенная в трехмерное пространство без самопересечений, должна быть двусторонней: ведь она разбивает пространство на две области, т. е. имеет «две стороны». Этим подтверждается то, что замкнутая односторонняя поверхность не может быть вложена в трехмерное пространство без самопересечений.

Задачи

117. Из точки c проведен луч l , не встречающий ребер поверхности Q (составленной из плоских многоугольников). Докажите, что c в том и только в том случае принадлежит внутренней области, определяемой поверхностью Q , если луч l пересекает Q в нечетном числе точек.

118. Существует ли в пространстве множество, являющееся совместной границей трех областей?

В конце п. 1.1.6, где шла речь о «плоской» теореме Жордана, мы отметили, что объединение простой замкнутой линии и ее внутренней области гомеоморфно кругу. Справедливо ли аналогичное (на первый взгляд столь же «очевидное») пространственное утверждение: «объединение поверхности, гомеоморфной сфере, и ее внутренней области гомеоморфно шару»? Для наиболее простых поверхностей,

гомеоморфных сфере (например, для выпуклых многогранников), это, действительно, верно. Однако в общем случае это «очевидное» утверждение неверно — интуиция здесь обманывает нас. Иными словами, *существует в трехмерном пространстве такая поверхность, гомеоморфная сфере, что объединение этой поверхности и ее внутренней области не гомеоморфно шару*. Построение такой «дикий сферы» связано с работами французского математика Антуана и американского математика Александера.

Прежде чем переходить к описанию «дикий сферы», рассмотрим вопрос о *стягиваемости линий*. Пусть l — простая замкнутая линия, расположенная в фигуре M . Будем говорить, что линия l *стягиваема* в M , если существует поверхность P , гомеоморфная кругу и имеющая l своим краем, которая расположена (возможно, с самопересечениями) в фигуре M . Термин «стягиваемость» связан с тем, что на «круге» P можно начертить систему «концентрических окружностей», по которым l может быть постепенно стянута в точку.

Задачи

119. Докажите, что если M — открытый шар, то в M любая простая замкнутая линия стягиваема.

120. Докажите, что если фигура A состоит из конечного числа точек, то окружность l , расположенная в пространстве вне A , может быть вне A стянута.

Указание. Если взять шар, содержащий l , то, «вдавливая» его, чтобы получались идущие внутрь трубки, можно построить тело, гомеоморфное шару, которое содержит внутри себя линию l , но не содержит точек множества A .

Утверждение, содержащееся в задаче 120, можно пояснить следующим образом. Если l — окружность, не проходящая через точки фигуры A (состоящей из конечного числа точек), то круг, натянутый на l (даже если он проходит через некоторые из точек фигуры A), может быть при помощи небольшой деформации «снят» с тех точек фигуры A , через которые он проходил. Может создаться впечатление, что в дополнительном пространстве произвольного нульмерного множества A любая окружность стягиваема. Однако это неверно.

Пример 31. Рассмотрим замкнутую цепь A , состоящую из нескольких сцепленных звеньев (рис. 104, а).

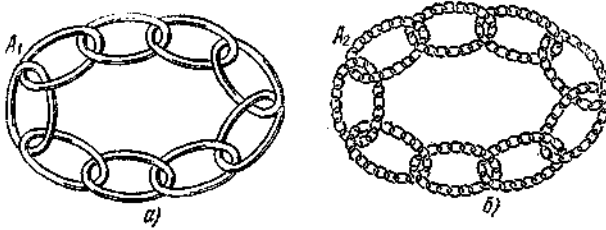


Рис. 104.

Далее, заменим каждое звено аналогичной замкнутой цепочкой из более мелких звеньев, проходящей внутри прежнего звена. Мы получим множество $A_2 \subset A_1$, состоящее из многих мелких звеньев (рис. 104, б). Теперь каждое звено, составляющее множество A_2 , заменим замкнутой цепочкой еще более мелких звеньев (расположенной внутри прежнего звена). Мы получим множество $A_3 \subset A_2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \subset \dots$. Пересечение всех этих множеств представляет собой *антуановское множество* A^* .

Множество A^* *нульмерно*. В самом деле, размеры звеньев, составляющих множество A_n , неограниченно уменьшаются с ростом n , и потому в A^* не существует связных множеств, отличных от точки. Пусть теперь l_1 — окружность, сквозь которую проходит первоначально взятая цепочка A_1 , и K_1 — круг с границей l_1 . На рис. 105, а круг K_1 пересекает тор T_1 , служащий поверхностью одного из звеньев цепи, по двум окружностям (меридианам); одна из них обозначена через l_2 . Часть круга K_1 , ограниченная линией l_2 , представляет собой меньший круг K_2 .

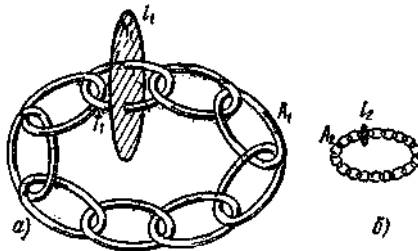


Рис. 105.

Этот меньший круг по отношению к части множества A_2 , расположенной внутри тора T_1 , находится в таком же положении, что и круг K_1 по отношению ко всему множеству A_1 (рис. 105, б). Можно себе представить, что K_2 (а потому и K_1) пересекает один из торов (служащих границами звеньев множества A_2) по двум меридианам;

один из них обозначим через l_3 и т. д. Таким образом, круг K_1 («пленка», натянутая на l_1) пересекается и с множеством A_1 , и с A_2 , и с A_3 и т. д., откуда вытекает, что K_1 пересекается и с предельным множеством A^* . Разумеется, на l_1 можно натянуть не только K_1 , но и иную пленку, являющуюся непрерывным образом круга; однако проведенное рассуждение поясняет, что любая такая пленка пересекается с A^* (путь доказательства этого факта обсуждается дальше). Итак, *окружность l_1 не стягиваема во внешнем пространстве антуановского множества A^** . Это нульмерное, как бы рассыпающееся на отдельные точки множество «мешает» провести пленку (являющуюся непрерывным образом круга), натянутую на l_1 .

Задачи

121. Докажите, что на l_1 можно натянуть пленку, гомеоморфную ручке и расположенную вне A^* .

122. Постройте простую замкнутую линию, проходящую через все точки антуановского множества.

Пример 32. Теперь мы в состоянии дать описание «дикой сферы». Пусть S — сфера, содержащая внутри себя множество A_1 и окружность l_1 (рис. 105, а). Продавим сферу S в нескольких местах, чтобы получились трубки, идущие внутрь и подходящие к каждому из торов, ограничивающих множество A_1 (рис. 106).

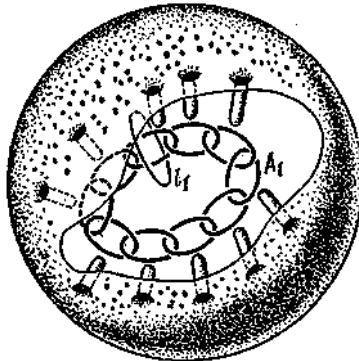


Рис. 106.

Мы можем это сделать так, чтобы трубки не подходили к окружности l_1 . Полученная поверхность S_1 (сфера со вдавленными трубками)

гомеоморфна сфере, а ее внутренняя область U_1 гомеоморфна открытому шару, причем линия l_1 лежит внутри U_1 . Теперь от концов трубок вдавим внутрь более узкие трубки, идущие внутри торов, ограничивающих множество A_1 , и подходящие к звеньям множества A_2 . Мы получим поверхность S_2 , также гомеоморфную сфере, причем ее внутренняя область U_2 гомеоморфна открытому шару и содержит l_1 . Затем мы вдавим еще более узкие трубки, подходящие к звеньям множества A_3 , и т. д. На каждом шаге получается поверхность S_n , гомеоморфная сфере, причем ее внутренняя область U_n гомеоморфна открытому шару и содержит l_1 . Постепенно трубки становятся все короче, поверхность видоизменяется все меньше, и поэтому предельная поверхность S^* остается гомеоморфной сфере. Так как при этом «щупальцы», выпускаемые поверхностями S_n , все ближе подходят к A^*_1 , то предельная сфера « S^* » содержит множество A^* . Внутренняя область U^* сферы S^* не пересекается с антуановским множеством A^* (поскольку это множество лежит на границе S^* области U^*), т. е. вся область U^* целиком лежит вне A^* . Поэтому окружность l_1 , расположенная внутри U^* , не стягиваема в U^* (поскольку линия l_1 не стягиваема вне A^*). Из этого вытекает, что область U^* не гомеоморфна открытому шару (задача 119). Поэтому объединение поверхности S^* и ее внутренней области не гомеоморфно замкнутому шару.

2.2.10. Узлы

Если концы «нити», на которой завязан узел, не соединены, то узел можно «развязать». Поэтому в топологии рассматривают узлы только на замкнутых линиях.

Пример 33. На рис. 107 изображен *простой узел* (иногда его называют также «трилистником»).

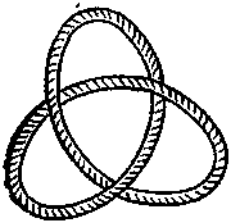
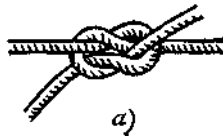


Рис. 107.



а)



б)

Рис. 108.

Пример 34. Обычный двойной узел (рис. 108, а) не следует смешивать с так называемым *морским узлом* (рис. 108, б); узел на рис. 108, а моряки пренебрежительно именуют «бабушкиным» узлом (он легче развязывается). На рис. 109 даны топологические схемы этих узлов. С

топологической точки зрения узел — это линия в трехмерном пространстве, гомеоморфная окружности.

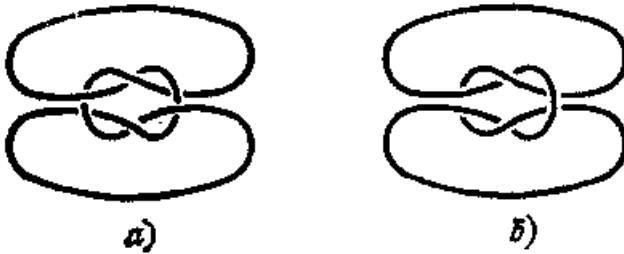


Рис. 109.

Разными узлами считаются такие, которые *неизотопны*. Представляется, например, наглядно очевидным, что «заузленная» и «незаузленная» линии на рис. 110 топологически неодинаково расположены (неизотопны).

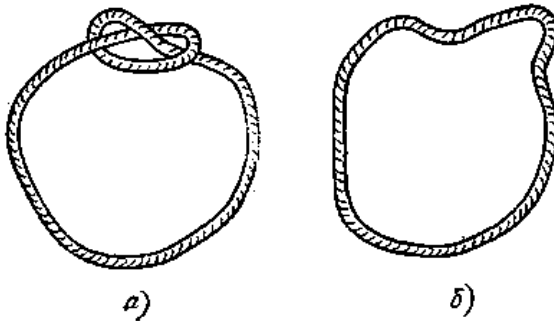


Рис. 110.

Доказательство этого факта мы рассмотрим позже.

Будем представлять себе узел реализованным в виде простой замкнутой ломаной l в пространстве и спроектируем ее на «горизонтальную» плоскость. Проекция узла l может оказаться пересекающей себя; при этом мы можем предполагать (немного сдвинув, если нужно, некоторые из звеньев), что проекция имеет лишь *двойные* точки пересечения (т. е. проекции никаких трех звеньев не имеют общей точки). Мы условимся на чертежах прерывать то из двух звеньев, пересекающихся на проекции, которое проходит ниже. В результате получится наглядный рисунок, так называемая нормальная проекция узла (рис. 111, а).

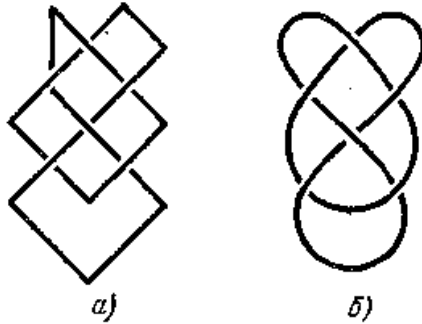


Рис. 111

Можно изображать узлы и в виде плавных линий на плоскости (без угловых точек), сохраняя те же соглашения о сплошных и прерванных участках (рис. 111,б).

Задачи

123. Докажите, что всякий целочисленный одномерный цикл можно представить в виде объединения нескольких *ориентированных узлов*, т. е. направленных контуров в пространстве, которые могут иметь общие вершины, но других общих точек попарно не имеют.

124. Докажите, что трижды перекрученная лента (рис. 112) гомеоморфна ленте Мёбиуса, а ее край изотопен простому узлу.

125. Докажите, что замысловатая «пряжка», изображенная на рис. 113, гомеоморфна ручке, а ее край изотопен простому узлу.



Рис. 112.

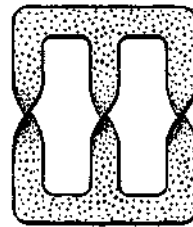


Рис. 113.

126. Докажите, что любая не гомеоморфная кругу поверхность (ориентируемая или неориентируемая), край которой гомеоморфен окружности, может быть так вложена в трехмерное пространство, что ее край будет простым узлом.

В связи с задачами 124—126 возникает вопрос, для любого ли узла L существует «натянутая на него пленка», т. е. поверхность (без самопересечений), имеющая L своим краем? Утвердительный ответ на этот

вопрос дал Ф. Франкль (советский математик, приехавший к нам в 1934 году из Австрии) при помощи следующего изящного рассуждения. Нормальная проекция узла L разбивает плоскость на области, причем эту «карту» можно раскрасить в два цвета, например, белый и красный. Возможность такой «шахматной» раскраски вытекает из задачи 96, поскольку в каждой вершине получающегося в проекции графа сходятся четыре ребра. Мы можем при этом считать, что наружная (неограниченная) «страна» окрашена в белый цвет; на рис. 114, *а* контур узла показан без перерывов, чтобы ясно были видны «страны».

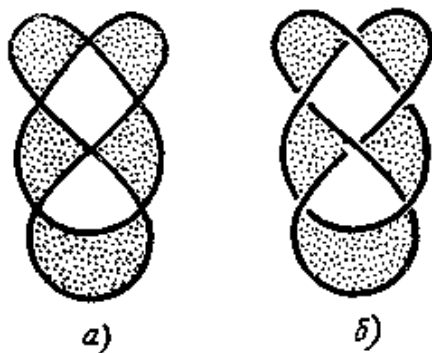


Рис. 114.

Если теперь вновь наметить на проекции узла L разрывы, как на нормальной проекции, то чертеж станет пространственным, т. е. «красные» области окажутся соединенными с перекручиваниями (рис 114, *б*). Это и дает требуемую поверхность, имеющую узел L своим краем. Заметим, что получаемая поверхность, вообще говоря, неориентируема (см. рис. 112). Однако более «осторожное» приклеивание стран позволяет для любого узла построить ориентируемую поверхность, имеющую этот узел своим краем (см. задачи 130—132).

Задачи

127. Для каждого из узлов на рис. 115 изобразите указанным способом поверхность, имеющую этот узел своим краем.

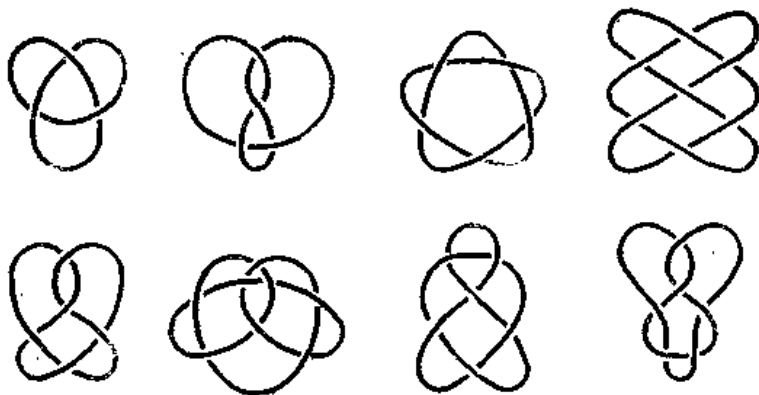


Рис. 115.

Какой из поверхностей, P_k или N_q , с вырезанной в ней круглой дырой гомеоморфны эти поверхности?

128. Докажите, что поверхность Франкля в том и только в том случае неориентируема, если существует простая замкнутая линия, проходящая по «красным» областям и нечетное число раз переходящая из страны в страну через двойные точки (рис. 116).



Рис. 116.

129. Докажите, что если имеется *переплетение*, т. е. объединение нескольких простых замкнутых линий в пространстве (рис. 117), которые попарно не пересекаются друг с другом, то существует связная поверхность без самопересечений, имеющая своим краем это переплетение.

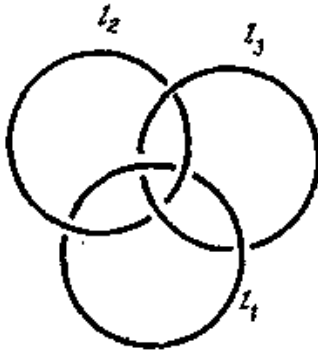


Рис 117.

130. Пусть L — переплетение. Выберем на каждой из его линий направление обхода и обозначим через z одномерный целочисленный цикл, являющийся нормальной проекцией переплетения L . Фиксируем во внешней области точку o и каждой стране M , на которые цикл z разбивает плоскость, припишем число $k(M)$, равное индексу пересечения $J(x, z)$, где x — направленная ломаная, идущая от точки o к некоторой внутренней точке страны M (рис. 118).

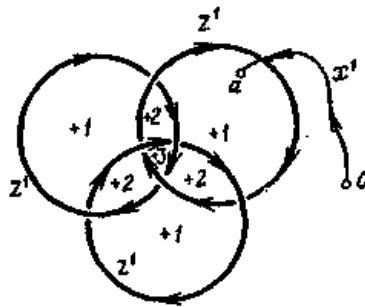


Рис. 118.

Докажите, что если M_I — страна, для которой $|k(M)|$ принимает наибольшее значение, то те части цикла z , которые составляют границу страны M_I , имеют направления, образующие обход контура страны M_I (по или против часовой стрелки).

131. В условиях задачи 130 выберем из цикла z участки, составляющие контур страны M_I (с некоторым запасом) и вместо них добавим «перемычки» (пунктир на рис. 119, а), в результате чего получится цикл z' , имеющий меньшее число стран, чем z .

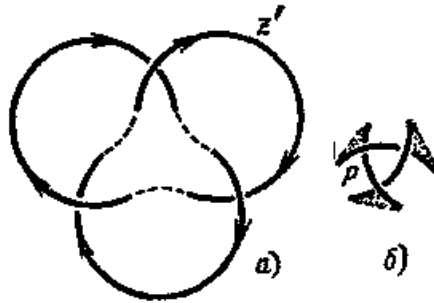


Рис. 119,

Аналогичное построение проведем и на переплетении L ; получится переплетение L' , проектирующееся в цикл z' . Выброшенные участки дополним такими же перемычками и натянем на полученный контур поверхность P , гомеоморфную кругу и имеющую вблизи перемычек перекрученные «лопасти» (см. рис. 119, б). Докажите, что если на L' натянута ориентируемая пленка Q , то при подклеивании к Q поверхности P (по перемычкам) мы получаем также ориентируемую поверхность, натянутую на цикл z .

132. Пользуясь результатами двух последних задач, докажите, что если L — переплетение в пространстве, на каждом контуре которого выбрано произвольное направление обхода, то существует такая ориентируемая поверхность, краем которой является переплетение L , что некоторая не ориентация согласована с направлением обхода на каждой из линий переплетения L .

Указание. Надо следить за тем, чтобы на каждом шаге построения весь край получающейся поверхности был виден сверху.

133. Докажите, что если для цикла z наибольшее значение числа $|k(M)|$, рассмотренного в задаче 130, равно n , то для поверхности, натянутой на переплетение L по методу задач 130—132, имеем $\chi(Q) \geq n - q$, где q — число двойных точек цикла z .

134. Докажите, что если переплетение L содержит l компонент, причем число двойных точек на его нормальной проекции z равно q , а наибольшее значение числа $|k(M)|$ для цикла z равно n , то на это переплетение можно натянуть пленку, гомеоморфную сфере с k ручками, в которой вырезано l круглых дыр, где

$$k \leq 1 + \frac{q - n - l}{2}.$$

135. Докажите, что на морской (а также на «бабушкин») узел можно натянуть пленку, гомеоморфную сфере с тремя дырами, две из которых заклеены ручками.

2.2.11. Коэффициент зацепления

Для двух не пересекающихся друг с другом ориентированных контуров x , y в пространстве (x — первый контур, y — второй) можно следующим образом определить некоторое целое число, называемое *коэффициентом зацепления* этих контуров. Рассмотрим нормальную проекцию переплетения $x \cup y$ на некоторую («горизонтальную») плоскость и пусть a — двойная точка на этой проекции, в которой контур x идет ниже, чем y . Если, двигаясь вблизи a по направлению контура x , мы увидим (в проекции), что y пересекает его слева направо (рис. 120, а), то точке a припишем число $+1$, а если справа налево (рис. 120, б), то -1 .

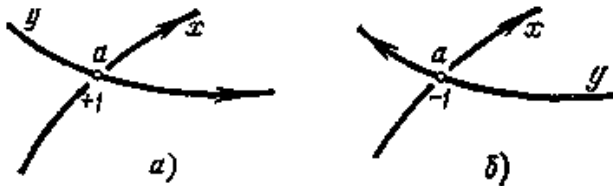


Рис. 120.

В остальных случаях (т. е. если пересекаются два участка одного и того же контура или если контур x проходит выше, чем y) двойной точке a припишем число 0. Сумма этих чисел по всем двойным точкам на проекции называется *коэффициентом зацепления* и обозначается через $w(x, y)$.

Пример 35. Для двух соседних звеньев обычной металлической цепи (рис. 121, а) коэффициент зацепления равен ± 1 (рис. 121, б).

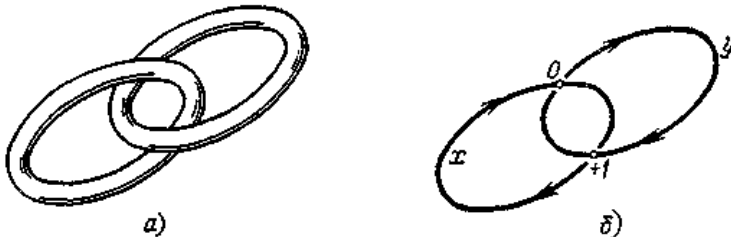


Рис. 121.

Для контуров, изображенных на рис. 122, имеем $w(x, y) = 3$.

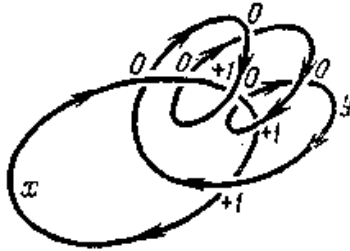


Рис. 122.

Как мы увидим дальше, коэффициент зацепления $w(x, y)$ зависит лишь от расположения самих контуров x, y , а не от способа проектирования. Далее, если контуры x, y непрерывно деформируются в пространстве (например, движутся, как шарнирные ломаные), оставаясь в каждый момент не пересекающимися, то их коэффициент зацепления $w(x, y)$ не меняется. Наконец, отметим, что коэффициент зацепления $w(x, y)$ является (с точностью до знака) *изотопическим инвариантом*. Иначе говоря, если f — гомеоморфное отображение трехмерного пространства на себя, то при этом отображения x, y переходят в такие контуры $f(x), f(y)$, что

$$w(f(x), f(y)) = \pm w(x, y).$$

Пример 36. Ранее упоминалось, что хотя дважды перекрученная лента гомеоморфна неперекрученной (см. рис. 8) эти фигуры не изотопны друг другу в пространстве. Теперь мы можем это доказать. В самом деле, коэффициент зацепления краев ленты равен в случае дважды перекрученной ленты ± 1 (в зависимости от того, в какую сторону перекручена лента), а в случае неперекрученной ленты — нулю (рис. 123).

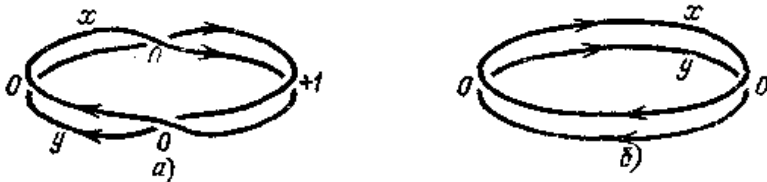


Рис. 123.

Поэтому при гомеоморфном отображении пространства на себя дважды перекрученная лента не может перейти в неперекрученную. Дважды перекрученная лента не может быть превращена в неперекрученную, как бы мы ни деформировали ее (оставляя

гомеоморфной себе); ведь при такой деформации края ленты перемещаются, не пересекаясь друг с другом, и потому коэффициент зацепления измениться не может.

Пример 37. Постоянный ток I , протекающий по бесконечному прямолинейному проводу P , создает магнитное поле, напряженность которого на расстоянии r от провода имеет величину $H \approx \frac{2I}{r}$. Как известно, потенциалом магнитного поля называется работа, которую надо затратить, чтобы из некоторой фиксированной точки x_0 (точки нулевого потенциала) переместить магнитный полюс, равный единице, в заданную точку поля. В рассматриваемом случае потенциал W магнитного поля многозначен. Действительно, если из точки x_0 перемещать магнитный полюс в точку a по двум путям, показанным на рис. 124, a , b , то первое перемещение требует дополнительной работы против силы $\frac{2I}{r}$ на пути $2\pi r$, т. е. дополнительной работы, численно равной $4\pi I$.

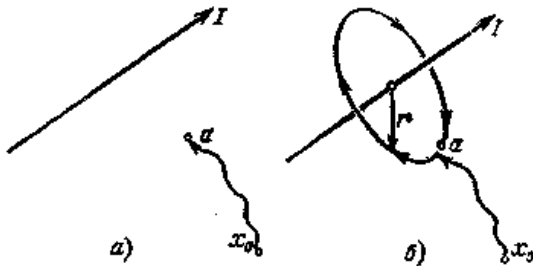


Рис. 124.

Мы видим, что один обход вокруг провода (не обязательно по окружности — можно идти по любому пути) меняет магнитный потенциал $W(a)$ на величину $4\pi I$. Вообще, после m обходов вокруг провода, где m — целое число (положительное, отрицательное или нуль), потенциал изменится на $4\pi Im$. То же выражение для изменения потенциала справедливо в случае любого (не обязательно прямолинейного) провода (рис. 125).

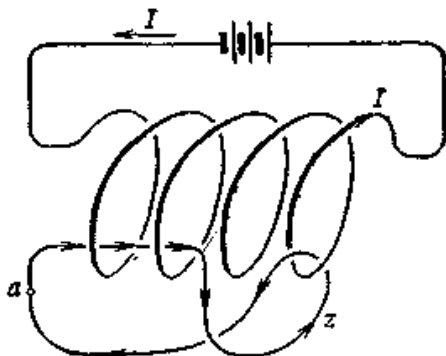


Рис. 125

Число обходов («витков») пути z вокруг проводника P равно взятому со знаком минус коэффициенту зацепления проводника P с путем z , т. е. при обходе вокруг проводника P по замкнутому пути z магнитный потенциал меняется на величину $4\pi Im$, где $m = -\mathfrak{w}(P, z)$. Величину Im иногда называют «числом ампервитков» (если ток I измеряется в амперах).

Задачи

136. Докажите, что при перестановке контуров их коэффициент зацепления не меняется; $\mathfrak{w}(x, y) = \mathfrak{w}(y, x)$.

137. Направленные контуры $x' y'$ симметричны контурам x, y относительно некоторой плоскости (учитывая направление обхода). Докажите, что $\mathfrak{w}(x', y') = -\mathfrak{w}(x, y)$.

138. Каков коэффициент зацепления края ленты Мёбиуса (см. рис. 50, a) и его средней линии?

139. Пусть Q — поверхность, гомеоморфная ленте Мёбиуса (рис. 126), x — ее край, а y — «средняя линия» (т. е. образ средней линии ленты Мёбиуса M , изображенного на рис. 50, z , при гомеоморфизме $f: M \rightarrow Q$). Докажите, что число $\mathfrak{w}(x, y)$ нечетно.

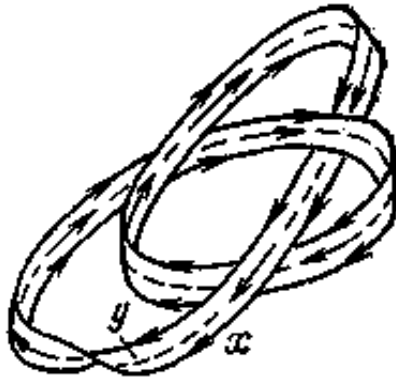


Рис. 126

Теперь мы дадим другое (эквивалентное) определение коэффициента зацепления. Будем представлять себе контуры x , y лежащими «почти целиком» в плоскости нормальной проекции, так что лишь вблизи двойных точек один из них проходит чуть ниже другого. Далее, рассмотрим ориентированную пленку Q , натянутую на контур y (так, как это было описано в задаче 132: контур y виден целиком, если смотреть на пленку Q сверху), причем будем считать, что эта пленка «провисает», располагаясь вблизи своего края почти вертикально (рис. 127).

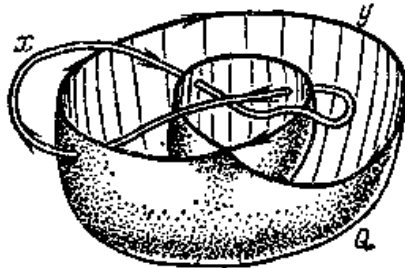


Рис. 127.

Тогда в тех двойных точках, в которых контур x идет выше y , он проходит и выше пленки Q , т. е. не пересекает ее. В тех же точках, где контур x проходит ниже y , он пересекает пленку Q ; при этом рассматриваемый участок контура x имеет с пленкой Q индекс пересечения $+1$, если, глядя по направлению линии x , мы видим, что

линия y пересекает ее слева направо (рис. 128, а) и -1 , если пересечение происходит справа налево (рис. 128, б).

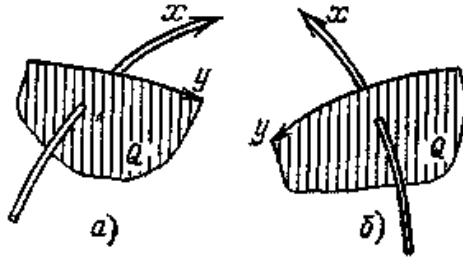


Рис. 128.

Из этого следует (если сравнить определение коэффициента зацепления и индекса пересечения), что справедливо равенство

$$w(x, y) = J(x, Q), \quad (20)$$

где Q — двумерная ориентируемая пленка, натянутая на контур y и согласованно с ним ориентированная.

Равенство (20) останется справедливым, если взять любую пленку Q (не обязательно построенную так, как это было сделано в задаче 132). В самом деле, пусть имеются две различные ориентируемые пленки Q, Q' , натянутые на контур y и ориентированные согласованно с ним. Рассмотрим разность пленок Q и Q' , т. е. объединение пленки Q с имеющейся на ней ориентацией и пленки Q' с противоположной ориентацией. Эта разность является двумерным целочисленным циклом (даже если Q и Q' пересекаются). Так как индекс пересечения целочисленного цикла x с этим двумерным циклом равен нулю, то $J(x, Q) = J(x, Q')$.

Из равенства (20) следует, что коэффициент зацепления (первоначально определенный с помощью нормальной проекции) не зависит от выбора плоскости проекции. Из (20) вытекают также и другие упоминавшиеся выше свойства коэффициента зацепления.

Задачи

140. Пленка, натянутая на контур y (и находящаяся в общем положении с контуром x), пересекается с x в единственной точке. Докажите, что пленка, натянутая на контур x , пересекается с y .

141. Пусть x, y — ориентированные контуры в пространстве. Из формулы (20) вытекает, что если существует ориентированная пленка, натянутая на y и не пересекающаяся с x (рис. 129), то $w(x, y) = 0$. Докажите обратную теорему.

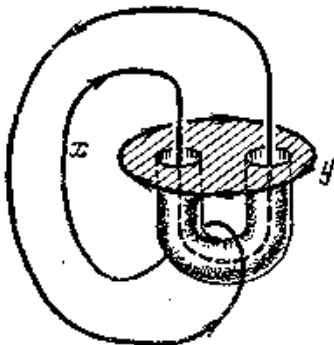


Рис. 129.

142. Докажите, что если $w(x, y)$ есть четное число, то существует пленка (возможно, не ориентируемая), натянутая на y и не имеющая общих точек с x .

143. Убедитесь, что три контура на рис. 117 имеют попарно коэффициенты зацепления, равные нулю. Постройте пленку, гомеоморфную ручке, которая натянута на один из этих контуров и не пересекается с двумя другими.

2.3. Гомотопии и гомологии

2.3.1. Периоды многозначных функций

Пусть h — некоторый путь в фигуре X , идущий от начальной точки x_0 до конечной точки x_1 . Иначе говоря, $h: [0; 1] \rightarrow X$ есть непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям $h(0) = x_0$, $h(1) = x_1$. Будем этот путь *непрерывно деформировать* в фигуре X , оставляя концевые точки x_0 и x_1 неподвижными. На рис. 130 положения деформируемого пути изображены тонкими линиями.

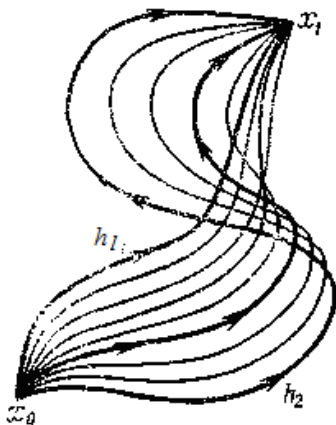


Рис. 130

Мы всегда будем рассматривать только такие деформации путей, при которых конечные точки не смещаются.

Два пути h_1, h_2 в фигуре X , имеющие одни и те же конечные точки, называются *гомотопными* в этой фигуре, если при помощи деформации (происходящей в фигуре X) h_1 может быть превращен в h_2 ; гомотопность путей обозначается записью $h_1 \sim h_2$.

Пример 38. В круге любые два пути, имеющие общие концы, гомотопны между собой. Наглядно это можно пояснить, вообразив, что путь представляет собой растянутую резиновую нить, извилистым образом расположенную внутри круга. Если мы отпустим резинку, закрепив конечные точки x_0, x_1 и позволив нити свободно перемещаться, то она начнет деформироваться и, сжимаясь, расположится по прямолинейному отрезку, соединяющему x_0 и x_1 . Таким образом, любой путь в круге гомотопен отрезку, соединяющему конечные точки x_0 и x_1 , и потому любые два пути, соединяющие x_0 и x_1 гомотопны.

Пример 39. Обозначим через X кольцо, ограниченное двумя окружностями с общим центром o . Выберем некоторую точку $x_0 \in X$ и для любой точки $x \in X$ обозначим через $\varphi(x)$ величину угла x_0ox (рис. 131).

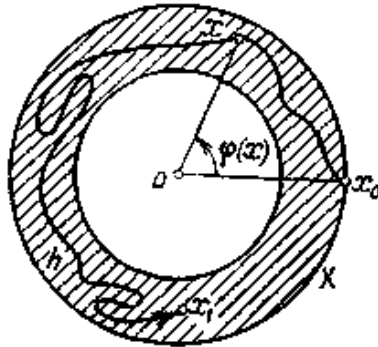


Рис. 131

Функция $\varphi(x)$ *многозначна* (она определена с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — целое число). Предположим, что в точке $x = x_0$ мы выбрали какое-либо одно значение φ_0 этой функции. При перемещении точки x в кольце X угол $\varphi(x)$ будет непрерывно меняться. Поэтому каждому пути h , ведущему в кольце X от точки x_0 к точке x_1 , соответствует вполне определенное значение φ_1 многозначной функции $\varphi(x)$, к которому мы приходим, взяв в точке x_0 значение φ_0 этой функции и непрерывно перемещаясь вдоль пути h от x_0 до x_1 . При этом гомотопным путям, ведущим в кольце X из точки x_0 в точку x_1 , соответствует одной то же значение функции. В самом деле, значение функции, к которому мы приходим, проходя путь h , будет при непрерывной деформации пути h само непрерывно меняться. Следовательно, это значение должно оставаться постоянным: непрерывно меняясь, оно не может «перескочить» от одного из возможных значений функции $\varphi(x)$ в точке x_1 к другому (отличающемуся от него на $2k\pi$).

Пример 40. Если в примере фиксировать точку нулевого потенциала x_0 , то во внешней области проводника P определится многозначная функция $W(x)$ (магнитный потенциал). Переместившись из точки x_0 в точку x_1 по некоторому пути h , мы придем ко вполне определенному значению магнитного потенциала в точке x_1 . Гомотопные между собой пути, ведущие из x_0 в x_1 , дадут в точке заодно и то же значение магнитного потенциала, а негомотопные могут привести к различным значениям функции $W(x)$ в точке x_1 .

Задачи

144. На множестве X (рис. 132) постройте многозначную функцию, принимающую в точке x_0 бесконечное множество значений, среди которых имеются значения $0, 1, \sqrt{5}$.

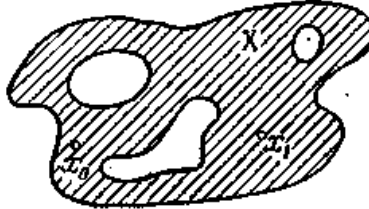


Рис. 132

На множестве X (рис. 132) постройте такую многозначную функцию, что два негомотопных пути, ведущих из x_0 к x_1 приводят к одному и тому же значению в точке x_1 .

Пример 41. На фигуре X (рис. 133) рассмотрим функцию $f(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_2(x) - \sqrt{3}\varphi_3(x)$, где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ — величины углов a_1o_1x , a_2o_2x , a_3o_3x .

Функция $f(x)$ многозначна. Если мы, начав движение из точки x_0 , пройдем путь h_1 (рис. 133), то (при возвращении в точку x_0) к значению функции $\varphi_1(x_0)$ прибавится 2π , а значения функций $\varphi_2(x_0)$ и $\varphi_3(x_0)$ не изменятся; следовательно, к значению функции $f(x)$ в точке x_0 прибавится 2π .

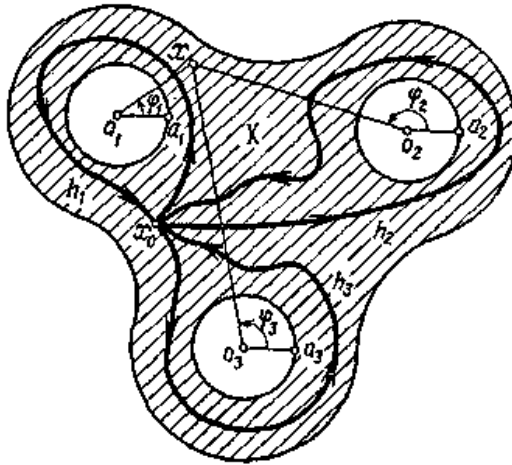


Рис. 133.

При обходе же пути h_2 к значению функции в точке x_0 прибавится $2\pi\sqrt{2}$, а при обходе пути h_3 прибавится $-2\pi\sqrt{3}$. Числа 2π , $2\pi\sqrt{2}$, $-2\pi\sqrt{3}$ можно назвать *периодами* функции $f(x)$ на множестве X соответствующими замкнутым путям h_1 , h_2 , h_3 .

Рассмотрим теперь путь, получающийся, если сначала пройти h_1 , а затем h_2 ; этот путь обозначается через h_1h_2 и называется *произведением* путей h_1 и h_2 . Ясно, что при прохождении пути h_1h_2 к значению функции $f(x)$ прибавится $2\pi + 2\pi\sqrt{2}$. Аналогично, при прохождении пути h_3h_1 к значению функции $f(x)$ прибавится $-2\pi\sqrt{3} + 2\pi$. Вообще, при перемножении двух путей (начинающихся и кончающихся в точке x_0) соответствующие этим путям периоды функции $f(x)$ складываются.

Так как значение функции $f(x)$, получаемое в результате прохождения некоторого пути, не изменяется при гомотопии этого пути, то мы можем не различать гомотопные пути. Иначе говоря, можно рассматривать не сами пути (начинающиеся и кончающиеся в точке x_0), а *классы путей*, объединяя в один класс все гомотопные между собой пути. Класс всех путей, гомотопных пути h , будем обозначать через $[h]$, а множество всех таких классов — через $\pi(X)$. Эти классы можно перемножать: берем путь h , принадлежащий первому классу, путь k , принадлежащий второму классу, и перемножаем их; тогда класс, который содержит путь hk , и называется *произведением* двух взятых классов: $[h] \cdot [k] = [hk]$.

Смысл введения классов путей понятен: каждому классу соответствует некоторый период многозначной функции $f(x)$, а при перемножении двух классов соответствующие периоды складываются.

2.3.2. Фундаментальная группа

Классы гомотопных путей и произведение этих классов можно рассмотреть для любой фигуры X . Будем рассматривать только такие пути в X , которые начинаются и кончаются в фиксированной точке $x_0 \in X$. Любые два из таких путей можно перемножить. Будем рассматривать *классы путей*, объединяя в один класс все гомотопные между собой пути. Если a — некоторый класс и h — какой-либо путь, принадлежащий этому классу, то будем говорить, что h — *представитель* класса a и писать $a = [h]$. Множество всех классов обозначим через $\pi(X)$. *Умножение* классов определим так же, как и в предыдущем пункте (см. рис. 133): если a и b — два класса путей (начинающихся и кончающихся в точке x_0), а h и k — какие-либо их представители, т. е. $a = [h]$, $b = [k]$, то класс, представителем которого является путь hk , мы объявляем *произведением* классов a и b , т. е. $ab = [hk]$. Заметим, что если вместо h и k взять другие представители h' и k' рассматриваемых классов a и b , то мы получим путь $h'k'$, гомотопный пути hk , т. е. определяющий тот же самый класс: $[h'k'] = [hk]$. Таким образом, произведение двух классов определяется именно этими классами, а от выбора представителей не зависит. Оказывается, что *относительно введенной операции умножения множество $\pi(X)$ является группой*.

Укажем вкратце, как это устанавливается. Если h — какой-либо путь, принадлежащий классу a , а q — путь, который может быть стянут в точку, то $qh \sim h$ (рис. 134) и $hq \sim h$.

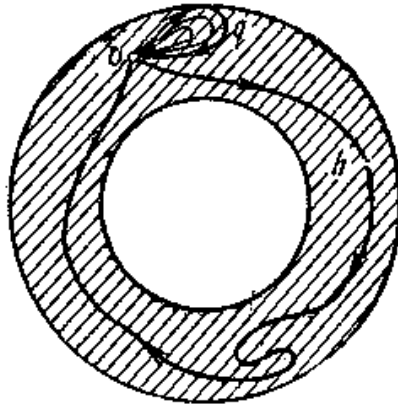


Рис. 134.

Поэтому, обозначая символом 1 класс всех путей, стягиваемых в точку, мы получаем $1a = a, a1 = a$ для любого класса $a \in \pi(X)$, т. е. класс 1 является *единицей* относительно умножения, введенного в $\pi(X)$.

Далее, если a — какой-либо класс и h — его представитель, то обозначим через h^{-1} путь h , пробегаемый в обратном направлении (рис. 135).



Рис. 135.

Тогда каждый из путей hh^{-1} и $h^{-1}h$ может быть стянут в точку (на рис. 136 показано стягивание в точку пути hh^{-1}).

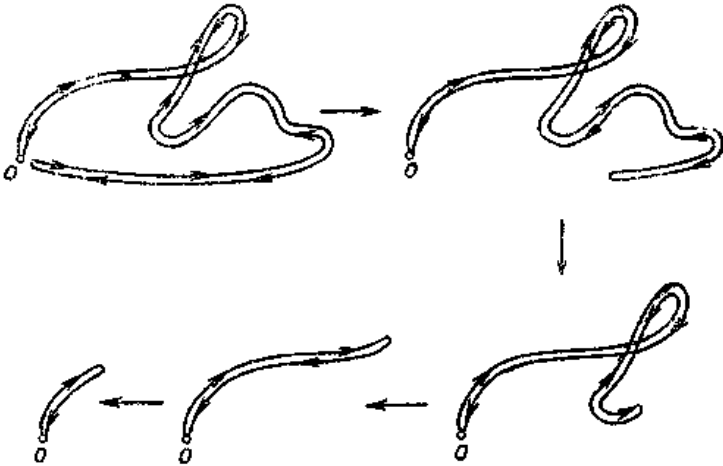


Рис. 136.

Поэтому, обозначив через a^{-1} класс, которому принадлежит путь h^{-1} , мы найдем, что $aa^{-1} = \mathbf{1}$, $a^{-1}a = \mathbf{1}$, т. е. в $\pi(X)$ для каждого элемента a существует обратный.

Несложно доказывается, что умножение в $\pi(X)$ ассоциативно. Таким образом, множество $\pi(X)$ есть группа. Она называется *фундаментальной группой* фигуры X (построенной в точке x_0).

Можно показать (см. задачу 148), что если любые две точки могут быть соединены путем в фигуре X , то фундаментальные группы фигуры X , построенные в разных точках x_0 и x'_0 , изоморфны. В этом случае (который мы только и будем рассматривать) можно просто говорить о фундаментальной группе фигуры X , не указывая, в какой точке она построена. *Фундаментальная группа является топологическим инвариантом*, т. е. если фигуры X и Y гомеоморфны, то их фундаментальные группы $\pi(X)$ и $\pi(Y)$ изоморфны. Заслуга открытия и изучения этого топологического инварианта принадлежит Пуанкаре.

Задачи

146. Если группа $\pi(X)$ тривиальна (т. е. состоит только из единичного элемента), то фигура X называется *односвязной*. Иначе говоря, фигура X односвязна, если любой замкнутый путь в X может быть стянут в точку. Докажите, что любая выпуклая фигура (в частности, прямая, плоскость, отрезок, круг, шар, выпуклый многоугольник или многогранник) односвязны.

147. Докажите, что сфера односвязна.

Указание: любой путь (даже заполняющий всю сферу, подобно кривой Пеано) может быть деформирован в «гладкий путь», не покрывающий всю сферу.

148. Пусть w — путь, соединяющий две точки x_0, x'_0 фигуры X . Каждому замкнутому пути h с начальной точкой x_0 поставим в соответствие путь $h^* = w^{-1}hw$ с начальной точкой x'_0 (рис. 137).

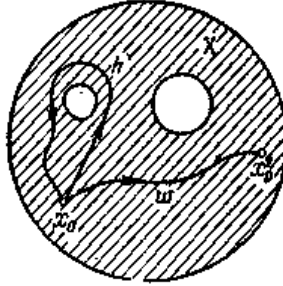


Рис. 137.

Докажите, что этим определяется изоморфизм фундаментальной группы фигуры X , построенной в точке x_0 , и группы, построенной в точке x'_0 .

Пример 42. Покажем, что *фундаментальная группа окружности является свободной циклической, т. е. изоморфна аддитивной группе целых чисел.*

В самом деле, обозначим путь, равномерно обходящий окружность B в некотором «положительном» направлении, через a , а обратный путь — через a^{-1} . Тогда a^n будет обозначать путь, $|n|$ раз обходящий окружность: в «положительном» направлении, если $n > 0$, и в «отрицательном», если $n < 0$ (путь a^0 оставляет точку покоящейся в начальной точке x_0).

Любому пути можно поставить в соответствие некоторый график: положение точки, пробегающей путь, задается значением параметра t (например, времени) на единичном отрезке $0 \leq t \leq 1$. С другой стороны, этому же положению точки соответствует ее угловая координата φ на окружности B (отсчитываемая от начальной точки x_0). Откладывая по оси абсцисс t , а по оси ординат угол φ , получим график зависимости $\varphi(t)$ (причем $\varphi(0)=0$). Если точка, движущаяся равномерно, обходит окружность n раз, мы получаем путь a^n ; его график — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $(0; 0)$ и $(1; 2\pi)$. Однако точка может двигаться по окружности B , многократно

изменяя направление движения. На рис. 138,*а* показан график пути, схематически изображенного на рис. 138, б.

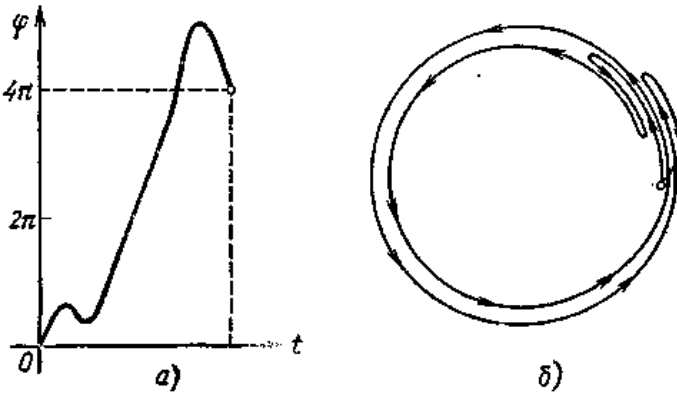


Рис 138.

Но каким бы ни был замкнутый путь на окружности, его график всегда соединяет точку $(0; 0)$ с точкой $(1; 2n\pi)$, где n — некоторое целое число: ведь, пройдя этот путь, мы возвращаемся в точку x_0 , угловая координата которой является числом, кратным 2π . Число n называется *числом обходов по окружности*.

Любой путь f , совершающий n обходов, гомотопен пути a^n : начертив на одном рисунке графики путей f и a^n , заставим каждую точку первого графика перемещаться параллельно оси ординат до графика пути a^n . Если такое перемещение производить одновременно для всех точек (рис. 139), то мы продеформируем график пути f в отрезок, являющийся графиком пути a^n .

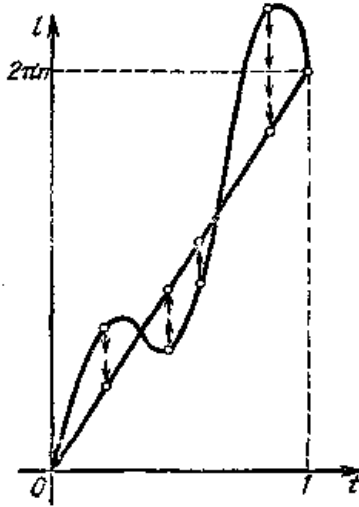


Рис 139.

Но если график деформируется, то и сам путь деформируется, откуда и следует, что пути f и a^n гомотопны. Значит, все пути, совершающие n обходов по окружности, гомотопны пути a^n , т. е. принадлежат одному классу путей. Пути же, для которых число обходов различно, не гомотопны между собой.

Итак, элементы фундаментальной группы окружности B находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми числами. Так как при перемножении путей их числа обходов, очевидно, складываются, то из этого следует, что группа $\pi(B)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел.

Задачи

149. Докажите, что фундаментальная группа кругового кольца является свободной циклической группой.

150. Фигура X представляет собой плоскость, из которой выколота (удалена) одна точка. Докажите, что группа $\pi(X)$ — свободная циклическая.

151. Докажите, что внутренняя область простой замкнутой линии l односвязна. Если же область G имеет границу, состоящую более чем из одного замкнутого контура (см. рис. 132), то G неодносвязна.

2.3.3. Клеточные разбиения и полиэдры

Мы часто рассматривали поверхность Q , на которой начерчен граф G , разбивающий ее на части, гомеоморфные кругу. Это пример *клеточного разбиения*. Поверхность Q представляется в виде объединения попарно не пересекающихся *клеток*: *нульмерных*, *одномерных* и *двумерных*. Нульмерными клетками являются точки — вершины графа G . Одномерные клетки — ребра графа G (без концов). Каждая одномерная клетка гомеоморфна открытому отрезку (без концов). Двумерные клетки — куски поверхности, на которые она распадается, если ее разрезать по ребрам графа G . Каждая двумерная клетка гомеоморфна открытому кругу.

Можно также рассматривать клеточные разбиения, в которых к некоторому ребру (одномерной клетке) примыкают три, четыре или большее число двумерных клеток, а не обязательно две или одна, как было в случае поверхности с краем. К некоторым ребрам может не примыкать ни одной двумерной клетки (рис. 140).

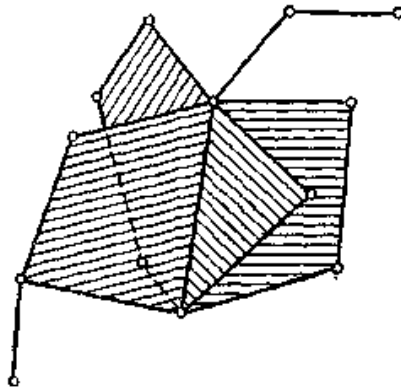


Рис. 140

Если клеточное разбиение состоит только из нульмерных и одномерных клеток, то оно представляет собой граф. В топологии рассматривают клеточные разбиения любого числа измерений. Например, трехмерное клеточное разбиение состоит из клеток размерностей 0,1,2,3 (причем если удалить все клетки размерностей 0,1,2, то оно распадается на трехмерные клетки, каждая из которых гомеоморфна открытому шару).

Фигура, которую можно представить в виде клеточного разбиения, называется *полиэдром*. Фигуры, рассмотренные в примерах 16, 18, 31, полиэдрами не являются.

Пример 43. Сферу P_0 можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего из одной нульмерной и одной двумерной клетки. Действительно, если в сфере «выколоть» точку, то оставшаяся часть τ будет гомеоморфна открытому кругу. Одномерных клеток это клеточное разбиение не содержит.

Пример 44. На рис. 141 изображено клеточное разбиение, состоящее из круга и его границы, разбитой на две полуокружности r_1, r_2 .

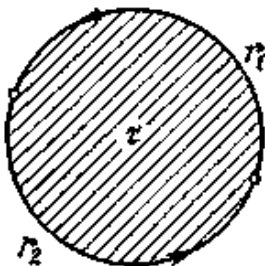


Рис. 141

Склеивание диаметрально противоположных точек окружности превращает круг в проективную плоскость, причем оба ребра, r_1, r_2 , склеиваются в одно ребро r . Мы получаем клеточное разбиение проективной плоскости, содержащее одну вершину, одно ребро r и одну двумерную клетку τ .

Пример 45. Начертим на торе параллель a и меридиан b , пересекающиеся в точке o (см. рис. 57, z). Мы получаем клеточное разбиение тора, состоящее из одной вершины o , двух ребер a, b и одной двумерной клетки τ .

Действительно, разрез по меридиану и параллели превращает тор в квадрат (см. задачу 65), т. е. в кусок, гомеоморфный кругу.

Задачи

152. Докажите, что ручку можно представить в виде клеточного разбиения, содержащего одну вершину, три ребра и одну двумерную клетку (см. рис. 58).

153. Докажите (см. рис. 59), что сферу с k ручками можно представить в виде клеточного разбиения, содержащего одну вершину, $2k$ ребер и одну двумерную клетку.

Нам понадобится говорить о направлении обхода на контуре грани (двумерной клетки). Смысл слов «направление обхода» в случае, когда грань гомеоморфна кругу, очевиден. В более сложных случаях направление обхода определяется следующим образом. При разрезании по всем ребрам грань (рис. 142, а) превращается в кусок, гомеоморфный кругу (рис. 142, б).

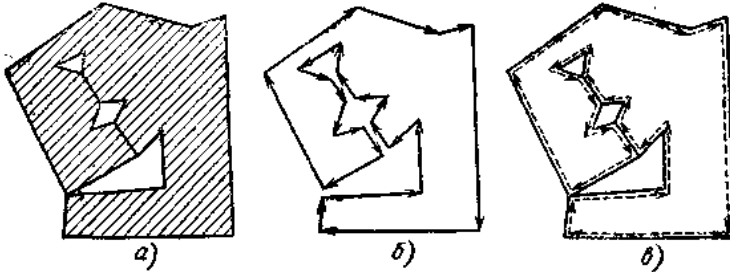


Рис. 142.

Обойдем один раз границу этого куска в некотором направлении. При обратном «склеивании» рассмотренного куска в грань этот обход и даст *обход по контуру грани*. Можно поступить и иначе: совершить обход «очень близко» к границе клетки, нигде ее не пересекая (рис. 142, в). Рассмотрим некоторую грань клеточного разбиения; все ребра, к которым она примыкает, как-либо ориентируем (т. е. выберем на них направления) и обозначим буквами a, b, c, \dots . Совершим теперь обход по контуру грани и одновременно с этим будем выписывать некоторый одночлен. Если мы, начиная обход, движемся сначала по ребру a , то мы напишем a или a^{-1} , смотря по тому, проходим мы (совершая обход) ребро a по направлению имеющейся на этом ребре стрелки или против нее. Если следующее ребро, которое мы проходим, обозначено, скажем, буквой d , то мы справа припишем d или d^{-1} , смотря по тому, в каком направлении мы пробегаем ребро d . Если вслед за тем мы проходим ребро m , то припишем справа m или m^{-1} и т. д. Совершив весь обход, мы выпишем некоторый одночлен, который называется *гомотопической границей* рассматриваемой грани.

Гомотопическую границу можно записать по-разному, в зависимости от того, в каком направлении обходить контур грани и с какого ребра начинать обход. Мы будем для каждой грани брать одну запись гомотопической границы (безразлично, какую именно). Например, обходя против часовой стрелки контуры клеток $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ на рис. 143, мы получим их гомотопические границы:

$$adb\bar{c}; kh^{-1}g^{-1}fd^{-1}g; hl; l^{-1}k^{-1}.$$

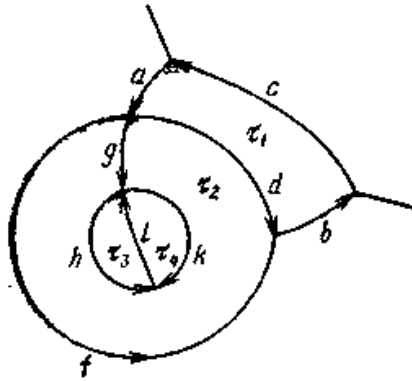


Рис. 143.

Заметим, что ребро g встречается в гомотопической границе грани τ_2 дважды.

Мы дадим теперь (без доказательства) способ вычисления фундаментальной группы связного полиэдра X . Возьмем какое-нибудь его клеточное разбиение и обозначим через G граф, образованный вершинами и ребрами. В графе G выберем максимальное дерево и все ребра, входящие в это дерево, пометим цифрой 1. Остальные ребра графа G (перемычки) как-либо ориентируем и пометим различными буквами a, b, c, \dots . Далее, для каждой грани рассматриваемого клеточного разбиения выпишем ее гомотопическую границу, не обращая внимания на ребра, помеченные цифрой 1. Наконец, построим группу, приняв буквы a, b, c, \dots , надписанные на перемычках, за ее образующие элементы, а за определяющие соотношения между этими образующими — равенства, получающиеся, если все выписанные гомотопические границы приравнять единице. *Эта группа изоморфна фундаментальной группе полиэдра X .*

Пример 46. Возьмем клеточное разбиение проективной плоскости, рассмотренное в примере 44. Максимальное дерево состоит из одной вершины. Поэтому ребро r является единственным образующим элементом фундаментальной группы. Далее, гомотопическая граница двумерной клетки τ (см. рис. 141) равна $r \cdot r$. Итак, фундаментальная группа проективной плоскости определяется одной образующей r с соотношением $r^2 = 1$, т. е. является группой второго порядка.

Пример 47. Рассмотрим клеточное разбиение тора, описанное в примере 45. Гомотопическая граница двумерной клетки τ равна

$aba^{-1}b^{-1}$ (надо обойти контур на рис. 57, a против часовой стрелки). Таким образом, фундаментальная группа тора имеет две образующие a, b , связанные единственным соотношением $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т. е. $ab = ba$. Иначе говоря, она является свободной абелевой группой с двумя образующими.

Задачи

154. Используя клеточное разбиение, рассмотренное в задаче 152, докажите, что фундаментальная группа ручки представляет собой группу с тремя образующими a, b, c и единственным соотношением $ba = cab$. Эта группа некоммутативна: например, $ba \neq ab$.

155. Используя результат задачи 153, докажите, что группа $\pi(P_k)$ имеет $2k$ образующих $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ с единственным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} = 1$. При $k \geq 2$ эта группа неабелева (например, $a_1 b_1 \neq b_1 a_1$).

156. Докажите, что группа $\pi(N_q)$ имеет q образующих c_1, c_2, \dots, c_q связанных единственным соотношением $c_1^2 c_2^2 \dots c_q^2 = 1$

157. Докажите, что две замкнутые поверхности (без края) в том и только в том случае гомеоморфны, если их фундаментальные группы изоморфны.

158. Букетом окружностей B_k^1 называется объединение k простых замкнутых линий, которые все имеют общую точку o и больше общих точек попарно не имеют (рис. 144).

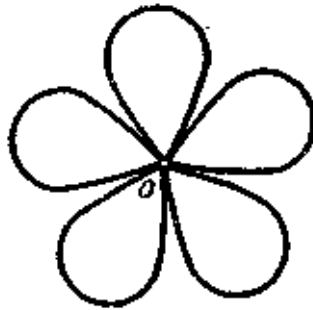


Рис. 144.

Докажите, что $\pi(B_k^1)$ есть свободная группа с k образующими.

159. Область X на плоскости ограничена одним внешним контуром и k внутренними (см. рис. 132). Докажите, что $\pi(X)$ есть свободная группа с k образующими.

2.3.4. Накрытия

Пример 48. На окружности B с центром o фиксируем начальную точку x_0 и для любой точки $x \in B$ обозначим через $\varphi(x)$ величину центрального угла $x_0 o x$. Функция $\varphi(x)$ определена с точностью до числа, кратного 2π . График E этой многозначной функции может быть построен на боковой поверхности бесконечного цилиндра; он имеет вид *винтовой линии* с шагом 2π (рис. 145).



Рис. 145.

Обозначим через p проектирование линии E на окружность B вдоль образующих цилиндра. Для произвольной точки $x \in B$ возьмем небольшую ее окрестность U . Часть линии E , проектирующаяся на U , состоит из отдельных кусков $\dots, V_{-1}, V_0, V_1, \dots$ (рис. 146).

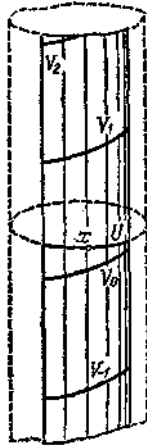


Рис. 146,

Каждый из них с помощью проекции p гомеоморфно отображается на всю окрестность U . Указанное свойство подводит нас к понятию *накрытия*. Пусть p — непрерывное отображение фигуры E на B . Допустим, что p обладает таким же свойством, как и в примере 48: для каждой точки $x \in B$ можно подобрать такую ее окрестность U , что полный прообраз $p^{-1}(U)$ (т. е. множество всех точек фигуры E , переходящих при отображении p в точки окрестности U) распадается на части, каждая из которых при помощи p гомеоморфно отображается на U . При этих условиях E называется *накрытием* (или *накрывающей фигурой*) для B . Части полного прообраза $p^{-1}(U)$, гомеоморфно отображающиеся на U , называются *листами* накрытия. По числу листов различают двулистные, трехлистные и т. д. накрытия. Накрытие окружности винтовой линией бесконечнолистно.

Пример 49. Всякая односторонняя поверхность N имеет в качестве двулистной накрывающей некоторую двустороннюю поверхность P . Расположим поверхность N в пространстве (с самопересечениями) без точек излома и отложим на каждой нормали (в ту и другую сторону от точки $x \in N$) отрезки xx и xx' постоянной длины ε , где ε — малое положительное число. Если бы поверхность N была двусторонней, то точки x и x' описали бы две различные поверхности, «параллельные» N . Но так как поверхность N односторонняя, то мы получим одну поверхность P : ведь при обходе по некоторому замкнутому пути на односторонней поверхности нормаль xx меняет направление, т. е. переходит в xx' , так что точки \bar{x} и x' принадлежат одному куску поверхности P . Наглядно это построение можно описать так:

вообразим поверхность N изготовленной из «толстого» материала и окрасим ее всю краской. Если теперь «сжечь» поверхность N , считая, что краска негорючая, то оставшийся тонкий слой краски и образует поверхность P , двулистно накрывающую N . При этом поверхность P двусторонняя: одна ее сторона обращена к сожженной поверхности N , а другая — наружу.

Например, если ленту Мёбиуса, изготовленную из «толстого» горючего материала, окрасить негорючей краской, а затем ленту Мёбиуса сжечь, то мы получим ленту, гомеоморфную боковой поверхности цилиндра (четырежды перекрученную, как легко убедиться на модели), которая двулистно накрывает ленту Мёбиуса.

Задачи

160. Докажите, что если E является k -листным покрытием полиэдра B , то $\chi(E) = k\chi(B)$.

161. Докажите, что двулистная накрывающая поверхности N_q является сферой с $q - 1$ ручками.

Пусть фигура E является накрывающей для B и $p: E \rightarrow B$ — соответствующая проекция. Пусть, далее, h — путь в фигуре B , исходящий из точки x_0 , а $\tilde{x}_0 \in E$ — некоторая точка, расположенная «над» x_0 , т. е. удовлетворяющая условию $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Тогда в E существует (причем единственный) путь h , начинающийся в точке \tilde{x}_0 и переходящий в путь k при отображении p ; он называется *накрывающим путем*. В самом деле, пусть U — маленькая окрестность точки x_0 и \tilde{U} — тот лист покрытия, который содержит точку \tilde{x}_0 . Тогда, поскольку $p: \tilde{U} \rightarrow U$ — гомеоморфизм, мы однозначно сможем «поднять» кусочек пути h , находящийся в окрестности U , на лист \tilde{U} (рис. 147).

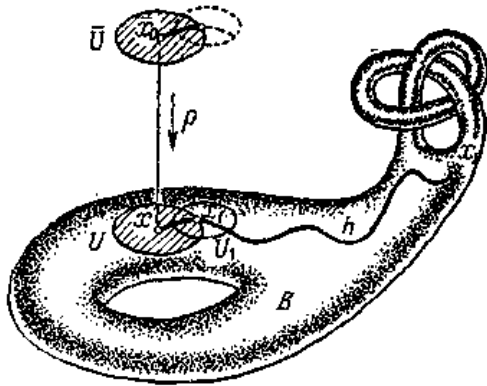


Рис. 147.

Если x_1 — концевая точка того участка пути, который мы уже «подняли», то можно рассмотреть окрестность U_1 точки x_1 и соответствующий лист накрытия, что позволит продолжить накрывающий путь \tilde{h} еще на один кусочек, и т. д.

Рассмотрение накрывающих путей позволяет установить теорему о связи между накрытиями и фундаментальной группой. Мы ее приведем (без доказательства) в следующей упрощенной формулировке. Если связный полиэдр E является k -листным накрывающим над B и порядок группы $\pi(E)$ (т. е. число ее элементов) равен n , то порядок группы $\pi(B)$ равен kn .

Накрытие E над B называется универсальным, если оно односвязно. В силу сказанного выше число листов универсального накрытия над B равно порядку группы $\pi(B)$; любое другое накрытие имеет меньшее число листов.

Накрытие проективной плоскости сферой (см. задачу 161) универсально в силу односвязности сферы. Сфера является также универсальной накрывающей для самой себя. Оказывается, что для всех замкнутых поверхностей, кроме сферы и проективной плоскости, универсальной накрывающей является плоскость. Доказательством этого факта мы и закончим этот пункт. Прежде всего, так как односторонняя поверхность N имеет своей двусторонней накрывающей некоторую двустороннюю поверхность P , то универсальное накрытие над P будет универсальным накрытием и над N . Поэтому достаточно рассмотреть двусторонние поверхности, отличные от сферы.

Разделим плоскость двумя системами параллельных прямых на конгруэнтные квадраты; склеивая каждый квадрат в тор, мы получим

отображение всей плоскости на тор, причем точкам, одинаково расположенным в различных квадратах (рис. 148), соответствует одна и та же точка тора (рис. 149).

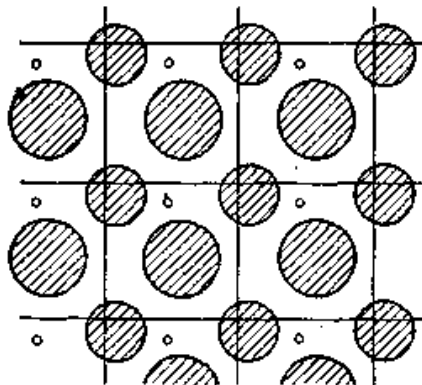


Рис.148.

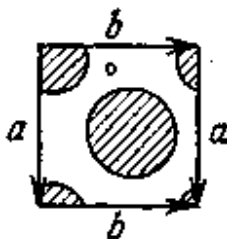


Рис 149.

Получающееся покрытие универсально, так как плоскость односвязна. Каждый из квадратов является так называемой *фундаментальной областью*, т. е. связным куском накрывающей (плоскости), который взаимно однозначно отображается на тор. Рис. 150 показывает, что фундаментальная область определена не однозначно.

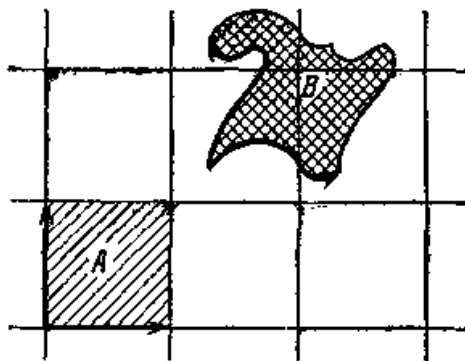


Рис. 150.

Опишем теперь разбиение на фундаментальные области, из которых склеиваются другие двусторонние поверхности, например, P_2 . Такое разбиение удобно произвести с помощью геометрии Лобачевского. В этой геометрии сумма углов многоугольника меньше, чем в евклидовой геометрии, причем сумма углов уменьшается при увеличении размеров многоугольника. Например, существует правильный восьмиугольник с углами $\frac{\pi}{4}$. Если такие восьмиугольники прикладывать друг к другу целыми сторонами, то ими можно заполнить всю плоскость Лобачевского, причем в вершинах будут сходиться по восемь многоугольников. На рис. 151 изображено такое разбиение для модели плоскости Лобачевского в «круге Пуанкаре».

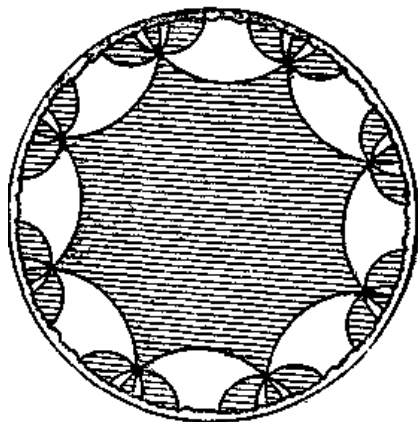


Рис. 151.

Это и есть разбиение плоскости Лобачевского (она гомеоморфна открытому кругу, а потому и плоскости Евклида) на фундаментальные области: оклеивание сторон каждого восьмиугольника дает P_2 (см. рис. 59) и получается накрывающее отображение плоскости Лобачевского на P_2 . Аналогичное разбиение плоскости Лобачевского можно построить и для любой поверхности P_k ($k \geq 2$).

Задачи

162. На рис. 152 изображена «плоскость с бесконечным числом ручек». Покажите, что при $k \geq 2$ она может служить накрытием над поверхностью P_k .

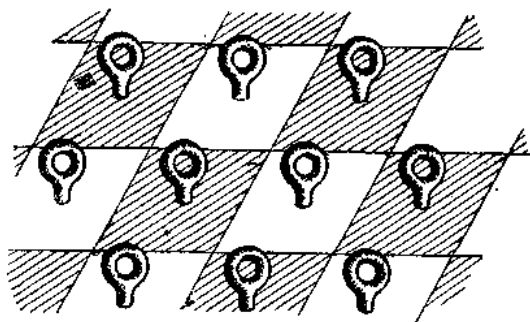


Рис. 152.

163. Покажите, что поверхность, изображенная на рис. 153, может служить накрывающей для любой поверхности P_k ($k \geq 2$).

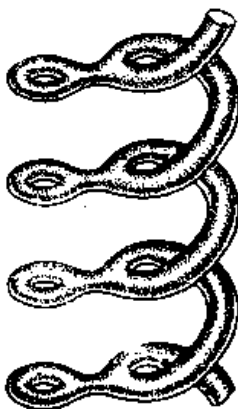


Рис. 153.

164. Постройте универсальную накрывающую для фигуры, состоящей из сферы и касающейся ее окружности.

2.3.5. Степень отображения и основная теорема алгебры

На рис. 154 изображено непрерывное отображение f окружности P на окружность Q .

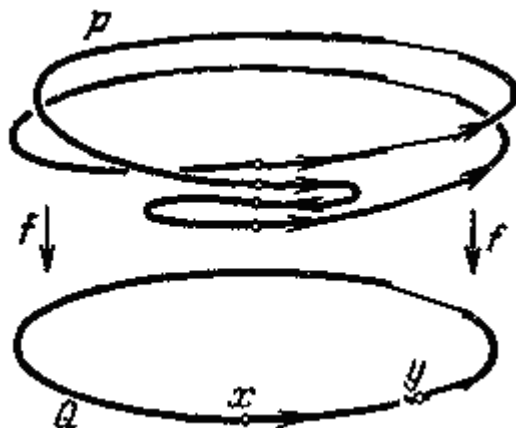


Рис. 154

На окрестность точки y отображаются два куска окружности P , причем отображаются положительно (т.е. с сохранением направления обхода). Говорят, что в точке y это отображение имеет степень 2. В точке x отображение также имеет степень 2: хотя на окрестность точки x отображаются четыре куска окружности P , но три из них отображаются положительно, а один — отрицательно. Если мы обозначим через p число листов, положительно отображающихся на окрестность некоторой точки $z \in Q$, а через n — число листов, отображающихся отрицательно, то степень отображения f в точке z будет число $p - n$. Во всех точках окружности Q степень отображения f одинакова (и равна двум); например, в точке x имеем $p - n = 3 - 1 = 2$.

О степени отображения можно говорить и в случае отображения поверхностей. Пусть P и Q — две замкнутые ориентируемые поверхности, на каждой из которых задана ориентация. Пусть, далее, $f: P \rightarrow Q$ — некоторое непрерывное отображение; будем представлять себе, что поверхность P «наложена» на поверхность Q , располагая на ней несколькими «слоями» и образуя складки. Если на окрестность точки $z \in Q$ отображается несколько «листов» поверхности P , то некоторые из этих листов могут отображаться положительно (с сохранением ориентации, рис. 155, а), а некоторые — отрицательно (рис. 155, б).

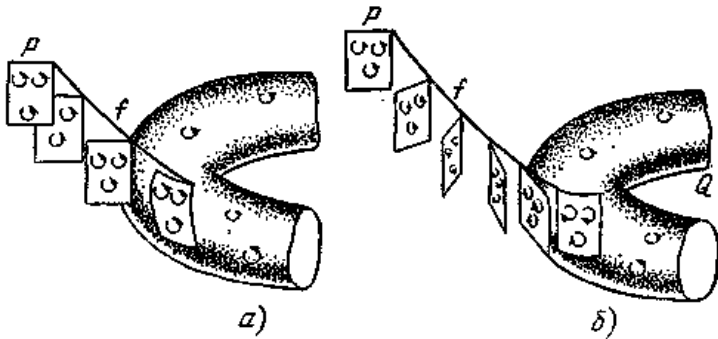


Рис. 155.

Если все «листы» поверхности P отображаются на окрестность точки z гомеоморфно, причем число листов, на которых отображение f положительно, равно p , а число листов, на которых оно отрицательно, равно n , то число $p - n$ называется *степенью* отображения f в точке z .

Нетрудно понять, что степень отображения f одинакова вблизи любой точки поверхности Q . Действительно, при перемещении точки z числа

p и n меняются лишь при прохождении через край складки, но разность $p - n$ остается неизменной (рис. 156).

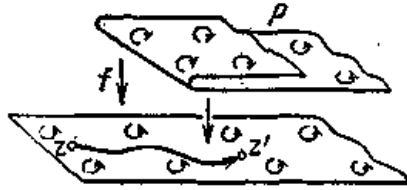


Рис. 156.

Заметим еще, что когда отображение f непрерывно деформируется, степень его остается неизменной; это можно пояснить, заметив, что образование (или расправление) складок не меняет степени отображения.

С помощью понятия степени отображения можно дать изящное доказательство **основной теоремы алгебры**: *любой многочлен*

$$f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m,$$

степени $m \geq 1$ с комплексными (в частности, действительными) коэффициентами a_1, \dots, a_m имеет хотя бы один корень.

Возьмем сферу S , касающуюся плоскости в начале координат, и будем называть точку касания *южным полюсом*, а противоположную точку n — *северным полюсом* (рис. 157).

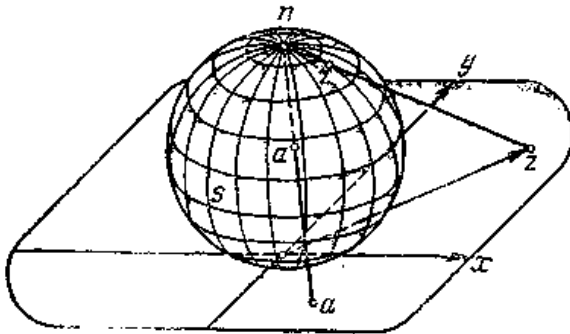


Рис. 157.

Будем изображать комплексное число $z = x + iy$ точкой в плоскости, считая x и y его координатами (рис. 158).

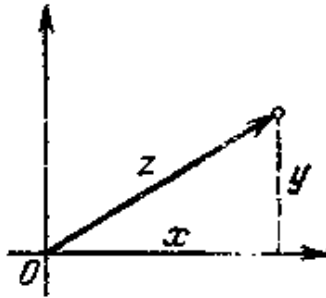


Рис. 158.

Отрезок n_z пересекает сферу S в некоторой точке, которую мы будем считать *изображением* комплексного числа z на сфере S . Обратно, имея на сфере точку a , легко узнать, какое комплексное число она изображает: прямая na при пересечении с плоскостью и даст искомое комплексное число. Однако северный полюс n не изображает никакого комплексного числа. Мы условимся считать, что точка n изображает «бесконечное» комплексное число, обозначаемое символом ∞ . Поводом для такого соглашения служит то, что при неограниченном удалении точки z на плоскости (в любую сторону) от начала координат изображающая ее точка на сфере приближается к n . Сфера S называется *комплексной сферой*, или *сферой Римана*. Отметим, что (в отличие от проективной плоскости; см. рис. 83) сфера S получилась из плоскости добавлением одной бесконечно удаленной точки ∞ .

Мы будем изображать значения z на одной комплексной сфере S_1 , а значения многочлена $f(z)$ — на другой такой же сфере S_2 . Каждой «конечной» точке $z = x + iy$ сферы S_1 соответствует «конечная» точка $f(z)$ сферы S_2 . При этом если z будет приближаться к ∞ , то $f(z)$ также будет приближаться к точке ∞ сферы S_2 . Действительно, мы имеем

$$f(z) = z^m \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z^{m-1}} + \frac{a_m}{z^m} \right);$$

при $z \rightarrow \infty$ (т. е. при неограниченном увеличении числа $|z|$) выражение в скобках приближается к единице, а множитель z^m неограниченно увеличивается. Таким образом, дополнив определение многочлена условием $f(\infty) = \infty$, мы получаем непрерывное отображение f всей сферы S_1 на сферу S_2 .

Для доказательства основной теоремы алгебры нужно установить, что найдется точка $z \in S_1$, для которой $f(z) = 0$, т. е. что точка 0

сферы S_2 является образом хотя бы одной точки $z \in S_1$. Если бы это было не так, т. е. точка 0 сферы S_2 не покрывалась образом $f(S_1)$ сферы S_1 , то степень отображения $f: S_1 \rightarrow S_2$ вблизи точки $0 \in S_2$ была бы равна нулю, а так как степень одинакова вблизи любой точки, то просто степень отображения f была бы равна нулю. Поэтому для доказательства основной теоремы алгебры достаточно установить, что степень отображения f отлична от нуля. Мы покажем, что она равна m , т. е. совпадает со степенью многочлена $f(z)$ (это и послужило причиной введения термина «*степень отображения*»).

Будем изменять значения коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_m , приближая их к нулю; многочлен $f(z)$ будет меняться, отображение $f: S_1 \rightarrow S_2$ будет непрерывно деформироваться. В результате мы получим многочлен $f_1(z) = z^m$. Но так как при деформации отображения его степень не меняется, то отображения f и f_1 имеют одинаковую степень. Степень же отображения f_1 легко подсчитать. Разобьем плоскость лучами, исходящими из точки 0, на m конгруэнтных углов (рис. 159).

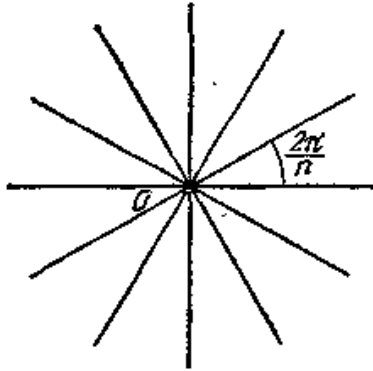


Рис. 159.

Так как при возведении комплексного числа z в степень m его аргумент увеличивается в m раз, то каждый из этих углов с помощью f_1 отображается («растягивается») на всю сферу S_2 . Таким образом, при отображении f_1 образ сферы S_1 покрывает m раз (причем положительно) сферу S_2 . Отсюда и вытекает, что степень отображения f_1 (а значит, и f) равна m . Теорема доказана. В настоящее время известно много различных доказательств основной теоремы алгебры, но все они являются топологическими, т. е. в той или иной форме используют идею непрерывности. Без привлечения идей топологии доказывать основную теорему алгебры невозможно; **можно сказать (хотя это**

звучит несколько странно), что основная теорема алгебры является *неалгебраической теоремой*.

Задачи

165. Докажите, что если $q \geq mk$, то существует отображение $f: P_q \rightarrow P_k$, имеющее степень m .

166. Докажите, что если P и Q — ориентируемые поверхности и отображение $f: P \rightarrow Q$ является n -листным накрытием, то степень отображения f равна $\pm k$.

167. Докажите, что если $f(z)$ — многочлен степени $m > 1$, то при некотором c (комплексном или действительном) уравнение $f(z) = c$ имеет не более $m - 1$ различных корней.

Указание. Если число корней равно m для любого c , то $f: S_1 \rightarrow S_1$ является накрытием и, следовательно, гомеоморфизмом.

168. Докажите, что при $k \geq 1$ всякое отображение $f: P_0 \rightarrow P_k$ стягиваемо (и потому имеет степень нуль).

Указание. Докажите, что для f существует покрывающее отображение $\tilde{f}: P_0 \rightarrow \tilde{E}$, где \tilde{E} — универсальное накрытие над P_k .

2.3.6. Группа узла

Пусть L_1 и L_2 — два узла в трехмерном пространстве. Обозначим через D_1 дополнительное пространство узла L_1 (т. е. множество всех точек пространства, не лежащих на линии L_1), а через D_2 — дополнительное пространство узла L_2 . Если узлы L_1, L_2 «одинаковы» (изотопны), т. е. существует гомеоморфное отображение f пространства на себя, при котором L_1 переходит в L_2 , то $f(D_1) = D_2$, т. е. дополнительные пространства гомеоморфны. Следовательно, группы $\pi(D_1)$ и $\pi(D_2)$ изоморфны, т. е. *фундаментальная группа дополнительного пространства является инвариантом узла*. Этот инвариант называется группой узла. Мы будем группу узла обозначать буквой G , т. е. $G(L_1) = \pi(D_1)$. Из сказанного ясно, что если группы $G(L)$ и $G(L')$ не изоморфны, то узлы L_1 и L_2 не изотопны.

Укажем теперь (без доказательства) способ вычисления группы узла. Пусть нормальная проекция узла L разбита на n дуг a_1, a_2, \dots, a_n , отделенных перерывами. Кроме того, выберем на L направление обхода и отметим его стрелками на дугах a_1, a_2, \dots, a_n (рис. 160).

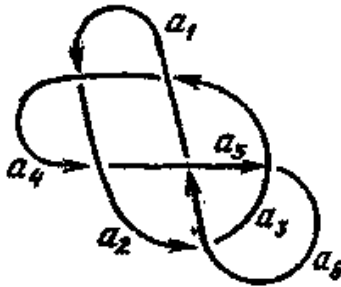


Рис. 160.

Теперь для описания группы $G(L)$ возьмем в пространстве точку o , расположенную выше линии L , и из нее проведем замкнутый путь x_k , охватывающий дугу a_k , расположенную над a_k , и обходящий ее в соответствии с правилом буравчика (рис. 161).

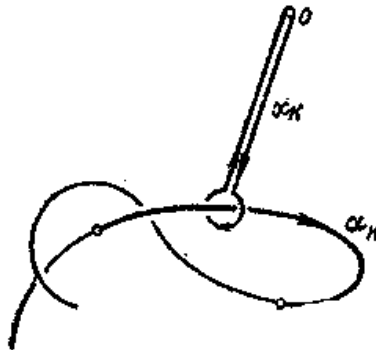


Рис. 161.

Гомотопические классы путей x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) являются образующими группы узла.

Рассмотрим теперь какую-нибудь двойную точку проекции и обойдем вокруг нее по небольшой окружности l (по часовой стрелке), выписывая одновременно некоторый одночлен. Именно, если встретившаяся (при движении по l) дуга всходит внутрь окружности, то возьмем соответствующий символ x в степени $+1$, а если выходит из окружности, то в степени -1 . Обойдя вокруг двойной точки, мы выпишем, слева направо, произведение четырех множителей, которое приравняем единице; например, для двойной точки на рис. 162 получим соотношение

$$x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k = 1.$$

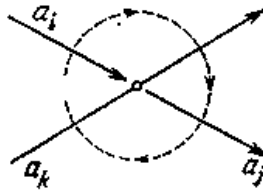


Рис. 162.

Нетрудно наглядно представить себе, что путь $x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k$ действительно гомотопен нулю в дополнительном пространстве: на рис. 163 изображена пленка, гомеоморфная кругу, натянутая на этот путь.

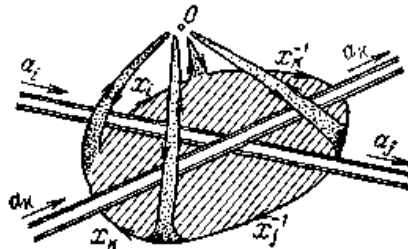


Рис. 163.

Оказывается, что, написав такие соотношения для всех двойных точек, мы и получаем полную систему соотношений между образующими x_1, x_2, \dots, x_n . Это описание группы узла применимо и к произвольным переплетениям.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных узлов и переплетений, рассмотрим один алгебраический пример.

Пример 50. Докажем, что группа G , заданная тремя образующими x_1, x_2, x_3 и соотношениями

$$x_2 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} = 1, \quad x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1, \quad x_1 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} = 1,$$

неабелева. Для доказательства обозначим через G' группу самосовмещений равностороннего треугольника; она состоит из шести элементов: поворотов вокруг точки o на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ и трех осевых симметрии x'_1, x'_2, x'_3 , оси которых показаны на рис. 164.

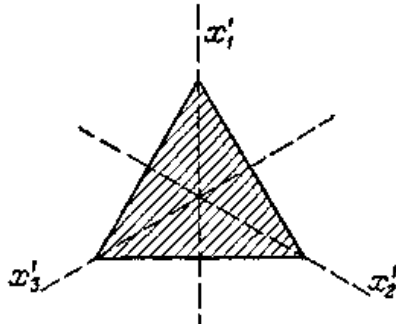


Рис. 164.

Без труда проверяется, что для элементов x'_1, x'_2, x'_3 указанные соотношения справедливы. При этом группа G' неабелева. Следовательно, группа G , заданная образующими x_1, x_2, x_3 и выписанными соотношениями, также неабелева (действительно, из этих соотношений не может вытекать, что группа G абелева, так как тогда и группа G' должна была бы быть абелевой, что неверно).

Пример 51. На рис. 165 изображена проекция простого узла L .

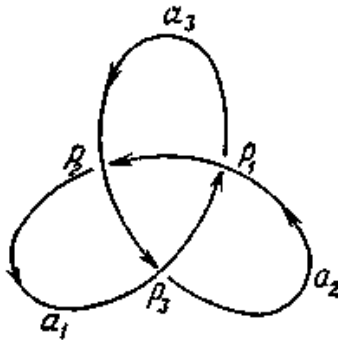


Рис. 165.

Соотношения между образующими x_1, x_2, x_3 (взяты в двойных точках p_1, p_2, p_3) совпадают с соотношениями, которые указаны в примере 50. Таким образом, группа $G(L)$ этого узла неабелева. Следовательно, узел L не изотопен окружности (у которой фундаментальная группа дополнительного пространства является свободной циклической и потому абелева). Таким образом, узел L не может быть развязан без разрезания нити.

Пример 52. На рис. 166 изображено переплетение L , образованное средними линиями торов, которые составляют множество A_1 на рис. 104, a .

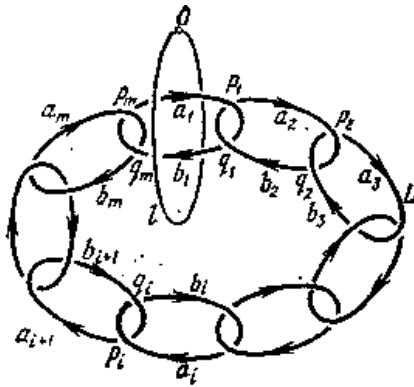


Рис. 166.

Группа $G(L)$ этого переплетения имеет $2m$ образующих $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$, которые получаются, если рассматривать пути, охватывающие дуги $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$, изображенные на рис. 166. Между этими образующими имеется $2m$ соотношений (выписанных для двойных точек p_i, q_i), которые имеют следующий вид:

$$x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} y_{i+1} = 1, \quad x_i y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i+1} = 1; \quad i = 1, \dots, m$$

(где следует считать $x_{m+1} = x_1, y_{m+1} = y_1$). Окружность l , изображенная на рис. 166, представляет собой путь в дополнительном пространстве переплетения L , причем класс этого пути равен $x_1^{-1} y_1$ (рис. 167).

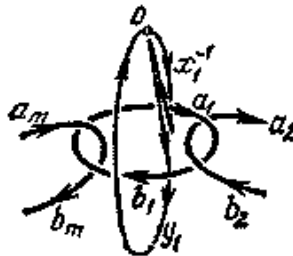


Рис. 167.

Докажем, что путь l негомотопен нулю в дополнительном пространстве, т. е. при стягивании окружности l в точку она непременно пересечет переплетение L .

Для доказательства обозначим через G' группу самосовмещений правильного m -угольника. Она состоит из поворотов вокруг точки o на углы $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$ и осевых симметрии x'_1, \dots, \dots, x'_m , оси которых показаны на рис. 168.

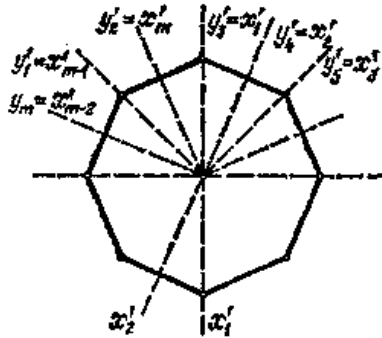


Рис. 168.

Положим, кроме того,

$$y'_1 = x'_{m-1}, y'_2 = x'_m, y'_3 = x'_1, \dots, y'_m = x'_{m-2}.$$

Без труда проверяется, что эти элементы группы G' удовлетворяют всем выписанным соотношениям (поскольку $(x'_i)^{-1} = x'_i$, а $x'_i x'_{i+1}$ есть поворот на угол $\frac{2\pi}{m}$). Кроме того, элемент $(x'_i)^{-1} y'_i$ (представляющий собой поворот на угол $\frac{4\pi}{m}$) отличен от единицы группы G' (т. е. от тождественного отображения). Следовательно, и в группе G элемент $(x'_i)^{-1} y'_i$ отличен от единицы. Иначе говоря, окружность l определяет в дополнительном пространстве путь, негомотопный нулю.

Аналогично можно доказать, что путь l негомотопен нулю и в дополнении переплетения, представляющего собой объединение средних линий торов, составляющих множество A_2 (рис. 104, б), и т. д. Это и дает обоснование свойств антуановского множества, рассмотренного ранее.

Задачи

169. Докажите, что переплетение, изображенное на рис. 117, невозможно «разнять», не разрывая ни одной из линий.

Указание. Докажите, что ок ружность l_1 определяет ненулевой элемент группы $G(L)$, где L — переплетение, образованное двумя другими окружностями. Для этого проверьте, что $G(L)$ есть свободная группа с двумя образующими.

170. Докажите, что окружность l , изображенную на рис. 169, невозможно «снять» с линии L и, следовательно, в дополнительном пространстве линии L не существует пленки, гомеоморфной кругу, которая «натянута» на l .

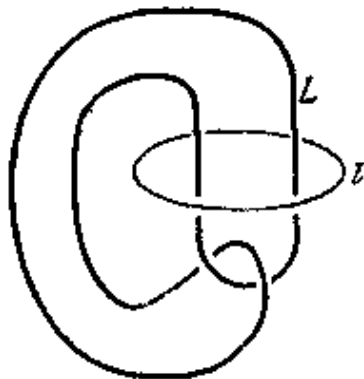


Рис. 169

Докажите также, что существует пленка, гомеоморфная ручке, которая «натянута» на l и расположена в дополнительном пространстве линии L .

2.3.7. Циклы и гомологии

На каждом из рисунков 170, 171 одномерный цикл z (он изображен в виде плавной линии, а не ломаной) ограничивает на поверхности некоторую область x .

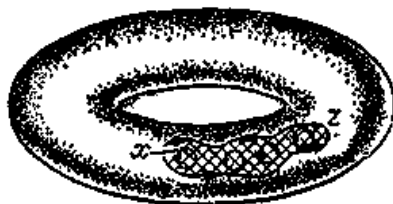


Рис. 170.

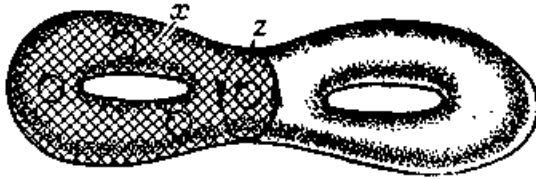


Рис. 171.

На рисунках эта область («пленка», натянутая на цикл z) ориентирована согласованно с этим циклом. Будем считать каждый *ограничивающий цикл* (т. е. цикл, на который можно натянуть пленку) несущественным, или, как говорят, *гомологичным нулю*.

На рис. 172,а изображены два цикла z_1 и z_2 ; объединение этих циклов обозначим через $z_1 + z_2$. На рис. 172, б показана разность $z_1 - z_2$ этих циклов (т. е. сумма цикла z_1 и цикла $-z_2$, получающегося из z_2 изменением ориентации).



Рис. 172. Задачи

На рисунке видно, что цикл $z_1 - z_2$ гомологичен нулю (он является границей пленки x). В этом случае говорят, что циклы z_1 и z_2 *гомологичны*.

В работах Пуанкаре были введены и изучены *группы гомологии*, являющиеся важными топологическими инвариантами. Идея их построения состоит в том, чтобы изучить, как велик в данной фигуре X запас циклов, которые попарно не гомологичны.

Задачи

171. Докажите, что на сфере каждый одномерный цикл гомологичен нулю.

172. Докажите, что в дополнительном пространстве множества A_1 , рассмотренного в примере 31 (а значит, и в дополнительном пространстве антуановского множества $A^* \subset A_1$) цикл l_1 (см. рис. 105, а) гомологичен нулю. Отсюда можно заключить, что

стягиваемость цикла является более тонким свойством, чем его гомологичность нулю.

173. Докажите, что каждый из циклов, изображенных замкнутыми контурами на рис. 173, 174, гомологичен нулю вне остальных контуров.

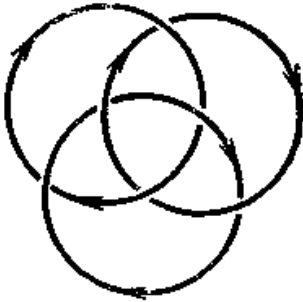


Рис. 173.

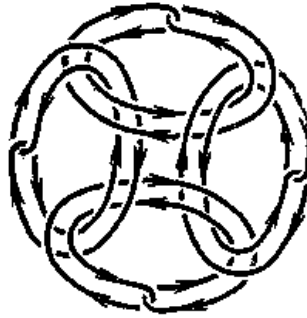


Рис. 174.

174. Докажите, что если коэффициент зацепления $\mathfrak{w}(z_1, z_2)$ отличен от нуля, то ни один из циклов z_1, z_2 не гомологичен нулю в дополнительном пространстве другого цикла.

Для построения групп гомологии следует обобщить понимание циклов и натягиваемых на них пленок. На рис. 175 каждый из циклов z_1, z_2 гомологичен нулю: цикл z_1 является границей круга $\tau_1 + \tau_2$, а цикл z_2 — границей круга $\tau_1 + \tau_3$.

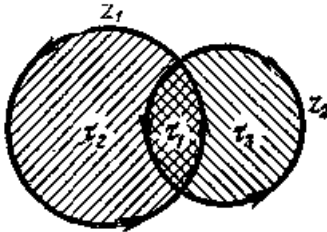


Рис. 175.

Сумма же $z_1 + z_2$ ограничивает «область» $(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_1 + \tau_3) = 2\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, состоящую из «дважды взятой» клетки τ_1 и «один раз взятых» клеток τ_2 и τ_3 . Таким образом, чтобы убедиться, что цикл $z_1 + z_2$ гомологичен нулю, приходится брать клетки с определенными коэффициентами. Точно так же циклы могут состоять из клеток, взятых с некоторыми коэффициентами.

Например, на рис. 176 сумма $r_1 + r_2 + r_3 + 3r_4$ является циклом, поскольку (учитывая «трижды взятое» ребро r_4 , в каждой вершине число входящих и исходящих ребер одинаково).

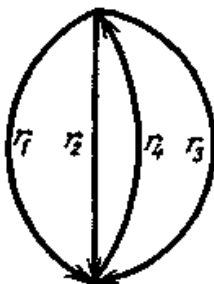


Рис. 176.

Отметим следующую теорему, вытекающую из закона двойственности Александра — Понтрягина (полную формулировку этого закона мы здесь не приводим). Пусть P — полиэдр, расположенный в трехмерном евклидовом пространстве, а Q — его дополнительное пространство; цикл z_1 , расположенный в одной из фигур P, Q , в том и только в том случае не гомологичен нулю в этой фигуре, если в другой из этих фигур найдется цикл z_2 , зацепленный с z_1 (т. е. $\mathbf{w}(z_1, z_2) \neq 0$).

Пример 53. На рис. 177 изображена линия P и цикл z' в дополнительном пространстве Q , причем цикл z' не зацеплен с одномерными циклами полиэдра P .

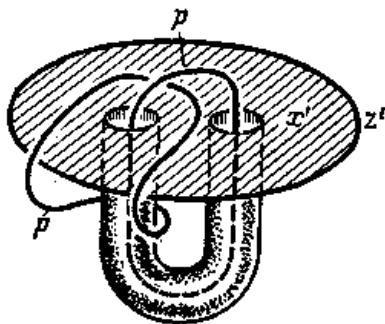


Рис. 177.

Следовательно, z гомологичен нулю в Q . На рисунке показана двумерная пленка $\alpha' \subset Q$, границей которой является цикл z' .

Задачи

175. Для циклов m_1, m_2, m_3, m_4 , расположенных на поверхности кренделя (рис. 178), укажите в дополнительном пространстве такие циклы z_1, z_2, z_3, z_4 , что $w(m_i, z_j)$ равно единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$).



Рис. 178.

176. Докажите, что для любого узла $l \subset \mathbb{R}^3$ существует такой полиэдр $K \subset \mathbb{R}^3$, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра, что один край его совпадает с l , а другой край l' имеет с l нулевой коэффициент зацепления.

177. Постройте в фигуре P (см. рис. 132) циклы m_1, m_2, m_3 , а в ее дополнении (в пространстве) циклы z_1, z_2, z_3 так, что $w(m_i, z_j)$ равно единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$.

Будем рассматривать не сами одномерные циклы, а *классы гомологии*, объединяя в один класс все гомологичные между собой одномерные циклы рассматриваемой фигуры X . Операция сложения превращает множество всех классов в группу; это и есть одномерная *группа гомологии* $H_1(X)$.

Опишем способ вычисления одномерной группы гомологии. Прежде всего отметим, что *если два цикла z_1, z_2 гомотопны (т. е. могут быть получены один из другого с помощью деформации), то они гомологичны*. Наглядно это можно объяснить тем, что «след», который «замечает» цикл z_1 в процессе его деформации в z_2 , и есть та пленка, которая соединяет циклы z_1 и z_2 (рис. 179).

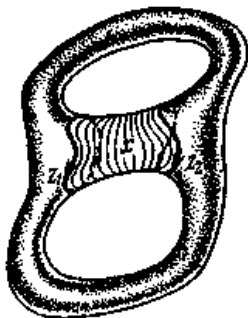


Рис. 179.

Обратное может не иметь места; гомологичные циклы на рис. 180 не гомотопны: перемещению цикла z_1 на поверхности Q в цикл z_2 мешают «дырки», имеющиеся на поверхности между этими циклами.

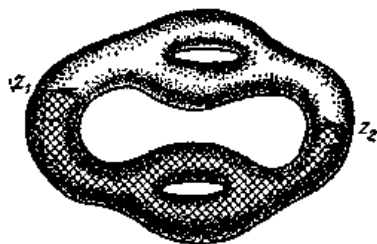


Рис. 180.

Таким образом, для гомологичности двух циклов достаточно (но не необходимо), чтобы они были гомотопными. Легко представить себе наглядно, что если задано клеточное разбиение полиэдра X , то любой одномерный цикл в этом полиэдре может быть при помощи деформации «сдвинут» в *одномерный остов*, т. е. в граф, состоящий из всех вершин и ребер (рис. 181).

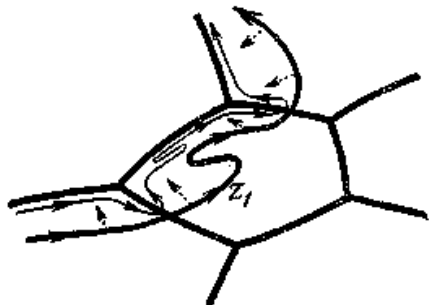


Рис. 181.

«Складки», которые могут возникнуть при деформации, можно распрямить. Следовательно, любой одномерный цикл гомотопен (а значит, и гомологичен) циклу, составленному из ребер, взятых с некоторыми коэффициентами. Таким образом, для вычисления группы гомологии $H_1(X)$ достаточно рассматривать одномерные циклы, составленные из ребер (с некоторыми целочисленными коэффициентами). Пленки же, натягиваемые на циклы, можно считать составленными из двумерных клеток, взятых с некоторыми коэффициентами.

Значит, нужно, во-первых, найти все одномерные циклы (составленные из ребер) и, во-вторых, научиться вычислять границы двумерных клеток, чтобы выяснить, какие одномерные циклы друг другу гомологичны. Первое не представляет труда: надо лишь проследить, чтобы в каждой вершине число входящих ребер было равно числу исходящих (учитывая коэффициенты). Второе фактически мы уже умеем делать; надо совершить обход по контуре клетки (в соответствии с ее ориентацией), но выписывать не произведение ребер (что мы делали при составлении *гомотопической границы* клетки), а их сумму с учетом знаков. Иначе говоря, в границу двумерной клетки τ (ее обозначают через $\partial\tau$) ребро r войдет с коэффициентом, равным сумме показателей степени, с которыми r входит в гомотопическую границу. Например, для клеток на рис. 143, ориентированных против часовой стрелки, мы имеем

$$\begin{aligned} \partial\tau_1 &= a + b + c + d; & \partial\tau_2 &= -d + f - h + k; \\ \partial\tau_3 &= h + l; & \partial\tau_4 &= -k - l. \end{aligned}$$

Пример 54. Клеточное разбиение двумерной сферы P_0 , рассмотренное в примере 43, содержит только две клетки: нульмерную и двумерную. Одномерных клеток это разбиение не содержит совсем, поэтому *группа $H_1(P_0)$ тривиальна* (ненулевых одномерных циклов в этом клеточном разбиении нет).

Пример 55. Рассмотренное в примере 44 клеточное разбиение проективной плоскости N_1 состоит из одной нульмерной клетки, одной одномерной клетки r и одной двумерной клетки τ . Любой одномерный цикл имеет вид kr (поскольку, кроме r , других ребер нет), причем цикл $2r$ гомологичен нулю (так как $2r = \partial\tau$; см. рис. 141).

Отсюда следует, что *одномерная группа гомологии $H_1(N_1)$ проективной плоскости является группой порядка 2*.

Заметим, что при вычислении групп гомологии в примерах 54, 55 мы использовали одно клеточное разбиение рассматриваемого полиэдра, но говорили не о «группе гомологии этого разбиения», а о группе гомологии самого полиэдра. В действительности, это оправдано,

поскольку группы гомологии полиэдров не зависят от выбора клеточных разбиений, а всецело определяются самими полиэдрами.

Задачи

178. На рис. 182 показано клеточное разбиение ленты Мёбиуса (обе полуокружности на внутреннем контуре склеиваются в одно ребро a).

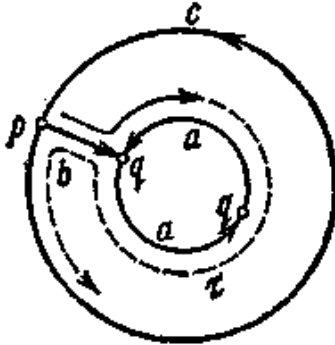


Рис. 182.

Проверьте, что $\partial z = c - 2a$, и выведите отсюда, что одномерная группа гомологии ленты Мёбиуса является свободной циклической.

179. Докажите, что для клеточного разбиения тора T , рассмотренного в примере 45, справедливо соотношение $\partial \tau = 0$. Выведите отсюда, что $H_1(T)$ есть свободная абелева группа с двумя образующими a, b .

180. Докажите, что цикл z , изображенный на рис. 183, гомогичен $\pm 3a \pm 2b$ (где знаки зависят от направлений, выбранных на параллели a и меридиане b тора T).

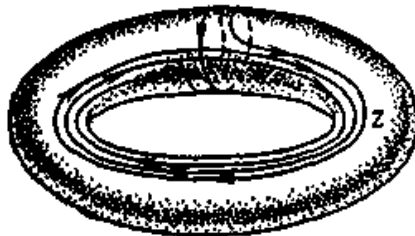


Рис. 183.

181. Докажите, что одномерная группа гомологии кренделя P_2 является свободной абелевой группой с четырьмя образующими m_1, m_2, m_3, m_4 (см. рис. 178).

182. Докажите, что одномерная группа гомологии поверхности P_k является свободной абелевой группой с $2k$ образующими.

183. Вычислите группу $H_1(N_q)$. (Ответ: абелева группа с q образующими c_1, c_2, \dots, c_q , связанными единственным соотношением $2c_1 + 2c_2 + \dots + 2c_q = 0$. Эту группу можно описать и иначе: прямая сумма группы второго порядка и свободной абелевой группы с $q - 1$ образующими.)

184. Докажите, что замкнутая поверхность Q в том и только в том случае неориентируема, если в группе $H_1(Q)$ имеется элемент порядка 2. Докажите также, что две замкнутые поверхности в том и только в том случае гомоморфны, если их одномерные группы гомологии изоморфны.

185. Докажите, что не существует клеточного разбиения тора, состоящего менее чем из четырех клеток.

Рассмотрим теперь нульмерные гомологии. Нульмерный цикл мы получаем, взяв вершины клеточного разбиения с некоторыми целочисленными коэффициентами. Далее, граница ребра равна разности его концов: на рис. 184 имеем $\partial r_1 = b - a$, $\partial r_2 = 0$.

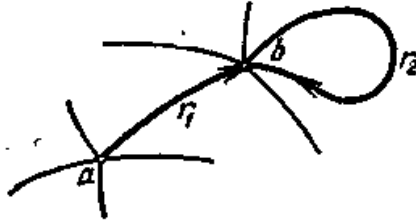


Рис 184.

Два нульмерных цикла гомологичны, если их разность является границей некоторой суммы одномерных клеток (с какими-то коэффициентами).

Наконец, будем рассматривать нульмерные классы гомологии, объединяя в один класс все гомологичные между собой нульмерные циклы рассматриваемого полиэдра X . Операция сложения превращает множество всех классов в группу; это и есть нульмерная группа гомологии $H_0(X)$.

Задачи

186. Докажите, что если r_1, r_2, \dots, r_k — простая цепочка направленных ребер, идущая от вершины a к вершине b , то

$$\partial(r_1 + r_2 + \dots + r_k) = b - a.$$

187. Докажите, что если X — связный полиэдр, то любой нульмерный цикл в X гомологичен одной точке, взятой с некоторым коэффицентом, т. е. группа $H_0(X)$ является свободной циклической.

188. Докажите, что если полиэдр X состоит из k компонент, то $H_0(X)$ есть свободная абелева группа с k образующими.

Аналогично определяется двумерная группа гомологии $H_2(X)$: нужно в X рассматривать двумерные циклы и натянутые на них трехмерные «пленки».

Пример 56. Пусть X состоит из всех точек трехмерного пространства, лежащих на торе и внутри него («полный тор»). Полиэдр X можно представить в виде клеточного разбиения, в котором, кроме клеток o , a , b, v , расположенных на торе, имеется еще одна двумерная клетка τ' («поперечное сечение» тора), границей которой служит меридиан b , и одна трехмерная клетка v — внутренности тора, рассеченная по клетке τ' . Границы клеток имеют следующие значения:

$$\partial a = 0, \quad \partial b = 0, \quad \partial v = 0, \quad \partial \tau' = b, \quad \partial v = \tau$$

(заметим, что трехмерная клетка v с двух сторон примыкает к двумерной клетке τ' , причем с одной стороны ориентация клетки τ' наблюдается, как ориентация по часовой стрелке, а с другой стороны — против втрелки; поэтому в ∂v клетка τ' не входит).

Одномерные циклы этого клеточного разбиения имеют вид $ka + lb$ (где k, l — целые), причем цикл b гомологичен нулю (на него натянута пленка τ'). Следовательно, любой одномерный цикл гомологичен ka , и потому группа $H_1(X)$ — свободная циклическая. Далее, так как $\partial(mv + n\tau') = nb$, то $mv + n\tau'$ только в том случае является двумерным циклом (т. е. имеет границу, равную нулю), если $n=0$. Итак, двумерные циклы имеют вид mv . Но любой такой цикл гомологичен нулю (поскольку $\partial v = \tau'$, т. е. v есть «трехмерная пленка», натянутая на двумерный цикл τ). Следовательно, группа $H_2(X)$ тривиальна.

В ряде случаев удобно вместо вычисления всей группы гомологии $H_r(X)$ ограничиться лишь нахождением ранга этой группы; он называется r -мерным числом Бетти полиэдра X и обозначается через $p_r(X)$.

Определение чисел Бетти можно сформулировать и иначе. Говорят, что r -мерные циклы z_1, \dots, z_n в X гомологически независимы, если, каковы бы ни были целые числа k_1, \dots, k_n , хотя бы одно из которых отлично от нуля, цикл $k_1 z_1 + \dots + k_n z_n$ не гомологичен

нулю в X . Теперь r -мерное число Бетти $p_r(X)$ определяется как наибольшее число гомологически независимых r -мерных циклов в X . В качестве примера применения чисел Бетти приведем (без доказательства) следующую теорему о вычислении эйлеровой характеристики. Пусть X — некоторый полиэдр; рассмотрим какое-нибудь его клеточное разбиение и обозначим через a_r число r -мерных клеток этого разбиения ($r = 0, 1, 2, \dots$). Тогда эйлерова характеристика полиэдра X , т. е. число $\chi(X) = \sum (-1)^r a_r$, может быть вычислена по его числам Бетти: $\chi(X) = \sum (-1)^r p_r(X)$ (суммирование распространено на все значения $r = 0, 1, 2, \dots$ вплоть до наибольшей из размерностей клеток полиэдра X).

Пример 57. *Трехмерная сфера S^3 определяется как граница шара в четырехмерном пространстве R^4 ; в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 она определяется уравнением*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Рассматривая «четырёхмерный аналог» рисунков 157 и 7, нетрудно доказать, что трехмерная сфера с выколотой точкой гомеоморфна трехмерному евклидову пространству, а потому — открытому трехмерному шару. Следовательно, трехмерную сферу можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего только из двух клеток: 1 нульмерной клетки o и трехмерной клетки v . Поэтому (ср. пример 54) группы, гомологии $H_0(S^3)$ и $H_3(S^3)$ являются свободными циклическими, а в остальных размерностях группы гомологии трехмерной сферы тривиальны. Из этого следует, что

$$p_0(S^3) = p_3(S^3) = 1, \quad p_1(S^3) = p_2(S^3) = 0.$$

Пример 58. Подобно тому, как склеивание противоположных сторон квадрата дает тор, склеивание противоположных граней куба дает *трехмерный тор T^3* (его не следует путать с полным тором, см. пример 56). Например, на гранях $ABCD$ и $abcd$ (рис. 185) склеиваются между собой точки, которые являются концами отрезка, параллельного ребрам Aa, Bb, Cc, Dd .

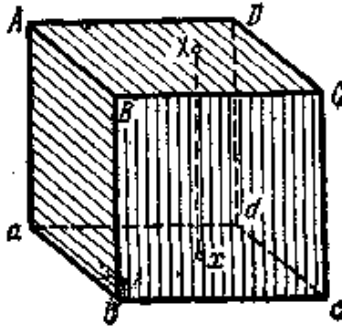


Рис. 185.

Все вершины куба склеиваются вместе, что дает одну нульмерную клетку. Далее, все параллельные ребра склеиваются вместе; после склеивания остаются три одномерные клетки. Парное склеивание противоположных граней дает три двумерные клетки. Наконец, мы имеем одну трехмерную клетку. Это и дает клеточное разбиение трехмерного тора T^3 . Каждая из клеток имеет границу, равную нулю, и потому группа гомологии $H_3(T^3)$ трехмерного тора T^3 является свободной циклической, а каждая из групп $H_1(T^3), H_2(T^3)$ является свободной абелевой группой с тремя образующими. Из этого следует, что

$$p_0(T^3) = p_2(T^3) = 1, p_1(T^3) = p_3(T^3) = 3.$$

Пример 59. Покажем, что из двух полных торов, склеивая их друг с другом границами, можно получить трехмерную сферу. Тор (см. рис. 5) разбивает пространство на две части: внутреннюю, представляющую собой полный тор, и внешнюю. При пополнении трехмерного пространства одной точкой (в результате чего получается трехмерная сфера) внешняя часть также превращается в полный тор (что и дает разбиение трехмерной сферы на два склеенных между собой полных тора). Это ясно из рассмотрения рис. 186.

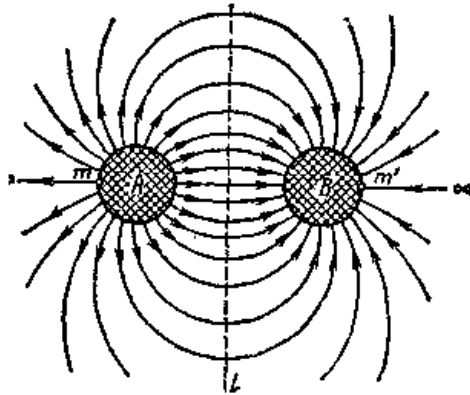


Рис. 186.

При вращении этого чертежа вокруг прямой l каждая «силовая линия», начинающаяся на «заряде» A и кончающаяся на B (включая и линию $t \infty t'$, которая представляет собой одну линию, ибо имеется только одна бесконечно удаленная точка), дает топологический круг, и все такие круги заполняют внешность тора, получающегося при вращении «зарядов» A и B . Этим кругам имеется столько, сколько точек на окружности «заряда» A . Таким образом, внешность тора (пополненная одной бесконечно удаленной точкой) гомеоморфна полному тору.

Задачи

189. Докажите, что для трехмерного шара X группы $H_1(X)$, $H_2(X)$, $H_3(X)$ тривиальны.

190. Рассмотрим часть трехмерного пространства, ограниченную двумя концентрическими сферами («трехмерное кольцо»), и отождествим (склеим) каждые две точки этих сфер, лежащие на одном радиусе. Докажите, что у получающегося полиэдра X все группы гомологии $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$, $H_3(X)$ — свободные циклические.

191. Вычислите группы гомологии полиэдра, представляющего собой объединение поверхности P_k и ее внутренней области.

192. Вычислите гомологии *трехмерного проективного пространства*, которое получается из трехмерного шара, если на его границе склеить каждые две диаметрально противоположные точки.

193. Докажите, что любая замкнутая поверхность может быть без самопересечений расположена в трехмерном проективном пространстве.

194. Пусть X — полиэдр, рассматриваемый в некотором клеточном разбиении и α_r — число его r -мерных клеток ($r = 0, 1, \dots, n$, где n —

наибольшая из размерностей клеток). Докажите, что для любого $r = 0, 1, \dots, n - 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \alpha_k \geq \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} p_k(X).$$

Указание. Рассмотрите r -мерный остов X^r полиэдра X (состоящий из всех клеток рассматриваемого разбиения, имеющих размерность $\leq r$) и докажите соотношения

$$p_0(X^r) = p_0(X), \quad p_1(X^r) = p_1(X), \dots, \\ p_{r-1}(X^r) = p_{r-1}(X), \quad p_r(X^r) \geq p_r(X).$$

Отметим в заключение, что при построении групп гомологии можно было бы в качестве коэффициентов брать не целые числа, а вычеты по модулю 2, вычеты по модулю m (или, вообще, элементы некоторой абелевой группы G). Получающиеся группы гомологии обозначаются через $H_r(X, Z_2), H_r(X, Z_m), H_r(X, G)$. Например, если коэффициентами являются вычеты по модулю 2, то все клетки можно рассматривать неориентированными. В случае, когда группой коэффициентов является циклическая группа порядка p , где p — простое число, группа гомологии $H_r(X, Z_p)$ является прямой суммой нескольких групп, изоморфных Z_p ; число слагаемых в этой прямой сумме называется r -мерным числом Бетти полиэдра X по модулю p .

Задачи

195. Докажите, что для проективной плоскости N_1 группы $H_0(N_1, Z_2), H_1(N_1, Z_2), H_2(N_1, Z_2)$ являются группами второго порядка.

196. Докажите, что поверхности P_k и N_{2k} имеют (во всех размерностях) одинаковые группы гомологии по модулю 2.

197. Вычислите для трехмерного проективного пространства (см. задачу 192) гомологии по модулю 2.

2.3.8. Топологическое произведение

Пример 60. Каждая точка цилиндра E (рис. 187) может быть задана парой точек (x, y) , где x лежит на нижнем основании B , а y — на образующей F_1 , проведя через x отрезок, параллельный F , а через y — круг, параллельный B , мы получим на их пересечении искомую точку цилиндра.

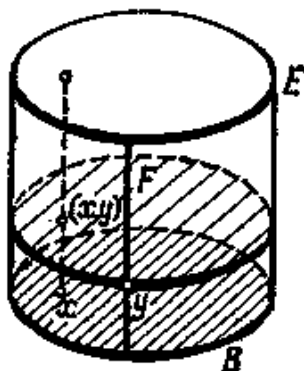


Рис. 187.

Таким образом, цилиндр E можно рассматривать как множество всех пар (x, y) , где x — точка одной фигуры B (круга), а y — точка другой фигуры F (отрезка).

Пример 61. На торе E (рис. 188) проведем меридиан B и параллель F .

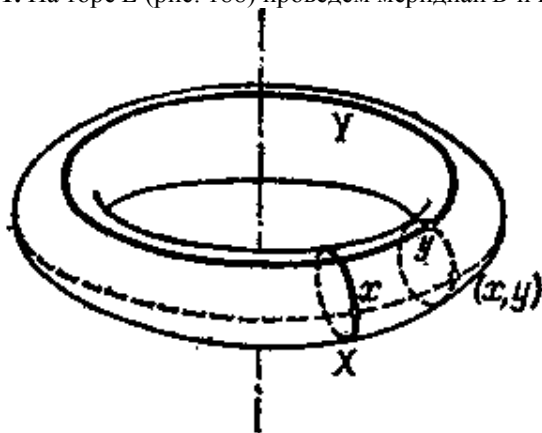


Рис. 188.

Для задания любой точки тора достаточно указать точку $x \in B$ и точку $y \in F$: проведя через x параллель, а через y меридиан, мы получим на их пересечении искомую точку тора. Таким образом, тор E можно рассматривать как множество всех пар (x, y) , где $x \in B$, $y \in F$.

В рассмотренных примерах мы имели *топологическое произведение* фигур B и F : цилиндр есть топологическое произведение круга и отрезка, тор — топологическое произведение двух окружностей. Вообще, *фигура E называется топологическим произведением фигур B и F , если E можно рассматривать как множество всевозможных пар (x, y) , где $x \in B, y \in F$* . Отметим, что здесь говорится лишь о том, из каких точек состоит фигура E , но следует еще указать топологию в фигуре E . Наглядно эту топологию можно описать, сказав, что точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) фигуры E будут «близкими», если x_1 и x_2 являются «близкими» в B , а y_1 и y_2 являются «близкими» в F .

Существенно, чтобы каждой точке фигуры E соответствовала некоторая пара (x, y) и чтобы различные пары соответствовали различным точкам фигуры E .

Пример 62. Рассмотрим на сфере *экватор B и нулевой меридиан F* . Для задания точки на сфере достаточно указать ее *географические координаты*, т. е. точки $x \in B, y \in F$: проведя через эти точки меридиан и параллель (рис. 189), мы получим на их пересечении искомую точку (x, y) сферы.

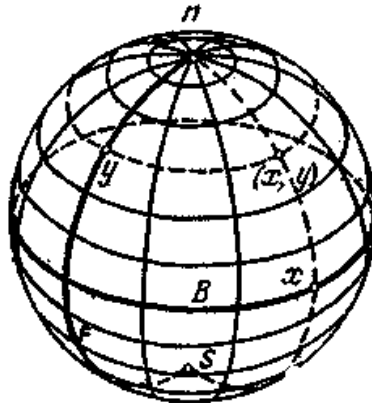


Рис. 189.

Но это не значит, что сфера — топологическое произведение экватора и меридиана; действительно, если x и x' — две различные точки экватора, а n — верхний конец меридиана (северный полюс), то различным парам (x, n) и (x', n) соответствует одна и та же точка n на сфере.

Задачи

198. Докажите, что кольцо, ограниченное двумя concentрическими окружностями, есть топологическое произведение окружности и отрезка.

199. Докажите, что полный тор (пример 56) является топологическим произведением круга и окружности.

200. Докажите, что полиэдр X , рассмотренный в задаче 190, является топологическим произведением сферы и окружности.

201. Докажите, что трехмерный тор T^3 является топологическим произведением обычного (двумерного) тора и окружности. Можно также сказать, что T^3 — топологическое произведение трех окружностей.

Рассмотрим теперь вопрос о гомологических свойствах топологического произведения, ограничиваясь для простоты рассмотрением не групп гомологии, а лишь чисел Бетти. Если в примере 61 считать меридиан и параллель одномерными циклами, то их топологическое произведение (тор) будет двумерным циклом. Вообще, если E — топологическое произведение полиэдров B и F , в которых соответственно взяты циклы z, z' размерностей r, r' , то можно рассмотреть произведение этих циклов, которое будет $(r + r')$ -мерным циклом в полиэдре E . Оказывается, что таким путем (перемножением циклов взятых в B и F) можно получить систему гомологически независимых циклов в полиэдре E . Для этого нужно сначала взять максимальное число гомологически независимых нульмерных циклов в B и r -мерных циклов в F ; перемножая эти циклы, мы получим $p_0(B) p_r(F)$ циклов в E , имеющих размерность r . Затем нужно взять максимальное число гомологически независимых одномерных циклов в B и $(r - 1)$ -мерных в F ; перемножая, мы получим еще $p_1(B) p_{r-1}(F)$ циклов в E , имеющих размерность r . Затем нужно взять двумерные циклы в B и $(r - 2)$ -мерные в F и т. д. Соединяя все полученные циклы вместе, мы и получим максимальное число r -мерных гомологически независимых циклов в полиэдре E . Таким образом, если E - топологическое произведение полиэдров B и F , то

$$p_r(E) = p_0(B) p_r(F) + p_1(B) p_{r-1}(F) + \\ + p_2(B) p_{r-2}(F) + \dots + p_r(B) p_0(F).$$

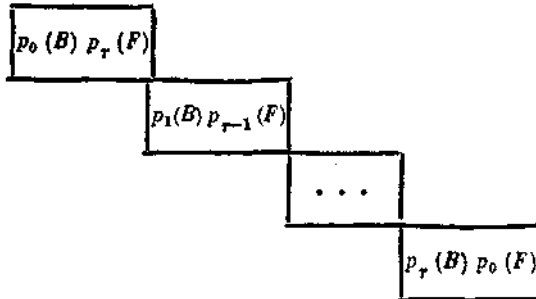
Этой формуле можно дать следующее «графическое» истолкование. Составим таблицу, у которой на пересечении i -го столбца и j -й строки стоит число $p_i(B) p_j(F)$:

...
$p_j(F)$	$p_0(B) p_j(F)$	$p_1(B) p_j(F)$...	$p_l(B) p_j(F)$...
...
$p_2(F)$	$p_0(B) p_2(F)$	$p_1(B) p_2(F)$...	$p_l(B) p_2(F)$...
$p_1(F)$	$p_0(B) p_1(F)$	$p_1(B) p_1(F)$...	$p_l(B) p_1(F)$...
$p_0(F)$	$p_0(B) p_0(F)$	$p_1(B) p_0(F)$...	$p_l(B) p_0(F)$...

$p_0(B)$	$p_1(B)$...	$p_l(B)$...
----------	----------	-----	----------	-----

То

гда суммирование чисел, стоящих на r -й диагонали этой таблицы, и дает r -мерное число Бетти полиэдра E :



Задачи

- 202. Составьте указанную таблицу для топологического произведения сферы и окружности; вычислите этим приемом числа Бетти полиэдра, рассмотренного в задаче 190 (см. также задачу 200).
- 203. Докажите, что если полиэдр E является топологическим произведением полиэдров B и F , то $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$.
- 204. Вычислите числа Бетти n -мерного тора (т. е. топологического произведения n окружностей).
- 205. Докажите, что трехмерная сфера не гомеоморфна топологическому произведению окружности и некоторой поверхности. То же докажите для трехмерного проективного пространства.

2.3.9. Расслоения

Вернемся к примеру 60 и обозначим через p проекцию цилиндра E на его основание B . Для каждой точки $x \in B$ прообраз представляет $p^{-1}(x)$ собой отрезок, параллельный F . Эти отрезки будем называть *слоями*. Над каждой точкой x базисной фигуры B расположен («растет») соответствующий слой, а весь цилиндр *расслаивается* и представляет собой объединение всех слоев (как бы связку стерженьков).

Вообще проекция p , ставящая в соответствие точке $(x, y) \in E$ точку $x \in B$, отображает топологическое произведение E фигур B и F на базу B , причем прообраз $p^{-1}(x)$ любой точки $x \in B$ (слой, «растущий над x »), гомеоморфен F . Это можно проследить в примере 61 и в задачах 198-201.

Рассмотрим теперь проекцию p винтовой линии E на окружность B (см. пример 48). Каждый прообраз $p^{-1}(x)$ («слой, растущий над точкой $x \in B$ ») гомеоморфен множеству F , состоящему из точек $\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ числовой прямой. Этот пример отличается от топологического произведения окружности B и слоя F (которое состоит из бесконечного числа отдельных окружностей; рис. 190).

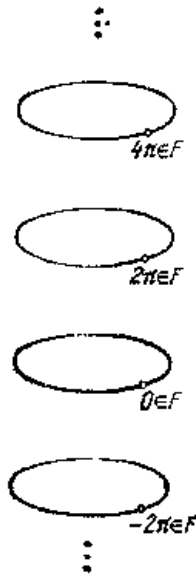


Рис. 190.

Однако прообраз $p^{-1}(U)$ окрестности U распадается на отдельные листы, т. е. $p^{-1}(U)$ есть топологическое произведение окрестности U и слоя F (см. рис. 146). Иначе говоря, локально (т. е. в окрестности каждой точки $x \in B$) E является топологическим произведением, но в целом — нет. В топологии в таких случаях используют термин *локально тривиальное расслоение* (т. е. топологическое произведение считается в топологии «тривиальным» расслоением). Вообще, *любое накрытие является локально тривиальным расслоением, причем слой F этого расслоения состоит из изолированных точек*. В примере 49 слой состоит из двух точек, накрытие E представляет собой ориентируемую поверхность, а база B — неориентируемую.

Пример 63. Обозначим через B среднюю линию ленты Мёбиуса E . Через каждую точку $x \in B$ проходит поперечный отрезок, который мы будем считать слоем, «растущим» над точкой x (эти поперечные отрезки получаются из поперечных отрезков прямоугольной ленты при склеивании ее в ленту Мёбиуса). Отображая каждый поперечный отрезок в соответствующую точку x , мы получаем *проекцию* $p: E \rightarrow B$, причем $p^{-1}(x)$ есть слой над точкой $x \in B$. Это расслоение локально тривиально. В самом деле, если взять на окружности B небольшую дугу U , то ее прообраз $p^{-1}(U)$ представляет собой топологическое произведение дуги U и слоя F (рис. 191).



Рис. 191.

В целом же лента Мёбиуса E не является топологическим произведением окружности B и отрезка F (см. задачу 198).

Пример 64. Еще одним примером локально тривиального расслоения служит *нормированный касательный пучок* поверхности. Пусть B — ориентируемая поверхность. Обозначим через E множество всех векторов длины 1, касающихся поверхности B . Через $p: E \rightarrow B$ обозначим отображение, сопоставляющее каждому касательному вектору $x \in E$ ту точку $x \in B$, из которой этот вектор «растет». Слой $p^{-1}(x)$ над точкой $x \in B$ (состоящий из всех векторов длины 1, касающихся поверхности в точке x) гомеоморфен окружности. Отображение $p: E \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением. В самом деле, маленькую окрестность U точки x на поверхности B можно считать кусочком плоскости, и потому каждый вектор z ,

касающийся поверхности B в какой-либо точке $x \in U$, может быть задан как пара (x, y) , где y — точка единичной окружности F (рис. 192).



Рис. 192.

Иначе говоря, $p^{-1}(U)$ представляется в виде топологического произведения окрестности U и окружности F .

Пусть, в частности, E — нормированный касательный пучок сферы S^2 (т. е. множество всех единичных векторов, касающихся этой сферы). Пространство E можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего из четырех клеток. В самом деле, пусть $x_0 \in S^2$ и F_0 — слой над точкой x_0 . Выберем точку $\tau^0 \in F_0$ и оставшуюся часть слоя F_0 (одномерную клетку) обозначим через τ^1 . Далее, пусть v — векторное поле на сфере S^2 , имеющее в точке x_0 единственную особенность (с индексом $+2$). Поле v можно рассматривать как двумерную клетку в E . Эта клетка проектируется на всю сферу S^2 с выколотой точкой x_0 , а с каждым слоем (кроме F_0) пересекается в одной точке. Наконец, выбросив из E клетки $\tau^0, \tau^1, \tau^2 = v$, мы получим множество τ^3 , гомеоморфное открытому трехмерному шару. Таким образом, E представляется в виде клеточного разбиения $\{\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3\}$. Заметим, что граница клетки $v = \tau^2$ представляет собой дважды обегаемый слой F_0 , т. е. $\partial\tau^2 = 2\tau^1$. Остальные клетки имеют нулевую границу: $\partial\tau^3 = 0, \partial\tau^1 = 0, \partial\tau^0 = 0$. Из этого нетрудно заключить, что числа Бетти пространства E имеют следующие значения: $p_0(E) = p_3(E) = 1, p_1(E) = p_2(E) = 0$. Заметим, что при рассмотрении гомологии по модулю 2 имеем $\partial\tau^2 = 0$, и потому числа Бетти пространства E по модулю 2 имеют вид $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$.

Задачи

206. Докажите, что бутылку Клейна можно представить в виде локально тривиального расслоения, базой и слоем которого является окружность.

207. Докажите, что нормированный касательный пучок двумерного тора T гомеоморфен трехмерному тору.
208. Докажите, что если локально тривиальное расслоение имеет своей базой двумерную сферу, а слоем — окружность, то пространство E этого расслоения можно получить из двух полных торов, склеивая их границами.
209. Докажите, что если базой локально тривиального расслоения является окружность, а слоем — отрезок, то E гомеоморфно либо круговому кольцу, либо ленте Мёбиуса.

Французскому математику Жану Лере принадлежит важная теорема о гомологиях расслоенных пространств. Мы сформулируем ее здесь в упрощенном виде.

Пусть $p: E \rightarrow B$ — некоторое расслоение, базой которого является связный полиэдр, имеющий тривиальную фундаментальную группу, а слоем — произвольный полиэдр. Составим таблицу, которую мы имели для случая, когда E — топологическое произведение фигур B и F , и в этой таблице наметим стрелки «ходом коня» (рис. 193).

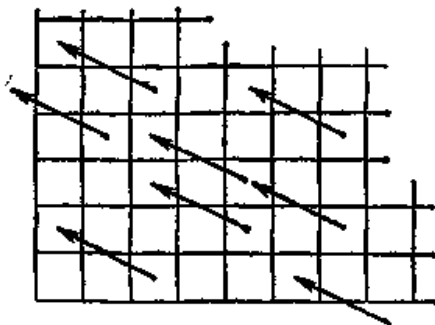


Рис. 193.

На каждой стрелке надпишем некоторое неотрицательное целое число, придерживаясь следующих правил: 1) число, стоящее в каждой клетке, не меньше, чем сумма чисел, надписанных на тех двух стрелках, одна из которых входит в данную клетку, а другая выходит из нее; 2) если начало или конец стрелки выходят за пределы таблицы, то на этой стрелке надписывается число 0. То, что получается, назовем *таблицей* E_2 .

Теперь составим новую таблицу. В каждой клетке поставим новое число, получающееся, если из числа, ранее стоявшего в этой клетке, вычтем сумму чисел, на входящей и исходящей стрелках. Затем

наметим стрелки «удлиненным ходом коня» (рис. 194) и на них надпишем числа по тем же правилам. Это дает *таблицу* E_3 .

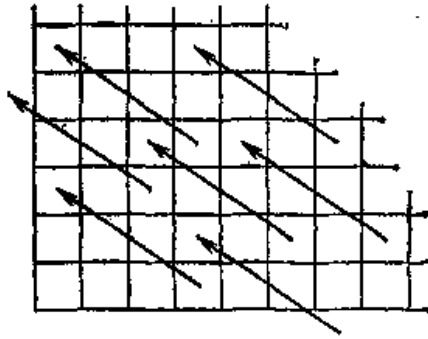


Рис. 194.

Таким же путем из таблицы E_3 получаем *таблицу* E_4 и т. д. Вообще в *таблице* E_n стрелки ведут на n клеток влево и на $n - 1$ клетку вверх. Ясно, что какую бы мы ни взяли клетку, стоящие в ней числа (в таблицах E_2, E_3, E_4, \dots) в конце концов перестанут меняться, стабилизируются: стрелки становятся все длиннее и в конце концов будут выходить за пределы таблицы. Таблицу, составленную из стабилизировавшихся чисел, назовем *таблицей* E_∞ (стрелок в ней нет). Теорема Лере утверждает, что *существует такой способ надписывания чисел на стрелках, при котором суммирование чисел, стоящих на r -й диагонали таблицы E_∞ , дает r -мерное число Бетти пространства E* . Аналогичная теорема справедлива и для чисел Бетти по простому модулю p .

Пример 65. Пусть $p_1 E \rightarrow B^{\bar{}}$ — некоторое расслоение, базой которого служит сфера S^2 , а слоем — окружность S^1 . Тогда $p_0(B) = p_2(B) = 1, p_0(F) = p_1(F) = 1$, а остальные числа Бетти базы и слоя равны нулю. Поэтому *таблица* E_2 имеет вид, показанный на рис. 195 (во всех клетках, кроме указанных четырех, записано число 0; на всех стрелках, кроме указанной, надписано число 0).

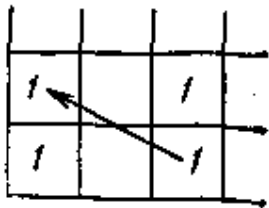


Рис. 195.

На указанной стрелке может быть надписано либо число 0, либо 1. Таблица E_3 совпадает с E_∞ (все стрелки выходят за пределы таблицы). Следовательно, по теореме Лере, пространство E рассматриваемого расслоения может иметь либо числа Бетти $p_0(E) = p_1(E) = p_2(E) = p_3(E) = 1$ (если на стрелке надписан 0), либо число Бетти $p_2(E) = p_3(E) = 1, p_1(E) = p_0(E) = 0$ (если надписана единица). Первая возможность реализуется, например, для топологического произведения сферы S^2 и окружности S^1 (см. задачу 200). Вторая возможность реализуется для касательного пучка сферы S^2 (см. пример 64).

2.3.10. Теория Морса

Наличие горизонтальной касательной — необходимое условие для того, чтобы дифференцируемая функция достигала максимума или минимума (локального) во внутренней точке x_0 своей области определения. Однако это условие не является достаточным: в точке перегиба с горизонтальной касательной функция не достигает ни максимума, ни минимума.

Заметим, что точки максимума и минимума устойчивы относительно малых «шевелений» графика (рис. 196, а). Точка перегиба (с горизонтальной касательной) устойчивостью не обладает: при «шевелении» графика она может пропасть (т. е. вблизи нее не будет точек с горизонтальной касательной); рис. 196, б).

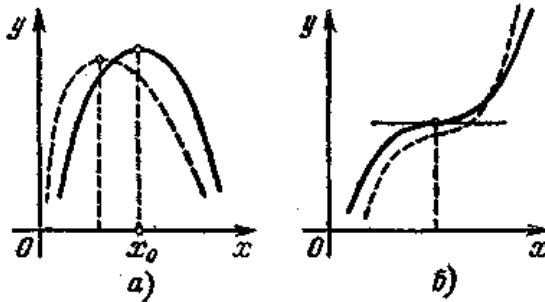


Рис. 196.

Для функций от двух переменных x, y (заданных в некоторой области на плоскости) можно указать аналогичное необходимое условие: для того чтобы функция $f(x, y)$ достигала локального максимума или минимума во внутренней точке (x_0, y_0) своей области определения, необходимо, чтобы эта точка была критической, т. е. чтобы график

функции имел в точке (x_0, y_0) горизонтальную касательную плоскость.

Пример 66. На рисунке 197 изображены графики функций

$$\begin{aligned} f_0(x, y) &= c + x^2 + y^2, & f_1(x, y) &= a + x^2 - y^2, \\ f_2(x, y) &= c - x^2 - y^2. \end{aligned} \quad (21)$$

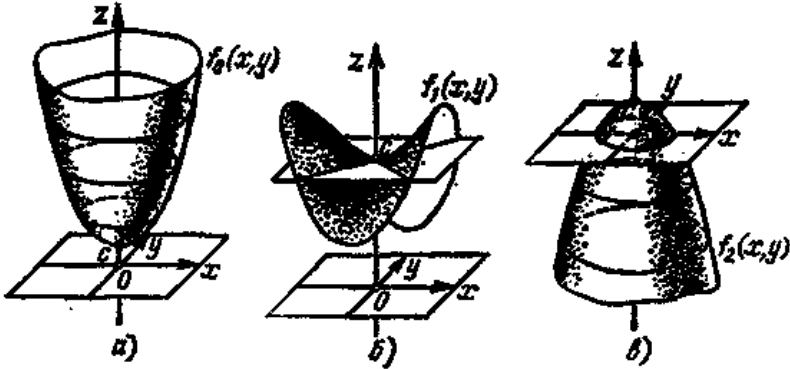


Рис.197

Точка $(0; 0)$ является для каждой из них критической: для $f_0(x, y)$ — это точка минимума, для $f_2(x, y)$ точка максимума, а функция $f_1(x, y)$ не имеет в точке $(0; 0)$ ни максимум ни минимума — это так называемая седловая точка. Все эти точки устойчивы относительно малых «шевелений» графика. Существуют и более сложные критические точки; например, функция $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ имеет в начале координат «седло третьего порядка» (три спуска и три подъема, а не два, как на рис. 197, б). Однако как угодно малым «шевелением» графика можно добиться, чтобы все критические точки стали невырожденными — такими, как на рис. 197.

Можно также рассматривать функции, заданные не на плоскости, а на поверхности — ведь вблизи каждой своей точки поверхность топологически устроена так же, как плоскость.

Пример 67. Для любой точки p , принадлежащей тору T , обозначим через $f(p)$ высоту точки p над горизонтальной плоскостью Π . Эта функция имеет (при показанном на рис. 198 расположении тора) одну (точку максимума a , одну точку минимума d и две седловые точки b, c .

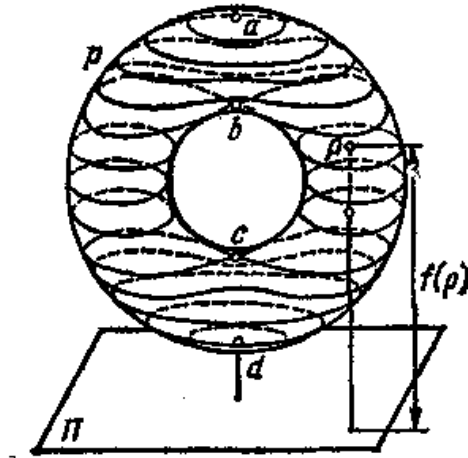


Рис.198.

Таким образом, если мы обозначим через C_0 число точек минимума, через C_1 — число седловых точек, а через C_2 — число точек максимума, то в этом примере $C_0=1, C_1=2, C_2=1$, и потому $C_0 - C_1 + C_2 = 0$.

Пример 69. Для сферы, расположенной обычным образом, та же функция $f(p)$ («высота» точек над горизонтальной плоскостью) имеет две критические точки: точку минимума («южный полюс») и точку максимума («северный полюс»). Таким образом, в этом случае $C_0=1, C_1=0, C_2=1$, т. е. $C_0 - C_1 + C_2 = 2$.

Рассмотренные примеры подводят к формулировке теоремы о критических точках, принадлежащей английскому математику Морсу. Условимся говорить, что точка минимума имеет индекс 0, седловая точка — индекс 1, а точка максимума — индекс 2. Теперь мы можем сформулировать «первую половину» теоремы Морса (для случая поверхности): *пусть на поверхности Q задана функция, имеющая только невырожденные критические точки; тогда*

$$C_0 - C_1 + C_2 = \chi(Q), \quad (22)$$

где C_0 — число критических точек индекса 0 (т. е. точек минимума), C_1 — число критических точек индекса 1 (седел), C_2 — число критических точек индекса 2 (точек максимума).

В самом деле, функция f определяет на поверхности Q *линии уровня* (вдоль каждой из которых функция f принимает постоянное значение). Кроме того, можно на Q наметить *линии наискорейшего спуска*, вдоль которых функция f наиболее быстро убывает; они перпендикулярны

линиям уровня. Векторы, касающиеся линий наискорейшего спуска, образуют векторное поле на поверхности Q . В точках, не являющихся критическими, это векторное поле не имеет особенностей. На рис. 199 показан вид векторного поля вблизи точки минимума (a), седловой точки (b), точки максимума (c).

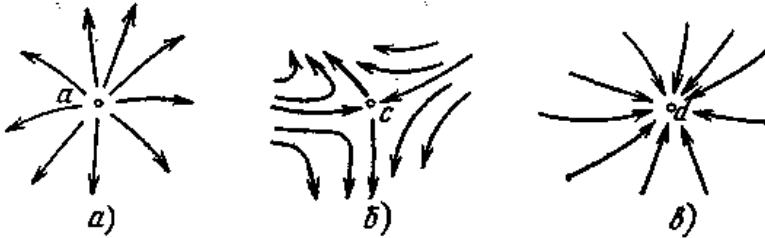


Рис. 199.

Легко проверяется, что $j = (-1)^k$, где j — индекс особенности векторного поля, а k — индекс критической точки (см. рис. 89). Следовательно, рассматриваемое векторное поле имеет C_0 особенностей с индексом $+1$ (минимумы), C_1 особенностей с индексом -1 (седловые точки) и еще C_2 особенностей с индексом $+1$ (максимумы). Из теоремы Пуанкаре о векторных полях теперь следует справедливость формулы (22) для любой замкнутой ориентируемой поверхности.

Задачи

210. Докажите, что формула (22) справедлива и для любой замкнутой неориентируемой поверхности.

211. Докажите, что если на поверхности P_k задана функция, все критические точки которой невырождены, то число критических точек не меньше $2k + 2$.

Рассмотрим теперь «вторую половину» теоремы Морса: пусть на поверхности Q задана функция, имеющая только невырожденные критические точки; тогда

$$C_0 \geq p_0(Q), \quad C_1 - C_0 \geq p_1(Q) - p_0(Q). \quad (23)$$

Для доказательства продолжим предыдущие рассуждения. Будем считать, что значения, которые функция f принимает в критических точках, попарно различны. Мы можем считать критические точки a_1, \dots, a_q перенумерованными таким образом, что $f(a_1) > f(a_2) > \dots > f(a_q)$.

Вблизи a_1 (точки наибольшего максимума, рис. 200, а) линии уровня замкнуты и окружают точку a_1 . Разрезав поверхность по одной из этих линий, мы получим двумерную клетку τ_1 и остаток Q (рис. 200, б).

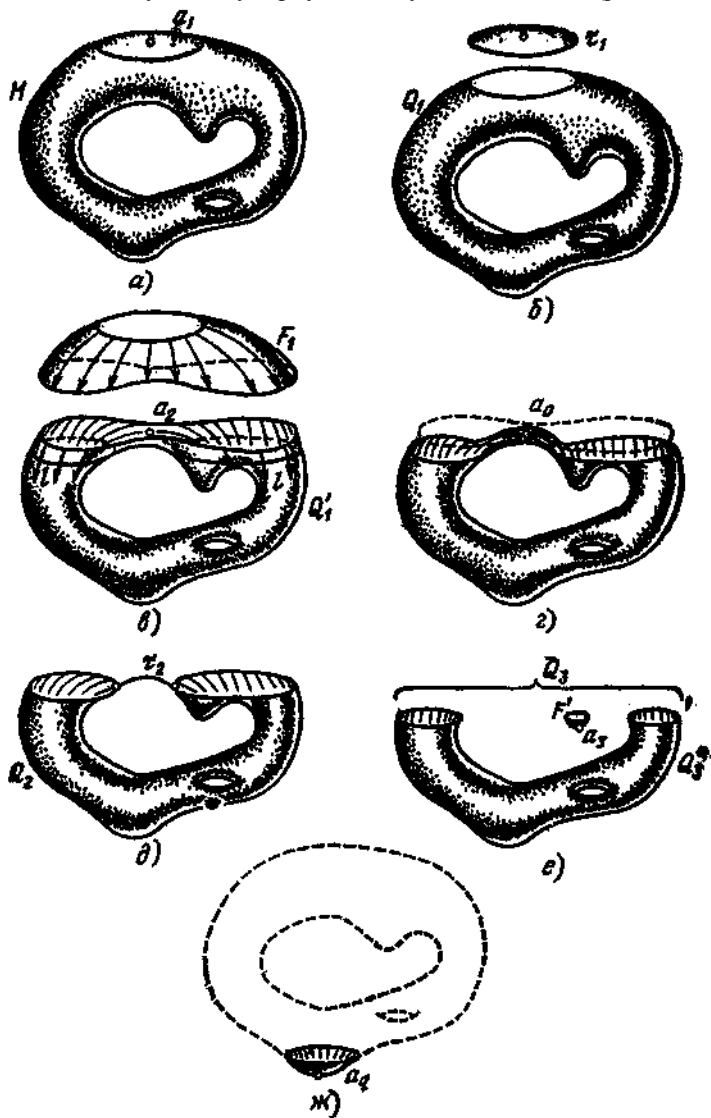


Рис. 200.

Теперь упростим фигуру Q_1 . Для этого рассмотрим линию уровня, проходящую чуть выше точки a_2 , и отрезем от Q_1 часть F_1 , расположенную выше этой линии уровня (рис. 200, в). Оставшуюся часть поверхности обозначим через Q'_1 . Так как между a_1 и a_2 критических точек нет, то вся часть F_1 заполнена «параллельно идущими» линиями наискорейшего спуска, и по этим линиям можно F_1 «сдвинуть» вниз в Q'_1 . Так как при этом сдвиге (как и при всякой гомотопии) любой цикл переходит в гомологичный, то фигура Q_1 имеет те же гомологии, что и Q'_1 .

Рассмотрим линию уровня l , проходящую чуть ниже точки a_2 , и обозначим через Q_2 часть поверхности, лежащую ниже этой линии. Пусть, например, a_2 является седлом. Мы можем сдвинуть (по линиям наискорейшего спуска) Q'_1 в Q_2 — всюду, за исключением окрестности точки a_2 (рис. 200, з). Затем можно сжать оставшуюся «перемычку» в одномерную клетку τ_2 , приклеенную к Q_2 (рис. 200, д). Эти деформации не изменяют гомологии. Следовательно» первоначальная поверхность Q имеет те же гомологии, что и фигура, получающаяся из Q_2 приклеиванием одномерной клетки τ_2 (соответствующей седлу), а затем двумерной клетки τ_1 (соответствующей максимуму).

Далее мы сдвинем Q_2 в часть Q'_2 , лежащую ниже линии уровня, проходящей чуть выше точки a_3 . Если a_3 есть точка минимума, то оставшаяся вблизи точки a_3 часть F' поверхности (т. е. круг) имеет те же гомологии, что и точка, т. е. нульмерная клетка τ_3 (рис. 200, е). Обозначив фигуру, получающуюся из Q_2 отбрасыванием куска F' , через Q'_3 , мы находим, что первоначальная поверхность Q имеет те же гомологии, что и фигура, получающаяся из Q'_3 добавлением нульмерной клетки τ_3 , одномерной τ_2 , двумерной τ_1 .

В конце концов, мы оставим от первоначальной поверхности последнюю точку минимума a_q (рис. 200, ж). Идя обратным путем, мы найдем, что фигуру, имеющую те же гомологии, что и поверхность Q , можно получить последовательным приклеиванием клеток: каждой точке минимума соответствует нульмерная клетка, седлу — одномерная клетка, а максимуму — двумерная. Иначе говоря, Q имеет те же гомологии, что и некоторый полиэдр, содержащий C_0 нульмерных, C_1 одномерных и C_2 двумерных клеток. Из этого и вытекает справедливость неравенств (23) (см. задачу 194).

Задачи

212. Докажите, что соотношения (22), (23) справедливы для чисел Бетти по любому простому модулю p .

213. Докажите, что $C_r \geq p_r(Q)$, $r = 0, 1, 2$.

Заметим в заключение, что можно рассматривать функции и на «многомерных поверхностях» (в задачах 190, 192 и примерах 57, 58 рассматриваются «трехмерные поверхности»). На n -мерной «поверхности» Q имеется $n+1$ типов невырожденных критических точек (в формулах, аналогичных (21), может быть в правой части 0, 1, . . . , n минусов). Теорема Морса (и рассмотренное ее доказательство) сохраняются и в этом случае. Например, неравенства (23) принимают вид

$$\sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} C_k \geq \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} P_k(Q), \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

2.3.11. Использование топологических методов в физике

Многие математические понятия или даже целые теории, появившись на свет, долгие годы живут, не имея приложений вне самой математики. В качестве примера достаточно вспомнить историю с загадочными комплексными числами, вошедшими в физику и технику спустя несколько столетий после своего открытия. Хорошим примером подобного рода до недавнего времени могла служить и топология. Однако в течение последнего десятилетия в нескольких довольно далеких друг от друга областях физики возник ряд задач, получивших свою адекватную формулировку и решение на языке топологии, что позволило значительно продвинуться в соответствующих разделах физики.

Наглядную иллюстрацию к сказанному дает биофизика полимеров, имеющая дело с гигантскими молекулами белков и нуклеиновых кислот. Рассматривая положения, которые молекула может занимать в пространстве, мы сталкиваемся с ограничениями топологической природы. В самом деле, чисто математически длинная замкнутая молекула представляет собой замкнутую линию. Мы знаем, что такие линии образуют узлы. Различные узлы нельзя продеформировать друг в друга без разрыва линии и последующего склеивания концов. Условие неразрывности линий обеспечено тем, что для создания разрыва необходимо разорвать химические связи в данной точке полимерной цепи. Энергетические затраты такого процесса довольно значительны. Поэтому при достаточно низкой температуре вероятность разрывов мала и молекулы полимера могут существовать в состоянии с данной узельной конфигурацией практически неограниченно долго. Важный вопрос, какая часть

молекул из общего числа молекул заданной длины обладает определенной узельной конфигурацией, решается на основе перечисления типов топологически различных узлов, известном из алгебраической топологии.

В биофизике полимеров сами длинные молекулы образуют топологические объекты — узлы. В других областях физики мы приходим к объектам, обладающим топологическими свойствами, уже не столь непосредственным образом. Так, в теории поля фигурируют частицы, математически описываемые векторными полями, с топологическими особенностями. В физике конденсированного состояния с топологией оказалась связана устойчивость ряда дефектов структуры **упорядоченных веществ**: обычных и жидких кристаллов, сверхпроводников, сверхтекучих жидкостей и ферромагнетиков. Ниже мы познакомимся с простейшим веществом, устойчивостью дефектов которого имеет топологическую природу. Это нематический жидкий кристалл, часто называемый просто «нематик». Необходимые математические понятия: индекс векторного поля, фундаментальная группа, степень отображения и др., разъясняются весьма бегло. Точные определения и комментарии к ним можно найти в основном тексте книги.

2.3.11.1. Нематик

Нематический жидкий кристалл состоит из удлинённых молекул, взаимодействие между которыми стремится выстроить их параллельно друг другу. При высоких температурах тепловое движение препятствует этому и вещество представляет обычную жидкость (рис. 201, *a*).

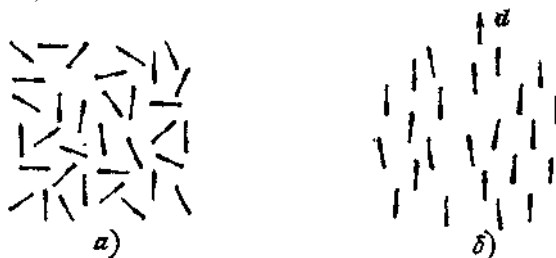


Рис. 201.

При температурах ниже некоторой критической (типичные значения температур перехода для нематиков порядка нескольких десятков градусов Цельсия) в жидкости появляется выделенное направление, 282

вдоль которого преимущественно ориентированы оси молекул. При этом, как и в обычной жидкости, распределение центров тяжести молекул нематика остается хаотическим (рис. 201, б). Небольшие отклонения осей молекул от параллельного друг другу направления связаны с тепловыми колебаниями. Математически направление преимущественной ориентации описывается с помощью единичного вектора d , называемого *директором*. Особое название вектора d связано с тем, что, хотя концы длинных молекул отличаются друг от друга, но их расположение неупорядоченно (см. рис. 201, б) и состояния нематика с противоположными направлениями вектора d (d и $-d$) физически неразличимы. Другими словами, векторы d можно представлять не как стрелочки, а как палочки, задающие лишь направление (direction), но не его знак.

Из-за влияния стенок сосуда и внешних полей (например, магнитного) состояния нематика всегда неоднородны. Это значит, что направление директора d постепенно меняется от точки к точке. Распределение d в пространстве называется *векторным полем* единичного вектора d .

2.3.11.2. Дисциплинации в тематике

Благодаря сильному рассеянию света нематический жидкий кристалл выглядит как мутная непрозрачная жидкость. Если разглядывать ее в микроскоп, то можно заметить длинные тонкие нити, плавающие в жидкости. Именно они и дали название этому типу жидких кристаллов (нема — по-гречески «нить»). Еще в начале XX века исследователи понимали, а теперь это твердо установленный факт, что нити в нематиках — не посторонние вкрапления, а особенности в расположении молекул.

В самом деле, в поле направлений директора d возможны особые линии, на которых направление d не определено (разрывно). Такие распределения d проще всего изобразить в случае плоских векторных полей, т. е., когда все векторы d в пространстве параллельны некоторой плоскости (см. рис. 202, где поле директора показано черточками).

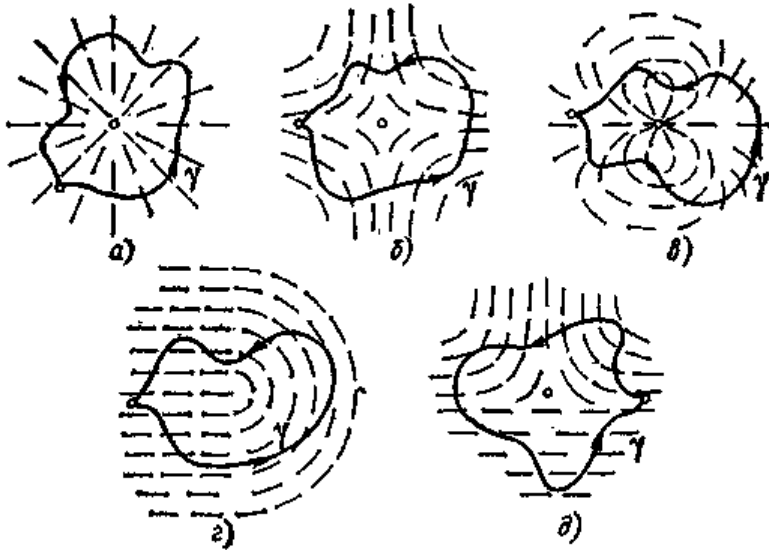


Рис. 202.

Известно, что особые точки векторных полей на плоскости характеризуются *индексами особой точки*, — числом ν полных оборотов в положительном направлении, совершаемых вектором d при обходе особой точки по замкнутому контуру γ . Так, особой точке, изображенной на рис. 202, *а*, соответствует индекс $\nu = 1$, на рис. 202, *б* — $\nu = -1$, на рис. 202, *в* — $\nu = 2$. Как мы помним, состояния, отличающиеся только знаком d , неразличимы, поэтому возможны особые точки, при обходе которых по замкнутому контуру γ вектор d совершает полуцелое число оборотов. Так, индекс особых точек, изображенных на рис. 202, *г* и *д*, равен соответственно $1/2$ и $-1/2$. Особые точки на рис. 202 представляют собой выход в плоскость рисунка особой линии в поле направлений d . Если взглянуть на особую линию рис. 202, *а* не «сверху», а «сбоку», то распределение d будет выглядеть, как показано на рис. 203, *а*. По предложению английского физика Франка линии разрыва в пояе направлений директора были названы *дисклинациями*.

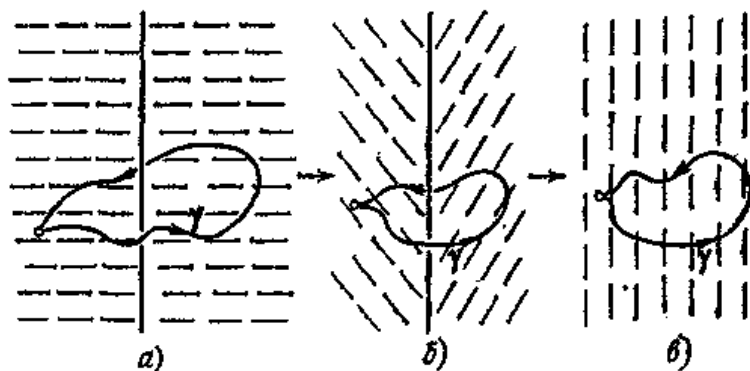


Рис. 203.

Так как взаимодействие между молекулами стремится выстроить их параллельно, наличие особых линий в распределении d энергетически невыгодно. Следовательно, в нематике должны возникать деформации распределения d , стремящиеся устранить особенности и перевести распределение в однородное, обладающее наинизшей энергией. Как это может произойти, легко увидеть на примере дисклинации, изображенной на рис. 203, *a*. Действительно, деформация, показанная на последовательности рисунков 203, *a* — *e*, переводит распределение в однородное, не обладающее никакими особенностями. Эта деформация поля d , напоминающая складывание зонтика, получила название «вытекание в третье измерение», так как направления d , первоначально лежащие в плоскости рис. 202, *a*, выстраиваются в перпендикулярном ей направлении (рис. 203, *в*). Таким образом, мы видим, что дисклинация, изображенная на рис 202, *a*, 203, *a*, неустойчива по отношению к вытеканию в третье измерение. Спрашивается, устойчивы ли другие дисклинации? Как сформулировать признак, позволяющий отличать устойчивые дисклинации от неустойчивых? Разумеется, любую дисклинацию можно уничтожить, создавая разрывы в поле директора, как это показано на последовательности рисунков 204, *a* — *в*.

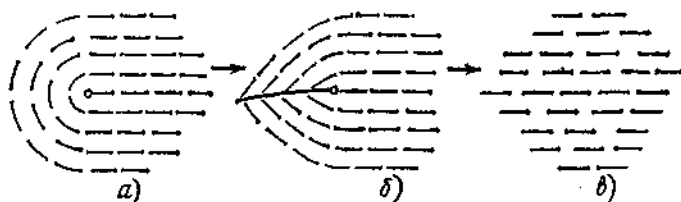


Рис. 204.

Заметим, однако, что в окрестности разрыва молекулы будут упорядочены не параллельно, как в нематике, а под углом друг к другу, как в обычной жидкости. Значит, создание такого разрыва эквивалентно плавлению нематического порядка на целой полуплоскости, опирающейся на особую линию, что требует больших затрат энергии. Иначе говоря, этот процесс обладает колоссальным энергетическим барьером. Поэтому при исследовании устойчивости дисклинаций необходимо сразу ограничиваться лишь непрерывными деформациями поля d . Раз так, здесь может оказаться полезной топология.

2.3.11.3. Дисклинации и топология

Пусть в объеме, заполненном нематиком, имеется какое-то распределение векторов d . Иными словами, каждой точке r нашего объема поставлен в соответствие вектор d — задано векторное поле $d(r)$. Возьмем векторы d из разных точек объема и перенесем параллельно самим себе так, чтобы они начинались из одной точки (рис. 205, а и б).

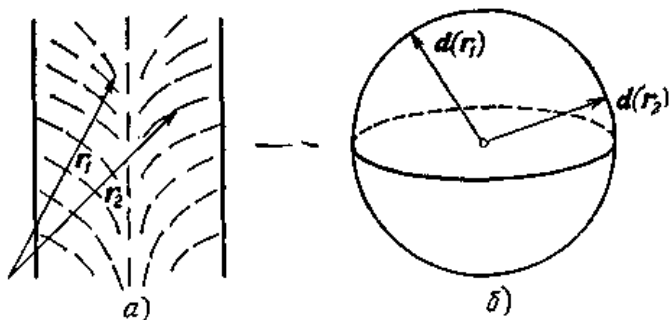


Рис. 205.

Тогда их концы будут лежать на поверхности сферы единичного радиуса, которая тем самым является областью изменения векторов d . Таким образом, мы получаем, что векторное поле $d(r)$ осуществляет отображение точек r нашего объема в точки на поверхности сферы единичного радиуса.

Заметим теперь, что сфера, по которой бегают концы вектора d , не совсем обычная. В самом деле, d не простой вектор, а вектор-директор, и состояния d и $-d$ физически неотличимы. Это значит, что

диаметрально противоположные точки сферы эквивалентны или, как говорят в топологии, сфера склеена своими диаметрально противоположными точками. Такая сфера называется *проективной плоскостью* и обозначается RP^2 . Разумеется, представить результат склеивания диаметрально противоположных точек сферы в трехмерном пространстве невозможно, да и не нужно; достаточно лишь помнить, что точки d и $-d$ — это не две разные, а одна и та же точка. Итак, векторное поле $d(r)$ осуществляет отображение точек r координатного пространства в точки проективной плоскости RP^2 . Посмотрим теперь, какое отношение имеет склейка к вопросу об устойчивости дисклинаций в нематике.

Пусть в поле директора $d(r)$ имеется дисклинационная линия L , т. е. линия, на которой поле $d(r)$ терпит разрыв (рис. 206, а).

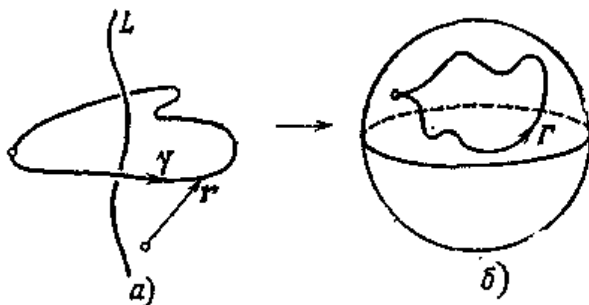


Рис. 206.

Окружим ее замкнутым контуром γ . Каждая точка r этого контура имеет своим образом точку $d(r)$ на поверхности RP^2 , а весь замкнутый контур γ отображается в замкнутый контур Γ на поверхности RP^2 (рис. 206, б). Очевидно, что любой непрерывной деформации поля $d(r)$ в окрестности контура γ соответствует деформация контура Γ на поверхности RP^2 . В частности, деформация распределения $d(r)$, названная вытеканием линии в третье измерение (см. рис. 203), сопровождается стягиванием контура Γ на поверхности RP^2 в точку (рис. 207, а — в).

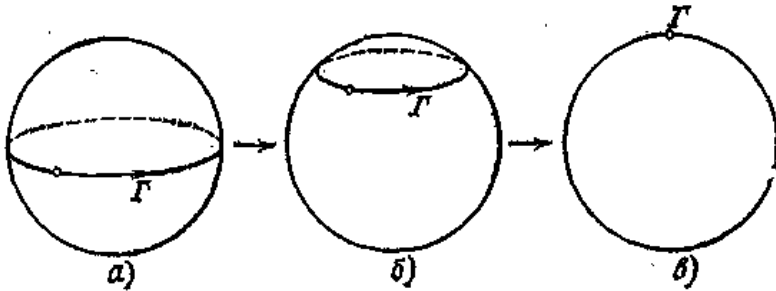


Рис. 207.

Понятно, что и в общем случае устранимым (неустойчивым) дисклинациям на поверхности RP^2 соответствуют контуры Γ , стягиваемые в точку. Будем обозначать класс таких контуров, а вместе с ним и дисклинаций, символом Γ_0 . Легко сообразить, что для плоских полей к этому классу относятся все дисклинации с целым индексом ν векторного поля $d(r)$ (см. рис. 202, а — в). Все контуры класса Γ_0 , а значит, и все векторные поля дисклинаций этого класса можно непрерывно продеформировать друг в друга.

С другой стороны, в нематиках имеются дисклинации, изображенные, например, на рис. 202, г, д, такие, что образами окружающих их контуров ν являются контуры типа $\Gamma_{1/2}$, соединяющие диаметрально противоположные точки сферы (рис. 208).

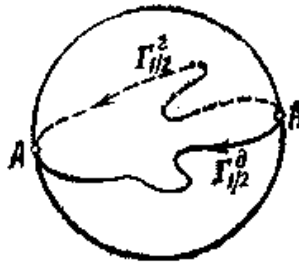


Рис. 208.

Мы знаем, что такие точки эквивалентны, а значит, контуры $\Gamma_{1/2}$ замкнуты. В отличие от контуров типа Γ_0 , контуры $\Gamma_{1/2}$ невозможно стянуть в точку по поверхности RP^2 . В этом отношении контуры типа $\Gamma_{1/2}$ напоминают контуры, оббегающие дырку у бублика. Это легко себе представить, деформируя и склеивая сферу только в двух

диаметрально противоположных точках A — начала и конца контура $\Gamma_{1/2}$.

Контур типа $\Gamma_{1/2}$ невозможно стянуть в точку, зато их можно продеформировать друг в друга. Дисклинации, изображенные на рис. 202, ε , δ , устойчивы. Соответствующие им распределения невозможно превратить в однородные никакой непрерывной деформацией поля $d(r)$, хотя легко преобразовать друг в друга. Полезно самостоятельно продеформировать поле рисунка 202, ε в поле рисунка 202, δ , для чего предварительно сделать деформацию соответствующих контуров $\Gamma_{1/2}$ на RP^2 , изображенных на рис. 208.

Подчеркнем, что существование замкнутых контуров $\Gamma_{1/2}$, не стягиваемых в точку, а значит, и топологически устойчивых дисклинаций, является исключительно следствием эквивалентности диаметрально противоположных точек d и $-d$. На обычной сфере без всяких склеек любой замкнутый контур можно стянуть в точку и, следовательно, если бы состояния d и $-d$ были отличимы, то в таком веществе (изотропный ферромагнетик) вообще не было бы устойчивых особых линий. Сфера и RP^2 локально (в окрестности каждой точки) эквивалентны, но глобально (в целом) имеют разные топологические свойства!

Итак, с точки зрения топологии в нематическом жидком кристалле имеется всего два типа линий дисклинаций: характеризующихся на проективной плоскости замкнутыми контурами типа Γ_0 , стягиваемыми по ней в точку, либо замкнутыми контурами типа $\Gamma_{1/2}$, не стягиваемыми по ней в точку. Устойчивые линии типа $\Gamma_{1/2}$ не могут заканчиваться внутри объема с нематиком. Они либо замкнуты, либо выходят на поверхность. Докажем это утверждение от противоположного. Если бы они могли заканчиваться в объеме, то тогда с них можно было бы снять и стянуть в точку охватывающий их контур γ , а значит, стянулся бы в точку и его образ $\Gamma_{1/2}$ на проективной плоскости, что невозможно для контуров типа $\Gamma_{1/2}$. Напротив, неустойчивым линиям топология не запрещает заканчиваться внутри объема, однако отрезкам особых линий энергетически выгодно сокращать свою длину и они или исчезают совсем, или, если они одним концом прикреплены к поверхности, сжимаясь, превращаются в поверхностную особую точку. Линии дисклинации взаимодействуют между собой, и в случае притяжения две линии могут, например, сливаться в одну. Каков будет результат слияния? Получится ли из двух устойчивых вновь устойчивая линия или она будет неустойчивой и исчезнет, т. е. исходные линии аннигилируют? Топология дает ответ и на этот

вопрос. На проективной плоскости образом контура $\psi = \gamma_1 + \gamma_2$ (см. рис. 209, а), охватывающего сразу две линии типа $\Gamma_{1/2}$, будет контур $\Gamma_{1/2}$, проходимый дважды, что обозначается как произведение $\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_{1/2}$. Как явствует из рис. 209, б, такой контур эквивалентен контуру Γ_0 и, следовательно, стягиваем в точку.

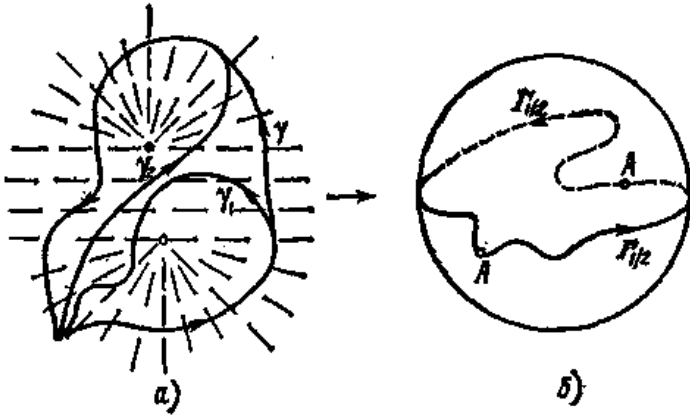


Рис. 209.

Это означает, что две устойчивые дисклинации, сливаясь, превращаются в неустойчивую дисклинацию типа Γ_0 , т. е. аннигилируют. В сказанном можно убедиться и непосредственно, деформируя распределение $d(r)$, изображенное на рис. 209, а, в распределение рис. 202, а. Напротив, слияние устойчивой и неустойчивой дисклинации всегда дает устойчивую, что можно коротко записать как $\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_0 = \Gamma_0 \cdot \Gamma_{1/2} = \Gamma_0$.

Сформулированные законы умножения означают, что множество классов контуров на RP^2 , состоящее из двух элементов Γ_0 и $\Gamma_{1/2}$, образует группу $\pi_1(RP^2)$, называемую *фундаментальной группой* проективной плоскости. Умножение элементов в этой группе можно заменить эквивалентным ему сложением индексов у контуров, при условии, что все целые числа эквивалентны нулю:

$$\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_{1/2} = \Gamma_0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0; \quad \Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_0 = \Gamma_{1/2} \rightarrow \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

2.3.11.4. Особые точки

Кроме особых линий в поле вектора $d(r)$, в объеме, занимаемом нема-
тиком, возможны особые точки — точки разрыва в поле $d(r)$.

Простейшим примером такой точки является точка, вокруг которой направления вектора d совпадают с направлениями радиус-вектора, отложенного из этой точки $d(r) = \frac{r}{|r|}$. Векторы $d(r)$, торчащие во все стороны вокруг особой точки, напоминают иголки свернувшегося в клубок ежа, поэтому эта особая точка получила название *еж*. Устойчив ли еж? Иными словами, можно ли путем непрерывной деформации поля $d(r)$ устранить эту особую точку и превратить поле $d(r)$ в однородное? Для ответа на этот вопрос окружим особую точку сферой σ . Образом сферы σ на RP^2 будет вся поверхность RP^2 , проходимая один раз. Таким образом, поле $d(r)$ вокруг ежа осуществляет *отображение степени единица* сферы σ на RP^2 . Будем непрерывно деформировать поле $d(r)$ — «причесывать» ежа. При этом образ сферы σ , который можно представлять как замкнутую пленку (т. е. пленку без края), обтягивающую RP^2 , будет также деформироваться и образовывать окладки. Но стянуть эту пленку в точку, оставаясь на RP^2 , нам не удастся, а значит, и не удастся устранить особую точку в поле $d(r)$. Степень отображения — топологический инвариант.

В общем случае, для исследования произвольной особой точки в поле $d(r)$ на устойчивость, надо окружить ее сферой σ и проследить за ее образом на RP^2 . Всем устойчивым особым точкам соответствуют пленки — образы σ на RP^2 , целое число раз окутывающие проективную плоскость. Неустойчивым особым точкам соответствуют замкнутые пленки, стягиваемые по RP^2 в точку с степенью отображения $N = 0$. Устойчивые особые точки, как и устойчивые особые линии, можно устранить только путем создания разрывов в поле $d(r)$, что требует преодоления колоссального энергетического барьера. Мы рассматривали такой процесс в случае особой линии (см. рис. 204). В отличие от особой линии, для устранения устойчивой особой точки необходимо создать разрыв в поле $d(r)$ на выходящей из нее линии.

Степень отображения — целочисленный индекс. Возникает вопрос: чем отличаются ежи, имеющие степень разного знака, например, ежи с $N = 1$ и $N = -1$. Они должны отличаться направлением иголок, т. е. разной ориентацией пленок — образов сферы σ . В первом случае иголки торчат наружу, а во втором — внутрь. Но мы знаем, что противоположные направления $d(r)$ неотличимы. Поэтому ежи с $N = 1$ и $N = -1$ — это одна и та же особая точка с $|N| = 1$. С другой стороны, слияние двух ежей, казалось бы, должно приводить к сложению индексов, и значит, если мы сложим два ежа с индексами $|N_1| = 1$ и $|N_2| = 1$, мы можем получить как ежа с индексом 2, так и ежа

с индексом 0, т. е. устранимую (неустойчивую) особую точку. Такое поведение кажется невероятным. А что же будет на самом деле?

Реальный процесс слияния ежей дает результат, зависящий от пути слияния! Этот факт следует из нетривиальности фундаментальной группы тематического жидкого кристалла $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$. В топологии его называют *влиянием щ.* Например, слияние особых точек с $|N_1| = 1$ и $|N_2| = 1$ может происходить вдоль путей γ и $\tilde{\gamma}$, проходящих по разные стороны от линии устойчивой дисклинации. На рис. 210, а тонкими линиями показаны линии поля $d(r)$, линия дисклинации перпендикулярна плоскости рисунка и обозначена буквой O .

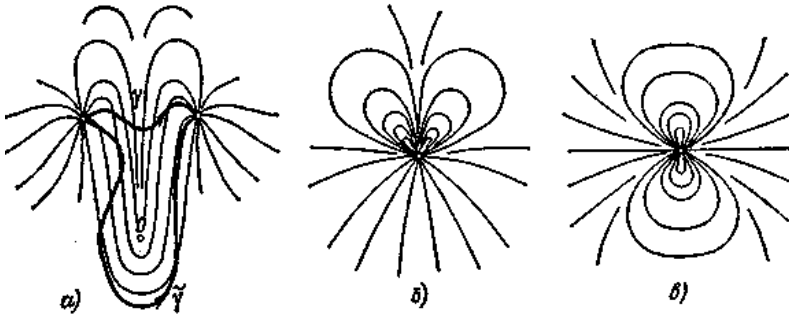


Рис. 210.

Очевидно, слияние вдоль пути γ дает точечную особенность с $|N|=2$, изображенную на рис. 210, б. Обратим внимание, что распределение поля на рис. 210, б не имеет оси симметрии, а только плоскость симметрии, перпендикулярную плоскости рисунка. Слияние ежей вдоль пути $\tilde{\gamma}$ дает точечную особенность с $|N| = 0$, которая показана на рис. 210, в. Здесь распределение $d(r)$ аксиально симметрично относительно горизонтальной оси, проходящей в плоскости рисунка.

Итак, наличие дисклинации в поле $d(r)$ приводит к неоднозначности результата слияния ежей. Разумеется, неоднозначность имеет место только в присутствии топологически устойчивых дисклинаций, соответствующих нетривиальным элементам фундаментальной группы.

Мы видели, что топологические свойства замкнутых контуров и пленок на проективной плоскости дают возможность проанализировать ряд вопросов, связанных с устойчивостью и слиянием дисклинаций и особых точек в тематическом жидком кристалле. Кроме особенностей поля $d(r)$, топология дает возможность расклассифицировать устойчивые неособые конфигурации поля $d(r)$ —

доменные стенки и солитоны, возникающие в поле $d(r)$ в присутствии внешних электрических и магнитных полей.

Нематик не одинок. Существует целый обширный класс упорядоченных веществ: обычные и жидкие кристаллы всех типов, ферро- и антиферромагнетики, сегнетоэлектрики, сверхпроводники и сверхтекучие жидкости, при изучении которых оказываются полезными топологические методы. Поведение особенностей в нематике определялось топологическими свойствами области изменения директора d — проективной плоскости RP^2 . В других упорядоченных веществах реализуются другие типы полей: поля векторов, поля матриц и, соответственно, другие области D изменения параметра порядка. Фундаментальная группа π_1 , вообще говоря, некоммутативна. Из существующих в природе веществ некоммутативную фундаментальную группу $\pi_1(D)$ имеет лишь двухосный (нематический жидкий кристалл, с которым имели дело мы, — одноосный нематический жидкий кристалл) нематический жидкий кристалл. Некоммутативность $\pi_1(D)$ приводит к ряду красивых, но пока еще экспериментально не обнаруженных следствий.

Наиболее впечатляющие приложения топологии появились в связи с открытием в 1972 г. сверхтекучих фаз легкого изотопа гелия — ^3He . Оказалось, что сами сверхтекучие свойства этих фаз в значительной мере диктуются топологией. Об этих свойствах, а также многих других приложениях топологии в физике можно прочесть в работах Г. Е. Воловика и В. П. Минеева.

3. ТОПОЛОГИЯ ОБОЛОЧЕК

3.1. Топологические объекты

Моделирование окружающих нас предметов требует привлечения более сложных геометрических объектов, чем точки, кривые и поверхности. Одной поверхностью в общем случае невозможно описать геометрическую форму некоторого заданного предмета, но это можно сделать с помощью нескольких поверхностей, связав их определенным образом. То, каким образом поверхности будут связаны друг с другом, составляет дополнительную информацию, которой мы снабдим новые объекты, построенные на основе уже рассмотренных геометрических объектов. Нашей целью является получение геометрической модели окружающих предметов. Все эти предметы занимают некоторую часть пространства, или, другими словами,

занимают конечный объем пространства. Для их моделирования нужно описать совокупность поверхностей, отделяющих внутренний объем предмета от остальной части пространства. Для этого потребуется набор определенным образом построенных и обрезанных поверхностей и информация о взаимной связи этих поверхностей — как одна поверхность переходит в другую.

Оболочки.

Поверхности могут быть замкнутыми по одному или двум параметрическим направлениям или незамкнутыми. Незамкнутые поверхности имеют границу. Границей будем называть линию на поверхности, соответствующую движению ее параметров по границе их области определения. Линию на замкнутой поверхности, по которой она замыкается сама на себя, будем называть швом. Поверхности могут стыковаться друг с другом по границам. Можно сказать, что по шву замкнутая поверхность стыкуется сама с собой. Совокупность стыкующихся по границам поверхностей будем называть оболочкой. Оболочка может состоять из одной поверхности или нескольких поверхностей. Также как и отдельная поверхность, оболочка может быть замкнутой и незамкнутой. Замкнутая оболочка не имеет границы. Незамкнутая оболочка имеет одну или несколько границ.

В предыдущих главах мы исследовали геометрические свойства кривых и поверхностей путем определения их количественных характеристик (длин и углов). В данной главе нас будут интересовать свойства геометрических объектов, не зависящие от количественных характеристик. Мы будем рассматривать непрерывную связь между точками геометрических объектов. Предположим, что оболочка выполнена из эластичного неразрываемого и не склеиваемого материала. Исследуем свойства этой оболочки, которые сохраняются при всевозможных ее деформациях. Деформацией будем называть изменение формы оболочки путем растяжения, сжатия, сдвига или изгиба ее поверхности, не приводящее к разрывам и не требующее склеивания поверхностей оболочки. Эластичная оболочка в виде куба может быть деформирована в сферу, или эллипсоид, или оболочку в виде тетраэдра, но не может быть деформирована в тороидальную оболочку.

Сфера, эллипсоид, оболочка в виде тетраэдра или куба могут быть преобразованы друг в друга путем непрерывных и обратимых

отображений. Свойства геометрических объектов, сохраняющиеся при непрерывных и обратимых отображениях одного пространства в другое, изучает топология. С топологической точки зрения сфера, эллипсоид, оболочка в виде тетраэдра или куба эквивалентны. Свойства, характеризующие непрерывность точек некоторой оболочки, являются топологическими свойствами. Несмотря на кажущуюся неопределенность, топологические свойства геометрических объектов связаны с фундаментальными математическими понятиями.

Топология изучает общий случай оболочек, которые могут самопересекаться, иметь или не иметь границы, уходить в бесконечность. Топология оперирует своими объектами, которые несут информацию о их взаимной связи друг с другом, и устанавливает между ними соотношения. При моделировании окружающих нас объектов мы будем строить оболочки из топологических объектов. Они будут нести и количественную геометрическую информацию и топологическую информацию. Количественная геометрическая информация топологического объекта содержится в его геометрическом носителе, которым может являться точка, кривая или поверхность. В данной главе мы сосредоточим внимание на топологических свойствах моделируемых объектов.

Вершины, ребра, циклы, грани.

Рассмотрим оболочки, построенные на основе поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Для отслеживания связей составляющих оболочку поверхностей дополним поверхности информацией об этих связях и введем топологические объекты. Топологические объекты будут нести одновременно метрическую и топологическую информацию.



Рис. 1.1. Топологические объекты

Одним из топологических объектов является оболочка. При построении оболочки будем использовать такие топологические объекты, как грани, ребра, вершины и циклы (рис. 3.1). Все топологические объекты имеют общие принципы построения.

Гранью будем называть топологический объект, построенный на основе поверхности. Фактически грань представляет собой поверхность плюс информация о том, какая сторона поверхности является наружной стороной грани, и информация об ее положении в оболочке, т. е. информация об ее соседях. Информация о соседних гранях оформляется в виде циклов.

Цикл — это топологический объект, который описывает одну из границ грани, и содержит информацию о том, где и как к данной грани примыкают соседние грани. Так как вдоль одного цикла к данной грани могут примыкать несколько соседних граней, то цикл состоит из нескольких участков. Каждый участок цикла опирается на некоторое ребро.

Ребром будем называть топологический объект, построенный на основе линии стыковки соседних граней или на основе граничной линии оболочки. Грани стыкуются только по ребрам. Таким образом, каждая грань со всех сторон окружена ребрами. Вершиной будем называть топологический объект, построенный на основе точки, в которой стыкуются ребра. Вершины могут лежать только на краях ребер. Каждое ребро начинается и оканчивается в вершине. Если ребро замкнуто, то оно начинается и оканчивается в одной и той же вершине. Цикл состоит из ребер, образующих замкнутую линию вдоль одной из границ грани. Цикл всегда замкнут и ему приписывается определенное направление. Грань может содержать несколько циклов, причем один из них является внешним, а остальные — внутренними и целиком лежащими внутри внешнего цикла. За положительное направление цикла примем направление движения вдоль цикла, при котором грань всегда находится слева, если смотреть с наружной стороны грани.

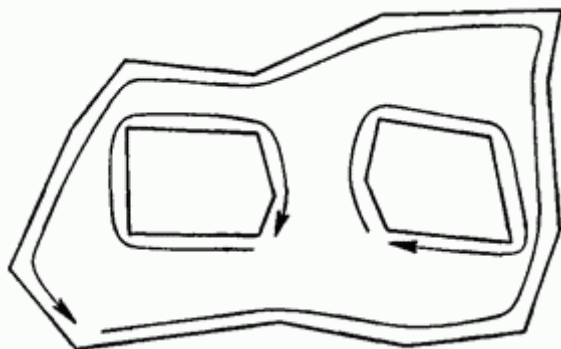


Рис.1.2. Ориентация внешнего и внутренних циклов грани

Таким образом, внешний цикл грани ориентирован против часовой стрелки, а внутренние циклы ориентированы по часовой стрелке, если смотреть с наружной стороны грани. Каждый цикл проходит по одной из границ поверхности. На рис. 5.1.2 приведен пример грани с ее циклами.

Грани, ребра и вершины строятся на базе известных геометрических объектов (точек, кривых и поверхностей) добавлением к ним информации о своих соседях и о взаимной ориентации. В результате геометрические объекты приобретают новое качество, чем и обусловлено введение топологических объектов.

3.2. Эйлерова характеристика оболочек

Топологические свойства оболочки могут быть выражены через количество ее граней, ребер, вершин и циклов. Пусть оболочка содержит F граней, E ребер, V вершин и L циклов. Число вершин, ребер, граней и циклов оболочки связаны между собой соотношением

$$F - E + V + (F - L) = H, \quad (2.1)$$

где величина H называется эйлеровой характеристикой оболочки. Формула (5.2.1) носит имя формулы Эйлера. Если каждая грань оболочки имеет один цикл, то $F-L=0$ и слагаемое в скобках в левой части (5.2.1) может быть опущено. Одну и ту же оболочку можно

построить из различного набора граней. Например, сферическую оболочку можно построить из двух полусфер или из нескольких сферических сегментов подобно футбольному мячу. Как будет видно далее, эйлерова характеристика оболочки не зависит от числа и формы составляющих ее граней, но зависит от природных характеристик оболочки, которые изучает топология.

Рассмотрим, как изменяется эйлерова характеристика оболочки при изменении составляющих ее элементов. Для этого будем изменять состав граней, ребер и вершин некоторого фрагмента оболочки, не изменяя состава остальной части оболочки.

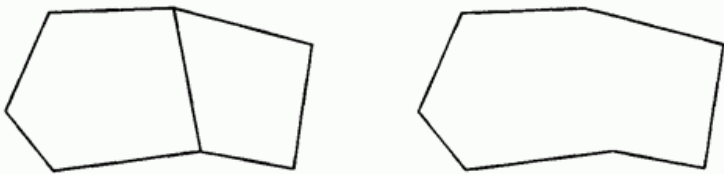


Рис. 2.1. Эйлерова характеристика не изменяется при ликвидации ребра оболочки

При желании оболочкой можно считать только показанный на рисунках фрагмент. На рис. 2.1 показан фрагмент оболочки, у которого ликвидируется одно ребро. Из рисунка видно, что при ликвидации одного ребра число граней, число ребер и число циклов уменьшается на единицу, а эйлерова характеристика оболочки не изменяется.

Если объединить два ребра, ликвидировав общую для них вершину, то число ребер и вершин оболочки уменьшатся на единицу. Если разрезать ребро на две части, вставив вершину, то число ребер и вершин оболочки увеличится на единицу. Эйлерова характеристика оболочки в обоих случаях не изменится. При введении одного дополнительного ребра между существующими вершинами число граней, число циклов и число ребер увеличится на единицу.

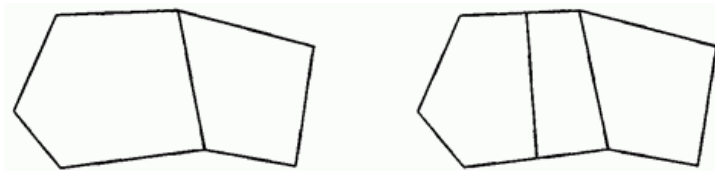


Рис. 2.2. Эйлера характеристика не изменяется при добавлении ребра в оболочку

При введении дополнительного ребра с добавлением двух новых вершин на его концах число граней и циклов увеличивается на единицу, число ребер увеличивается на три из-за деления двух существующих ребер на две части и добавления нового ребра, а эйлера характеристика оболочки не изменяется, что показано на рис. 2.2.

Эйлера характеристика оболочки не изменяется и при введении одного дополнительного ребра, соединяющего существующую вершину и новую вершину, делящую существующее ребро на два ребра.

В приведенных примерах все грани не изменяли число ограничивающих их циклов, а все новые грани имели один цикл. В общем случае грань может иметь вырезы внутри. Грань с вырезами с топологической точки зрения отличается от грани без вырезов, так как первую нельзя преобразовать во вторую путем деформирования.

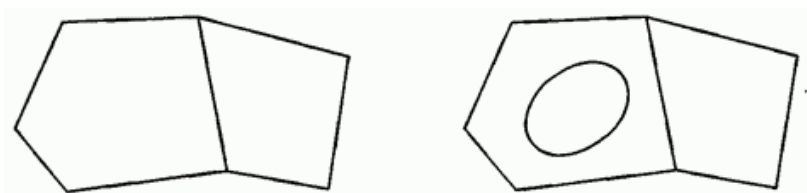


Рис. 2.3. Добавление грани и двух циклов в оболочку

Число вырезов в грани также играет существенную роль. Топологически эквивалентными являются грани, которые путем деформирования могут быть преобразованы одна в другую. Для этого грани должны иметь одинаковое число вырезов или одинаковое число

циклов. На рис. 2.3 показано добавление новой грани в оболочку путем введения замкнутого ребра, целиком лежащего внутри существующей грани.

Число граней, ребер и вершин при этом увеличится на единицу, а число циклов увеличится на два (цикл на добавленном замкнутом ребре должен быть посчитан дважды: один раз в одной грани, второй раз — в другой грани). Эйлера характеристика оболочки при этом также не изменится. Эйлера характеристика оболочки не изменится, если мы преобразуем грань с двумя циклами в грань с одним циклом, что приведено на рис. 5.2.4.

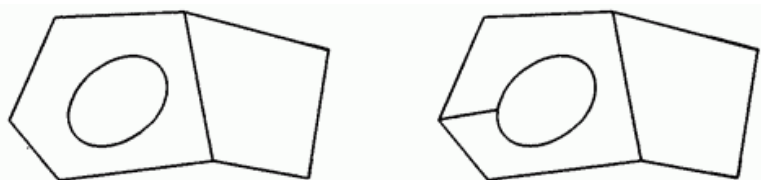


Рис. 2.4. Добавление ребра и ликвидация внутреннего цикла грани

Покажем это. Пусть новое ребро начинается и оканчивается в уже существующих вершинах, тогда число ребер увеличится на единицу, число циклов уменьшится на единицу, а эйлера характеристика не изменится.

Все перечисленные модификации оболочки не изменяют ее эйлеровой характеристики. Это иллюстрирует то, что эйлера характеристика не зависит от способа разбиения оболочки на грани, а зависит только от природы оболочки.

Рассмотрим еще один пример, показывающий, что эйлера характеристика зависит от топологии оболочки, и не зависит от способа раскроя ее на грани.

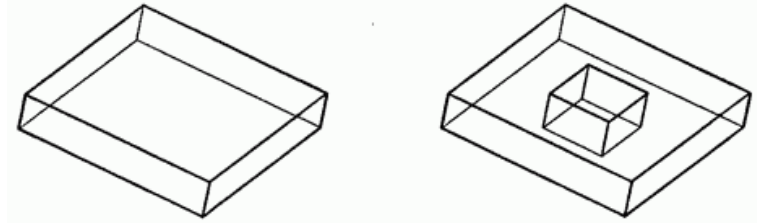


Рис. 2.5. Эйлера характеристика оболочек различна

Возьмем оболочку в форме четырех угольной призмы и превратим ее в оболочку в форме четырехугольной призмы с четырехугольным отверстием, что показано на рис. 2.5.

Исходная оболочки имела следующие числа граней, циклов, ребер и вершин: $F=6$, $L=6$, $E=12$, $V=8$ и ее эйлера характеристика равна $H=2$. Результирующая оболочки имеет: граней $F=10$, циклов $L=12$, ребер $E=24$, вершин $V=16$, а ее эйлера характеристика равна $H=0$. В двух гранях увеличилось число циклов (было по одному циклу, а стало по два).

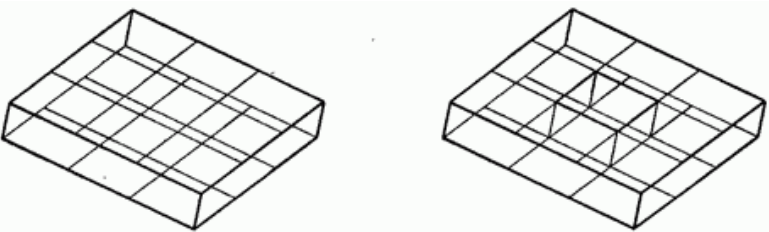


Рис. 2.6

Эйлера характеристика новой оболочки уменьшилась на две единицы. Повторим переход от той же призматической оболочки к призматической оболочке с вырезом, только верхнюю и нижнюю грань исходной оболочки представим в виде совокупности девяти граней, как показано на рис. 2.6.

Исходная оболочки имела следующие числа граней, циклов, ребер и вершин: $F=22$, $L=22$, $E=52$, $V=32$ и ее эйлера характеристика равна $H=2$. Результирующая оболочки имеет : граней $F=24$, циклов $L=24$,

ребер $E=56$, вершин $V=32$, а ее эйлерова характеристика равна $H=0$. Все грани в исходной и результирующей оболочках имеют по одному циклу. Эйлерова характеристика результирующей оболочки, как и в предыдущем примере, уменьшилась на две единицы.

Это произошло в результате того, что мы получили оболочку, которая топологически неэквивалентна исходной оболочке. Действительно, представив, что обе оболочки, показанные на рис. 5.2.5, выполнены из легко деформируемого материала, скруглив углы, из первой оболочки получим сферу, а из второй — тор (рис. 2.7).



Рис. 2.7. Сфера и тор имеют различную топологию

Никакими деформациями невозможно из сферы получить тор — они имеют разную топологию.

Эйлерова характеристика оболочки отражает ее природные свойства, связанные с возможностью деформировать одну оболочку в другую или, другими словами, установить между ними взаимно однозначное соответствие. Для описания топологических свойств оболочек и их граней используется понятие связности. Оболочки одинаковой связности могут быть деформированы одна в другую при условии, что они имеют равное число границ и одинаковую ориентируемость.

3.3. Связность оболочек

Исследуем топологические свойства оболочек. Эти свойства не зависят от количественных характеристик (объема, площади поверхности и т.п.). Не будем обращать внимания на ребра и вершины, а будем воспринимать оболочку как единое целое. Представим, что оболочка выполнена из легко деформируемого неразрываемого и не склеиваемого материала. Мы можем изменить форму оболочки, но до

определенных пределов. Например, если оболочка имеет форму шара, то ей можно придать ему форму куба или тарелки, но нельзя придать ему форму тора или кувшина с ручкой. Данный факт является отражением того, что упомянутые шар, куб и тарелка имеют одинаковую топологию, которая отличается от топологии тора и кувшина с ручкой. Топологической характеристикой описанного свойства оболочек является связность. В приведенном примере оболочки с формой шара, куба или тарелки, имеют одну и ту же связность, которая отлична от связности оболочки с формой тора или кувшина с ручкой. Так как топология характеризует непрерывную связь точек объектов, то для определения топологических свойств следует изучить поведение топологических объектов при разделении их на части.

Связность — это топологическое понятие, характеризующее целостность некоторого объекта. С другой стороны связность отражает возможность разделить некоторый топологический объект на отдельные части. Простейшей является незамкнутая оболочка с одной границей (одним циклом) топологически эквивалентная кругу. Если представить, что оболочки выполнены из легко деформируемого материала, то простейшей является оболочка, которой путем деформирования можно придать плоскую форму с границей в виде окружности.

Прямоугольная, эллиптическая, любая плоская оболочка с одной границей является простейшей. Рассмотрим вопрос: какое минимальное число линий можно провести на поверхности оболочки, чтобы по этим линиям ее можно было бы разрезать на две простейшие? Простейшая оболочка делится на две отдельные части любой линией, проведенной от одной точки границы до другой. Простейшей оболочке приписывается связность равная единице. Ее называют односвязной.

Рассмотрим незамкнутые оболочки, имеющие конечное число циклов (границ), которые путем деформирования без склеивания и наложений можно сделать плоскими. На рис. 3.1 приведены примеры плоских оболочек с различным числом циклов.



Рис. 3.1. Плоские оболочки различной связности

Если плоская оболочка имеет L циклов (один внешний и $L-1$ внутренних), то на ней можно провести $L-1$ линий, не разрезающих оболочку на две отдельные части (например, от внешнего цикла к каждому внутреннему циклу). Любая следующая линия, начинающаяся и оканчивающаяся на границе оболочки, разрежет ее на две части. Плоская оболочка с вырезами обладает дополнительными связями, которые мы режем, а оболочка не теряет свою целостность. Целостность оболочки заключается в том, что из некоторой ее точки, двигаясь по ее поверхности, можно попасть в любую другую ее точку. Плоской оболочке с L циклами припишем связность равную L .

Связность оболочки определим минимальным числом линий, по которым ее можно разрезать на две простейшие оболочки (на две отдельные части). Если связность оболочки равна h , то $h-1$ разрезов достаточно, чтобы ими раскроить оболочку, превратив ее в простейшую. Связность обозначим через h .

Рассмотрим замкнутые оболочки. На оболочке как на поверхности можно свободно строить кривые линии. Предположим, что мы можем резать оболочку по кривым на ней. Если оболочка имеет топологию сферы, то по любой замкнутой кривой на ее поверхности оболочку можно разрезать на две отдельные части, представляющие собой односвязные оболочки. Если оболочка имеет топологию тора, то для раскроя ее в односвязную грань, потребуется, как минимум, две замкнутые кривые на ней. Способ раскроя тороидальной оболочки показан на рис. 3.2.

Используя определение, получим, что связность сферы равна единице, а связность тора равна трем.

На замкнутой оболочке связности h можно построить n замкнутых кривых, которые не нарушают ее целостности (которые не разрезают ее на отдельные части), но нельзя построить h таких кривых.



Рис. 3.2. Раскрой тороидальной оболочки



Рис. 3.3. Раскрой цилиндрической оболочки

Для того, чтобы замкнутую оболочку связности h раскроить в односвязную оболочку, ее нужно разрезать по $h-1$ замкнутым линиям. Эти линии не разрезают оболочку на две отдельные части, но любая совокупность, состоящая из h замкнутых кривых на оболочке, обязательно разрезает оболочку на две части.

Рассмотренные замкнутые оболочки имеют нечетную связность. Существуют оболочки четной связности. Четную связность могут иметь незамкнутые оболочки. Например, цилиндрическая оболочка конечной длины имеет связность равную двум. Действительно, линия, проходящая от одной границы до другой, не разрезает цилиндрическую оболочку на отдельные части, а только раскраивает ее в односвязную оболочку (рис 5.3.3). Любая другая линия, проходящая от одной границы до другой, разрежет цилиндрическую оболочку на части.

На рис. 3.4 показаны незамкнутые оболочки, полученные из замкнутых оболочек, если в последних сделать отверстия. Если в замкнутой оболочке связности h выполнить одно отверстие с одной замкнутой границей, то связность полученной незамкнутой оболочки будет равна связности исходной замкнутой оболочки. Каждое последующее

отверстие с одной замкнутой границей будет увеличивать связность полученной оболочки на единицу. Связность приведенных на рис. 3.4 незамкнутых оболочек соответственно равна 1, 4, 3, 6.

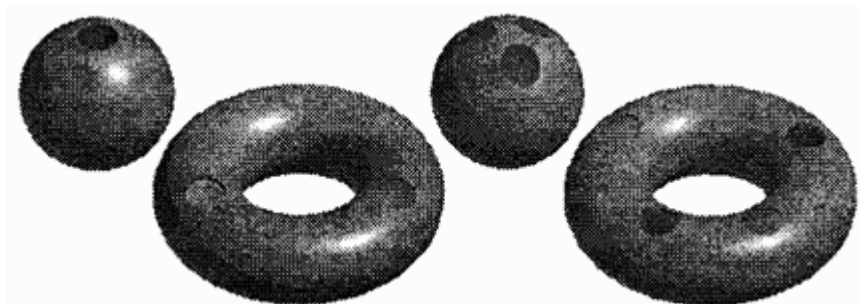


Рис. 3.4. Незамкнутые оболочки

Система разрезов на этих оболочках строится аналогично системе разрезов на соответствующей замкнутой оболочке, только часть линий проводится от одной границы к другой границе.

Связность не является единственной характеристикой оболочки. Две оболочки могут иметь одинаковую связность, но быть топологически различными. Кроме связности оболочка характеризуется ориентируемостью.

3.4. Ориентируемость оболочек

Для многих замкнутых оболочек одну из сторон можно определить как внутреннюю, а другую — как наружную. Для точек оболочек вводится такое топологическое понятие как ориентируемость. Представим, что вокруг всякой точки оболочки проведена окружность достаточно малого радиуса, расположенная на поверхности оболочки. Для каждой окружности определим такое направление обхода, что достаточно близкие точки всегда будут обходиться в одном и том же направлении. Если для некоторой оболочки это можно сделать, то такая оболочка называется ориентируемой. Существуют оболочки, для которых нельзя ввести единое направление обхода для окружностей близких точек. Такие оболочки называются неориентируемыми.

Лист Мёбиуса.

Примером неориентируемой оболочки является лист Мёбиуса, показанный на рис. 4.1. Лист Мёбиуса можно получить, взяв бумажную полосу и склеив дальние края, повернув предварительно их друг относительно друга на 180° . До склеивания краев полосы ее стороны можно покрасить двумя разными цветами. Если покраску проводить после склеивания, то окажется, что мы окрасим одним цветом обе стороны. При движении по листу Мёбиуса мы пройдем по обеим его сторонам.

Для точек листа Мёбиуса нельзя определить ориентацию. Действительно, задав для малой окружности некоторой точки ориентацию и двигаясь по оболочке, мы попадем в исходную точку, но с противоположным направлением. Результатом этого является невозможность окрасить разные стороны оболочки в разные цвета. У оболочки всего одна сторона. Лист Мёбиуса является односторонней оболочкой. Если оболочка является односторонней, то она не ориентируема. Справедливо и утверждение, что если оболочка является двусторонней, то она ориентируема.

Оболочка тогда и только тогда неориентируема, когда на ней можно построить такую замкнутую кривую s , что при движении вдоль этой кривой достаточно малой ориентированной окружности она придет в исходную точку ориентированной в противоположном направлении.



Рис. 4.1. Лист Мёбиуса — односторонняя незамкнутая оболочка



Рис. 4.2. Ориентируемая самопересекающаяся незамкнутая оболочка

Если двигаться вдоль кривой s на односторонней оболочке по одну сторону от этой кривой, то можно оказаться по другую сторону кривой, хотя при движении кривая не пересекалась.

Лист Мёбиуса является незамкнутой оболочкой. Существуют замкнутые односторонние оболочки. Односторонняя оболочка не может разбить пространство на внутреннюю и внешнюю части, поэтому односторонняя замкнутая оболочка всегда пересекает сама себя. Однако не всякая самопересекающаяся оболочка является односторонней. Оболочка, показанная на рис. 4.2, самопересекающаяся, но не односторонняя.

Бутылка Клейна.

Примером замкнутой односторонней оболочки является бутылка Клейна, которая показана на рис. 4.3. Бутылка Клейна имеет одну замкнутую линию самопересечения.

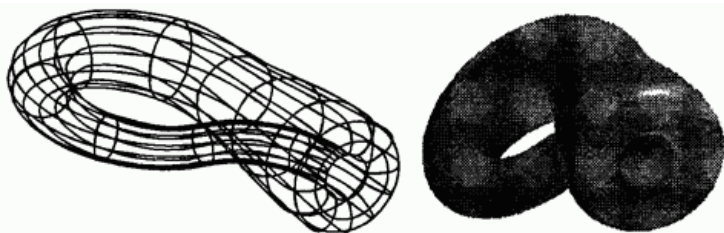


Рис. 4.3. Бутылка Клейна — односторонняя замкнутая оболочка

Она не может служить сосудом. Связность бутылки Клейна равна трем. Система линии, разрезающих бутылку Клейна на две односвязные части, аналогична системе линий тора.

Если бутылку Клейна разрезать плоскостью ее симметрии, то получим две незамкнутые самопересекающиеся оболочки, из которых путем деформирования можно получить два листа Мёбиуса.

Гептаэдр.

Еще одной односторонней оболочкой является гептаэдр. Его можно получить из октаэдра. Для этого удалим четыре грани из восьми: на верхней части октаэдра — левую переднюю и правую заднюю, а на нижней части — правую переднюю и левую заднюю грани, и добавим три квадратные взаимно ортогональные грани, построенные на диагоналях октаэдра. Грани гептаэдра по отдельности приведены на рис. 4.4. Оболочка гептаэдра состоит из семи граней. Ребра и вершины гептаэдра совпадают с ребрами и вершинами октаэдра (диагонали не считаются ребрами, а являются линиями самопересечения оболочки). В каждом ребре гептаэдра стыкуются только две грани. Гептаэдр является замкнутой односторонней оболочкой четной связности. Он показан на рис. 4.5. Если мы начнем движение по поверхности гептаэдра из точки А, то двигаясь по указанной на рис. 4.5 траектории, попадем в точку В, расположенную на другой стороне поверхности.

Таким образом, кроме связности оболочки характеризуются еще и ориентируемостью. Тор и бутылка Клейна обладают одинаковой связностью, обе замкнутые оболочки, но тор является ориентируемой оболочкой, а бутылка Клейна — неориентируемой.

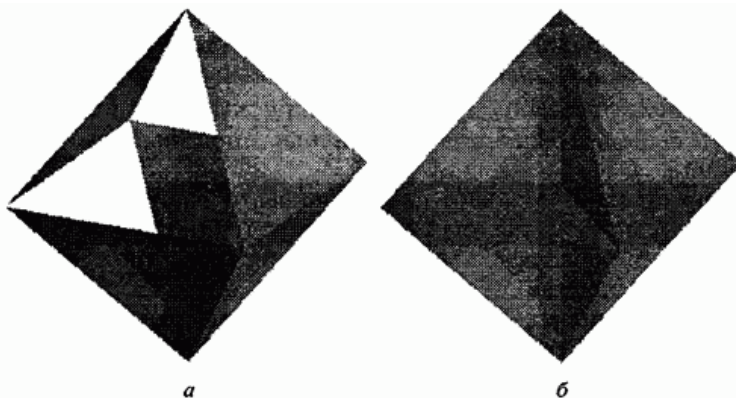


Рис. 4.4. Четыре грани октаэдра (а), грани на диагоналях октаэдра (б)

Известно еще несколько неориентируемых оболочек. Замкнутые неориентируемые оболочки пересекают сами себя, и поэтому не могут быть использованы для моделирования деталей.

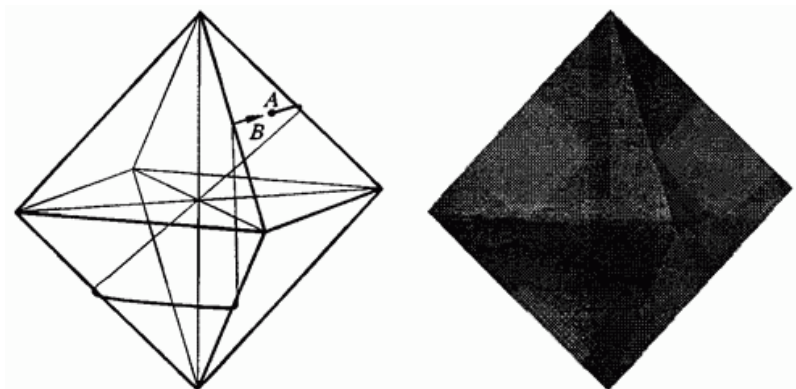


Рис. 4.5. Гептаэдр (семигранник) — самопересекающаяся односторонняя оболочка

Оболочки, с которыми мы сталкиваемся в реальности, являются ориентируемыми. Тем не менее, неориентируемые оболочки с математической точки зрения равноправны с ориентируемыми оболочками.

3.5. Оболочки для моделирования тел

Рассмотрим взаимно однозначное и непрерывное отображение одной оболочки на другую. При этом отображении соседние точки остаются соседними. Такое отображение может исказить оболочку, но при этом связанные части останутся связанными. Одним из видов отображения является деформация. При деформации топологический объект как целое непрерывно переходит сам в себя. Движение оболочки в пространстве является частным случаем деформации, тогда как зеркальное отражение оболочки относительно плоскости не является деформацией. При зеркальном отражении изменяется на обратное направление обхода всякой замкнутой кривой на оболочке, тогда как деформация сохраняет направление обхода неизменным.

Все многообразие оболочек можно классифицировать с топологической точки зрения. К одному и тому же типу относятся оболочки, которые топологически могут быть непрерывно и взаимно однозначно отображены одна на другую. Для этого должны быть выполнены следующие три условия:

- 1) оболочки должны иметь одинаковую связность;
- 2) оболочки должны быть либо ориентируемы, либо неориентируемы;
- 3) оболочки должны быть либо замкнуты, либо должны иметь одинаковое число границ.

Эти три необходимых условия непрерывного и взаимно однозначного отображения двух оболочек также являются и достаточными условиями.

Естественно, что оболочки, имеющие разное число границ, не могут быть отображены одна на другую.

Связность обуславливает существование системы разрезов оболочки, которая при топологическом отображении переходит в систему разрезов такой же структуры на другой оболочке. Следовательно, оболочки различной связности не могут быть отображены одна на другую.

Можно доказать, что всякая оболочка, которая может быть отображена на ориентируемую оболочку, также является ориентируемой. Это определяет третье условие принадлежности оболочек к одному типу.

Оболочки, имеющие одинаковую связность, ориентируемость и число границ, являются топологически эквивалентными.

Формула Эйлера-Пуанкаре.

Замкнутые, ориентируемые и не пересекающие сами себя оболочки имеют нечетную связность. Для таких оболочек эйлерова характеристика H связана с ее связностью h соотношением

$$H = 3 - h. \quad (5.1)$$

Используя это соотношение, получим формулу, связывающую число граней F , число циклов L , число ребер E и число вершин V оболочки с ее связностью h :

$$F - E + V + (F - L) = 3 - h. \quad (5.2)$$

Данная запись формулы Эйлера справедлива для замкнутых оболочек.

Связность не достаточно удобна для характеристики замкнутой оболочки. Введем еще одно понятие, которым можно заменить связность. Из тора путем его деформирования можно получить оболочку, по форме напоминающую гирию, которую будем называть сферой с ручкой. В общем случае любой замкнутой оболочке путем деформирования можно придать форму сферы с G ручками. Так, если взять толстую плиту, пробить в ней G отверстий и скруглить все ребра, то получим объект, оболочка которого топологически эквивалентна сфере с G ручками. На оболочке, топологически эквивалентной сфере с G ручками, можно провести $2G$ замкнутых кривых линий, по которым она раскраивается в простейшую оболочку. Любая следующая замкнутая линия разрежет оболочку на две простейшие оболочки. Сфера с G ручками имеет связность $h=1G+1$. Оболочка реальной детали топологически эквивалентна сфере с некоторым числом ручек. На рис. 5.1 приведена сфера с четырьмя ручками.



Рис. 5.1. Сфера с четырьмя ручками

Более наглядной, чем связность, характеристикой топологии оболочки может служить число ручек G сферы, к которой путем деформирования можно привести замкнутую оболочку. Примем во внимание, что сфера с G ручками имеет связность $h=1G+1$ и получим формулу, связывающую число граней F , ребер E , вершин V и циклов L с характерной величиной G ,

$$F - E + V + (F - L) - 2(1 - G) = 0. \quad (5.3)$$

Данная формула называется формулой Эйлера-Пуанкаре. Величина G (genus) характеризует топологический тип оболочки. Формула Эйлера-Пуанкаре позволяет определить топологический тип оболочки, если известно число ее граней, ребер, вершин и циклов:

$$G = 1 - F + \frac{E + L - V}{2}. \quad (5.4)$$

Реальные объекты могут иметь внутри пустоты. В этом случае объекты будут описываться несколькими оболочками. Одна из этих оболочек является внешней, остальные оболочки лежат внутри нее. Если моделируемый объект имеет m пустот, то он будет описываться $S=m+1$ оболочками. Потребуем, чтобы внутренние оболочки не пересекали друг друга и внешнюю оболочку. Для каждой оболочки справедлива формула (5.3), а для объекта с S замкнутыми оболочками формула Эйлера-Пуанкаре (5.3) примет вид

$$F - E + V + (F - L) - 2(S - G) = 0, \quad (5.5)$$

где F — общее число граней модели, E — общее число ребер модели, V — общее число вершин модели, L — общее число циклов модели, S — общее число оболочек моделируемого объекта, G — топологический тип моделируемого объекта, равный общему числу ручек всех описывающих его оболочек. Таким образом, топологически эквивалентными объектами будут являться два объекта, у которых равно число описывающих их оболочек и соответствующие внешние и внутренние оболочки имеют одинаковый топологический тип.

Если оболочка не является замкнутой, то говорить о ее топологическом типе G не имеет смысла. Для незамкнутой ориентируемой оболочки формула Эйлера имеет вид

$$F - E + V + (F - L) + h = 2. \quad (5.6)$$

Однородные оболочки.

Для моделирования деталей подходят замкнутые двусторонние не пересекающие сами себя оболочки. К ним относятся оболочки, топологически эквивалентные сфере с G ручками. Именно такие замкнутые оболочки мы и будем использовать для геометрического моделирования. К вершинам, ребрам, циклам и граням предъявим следующие требования. Грани не должны пересекать сами себя. Грани стыкуются только по ребрам, причем в каждом ребре стыкуются только две грани. Оболочка, приведенная на рис. 5.2, некорректна, так как в ребре АВ стыкуются четыре грани.

Такая оболочка топологически должна быть представлена одним из способов, приведенных на рис. 5.3 и 5.4. Ребра стыкуются только в вершинах. В каждой вершине может стыковаться любое конечное число ребер.

Каждую вершину можно обойти по поверхности оболочки, но при этом мы должны пересечь все стыкующиеся в вершине ребра и посетить все примыкающие к вершине грани. Такие вершины будем называть простыми.

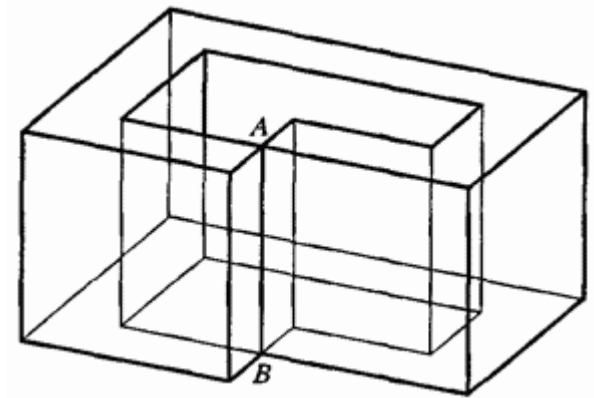


Рис. 5.2. В каждом ребре должны пересекаться только две грани

Оболочка, приведенная на рис. 5.5, также некорректна, так как вершину А можно обойти по поверхностям граней, не пересекая всех стыкующихся в ней ребер. Такая оболочка топологически должна быть представлена способом, приведенным на рис. 5.6.

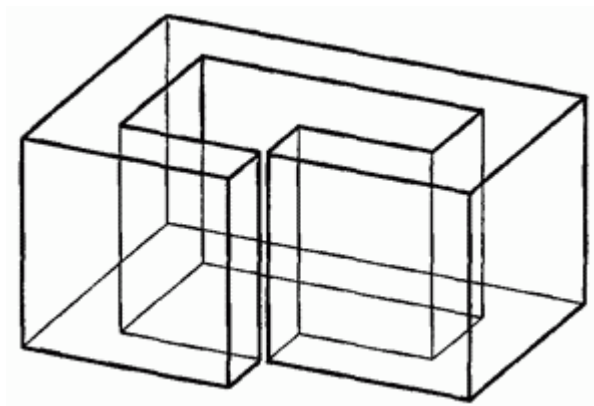


Рис. 5.3. Корректная оболочка

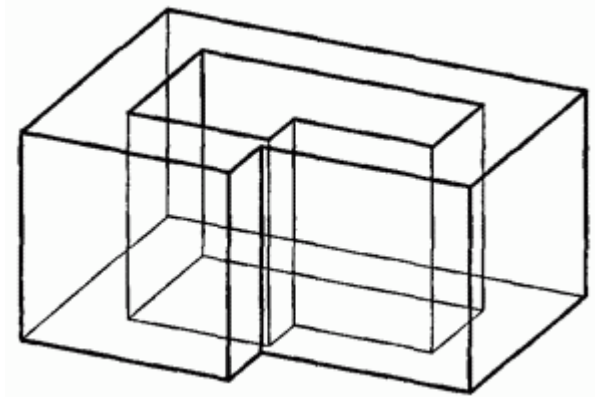


Рис. 5.4. Корректная оболочка

Таким образом, для моделирования мы будем использовать оболочки, вершины которых являются простыми, грани пересекаются по ребрам, причем в каждом ребре стыкуются только две грани.

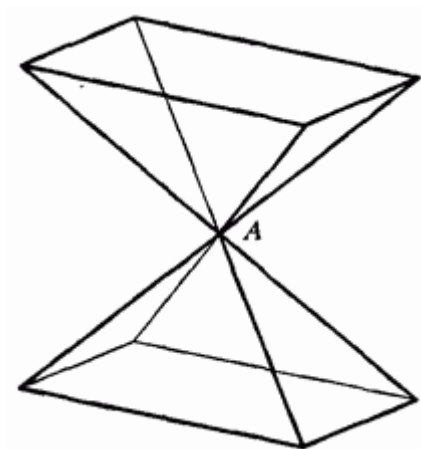


Рис. 5.5. Некорректная оболочка

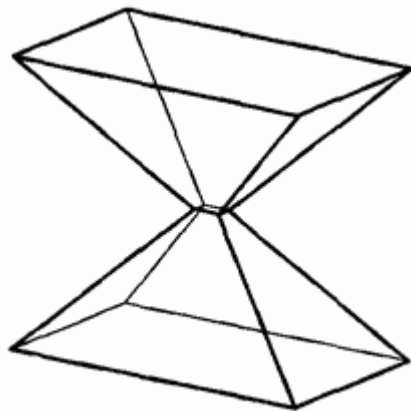


Рис. 5.6. Корректная оболочка

Такие оболочки будем называть однородными. У однородных оболочек все топологические элементы построены по единым правилам.

3.6. Поверхностное и твердотельное моделирование

В геометрическом моделировании используются термины «поверхностное моделирование» (моделирование поверхностей) и «твердотельное моделирование» (моделирование твердых тел). В обоих случаях результатом моделирования является некоторая оболочка (или несколько оболочек), описывающая поверхность моделируемого объекта. Но процесс моделирования в первом случае отличается от процесса моделирования во втором случае.

В поверхностном моделировании сначала создаются и модифицируются требуемым образом поверхности, описывающие отдельные элементы моделируемого объекта. Эти поверхности обрезают по линиям пересечения, сопрягают друг с другом поверхностями скругления или перехода, а также выполняют над ними другие операции. Затем из полученных поверхностей собирают оболочку. В поверхностном моделировании результирующая оболочка не обязательно должна быть замкнутой. Она может отражать лишь часть (главную часть) моделируемого объекта. Поверхностное

моделирование позволяет сосредоточить усилия на сложных формах объекта и широко применяется для проектирования кузовов автомобилей и планеров самолетов.

В твердотельном моделировании с самого начала работа идет с оболочками тел, а не с отдельными поверхностями. Оболочки полностью описывают поверхности моделируемых объектов, отделяющие их внутренний объем от остальной части пространства. Процесс построения оболочки тела в данном случае аналогичен процессу изготовления моделируемого объекта. Сначала создается оболочка некоторой заготовки простой формы. Далее оболочка заготовки изменяется необходимым образом. Для этого используются булевы операции над телами, операция построения тонкостенного тела из заготовки, операция скругления ребер, операция построения ребер жесткости и другие операции. С помощью операций оболочке тела придается требуемая форма.

Два подхода к моделированию имеют много общего и отличаются технологией создания модели. В обоих случаях выполняются аналогичные действия, но в разной последовательности. В следующей главе мы рассмотрим моделирование твердых тел, так как оно включает в себя все элементы поверхностного моделирования.

4. Теоретико-множественный подход представления топологии

4.1. Основные понятия из теории множеств

4.1.1. Множества и элементы

В любой интеллектуальной деятельности одно из самых основополагающих действий - соединение объектов в группы. Это соединение происходит в умах и совсем необязательно сопровождается каким бы то ни было не умственным действием. Как только группа образована и названа, о ней можно думать и рассуждать и, в частности, включать в другие группы. В математике имеется разработанная система понятий, которая организует и регламентирует создание таких групп и оперирование ими. Эта система понятий называется *теория*

множеств, название несколько вводящее в заблуждение - это не столько теория, сколько язык.

Первые слова в этом языке - *множество* и *элемент*. Под множеством понимают произвольное собрание различных предметов. Предметы, входящие в это собрание, называются *элементами* этого множества.

Множество *СОСТОИТ* из своих элементов. Оно *образовано* из них.

Чтобы разнообразить речь, слово *множество* заменяют словом *совокупность*. Иногда в том же смысле употребляют и другие слова, такие как *группа*, *класс*, *семейство*, но это не вполне корректно, поскольку каждое из них наделяется в математике другими, как правило, более узкими значениями.

То, что x является элементом множества A , обозначается формулой $x \in A$. Говорят x *принадлежит* множеству A и A *содержит* x . Значок \in называется *символом принадлежности*. Он возник как стилизованная греческая буква e , первая буква латинского слова

elementum. Формулу $x \in A$ записывают и так: $A \ni x$. Этим подчёркивается очевидная аналогия с символами $<$ и $>$. То, что x не является элементом множества A , записывается формулой $x \notin A$ или $A \not\ni x$.

4.1.2. Равенство множеств

Множество определяется своими элементами. Оно есть ни что иное как собрание своих элементов. Наиболее выпукло это проявляется в том, что *множества считаются равными, когда они состоят из одних и тех же элементов*. В этом смысле слово множество имеет слегка уничижительный оттенок: когда мы говорим "множество", мы подчёркиваем своё сиюминутное равнодушие к какой бы то ни было организации его элементов.

Например, говоря, что прямая есть множество точек, мы даём основание предположить, что две прямые совпадают, когда они состоят из одних и тех же точек. С другой стороны, мы обязуемся все взаимоотношения точек (расстояния между ними, их порядок на прямой и т.п.) рассматривать отдельно, не включая их в понятие прямой.

Элементы, в свою очередь, могут быть множествами, но постольку поскольку они рассматриваются как элементы, они исполняют роль своего рода атомов, чья внутренняя жизнь игнорируется.

Можно представлять себе множество как воображаемый ящик, созданный, чтобы отделить элементы этого множества от прочих вещей. Соединение каких-то вещей в множество даёт возможность присвоить

им общее имя и демонстрирует намерение рассматривать эти вещи как единую общность, не вдаваясь до поры до времени в их природу и отношения между собой.

В математике слова *множество* и *элемент* являются одними из наиболее употребительных. Они употребляются почти во всех математических текстах. Плохо словом элемент заменять другие, более значимые слова, превращая это слово в математический аналог слова-паразита *штука*. Когда что-то называют элементом, должно быть ясно, что подразумевается под множеством, чьим элементом это что-то служит. Слово элемент осмысленно только в комбинации со словом множество. Исключений из этого правила не **много**: нематематические термины (химический элемент, нагревательный элемент), редкие старомодные математические термины (**например**, подынтегральное выражение называют *инфинитезимальным элементом*, в старых геометрических текстах точки, прямые и плоскости называются элементами).

4.1.3. Пустое множество

Элемент не может быть без множества. А вот множество может быть без единого элемента. Имеется всего одно такое множество (поскольку множество определяется запасом своих элементов). Оно называется *пустым* и обозначается символом \emptyset .

4.1.4. Основные числовые множества

Наряду с \emptyset имеются и другие уникальные множества, столь важные, что заполучили свои собственные общепринятые названия и обозначения. Множество всех натуральных чисел, т. е. 1, 2, 3, 4, 5, ..., обозначается через **N**. Множество всех целых чисел (как положительных целых, т.е. натуральных чисел, так отрицательных и нуля) обозначается через **Z**. Множество всех рациональных чисел (добавьте к целым числам числа, представимые дробями, такие как $\frac{2}{3}$, $\frac{-7}{5}$) обозначается через **Q**. Множество всех вещественных чисел (полученное присоединением к множеству рациональных чисел иррациональных чисел таких как $\sqrt{2}$ и $\pi = 3.14\dots$) обозначается через **R**. Множество комплексных чисел обозначается через **C**.

4.1.5. Задание множества явным перечнем его элементов

Множество, заданное списком a, b, \dots, x своих элементов, обозначается символом $\{a, b, \dots, x\}$. Другими словами, список объектов, заключенный в фигурные скобки, обозначает множество, элементы которого перечислены в этом списке. Например, $\{1, 2, 123\}$ - множество состоящее из чисел 1, 2 и 123. Формула $\{a, x, A\}$ обозначает множество, состоящее из элементов a, x и A , какие бы объекты эти три буквы ни обозначали.

1.1. Что такое $\{\emptyset\}$? Сколько элементов в этом множестве?

1.2. Какие из нижеследующих формул верны:

- 1) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; 2) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$; 3) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$?

Множество, состоящее из одного элемента, так и называется *одноэлементным*.

1.3. Является ли множество $\{\{\emptyset\}\}$ одноэлементным?

Заметьте, что множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 2, 1, 2\}$ равны, поскольку они состоят из одних и тех же элементов. На первый взгляд, список с повторениями никогда не может возникнуть естественно. Появляется даже соблазн на всякий случай запретить списки с повторениями в подобных обозначениях. Однако, как это часто случается с соблазном что-то запретить, в данном случае этот запрет по был бы разумен. Действительно, часто никто не может сказать, имеются в списке повторения, или пет. Например, если элементы списка зависят от параметра, то при одних значениях параметра некоторые члены списка могут совпасть, тогда как при других значениях они окажутся различными.

1.4. Сколько элементов содержат следующие множества?

- 1) $\{1, 2, 1\}$; 2) $\{1, 2, \{1, 2\}\}$; 3) $\{\{2\}\}$;
 4) $\{\{1\}, 1\}$; 5) $\{1, \emptyset\}$; 6) $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$;
 7) $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$; 8) $\{x, 3x - 1\}$ при $x \in \mathbb{R}$.

4.1.6. Подмножества

Если каждый элемент множества A принадлежит и множеству B , то говорят, что A есть *подмножество* множества B , и что B *содержит* множество A , а также пишут $A \subset B$ и $B \supset A$. Знаки \subset и \supset называются *символами включения*. Они не случайно напоминают знаки неравенства $<$ и $>$:

1.A. Пусть множество A состоит из a элементов, а множество B — из b элементов. Если $A \subset B$, то $a < b$.

Вопрос так прост, что трудно найти более элементарные факты, которые могли бы служить отправной точкой доказательства. Что значит, что A состоит из a элементов? Это значит, что мы можем пересчитать элементы множества A , присваивая им номера 1, 2, 3, и так далее и что последний элемент при этом получит помер a . Известно, что результат не зависит от порядка, в котором мы расположили элементы множества. (В действительности, можно развить теорию множеств, которая включала бы теорию счёта, где это доказывалось бы как одна из основных теорем. Но поскольку это не вызывает сомнений, мы опускаем доказательство.) Поэтому мы можем начать подсчет элементов множества B с подсчета элементов множества A . Пересчитав элементы множества A , мы продолжим подсчет, если какие-то элементы множества B к этому моменту останутся не сосчитанными. Поэтому число элементов множества A не превосходит числа элементов множества B .

4.1.7. Свойства включения

1.В. Рефлексивность включения. Включение $A \subset A$ имеет место для любого множества A , то есть любое множество содержится в самом себе.

Таким образом, знаки включения не вполне соответствуют знакам неравенств $<$ и $>$. Они ближе к \leq и \geq . Нет такого числа a , которое было бы меньше самого себя; неравенство $a < a$ решений не имеет.

Напомним, что, согласно определению, включение $A \subset B$ означает, что каждый элемент множества A является и элементом множества B . Поэтому утверждение, которое подлежит доказательству, можно переформулировать следующим образом: каждый элемент множества A является элементом множества A . А это - тавтология.

1.С $\emptyset \subset A$ для любого множества A . Другими словами, пустое множество присутствует, в качестве подмножества, в каждом множестве.

Итак, в любом множестве A имеются два очевидных подмножества: пустое множество \emptyset и само A . Подмножество множества A , отличное от \emptyset и A , называется его *собственным* подмножеством. Слово это употребляется, когда хотят исключить из рассмотрения очевидные подмножества (называемые *несобственными*.)

1.Д Транзитивность включения. Если A, B и C - множества, такие что $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Нужно доказать, что каждый элемент множества A является элементом множества C . Пусть $x \in A$. Так как $A \subset B$, то $x \in B$. А так как $B \subset C$, то это, в свою очередь, влечёт $x \in C$. Ну а это-то и нужно было доказать

4.1.8. Доказывая равенство множеств, доказывают два включения

Имея дело с множествами, часто приходится доказывать, что какие-то два множества, которые возникают казалось бы совершенно по-разному, на самом деле совпадают. Наиболее обычный способ доказательства равенства множеств даёт следующая теорема.

1.E Критерий равенства множеств.

$$A = B, \text{ когда } A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Мы уже видели, что $A \subset A$. Поэтому если $A = B$, то $A \subset B$ и $B \subset A$. С другой стороны, включение $A \subset B$ означает, что каждый элемент множества A принадлежит и B , а включение $B \subset A$ означает, что каждый элемент множества B принадлежит и A . Следовательно A и B обладают одними и теми же элементами, а значит они равны.

4.1.9. Включение и принадлежность

1.F. $x \in A$, тогда $\{x\} \subset A$.

Несмотря на эту очевидную связь и похожесть символов принадлежности \in и включения \subset , понятия принадлежности и включения весьма различны. В самом деле, принадлежность $A \in B$ означает что A - один из элементов множества B (то есть один из неделимых объектов, составляющих B), тогда как включение $A \subset B$ означает, что A состоит из некоторых элементов множества B .

1.G *Нерефлексивность принадлежности.* Постройте множество A , такое что $A \notin A$. Ср. *1.B*.

Построить множество A , такое что $A \notin A$, легко. Возьмите, например, $A = \emptyset$, или $A = \mathbf{N}$, или $A = \{1\}, \dots$

1.Н Нетранзитивность принадлежности. Постройте такие множества A , B и C , что $A \in B$ и $B \in C$, но $A \notin C$. Ср. *1.D*.

Пусть $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$ и $C = \{\{\{1\}\}\}$. Ясно, что $A \in B$ и $B \in C$, но $A \notin C$. На самом деле, труднее построить такие множества A , B и C , что $A \in B$, $B \in C$, и $A \in C$. Вот один из простейших примеров:

$$A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{1\}, \{\{1\}\}\}.$$

4.1.10. Задание подмножества заданием условия

Как мы знаем (см. 4.1.5), множество можно описать, представив список его элементов. К сожалению, этот простейший способ задания множеств по всегда доступен и во всяком случае не всегда легок. Например, легко сказать: "множество всех решений следующего уравнения" и выписать уравнение. Это - вполне приемлемое недвусмысленное описание множества. Приняв его, можно говорить об этом множестве, обсуждать его свойства, и, в результате, если повезёт, решить уравнение и выписать список всех его решений. Последнее может оказаться не легким делом, но тот факт, что мы не имеем списка всех решений уравнения, не должен помешать нам рассуждать о множестве всех его решений.

Итак, множество можно задать, сформулировав свойства, выделяющие его элементы среди элементов более широкого и уже описанного множества. Соответствующее обозначение: подмножество множества A , состоящее из элементов x , которые удовлетворяют условию $P\{x\}$, обозначается через $\{x \in A \mid P(x)\}$.

1.5. Задайте следующие множества списками их элементов (т.е. как $\{a, b, \dots\}$)

$$(a) \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}, \quad (b) \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}, \quad (c) \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}.$$

4.1.11. Пересечение и объединение

Пересечением множеств A и B называется множество, составленное из их общих элементов, то есть элементов, принадлежащих и A , и B . Оно обозначается через $A \cap B$. Его можно описать и формулой

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

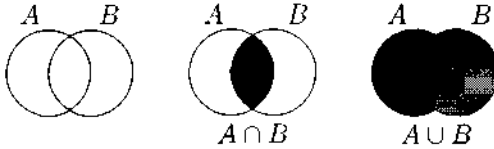
Множества A и B называются *дизъюнктными* или *непересекающимися*, если их пересечение пусто, т. е. $A \cap B = \emptyset$.

Объединением множеств A и B называется множество, составленное из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B . Объединение множеств A и B обозначается через $A \cup B$.

Его можно описать формулой

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Здесь союз *или* понимается в пейсключающем смысле: условие " $x \in A$ или $x \in B$ " означает, что x принадлежит *хотя бы одному* из множеств A и B , а, быть может, и обоим.



1.1. Коммутативность операций \cap и \cup . Для любых множеств A и B

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{и} \quad A \cup B = B \cup A$$

1.6. Докажите, что для любого множества A

$$A \cap A = A. \quad A \cup A = A. \quad A \cup \emptyset = A \quad \text{и} \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

1.7. Докажите, что для любых множеств A и B

$$A \subset B, \text{ тогда } A \cap B = A, \text{ тогда } A \cup B = B.$$

1.1. Ассоциативность операций \cap и \cup . Для любых множеств A, B и C
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ассоциативность позволяет не заботиться о скобках и даже иногда опускать их, полагая $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Пересечение и объединение сколь угодно большой (в частности, бесконечной) совокупности множеств проще определяется непосредственно. Действительно, пусть Γ - некоторая совокупность множеств. *Пересечением* множеств этой совокупности называется множество, составленное из элементов, которые принадлежат *каждому* множеству, входящему в Γ . Это множество обозначается через $\bigcap_{A \in \Gamma} A$. Аналогично, *объединением* множеств совокупности Γ называется множество, составленное из элементов, которые принадлежат *хотя бы одному* множеству, входящему в Γ . Это множество обозначается через $\bigcup_{A \in \Gamma} A$.

1.К. Понятия пересечения и объединения множеств произвольной совокупности обобщают понятия пересечения и объединения двух множеств: если

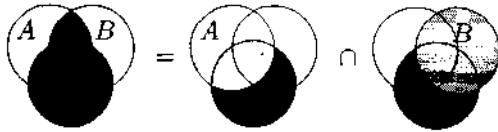
$\Gamma = \{A, B\}$, то $\bigcap_{C \in \Gamma} C = A \cap B$ и $\bigcup_{C \in \Gamma} C = A \cup B$.

1.8. Как связаны понятия системы уравнений и пересечения множеств?

1.Л Две дистрибутивности. Для любых множеств A, B и C

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (1)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). \quad (2)$$



$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

На рисунке первое из тождеств теоремы 1.Л проиллюстрировано своего рода комиксом. Такие комиксы называются *диаграммами Венна* или *кругами Эйлера*. Они очень полезны и мы рекомендуем научиться их рисовать для иллюстрации всех теоретико-множественные формулы (но крайней мере содержащих не более трех множеств).

1.М. Нарисуйте диаграмму Венна, иллюстрирующую равенство (2). Докажите равенства (1) и (2), отслеживая все детали доказательства па диаграммах Венна. Нарисуйте диаграммы Венна, иллюстрирующие все последующие формулы этого параграфа.

1.9. Обобщите теорему 1.Л на случай любого числа множеств.

1.Н Ещё две дистрибутивности. Пусть A - множество, а Γ - множество, все элементы, которого являются множествами. Тогда

$$A \cap \bigcup_{B \in \Gamma} B = \bigcup_{B \in \Gamma} (A \cap B) \quad \text{и} \quad A \cup \bigcap_{B \in \Gamma} B = \bigcap_{B \in \Gamma} (A \cup B).$$

4.1.12. Разности

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется совокупность тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B . При этом, вообще говоря, не предполагается, что $A \supset B$.

В случае, если $A \supset B$, множество $A \setminus B$ называется также *дополнением* множества B в множестве A .

1.10. Докажите, что для любых множеств A и B их объединение A и B представляется как объединение следующих трёх множеств:

$$A \setminus B, B \setminus A \text{ и } A \cap B$$

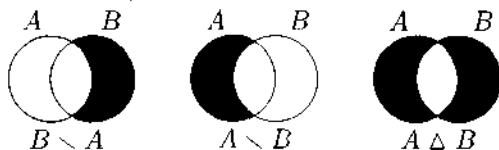
и что эти множества попарно не пересекаются.

1.11. Докажите, что $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ для любых множеств A и B .

1.12. Докажите, что $A \subset B$, тогда $A \setminus B = \emptyset$.

1.13. Докажите, что $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ для любых множеств A, B и C .

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Это множество обозначается через $A \Delta B$.



1.14. Докажите, что для любых множеств A и B

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1.15 Ассоциативность симметрической разности. Докажите, что для любых множеств A, B и C

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

1.16. Найдите симметричное определение симметрической разности $(A \Delta B) \Delta C$ трёх множеств и обобщите его на случай любого конечного набора множеств.

1.17 Дистрибутивность. Докажите, что $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ для любых множеств A, B и C .

1.18. Справедливо ли равенство $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$ для любых множеств A, B и C ?

4.2. Топология в множестве

4.2.1. Определение топологического пространства

Пусть X - некоторое множество. Рассмотрим набор Ω его подмножеств, для которого:

- (1) объединение любого семейства множеств, принадлежащих совокупности Ω , также принадлежит совокупности Ω ;
- (2) пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих совокупности Ω , также принадлежит совокупности Ω ;

(3) пустое множество \emptyset и всё X принадлежат Ω .

В таком случае

- Ω есть *топологическая структура* или просто *топология* в множестве X ;
- множество X с выделенной топологической структурой Ω (т. е. пара (X, Ω)) называется *топологическим пространством*;
- элементы множества X называются *точками* этого топологического пространства;
- элементы множества Ω называются *открытыми множествами* пространства (X, Ω) .

Три условия, наложенные выше на Ω , называются *аксиомами топологической структуры*.

4.2.2. Примеры

Дискретное пространство - множество, в котором выделенной совокупностью является множество всех его подмножеств.

2. А. Убедитесь в том, что это топологическое пространство, т. е. что здесь действительно выполнены аксиомы топологической структуры.

Антидискретное пространство - противоположный пример, в котором топологическая структура самая скромная. Она состоит из X и \emptyset .

Что же нужно проверить? Первая аксиома гласит, что объединение произвольного набора подмножеств множества X является подмножеством того же множества. Так оно и есть. Если $A_\alpha \subset X$ для каждого α , то $\cup_\alpha A_\alpha \subset X$. Точно так же дело обстоит и со второй аксиомой, в которой идет речь о пересечении множеств. И, безусловно, $\emptyset \subset X$ и $X \subset X$.

2.В. Это тоже топологическая структура.

Если среди объединяемых множеств есть X , то и объединение равно X . А если его там нет, то что же есть? Только пустое множество. Но тогда и объединение пусто. С пересечениями дело обстоит так же просто.

Если среди пересекаемых множеств есть \emptyset , то и пересечение равно \emptyset . А если его там нет, то что же есть? Только все X . Но тогда и пересечение равно X .

Теперь несколько более содержательных примеров.

2.1. Пусть X есть луч $[0; +\infty)$, а Ω состоит из \emptyset , X и всевозможных лучей $(a; +\infty)$, где $a \geq 0$. Докажите, что Ω - топологическая структура.

2.2. Пусть X есть плоскость. Является ли топологической структурой набор множеств, состоящих из \emptyset , X и открытых кругов с центром в начале координат и всевозможными радиусами?

2.3. Пусть X состоит из четырех элементов: $X = \{a, b, c, d\}$. Выясните, какие из следующих трех наборов его подмножеств являются топологическими структурами в X (т. е. удовлетворяют аксиомам топологической структуры):

(1) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\};$

(2) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\};$

(3) $\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\};$

Пространство из задачи 2.1 называется *стрелкой*. Пространство из

задачи 2.3 (1) будем обозначать пиктограммой ∇ , смысл которой будет разъяснен в 7. Оба эти пространства, как и пространство из задачи 2.2, не играют серьезной роли, но хороши как учебные примеры.

4.2.3. Важный пример: вещественная прямая

Пусть $X = \mathbf{R}$ - множество всех вещественных чисел, Ω - совокупность объединений всевозможных семейств интервалов (*интервалом* мы называем множество вида $(a; b)$, где $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathbf{R}$).

2. С. Убедитесь в том, что эта совокупность удовлетворяет аксиомам топологической структуры.

Вначале покажите, что $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \cap \bigcup_{\beta} B_{\beta} = \bigcup_{\alpha, \beta} (A_{\alpha} \cap B_{\beta})$. Поэтому,

если A_{α}, B_{β} - интервалы, то справа объединение интервалов. Для тех, кому кажется, что множество, являющееся таким объединением, очень уж просто устроено, предлагаем следующий вопрос (впрочем, формально уже не имеющий никакого отношения к рассматриваемой задаче). Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{Q}$ (т. е. мы занумеровали все рациональные числа). Покажите, что $\bigcup (r - 2^{-n}; r + 2^{-n}) \neq \mathbf{R}$, хотя это множество является объединением некоторых интервалов, содержащих все (!) рациональные числа.

Именно эту топологическую структуру имеют в виду всегда, когда о множестве \mathbf{R} говорят как о топологическом пространстве, не описывая явно топологическую структуру. Это пространство называется обычно *вещественной прямой*, а топологическую структуру называют *канонической* или *стандартной* топологией в \mathbf{R} .

4.2.4. Дополнительные примеры

2.4. Пусть $X = \mathbf{R}$, и Ω состоит из пустого множества и всевозможных бесконечных подмножеств прямой \mathbf{R} . Является ли Ω топологической структурой?

2.5. Пусть опять $X = \mathbf{R}$, а Ω состоит из пустого множества и дополнений всевозможных конечных подмножеств прямой \mathbf{R} . Является ли такое Ω топологической структурой?

Пространство из задачи 2.5 в дальнейшем обозначается через $\mathbf{R}_{\text{т}}$ и называется *прямой с T_1 -топологией* или *прямой с топологией Зариского*.

2.6. Пусть (X, Ω) - топологическое пространство, а Y - множество, полученное из X добавлением к нему одного элемента a . Является ли набор $\{\{a\} \cup U \mid U \in \Omega\} \cup \{\emptyset\}$ топологической структурой в Y ?

2.7. Является ли топологической структурой в двухэлементном множестве $\{0,1\}$ набор множеств $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$?

Топология в Y из задачи 2.6 в случае, если топология Ω дискретна, называется *топологией всюду плотной точки*. Топология задачи 2.7 называется *топологией связного двоеточия* или *топологией Серпинского*.

2.8. Перечислите все топологические структуры в двухэлементном множестве, скажем, в $\{0,1\}$.

4.2.5. Новые термины: точка, открытые множества, замкнутые множества

Напомним, что если (X, Ω) - топологическое пространство, то элементы множества X называются *точками*, а элементы множества Ω - *открытыми множествами*.

2.D. Переформулируйте аксиомы топологической структуры, употребляя термин "открытое множество", где только можно.

Объединение любого набора открытых множеств открыто. Пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто. Пустое множество и все пространство - открытые множества.

Говорят, что множество $F \subset X$ *замкнуто* в пространстве (X, Ω) , если его дополнение $X \setminus F$ открыто (т. е. если $X \setminus F \in \Omega$).

4.2.6. Теоретико-множественное отступление: формулы де Моргана

2.E. Пусть Γ произвольная совокупность подмножеств множества X . Тогда

$$X \setminus \bigcup_{A \in \Gamma} A = \bigcap_{A \in \Gamma} (X \setminus A) \quad (3)$$

$$X \setminus \bigcap_{A \in \Gamma} A = \bigcup_{A \in \Gamma} (X \setminus A). \quad (4)$$

Формула (4) "в одно действие" выводится из (3). Формулы этой задачи являются несимметричными вариантами формулировки, в которую симметричным образом входят множества и их дополнения, объединения и пересечения.

2.9 Найдите такую формулировку.

(Такая формулировка выглядит так:

(а)

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{A \in \Gamma} (X \setminus A) &\iff \forall A \in \Gamma : x \in X \setminus A \\ &\iff \forall A \in \Gamma : x \notin A \iff x \notin \bigcup_{A \in \Gamma} A \iff x \in X \setminus \bigcup_{A \in \Gamma} A. \end{aligned}$$

(b) Замените обе части формулы их дополнениями в множестве X и положите $B = X \setminus A$.

2.F Свойства замкнутых множеств. Докажем что:

- (1) пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто;
- (2) объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто;
- (3) пустое множество и все пространство (т. е. все множество — носитель топологической структуры) замкнуты.

Доказательство. Поскольку по определению замкнутое множество есть дополнение открытого, то утверждение теоремы следует из свойств открытых множеств (примените формулы де Моргана).

4.2.7. Открытость и замкнутость

Обратите внимание на то, что замкнутость не есть отрицание открытости.

2.G. Приведите примеры множеств:

- (1) являющихся одновременно и открытыми и замкнутыми (в одном и том же пространстве);
 (2) не являющихся ни открытыми, ни замкнутыми.

Примеры. В любом пространстве пустое множество и все пространство и открыты, и замкнуты, а в дискретном пространстве всякое множество является таковым. Полуоткрытый интервал ни открыт, ни замкнут. См. также следующую задачу.

2.10. Дайте прямое описание замкнутых множеств

- (а) дискретного пространства;
 (б) антидискретного пространства;
 (с) стрелки;
 (д) пространства \mathbb{I} ;
 (е) пространства \mathbf{R}_T .

2.Н. Замкнуты ли в \mathbf{R} замкнутые отрезки $[a; b]$?

Да, всякий отрезок замкнут, поскольку его дополнение

$$\mathbb{R} \setminus [a; b] = (-\infty; a) \cup (b; +\infty) - \text{открытое множество.}$$

Замкнутость и открытость — во многом аналогичные свойства. Фундаментальное различие между ними состоит в том, что пересечение бесконечного набора открытых множеств не обязательно открыто, тогда как пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто, и объединение бесконечного набора замкнутых множеств не обязательно замкнуто, тогда как объединение любого набора открытых множеств открыто.

2.11. Полуоткрытый промежуток $[0; 1)$ не открыт и не замкнут в \mathbf{R} , но представим и как объединение замкнутых множеств и как пересечение открытых.

2.12. Множество $A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ замкнуто на числовой

прямой.

4.2.8. Задание топологии совокупностью замкнутых множеств

2.13. Если совокупность \mathcal{F} подмножеств множества X удовлетворяет условиям:

- (1) пересечение любого набора множеств, принадлежащих \mathcal{F} , принадлежит \mathcal{F} ;
 (2) объединение любого конечного набора множеств, принадлежащих \mathcal{F} , принадлежит \mathcal{F} ;
 (3) \emptyset и X принадлежат \mathcal{F} ,

то \mathcal{F} есть совокупность всех замкнутых множеств некоторого топологического пространства (какого?).

2.14- Перечислите все наборы подмножеств трехэлементного множества, такие, что существуют топологии, в которых эти наборы являются полными наборами замкнутых множеств.

4.2.9. Окрестности

Окрестность точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку. Аналитики и французы (следуя Н. Бурбаки) понимают окрестности шире: они называют так любое множество, содержащее окрестность в указанном выше смысле.

2.15. Дайте прямое описание окрестностей точек

- (a) в дискретном пространстве;
- (b) в антидискретном пространстве;
- (c) в стрелке;
- (d) в \mathbb{I} ;
- (e) в связном двоеточии;
- (f) в топологии всюду плотной точки.

4.2.10x. Открытые множества на прямой

2. Ax. Любое открытое множество вещественной прямой есть объединение дизъюнктивных интервалов.

На первый взгляд может показаться, что из теоремы 2. Ax следует, что открытые подмножества прямой устроены вполне просто. Однако это далеко не так, они могут располагаться на прямой самым причудливым образом. Как показывает пример из следующего пункта, их дополнения - замкнутые множества — могут быть вполне сложно устроены. И не надо думать, что всякое замкнутое множество является объединением отрезков.

Пусть U - открытое подмножество прямой. Для каждой точки $x \in U$ рассмотрим наибольший (по включению) интервал $(m_x; M_x)$, содержащий эту точку (им является объединение всех содержащих x интервалов). Так как множество U открыто, такие интервалы существуют. Ясно, что всякие два интервала данного вида либо не пересекаются, либо совпадают.

4.2.11х. Канторово множество

Пусть K - множество вещественных чисел, представимых в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad \text{с } a_k = 0 \text{ или } 2. \text{ Другими словами, } K \text{ состоит из тех чисел,}$$

представление которых $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ в троичной системе не содержит единиц, т. е. $a_k \neq 1$ при всех k .

2.Вх. Найдите геометрическое описание множества K .

2.Вх.1. Докажите, что

(1) $K \subset [0; 1]$,

(2) K не пересекается с $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

(3) K не пересекается ни с одним из интервалов вида $\left(\frac{3s+1}{3^k}; \frac{3s+2}{3^k}\right)$, где k и s - произвольные целые числа.

2.Вх.2. Представьте K как разность $[0; 1]$ и объединения бесконечного семейства открытых интервалов.

2.Вх.3. Постарайтесь нарисовать K .

Множество K называется *канторовым множеством* (*канторовым континуумом*, *канторовым дисконтинуумом*). Оно обладает многочисленными свойствами и появляется во многих последующих задачах.

2.Сх. Докажите, что множество K является замкнутым. (Следует из 2.Вх2.)

4.2.12х. Топология и арифметические прогрессии

2.Дх. Рассмотрим следующее свойство подмножества F множества натуральных чисел \mathbb{N} : существует такое $N \in \mathbb{N}$, что F не содержит арифметической прогрессии длиной больше N . Докажите, что набор, состоящий из таких подмножеств и всего множества \mathbb{N} , образует совокупность замкнутых множеств некоторой топологии в \mathbb{N} .

При решении этой задачи, вероятно, не обойтись без следующей теоремы, относящейся к комбинаторике.

2.Дх То, что выполнены условия (а) и (с) из 2.13- очевидно. Для проверки условия (b) воспользуемся результатом задачи 2.Ех. Пусть множества A и B не содержат арифметических прогрессий длины большей или равной n . Если бы в множестве $A \cup B$ содержалась

достаточно длинная прогрессия, то в одном из исходных множеств нашлась бы прогрессия длины n .

2.Ех Теорема ван дер Вардена. Для всякого $n \in \mathbf{N}$ существует такое $N \in \mathbf{N}$, что если множество $\{1, 2, \dots, N\}$ разбить на два подмножества, то в одном из них найдется арифметическая прогрессия длиной n .

4.3. Базы

4.3.1. Определение базы

Часто топологическую структуру задают посредством описания некоторой ее части, достаточной для восстановления всей структуры. *Базой* топологии называется некоторый набор открытых множеств, такой что всякое непустое открытое множество представимо в виде объединения множеств из этого набора. К примеру, всевозможные интервалы составляют базу топологии вещественной прямой.

3.1. Могут ли различные топологические структуры иметь одну и ту же базу?

3.2. Найдите какие-нибудь базы топологических структур:

- (a) дискретного пространства;
- (b) пространства \mathbb{Q} ;
- (c) антидискретного пространства;
- (d) стрелки.

Постарайтесь выбрать базы поменьше.

3.3. Какие топологические структуры имеют в точности одну базу?

3.4. Докажите, что любую базу канонической топологии пространства \mathbf{R} можно уменьшить.

4.3.2. Какие наборы множеств являются базами

3.А. Совокупность Σ открытых множеств является базой топологии Ω , тогда для всякого множества $U \in \Omega$ и всякой точки $x \in U$ существует такое множество $V \in \Sigma$, что $x \in V \subset U$.

\Leftrightarrow Пусть Σ является базой топологии Ω и $U \in \Omega$. Представим множество U в виде объединения множеств из базы Σ . Всякая точка $x \in U$ окажется покрыта каким-нибудь из этих базисных мно-

жеств. Такое множество и можно взять в качестве V . Оно содержится в U , поскольку участвует в его представлении в виде объединения.

(\Leftarrow) Наоборот, предположим, что для всякого множества $U \in \Omega$ и всякой точки $x \in U$ существует такое множество $V \in \Sigma$, что $x \in V \subset U$, и покажем, что Σ - база топологии Ω . Для этого нужно убедиться в том, что любое множество $U \in \Sigma$ представляется в виде объединения множеств, принадлежащих Σ . Для каждой точки $x \in U$ выберем, пользуясь предположением, такое множество $V_x \in \Sigma$, что $x \in V_x \subset U$ и рассмотрим $\cup_{x \in U} V_x$. Заметим, что $\cup_{x \in U} V_x \subset U$, поскольку $V_x \subset U$ для каждого $x \in U$. С другой стороны, каждая точка $x \in U$ содержится в своём V_x и, тем более, в $\cup_{x \in U} V_x$. Значит, $U \subset \cup_{x \in U} V_x$. Таким образом, $U = \cup_{x \in U} V_x$.

3.B. Совокупность Σ подмножеств множества X является базой некоторой топологии в X , когда X есть объединение множеств из Σ и пересечение любых двух множеств из Σ представляется в виде объединения множеств из Σ .

3.B (\Rightarrow) Пусть Σ - база некоторой топологии. Тогда X , будучи открытым множеством, должно представляться как объединение базисных множеств. Пересечение любых двух множеств из Σ , как пересечение двух открытых множеств, открыто, и, значит, представляется как объединение базисных множеств.

(\Leftarrow) Наоборот, допустим, что Σ - такая совокупность подмножеств множества X , что X есть объединение множеств из Σ и пересечение любых двух множеств из Σ представляется в виде объединения множеств из Σ . Докажем, что совокупность всевозможных объединений множеств из Σ удовлетворяет аксиомам топологической структуры. Первая аксиома очевидно выполняется, так как объединение объединений есть объединение. Докажем вторую аксиому (пересечение двух открытых множеств открыто).

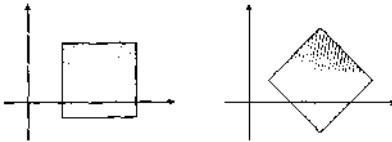
Пусть $U = \cup_{\alpha} A_{\alpha}$ и $V = \cup_{\beta} B_{\beta}$, где $A_{\alpha}, B_{\beta} \in \Sigma$. Тогда $U \cap V = (\cup_{\alpha} A_{\alpha}) \cap (\cup_{\beta} B_{\beta}) = \cup_{\alpha, \beta} (A_{\alpha} \cap B_{\beta})$, а поскольку пересечения $A_{\alpha} \cap B_{\beta}$ представляются, по предположению, как объединения множеств из Σ , то и $U \cap V$ представляется в таком виде. Осталось проверить третью аксиому. В ней нужно проверить только часть о всём пространстве, но согласно предположению, все пространство X представляется в виде объединения множеств из Σ .

3. С. Покажите, что второе условие в 3.B (т. е. условие относительно пересечения) равносильно следующему: пересечение любых двух множеств из Σ вместе с каждой своей точкой содержит некоторое множество из Σ , содержащее эту точку. (Ср. 3.A.)

4.3.3. Базы плоскости

Рассмотрим следующие три набора подмножеств плоскости \mathbf{R}^2 :

- набор Σ^2 , состоящий из всевозможных открытых кругов (т. е. кругов, в которые не включаются ограничивающие их окружности) ;
- набор Σ^∞ , состоящий из всевозможных открытых квадратов (в которые не включаются их стороны и вершины), стороны которых параллельны координатным осям (они задаются неравенствами вида $\max\{|x - a|, |y - b|\} < r$)
- набор Σ^1 , состоящий из всевозможных открытых квадратов, стороны которых параллельны биссектрисам координатных углов (они задаются неравенствами вида $|x - a| + |y - b| < r$).



3.D. Докажите, что любой элемент набора Σ^2 есть объединение элементов набора Σ^∞ . (Докажите, а затем используйте следующую простую лемму: $A = \bigcup B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathcal{B}$, тогда

$$\forall x \in A \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A.)$$

3.E. Докажите, что пересечение любых двух элементов набора Σ^1 есть объединение элементов набора Σ^1 . (Докажите, а затем используйте следующую простую лемму: $A = \bigcup B_\alpha$, где $B_\alpha \in \mathcal{B}$, тогда

$$\forall x \in A \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A.)$$

3.F. Докажите, что каждый из наборов Σ^2 , Σ^∞ и Σ^1 служит базой некоторой топологической структуры в \mathbf{R}^2 и структуры, определяемые этими базами, совпадают.

Фраза: "B есть база некоторой топологической структуры" раскрывается следующим образом: набор всевозможных объединений множеств, принадлежащих набору B, является топологической структурой. Утверждение, что Σ^1 - база некоторой топологии, следует из результата задачи 3.E (так что нужно доказать еще ее аналоги применительно к наборам Σ^2 , Σ^∞). Совпадение структур, определенных, к примеру, базами Σ^1 и Σ^2 , означает, что множество, являющееся объединением кругов, есть также и объединение квадратиков, и наоборот. Достаточно ли доказать, что круг есть объединение квадратиков? Как проще всего это сделать (см. указание к задачам 3.D и 3.E)?

4.3.4. Предбазы

Набор Δ открытых множеств топологического пространства (X, Ω) называется *предбазой*, если набор

$$\Sigma = \{V \mid V = \bigcap_{n=1}^k W_n, W_n \in \Delta, k \in \mathbb{N}\}$$

всевозможных конечных пересечений множеств из Δ является базой топологии Ω .

3.5. Покажите, что в любом множестве X набор Δ его подмножеств является предбазой некоторой топологической структуры на X , тогда

$$X = \bigcup_{W \in \Delta} W.$$

4.3.5. Бесконечность множества простых чисел

3.6. Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, образуют базу некоторой топологии в \mathbb{N} .

3.7. С помощью этой топологии докажите, что множество простых чисел бесконечно.

Воспользуйтесь тем, что в противном случае множество $\{1\}$ было бы открытым (?!).

4.3.6. Иерархия топологий

Если Ω_1 и Ω_2 - топологические структуры в множестве X и $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то говорят, что структура Ω_2 *тоньше*, чем Ω_1 , а Ω_1 - *грубее*, чем Ω_2 .

К примеру, из всех топологических структур в данном множестве антидискретная - самая грубая, а дискретная - самая тонкая, не правда ли?

3.8. Покажите, что T_1 -топология (см. 2) грубее обычной топологии вещественной прямой.

Базы, задающие одну и ту же топологическую структуру, называются *эквивалентными*.

3.G. Не упоминая топологических структур, сформулируйте условие, необходимое и достаточное для эквивалентности двух баз. (Ср. 3.D; базы Σ^2 , Σ^∞ и Σ^1 должны удовлетворять найденному вами условию!)

Пусть Σ_1 и Σ_2 - базы топологических структур Ω_1 и Ω_2 в множестве X . Легко видеть, что $\Omega_1 \subset \Omega_2$, тогда

$$\forall U \in \Sigma_1 \forall x \in U \exists V \in \Sigma_2 : x \in V \subset U.$$

Остается заметить, что $\Omega_1 = \Omega_2$, тогда $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

4.4. Метрические пространства

4.4.1. Определение и примеры

Функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X , если

- (1) $\rho(x, y) = 0$, тогда $x = y$;
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$;
- (3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$.

Пара (X, ρ) , где ρ - метрика в X , называется *метрическим пространством*. Условие (3) называется *неравенством треугольника*.

4-А. Покажите, что для любого множества X функция

$$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases}$$

является метрикой.

(Все, что надо проверить, так это справедливость аксиом метрики для каждого набора точек x, y и z .)

4-В. Докажите, что функция $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |x - y|$ есть метрика.

Доказательство. Неравенство треугольника в данном случае имеет вид $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Положив $a = x - z$, $b = z - y$, получаем стандартное неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$.

4-С. Докажите, что функция

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

есть метрика.

Как в решении предыдущей задачи, неравенство треугольника переписывается в виде $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

Двукратное возведение этого неравенства в квадрат и упрощение

сводят последнее к неравенству Коши-Буняковского

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq \sum a_i^2 \sum b_i^2.$$

Именно метрики 4.В и 4.С имеют в виду всегда, когда говорят об \mathbf{R} и \mathbf{R}^n как о метрических пространствах, не описывая метрику. Метрика 4.В есть специальный случай метрики 4.С. Эти метрики называют *евклидовыми*.

4.4.2. Еще примеры

4-1. Докажите, что функция $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ : (x, y) \mapsto \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$ есть метрика.

4-2. Докажите, что функция $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

есть метрика.

Метрики в \mathbf{R}^n , введенные в 4.С 4.2, включаются в бесконечную серию метрик

$$\rho^{(p)} : (x, y) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

4.3. Докажите, что для любого $p \geq 1$ функция $\rho^{(p)}$ есть метрика.

4.3.1 *Неравенство Гёльдера*. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}$$

если $x_i, y_i \geq 0, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Метрика из 4.С есть $\rho^{(2)}$, метрика из 4.2 есть $\rho^{(1)}$, метрику из 4.1 естественно обозначить через $\rho^{(\infty)}$ и включить в эту серию, поскольку, если a_i - произвольные неотрицательные числа, то $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} = \max a_i$.

4-4- Какое отношение имеет это к \sum^2, \sum^∞ и \sum^1 из 3?

Для вещественного $p \geq 1$ обозначим через $l^{(p)}$ множество всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, таких что ряд $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p$ сходится.

4-5. Докажите, что для любых двух элементов $x, y \in l^{(p)}$ ряд

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i - y_i|^p$$

сходится и что функция

$$(x, y) \leftarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

является метрикой в $l^{(p)}$.

4.4.3. Шары и сферы

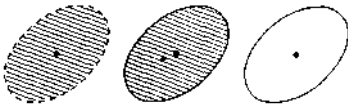
Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, a - его точка и r - положительное вещественное число. Множества

$$B_r(a) = \{ x \in X \mid \rho(a, x) < r \}, \quad (5)$$

$$D_r(a) = \{ x \in X \mid \rho(a, x) \leq r \}, \quad (6)$$

$$S_r(a) = \{ x \in X \mid \rho(a, x) = r \} \quad (7)$$

называются, соответственно, *открытым шаром* (или просто *шаром*), *замкнутым шаром* и *сферой* пространства (X, ρ) с *центром* в точке a и *радиусом* r .



4.4.4. Подпространства метрического пространства

Если (X, ρ) - метрическое пространство и $A \subset X$, то сужение метрики ρ на $A \times A$ является метрикой в A и $(A, \rho|_{A \times A})$ - метрическое пространство. Оно называется *подпространством* пространства (X, ρ) . Шар $D_1(0)$ и сфера $S_1(0)$ пространства \mathbf{R}^n (с евклидовой метрикой, см. 1.3) обозначаются символами D^n и S^{n-1} и называются *n-мерным шаром* и *(n - 1)-мерной сферой*. Они рассматриваются как метрические пространства - подпространства пространства \mathbf{R}^n .

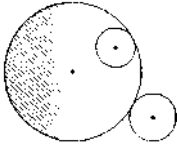
4-D. Убедитесь в том, что: D^1 есть отрезок $[-1; 1]$, D^2 есть круг, S^0 - пара точек $\{ -1, 1 \}$; S^1 - окружность. S^2 - сфера, D^3 - шар.

Последние два факта объясняют происхождение терминов шар и сфера (в контексте метрических пространств).

Некоторые свойства шаров и сфер в произвольном метрическом пространстве напоминают хорошо знакомые свойства плоских кругов и окружностей и пространственных шаров и сфер.

4-Е. Докажите, что для любых точек x, a произвольного метрического пространства и любого числа $r > \rho(x, a)$ имеют место включения

$$B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a) \quad \text{и} \quad D_{r-\rho(x,a)}(x) \subset D_r(a).$$



К примеру, если $y \in B_{r-\rho(x,a)}(x)$, то $\rho(y, x) < r - \rho(x, a)$, откуда, в силу неравенства треугольника, следует, что $\rho(y, a) < r$, что и означает, что $y \in B_r(a)$.

4.6. Что, если $r < \rho(x, a)$? Каков в этом случае аналог утверждения задачи 4.Е?

4.4.5. Удивительные шары

Однако в некоторых метрических пространствах шары и сферы могут обладать и неожиданными свойствами.

4.7. Каковы шары и сферы в плоскости \mathbf{R}^2 с метриками из 4.1 и 4.2 (ср. 4.4)?

4,8. Найдите $D_1(a)$, $D_{\frac{1}{2}}(a)$, и $S_{\frac{1}{2}}(a)$ в пространстве из задачи 4.А.

4-9. Найдите такое метрическое пространство и два таких шара в нем, чтобы шар большего радиуса содержался в шаре меньшего радиуса и не совпадал с ним.

4-10. Каково наименьшее число точек в том пространстве, которое требуется построить в задаче 4.9?

4-11. Докажите, что в условиях задачи 4.9 больший радиус не превышает удвоенного меньшего радиуса.

4.4.6. Отрезок — это то, что лежит между

4-12. Докажите, что отрезок с концами в точках $a, b \in \mathbf{R}^n$ можно описать как множество

$$\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b) \},$$

где ρ - евклидова метрика.

4-13. Как устроены множества такого вида в \mathbf{R}^n (или хотя бы в \mathbf{R}^2) с метриками $\rho^{(p)}$, $1 \leq p < +\infty$.

4.4.7. Ограниченные множества и шары

Подмножество A метрического пространства (X, ρ) называется *ограниченным*, если существует такое число $d > 0$, что $\rho(x, y) < d$ для любых $x, y \in A$. Точная нижняя грань таких d называется *диаметром* множества A и обозначается через $\text{diam} A$

4.F. Докажите, что множество A ограничено, тогда оно содержится в некотором шаре.

Покажите, что если $d = \text{diam} A$ и $a \in A$, то $A \subset D_d(a)$. Обратно: $\text{diam} D_d(a) \leq 2d$ (ср. 4.11).

4.14. Как связаны между собой радиус этого шара и $\text{diam} A$?

4.4.8. Нормы и нормированные пространства

Пусть X - векторное пространство (над полем \mathbf{R}). Функция $X \rightarrow \mathbf{R}_+ : x \mapsto \|x\|$ называется *нормой*, если

- (1) $\|x\| = 0$, тогда $x = 0$;
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любых $\lambda \in \mathbf{R}$ и $x \in X$;
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$.

4-15. Если $x \mapsto \|x\|$ - норма, то $\rho : X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+ : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ - метрика.

Векторное пространство с выделенной нормой называется *нормированным*. Метрика, определяемая нормой (как в 4.15), канонически превращает нормированное векторное пространство в метрическое.

4.16. Просмотрите задачи этого параграфа и определите, какие из упомянутых в них метрических пространств являются на самом деле нормированными векторными пространствами.

4.17. Докажите, что всякий шар в нормированном пространстве является симметричным относительно своего центра выпуклым множеством. (Напомним, что множество A называется *выпуклым* если для любых его точек $x, y \in A$ сегмент, соединяющий x, y , содержится в A . Конечно, поскольку это определение опирается на понятие *сегмента*, оно имеет смысл только в пространствах, где имеется понятие сегмента, соединяющего точки. Это так, в частности, в векторных и аффинных пространствах над \mathbf{R} .)

4-18. Всякое центрально-симметричное выпуклое замкнутое ограниченное множество в \mathbf{R}^n , не лежащее ни в каком отличном от \mathbf{R}^n аффинном подпространстве, является замкнутым шаром единичного

радиуса относительно некоторой нормы, которая однозначно определяется этим множеством.

4.4.9. Метрическая топология

4.G. Множество всех открытых шаров метрического пространства является базой некоторой топологии.

Сопоставьте утверждения 3.A, 3.B и 4.E.

Эту топологию называют *метрической* и говорят, что она порождается метрикой. Всякий раз, когда о метрическом пространстве говорят как о топологическом (например, когда говорят о его открытых и замкнутых множествах, окрестностях и т. п.), имеют в виду эту топологическую структуру.

4.H. Докажите, что введенная в \mathbf{R} стандартная топологическая структура в \mathbf{R} порождается метрикой $(x, y) \mapsto |x - y|$.

В стандартной метрике прямой \mathbf{R} шарами являются интервалы.

4-19. Какая топологическая структура задается метрикой задачи 4.A?

4.I. Критерий открытости. *Множество открыто в метрическом пространстве, когда оно содержит каждую свою точку вместе с некоторым шаром, центром которого она является.*

\Leftrightarrow Если множество вместе с каждой своей точкой содержит шар с центром в этой точке, то оно является объединением таких шаров, следовательно оно открыто.

\Leftrightarrow Если $a \in U$, где U открыто, то $a \in B_r(x)$ и $B_{r-\rho(a,x)}(a) \subset B_r(x) \subset U$.

4.4.10. Открытость и замкнутость шаров и сфер

4.20. Докажите, что всякий замкнутый шар замкнут (относительно метрической топологии).

4-21. Найдите замкнутый шар, являющийся открытым множеством.

4-22. Найдите открытый шар, являющийся замкнутым множеством.

4-23. Докажите, что сферы являются замкнутыми множествами.

4.24. Найдите сферу, являющуюся открытым множеством.

4.4.11. Метризуемые пространства

Топологическое пространство называется *метризуемым*, если его топологическая структура порождается некоторой метрикой.

4-*J*. Антидискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, неметризуемо.

В нем слишком мало открытых множеств. Если $x, y \in X$ и $r = \rho(x, y) > 0$, то шар $D_r(x)$ непуст и не совпадает со всем пространством.

4-*K*. Пространство с конечным множеством точек метризуемо, тогда оно дискретно.

(\Rightarrow) Пусть $x \in X$. Положим $r = \min\{\rho(x, y) | y \in X \setminus \{x\}\}$. Какие точки входят в шар $D_r(x)$? (\Leftarrow) Очевидно.

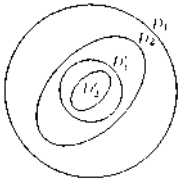
4.25. Какие из топологических пространств, приведенных в качестве примеров в 2, метризуемы?

4.4.12. Эквивалентные метрики

Две метрики в одном множестве называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же топологию.

4-26. Эквивалентны ли метрики в \mathbf{R}^n , введенные в 4.С, 4.1, and 4.2?

4-27. Метрики ρ_1, ρ_2 в X эквивалентны, если существует такие числа $c, C > 0$, что $c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$.



4-28. Обратное, вообще говоря, неверно.

4-29. Условие эквивалентности метрик, сформулированное в 10.2, можно ослабить. Как?

4-30. Метрики $\rho^{(p)}$ в \mathbf{R}^n , определенные выше перед задачей 4-3, эквивалентны.

4-31. Докажите, что следующие две метрики ρ_1, ρ_2 в множестве всех непрерывных функций $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ не эквивалентны:

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx; \quad \rho_2(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0; 1]\}.$$

Правда ли, что одна из порождаемых ими метрических топологий тоньше другой?

4.4.13. Действия с метриками

4'32. 1) Докажите, что если ρ_1, ρ_2 - метрики в X , то $\rho_1 + \rho_2$ и $\max\{\rho_1, \rho_2\}$ - тоже метрики в X .

2) Являются ли метриками функции

$$\min\{\rho_1, \rho_2\}, \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

и $\rho_1\rho_2$?

4.33. Докажите, что если $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ есть метрика, то:

(1) функция $(x, y) \mapsto \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ тоже метрика;

(2) функция $(x, y) \mapsto \min\{\rho(x, y), 1\}$ - тоже метрика;

(3) функция $(x, y) \mapsto f(\rho(x, y))$ тоже является метрикой, если f удовлетворяет следующим требованиям:

(a) $f(0) = 0$;

(b) f монотонно возрастает:

(c) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbf{R}_+$.

4-34. Докажите, что метрики ρ и $\frac{\rho}{1 + \rho}$ эквивалентны.

4.4.14. Расстояние от точки до множества

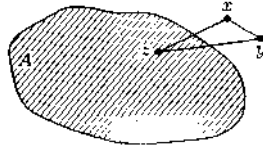
Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $A \subset X$, $b \in X$. Расстоянием от точки b до множества A называется число

$$\rho(b, A) = \inf\{\rho(b, a) \mid a \in A\}.$$

4.L. Докажите, что если A - замкнутое множество, то $\rho(b, A) = 0$, тогда $b \in A$.

Доказательство. Условие $\rho(b, A) = 0$ означает, что всякий шар с центром в точке b пересекается с A . А это значит, в силу того, что A замкнуто и его дополнение открыто, что b не принадлежит дополнению множества A . и значит входит в A .

4-35. Докажите, что $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| < \rho(x, y)$ для любого множества A и точек x, y того же метрического пространства.



$$\rho(x, A) \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

4.4.15x. Расстояния между множествами

Пусть A и B - ограниченные подмножества метрического пространства (X, ρ) . Расстоянием Хаусдорфа между A и B называется число

$$d_\rho(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A) \right\}.$$

4-Ах. Докажите, что расстояние Хаусдорфа в множестве ограниченных подмножеств метрического пространства удовлетворяет требованиям (2) и (3) из определения метрики.

Доказательство. Выполнение условия (2) очевидно.

Обозначим $\sup_{z \in A} \rho(a, B)$ через

$r(A, B)$, так что $d_\rho(A, B) = \max \{r(A, B), r(B, A)\}$. Для проверки

условия (3) достаточно доказать, что для любых множеств $A, B, C \subset X$ верно неравенство $r(A, C) \leq r(A, B) + r(B, C)$. Легко видеть, что $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + \rho(b, C)$ при всех $a \in A, b \in B$. Отсюда $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + r(B, C)$, значит,

$$\rho(a, C) \leq \inf_{b \in B} \rho(a, b) + r(B, C) = \rho(a, B) + r(B, C) \leq r(A, B) + r(B, C),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

4-Вх. Докажите, что для любого метрического пространства расстояние Хаусдорфа является метрикой в множестве его ограниченных замкнутых подмножеств.

Доказательство. Согласно 4.Ах, d_ρ удовлетворяет условиям (2) и (3) из определения метрики. Из 4.Л следует, что если расстояние Хаусдорфа между двумя замкнутыми множествами A и B равно нулю, то $A \subset B$ и $B \subset A$, т. е. $A = B$. Таким образом, d_ρ удовлетворяет и условию (1).

Пусть A и B - два ограниченных многоугольника на плоскости. (напомним, что это такое многоугольник. Многоугольник - это множество, состоящее из точек простой замкнутой ломаной и точек, охваченных ею. Под простой замкнутой ломаной понимают циклическую последовательность отрезков, в которой каждый отрезок

начинается в конце предыдущего и других пересечений отрезки не имеют.)

Положим

$$d_{\Delta}(A, B) = S(A) + S(B) - 2S(A \cap B),$$

где $S(C)$ - площадь многоугольника C .

4-Сх. Докажите, что d_{Δ} является метрикой на множестве всех плоских многоугольников.

Доказательство. Функция $d_{\Delta}(A, B)$ - это площадь симметрической разности многоугольников A и B , т. е. площадь множества $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ясно, что требует проверки лишь неравенство треугольника. Докажите и используйте включение $A \setminus B \subset (C \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4-Dх. Докажите, что на множестве выпуклых многоугольников метрика d_{Δ} эквивалентна метрике Хаусдорфа.

4-Eх. Докажите, что на множестве всех (не обязательно выпуклых) многоугольников метрика d_{Δ} не эквивалентна метрике Хаусдорфа.

4.4.16х. Ультраматрики и p -адические числа

Метрика ρ называется *ультраматрикой*, если она удовлетворяет *ультраматрическому неравенству треугольника*:

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$$

для любых x, y, z .

Метрическое пространство (X, ρ) с ультраматрикой ρ называется *ультраматрическим*.

4-Fх. Среди метрик, введенных и задачах 4-A-4-2, только одна является ультраматрикой. Какая?

Очевидно, что метрика из 4. A - ультраматрика. То, что остальные метрики таковыми не являются, следует хотя бы из того, что для каждой из них найдутся такие различные точки x, y и z , что $\rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

4-Gх. Докажите, что в ультраматрическом пространстве все треугольники - равнобедренные (т. е. для любых трех точек a, b и c два из трех расстояний $\rho(a, b)$, $\rho(b, c)$ и $\rho(a, c)$ равны).

Доказательство. Из определения ультраматрики следует, что среди попарных расстояний между точками a, b и c не может быть одного, большего двух других

4.Hx. Докажите, что в ультраметрическом пространстве сферы не только замкнуты (см. задачу 4.23), но еще и открыты.

Доказательство. В силу 4.Gx, если $y \in S_r(x)$ и $r > s > 0$, то $B_s(y) \subset S_r(x)$.

Важнейшим примером ультраметрики является *p-адическая метрика* в множестве \mathbf{Q} всех рациональных чисел: пусть p - простое число и разность $x - y$ различных чисел $x, y \in \mathbf{Q}$ представляется в виде $\frac{r}{s}p^\alpha$, где r, s и α — целые, а числа r и s взаимно просты с p . Положим $\rho(x, y) = p^{-\alpha}$ (ясно, что следует считать $\rho(x, x) = 0$).

4.Ix. Докажите, что это - ультраметрика.

Доказательство. Пусть $x - z = \frac{r_1}{s_1}p^{\alpha_1}$ и $z - y = \frac{r_2}{s_2}p^{\alpha_2}$. Считаем, для определенности, что $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Имеем:

$$x - y = p^{\alpha_1} \left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} p^{\alpha_2 - \alpha_1} \right) = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1 p^{\alpha_2 - \alpha_1}}{s_1 s_2} \cdot p^{\alpha_1},$$

значит $\rho(x, y) \leq p^{-\alpha_1} = \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$.

4.4.17x. Асимметрики

Функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *асимметрикой* в множестве X , если

- (1) $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(y, x) = 0$, тогда $x = y$;
- (2) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$.

Так что асимметрика удовлетворяет условиям 1 и 3 определения метрики, но не удовлетворяет условию 2.

Пример асимметрики "из жизни" наименьшая длина пути на автомобиле между точками в городе, в котором имеются улицы с односторонним движением.

4.Jx. Докажите, что если функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ является асимметрикой, то функция $(x, y) \mapsto \rho(x, y) + \rho(y, x)$ - метрика в X .

Пусть A и B - ограниченные подмножества метрического пространства (X, ρ) . *Асимметрикой от A до B* называется число

$$a_\rho(A, B) = \sup_{b \in B} \rho(b, A).$$

4.Kx. Асимметрика a_ρ в множестве ограниченных подмножеств метрического пространства удовлетворяет неравенству треугольника из определения асимметрики.

4.Lx. В метрическом пространстве (X, ρ) множество B содержится в замыкании множества A , тогда $a_\rho(A, B) = 0$.

4.Мх. Докажите, что a_ρ является асимметрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств любого метрического пространства

(X, ρ) .

Пусть A и B - многоугольники на плоскости. Положим

$$a_\Delta(A, B) = S(B) - S(A \cap B) = S(B \setminus A),$$

где $S(C)$ - площадь многоугольника C .

4.1х. Докажите, что a_Δ является асимметрикой на множестве всех плоских многоугольников.

Пара (X, ρ) , где ρ - асимметрика в X , называется *асимметрическим пространством*. Всякое метрическое пространство является и асимметрическим. В асимметрическом пространстве шары (открытые и замкнутые) и сферы определяются так же, как и в метрическом пространстве, см. 4.3.

4.Нх. Множество всех открытых шаров асимметрического пространства является базой некоторой топологии.

Говорят, что эту топологию порождает асимметрика.

4.2х. Докажите, что формула $a(x, y) = \max\{x - y, 0\}$ определяет асимметрику в $[0; \infty)$, и что топология, порождаемая этой асимметрикой совпадает с топологией стрелки (см. 2,2).

4.5. Подпространства

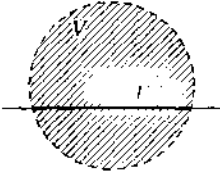
4.5.1. Определение и простейшие примеры

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство, $A \subset X$. Обозначим через Ω_A совокупность множеств вида $A \cap V$, где $V \in \Omega$,

$$\Omega_A = \{A \cap V \mid V \in \Omega\}.$$

5.А. Совокупность Ω_A есть топологическая структура в множестве A .

Пара (A, Ω_A) называется *подпространством* пространства (X, Ω) , совокупность Ω_A - *относительной* топологией или топологией, *индуцированной* в A топологией Ω , а ее элементы - множествами, *открытыми в A* .



Нужно проверить, что Ω_A удовлетворяет аксиомам топологической структуры. Проверим первую аксиому. Пусть $\Gamma \subset \Omega_A$ - некоторая совокупность множеств, принадлежащих Ω_A . Нам следует убедиться в том, что $\cup_{U \in \Gamma} U \in \Omega_A$. Для каждого $U \in \Gamma$ найдём такое множество $U_X \in \Omega$, что $U = A \cap U_X$. Это возможно согласно определению множества Ω_A .

Преобразуем интересующее нас множество:

$1 \cup_{U \in \Gamma} U = \cup_{U \in \Gamma} (A \cap U_X) = A \cap (\cup_{U \in \Gamma} U_X)$. Множество $\cup_{U \in \Gamma} U_X$ принадлежит Ω (то есть открыто в X) как объединение множеств, открытых в X . (Здесь мы пользуемся тем, что Ω , будучи топологической структурой в X , удовлетворяет первой аксиоме топологической структуры.) Поэтому $A \cap (\cup_{U \in \Gamma} U_X)$ принадлежит Ω_A . Аналогично проверяется вторая аксиома. Третья аксиома следует из того, что $A = A \cap X$, а $\emptyset = A \cap \emptyset$.

5.В. Стандартная топология в \mathbf{R}^1 и топология, индуцированная в \mathbf{R}^1 как в подмножестве плоскости, совпадают.

Покажем, что подмножество в \mathbf{R} открыто в относительной топологии, тогда оно открыто в стандартной топологии прямой. \Leftrightarrow Поскольку пересечение круга с прямой или пусто, или является интервалом, а всякое открытое подмножество плоскости есть объединение открытых кругов, то пересечение открытого подмножества плоскости с прямой есть объединение интервалов, т. е. оно открыто на прямой. \Leftarrow Для всякого объединения интервалов на прямой существует объединение кругов, пересечение которого с прямой совпадает с данным объединением интервалов.

5.1. Как по базе топологии к X построить базу топологии, индуцированной на $A \subset X$?

5.2. Опишите топологические структуры, которые индуцируются:

- (1) в множестве натуральных чисел \mathbf{N} топологией прямой;
- (2) в \mathbf{N} топологией стрелки;
- (3) в двухточечном множестве $\{1,2\}$ топологией пространства \mathbf{R}_{T1} ;
- (4) в том же множестве $\{1,2\}$ топологией стрелки.

5.3. Открыт ли полуоткрытый промежуток $[0; 1)$ в отрезке $[0; 2]$, рассматриваемом как подпространство прямой \mathbf{R}^1 ?

5. С. Множество F замкнуто в подпространстве $A \subset X$, тогда

$F = A \cap E$, где множество E замкнуто в пространстве X .

Если множество F замкнуто в A , то его дополнение $A \setminus F$ в A открыто в A , т. е. $A \setminus F = A \cap U$, где U открыто в X . Каким же замкнутым множеством высекается множество F на A ? Оно высекается множеством $X \setminus U$. Действительно,

$$A \cap (X \setminus U) = A \setminus (A \cap U) = A \setminus (A \setminus F) = F.$$

Аналогично доказывается, что пересечение с A множества, замкнутого в X , замкнуто в A .

5.4. Докажите, что если подмножество подпространства открыто (замкнуто) в объемлющем пространстве, то оно также открыто (соответственно, замкнуто) в подпространстве.

4.5.2. Относительность открытости

Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в объемлющем пространстве.

5.D. Единственным открытым множеством прямой \mathbf{R}^1 , открытым и в плоскости \mathbf{R}^2 , является пустое множество \emptyset .

Никакой круг в \mathbf{R}^2 не содержится ни в каком подмножестве прямой \mathbf{R} . Справедливо следующее утверждение.

5.E. Открытые множества открытого подпространства открыты и во всем пространстве. (Другими словами, если $A \in \Omega$, то $\Omega_A \subset \Omega$.)

Если $A \in \Omega$, $B \in \Omega_A$, то $B = A \cap U$, где $U \in \Omega$, значит множество B принадлежит топологии Ω , как пересечение двух множеств, A и U , принадлежащих топологии Ω .

Таково же соотношение между замкнутостью в подпространстве и в пространстве. В частности:

5.F. Замкнутые множества замкнутого подпространства замкнуты во всем пространстве.

Рассуждайте как в предыдущей задаче, только используйте 5. C вместо определения топологии подпространства.

5.5. Докажите, что множество U открыто в X , тогда каждая его точка обладает в X такой окрестностью V , что множество $U \cap V$ открыто в V . Имея в виду этот факт, говорят, что открытость является локальным свойством. Действительно, утверждение 5.5 можно понимать следующим образом: множество открыто, тогда оно открыто в окрестности каждой своей точки.

5.6. Покажите, что замкнутость не является локальным свойством.

4.5.3. Транзитивность относительной топологии

5. G Транзитивность относительной топологии. Пусть (X, Ω) топологическое пространство и $X \supset A \supset B$. Тогда $(\Omega_A)_B = \Omega_B$, т. е. топология, которая индуцируется в B топологией, индуцированной в A , совпадает с топологией, индуцированной непосредственно из X .

В основе доказательства лежит тождество $(U \cap A) \cap B = U \cap B$. Оно имеет место, поскольку $B \subset A$, и применяется к $U \in \Omega$. Когда U пробегает Ω , правая часть равенства $(U \cap A) \cap B = U \cap B$ пробегает Ω_B , тогда как левая часть пробегает $(\Omega_A)_B$. Действительно, элементы топологии Ω_B получаются как $U \cap B$ с $U \in \Omega$, а элементы топологии $(\Omega_A)_B$ получаются как $V \cap B$ с $V \in \Omega_A$, но V , в свою очередь, как элемент топологии Ω_A , представляется в виде $U \cap A$, где $U \in \Omega$.

5.7. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, и пусть $A \subset X$. Тогда топология, порождаемая в A метрикой $\rho|_{A \times A}$, совпадает с топологией, которую индуцирует в A топология, порожденная в X метрикой ρ .

5.8. Для доказательства совпадения нужно доказывать два включения. Какое включение здесь менее очевидно?)

4.5.4. Традиционная неполнота обозначений

Рассматривать различные топологические структуры в одном и том же множестве приходится сравнительно редко. Поэтому обычно топологическое пространство обозначают так же, как и его множество точек, т. е. вместо (X, Ω) пишут просто X . Аналогично поступают и в случае метрических пространств: вместо (X, ρ) пишут X .

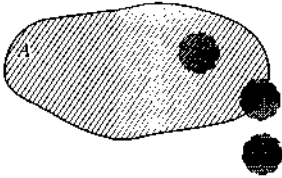
4.6. Расположение точек относительно множества

Этот параграф посвящен дальнейшему расширению словаря, необходимого для обсуждения явлений, происходящих в топологических пространствах.

4.6.1. Внутренние, внешние и граничные точки

Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$ и $b \in X$. Точка b называется:

- *внутренней* точкой множества A , если у нее имеется окрестность, содержащаяся в A ;
- *внешней* точкой множества A , если у нее имеется окрестность, не пересекающаяся с A ;
- *границной* точкой множества A , если всякая её окрестность пересекается и с A и с его дополнением.



4.6.2. Внутренность и внешность

Внутренностью множества, лежащего в топологическом пространстве, называется наибольшее (по включению) открытое множество, содержащееся в нем (т. е. его открытое подмножество, содержащее любое другое его открытое подмножество). Внутренность множества A обозначается символом $\text{Int } A$ или, подробнее, $\text{Int}_X A$ (от французского *interieur* и английского *interior*).

б.А. Всякое подмножество топологического пространства обладает внутренностью. Ею является объединение всех открытых множеств, содержащихся в этом множестве.

Объединение всех открытых множеств, содержащихся в множестве A , во-первых, открыто (как объединение открытых множеств), а, во-вторых, содержит любое открытое множество, содержащееся в A , то есть является наибольшим из этих множеств.

б.В. Внутренность всякого множества есть множество его внутренних точек.

Пусть точка x внутренняя, т. е. существует открытое множество U_x с $x \in U_x \subset A$. Тогда $U_x \subset \text{Int } A$ (поскольку $\text{Int } A$ - наибольшее из всех открытых множеств, содержащихся в A) а, значит, и $x \in \text{Int } A$. Обратно, если $x \in \text{Int } A$, то само множество $\text{Int } A$ и есть содержащаяся в A окрестность точки x

б. С. Множество открыто, когда оно совпадает со своей внутренностью.

\Leftrightarrow Если U - открытое множество, то оно и является наибольшим среди всех своих открытых подмножеств. \Leftarrow Если множество

совпадает со своей внутренностью, то оно открыто, поскольку внутренность любого множества открыта.

6.D. Докажите, что в \mathbf{R} :

$$(a) \text{Int}[0; 1) = (0; 1), \quad (b) \text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset, \quad (c) \text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset.$$

(1) Множество $[0; 1)$ не открыто на прямой, а $(0; 1)$ открыто, поэтому $\text{Int}[0; 1) = (0; 1)$.

(2) Поскольку в любом интервале имеются иррациональные точки, то не существует ни одного открытого в обычной топологии множества, лежащего в \mathbb{Q} . Значит, $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$.

(3) Поскольку в любом интервале содержатся рациональные точки, то не существует ни одного открытого в обычной топологии множества, лежащего в $\mathbb{K} \setminus \mathbb{Q}$. Значит, $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.

6.1. Найдите внутренность множества $\{a, b, d\}$ в пространстве \mathbb{I} .

6.2. Найдите внутренность интервала $(0; 1)$ на прямой с топологией Зариского.

Внешность множества называется наибольшее не пересекающееся с ним открытое множество. Ясно, что внешность A совпадает с $\text{Int}(X \setminus A)$.

4.6.3. Замыкание

Замыканием множества называется наименьшее содержащее его замкнутое множество. Замыкание множества A обозначается символом $\text{Cl}_X A$ или, подробнее, $\text{Cl}_X A$ (от французского *cloture* и английского *closure*).

6.E. Всякое подмножество топологического пространства обладает замыканием. Им является пересечение всех замкнутых множеств, содержащих это множество.

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A . во-первых, замкнуто (как пересечение замкнутых множеств), а, во-вторых, содержится в любом замкнутом множестве, содержащем A . то есть является наименьшим из этих множеств. Ср. доказательство теоремы 6.A. Вообще, свойства замыканий можно получить из свойств внутренностей заменой объединений на пересечения, и наоборот.

6.3. 1) Если A - подпространство пространства X и $B \subset A$, то $\text{Cl}_A B = (\text{Cl}_X B) \cap A$. 2). Верно ли, что $\text{Int}_A B = (\text{Int}_X B) \cap A$?

Точка b называется **ТОЧКОЙ ПРИКОСНОВЕНИЯ** множества A , если всякая ее окрестность пересекается с A .

6.F. Замыкание множества A совпадает с множеством точек прикосновения множества A .

Если $x \notin \text{Cl}A$, то найдется замкнутое множество F , такое, что $F \supset A$ и $x \notin F$, значит $x \in U = X \setminus F$. таким образом, x не есть точка прикосновения множества A . Докажите обратное утверждение самостоятельно, ср. 6.Н.

6.Г. Множество A замкнуто, тогда $A = \text{Cl}A$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6. С.

6.Н. Замыкание множества совпадает с дополнением его внешности, т. е. $\text{Cl}A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$, где X - пространство и $A \subset X$.

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A , совпадает с дополнением объединения всех открытых множеств, содержащихся в множестве A .

6.И. Докажите, что в \mathbf{R} :

$$(a) \text{Cl}[0; 1) = [0; 1], \quad (b) \text{Cl}\mathbf{Q} = \mathbf{R}, \quad (c) \text{Cl}(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R}.$$

(a) Полуоткрытый промежуток $[0; 1)$ не замкнут, а отрезок $[0; 1]$ замкнут: (b-с) внешность каждого из множеств \mathbf{Q} и $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ пуста, поскольку во всяком интервале есть, как рациональные, так и иррациональные точки.

6.4. Найдите замыкание множества $\{a\}$ в \mathbb{U} .

4.6.4. Замыкание в метрическом пространстве

Пусть A - подмножество и b - точка метрического пространства (X, ρ) . Напомним (см. 4), что расстоянием от точки b до множества A называется число $\rho(b, A) = \inf\{\rho(b, a) \mid a \in A\}$.

6.И. Докажите, что $b \in \text{Cl}A$, тогда $\rho(b, A) = 0$.

Доказательство. (\Rightarrow) Если $b \in \text{Cl}A$, то b - точка прикосновения к A , следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \cap D_\varepsilon(b)$; значит, $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \rho(a, b) < \varepsilon$, таким образом, $\rho(b, A) = 0$.
 (\Leftarrow) .

4.6.5. Граница

Границей множества A называется множество $\text{Cl}A \setminus \text{Int}A$. Обозначается граница множества A символом $\text{Fr}A$ или, подробнее, $\text{Fr}_X A$ (от французского *frontiere* и английского *frontier*).

6.5. Найдите в пространстве \mathbb{U} границу множества $\{a\}$.

6.К. Граница множества совпадает с множеством его граничных точек. Если $x \in \text{Fr}A$, то $x \in \text{Cl}A$ и $x \notin \text{Int}A$, значит, во-первых, всякая окрестность точки x пересекается с A , во-вторых, никакая окрестность этой точки не содержится в A , следовательно, всякая окрестность пересекается с дополнением множества A . Таким образом, точка

x - граничная. Докажите обратное утверждение самостоятельно.

6.L. Множество A замкнуто, тогда $\text{Fr } A \subset A$.

Так как $\text{Int } A \subset A$, то $\text{Cl } A = A$, тогда $\text{Fr } A \subset A$.

6.6. 1) Докажите, что $\text{Fr } A = \text{Fr}(X \setminus A)$. 2) Найдите формулу для $\text{Fr } A$, в которую A и $X \setminus A$ входили бы симметрично.

6.7. Граница множества равна пересечению замыканий этого множества и его дополнения. Иначе говоря, $\text{Fr } A = \text{Cl } A \cap \text{Cl}(X \setminus A)$.

4.6.6. Внутренность и замыкание при утоньчении топологии

6.8. Пусть Ω_1, Ω_2 - топологические структуры в X , $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и пусть Cl_i - замыкание относительно Ω_i . Тогда $\text{Cl}_1 A \supset \text{Cl}_2 A$ для любого $A \subset X$.

6.9. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о внутренности.

4.6.7. Внутренность и замыкание как операции над множествами

6.10. Докажите, что если $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$.

6.11. Докажите, что $\text{Int } \text{Int } A = \text{Int } A$.

6.12. Правда ли, что для любых множеств A и B справедливы равенства:

$$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B, \quad (8) \quad \text{Int}(A \cup B) = \text{Int } A \cup \text{Int } B? \quad (9)$$

6.13. Приведите пример, в котором одно из равенств предыдущей задачи не выполняется.

6.14. В примере, который вы построили, решив предыдущую задачу, равенство не справедливо, но, вероятно, имеет место включение одной части равенства в другую. Справедливо ли это включение для любых A и B ?

6.15. Проведите исследование операции Cl , аналогичное намеченному в задачах 6.10-6.14 исследованию операции Int .

6.16. Найдите $\text{Cl}\{1\}$, $\text{Int}[0; 1]$ и $\text{Fr}(2; +\infty)$ в стрелке.

6.17. Найдите $\text{Int}((0; 1] \cup \{2\})$, $\text{Cl}\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, и $\text{Fr } \mathbb{Q}$ в \mathbb{R} .

6.18. Найдите $\text{Cl } \mathbb{N}$, $\text{Int}(0; 1)$, и $\text{Fr}[0; 1]$ в пространстве \mathbb{R}_{T_1} . Как в этом пространстве находить замыкание и внутренность произвольного множества?

6.19. Содержит ли сфера границу открытого шара с теми же центром и радиусом?

6.20. Содержит ли сфера границу замкнутого шара с теми же центром и радиусом?

6.21. Найдите сферу, не пересекающуюся с замыканием открытого шара с теми же центром и радиусом.

4.6.8. Попеременное применение Cl и Int

6.22 Задача Куратовского. Какое наибольшее число попарно различных множеств можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции Cl и Int ?

Следующая серия задач поможет Вам решить задачу 6.22.

6.22.1. Найдите такое множество $A \subset \mathbf{R}$, чтобы A , $\text{Cl } A$, и $\text{Int } A$ были бы попарно различны.

6.22.2. Существует ли такое множество $A \subset \mathbf{R}$, что

- (1) A , $\text{Cl } A$, $\text{Int } A$, $\text{Cl } \text{Int } A$ попарно различны;
- (2) A , $\text{Cl } A$, $\text{Int } A$, $\text{Int } \text{Cl } A$ попарно различны;
- (3) A , $\text{Cl } A$, $\text{Int } A$, $\text{Cl } \text{Int } A$, $\text{Int } \text{Cl } A$ попарно различны?

Если такие множества удалось построить, то продолжайте в том же духе, пока получается. Если эта цепочка перестала удлиняться, то попытайтесь сформулировать теорему, объясняющую неудачу в построениях.

6.22.3. Докажите, что $\text{Cl } \text{Int } \text{Cl } \text{Int } A = \text{Cl } \text{Int } A$.

4.6.9. Множества с общей границей

6.23. Постройте три открытых множества на прямой, имеющих одну и ту же границу. Можно ли в Вашем построении увеличить число множеств?

4.6.10. Выпуклость и операции Int , Cl и Fr

Напомним, что множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит весь отрезок, соединяющий их (другими словами, для любых $x, y \in A$ каждая точка z , принадлежащая отрезку $[x, y]$, принадлежит и A).

6.24. Если A - выпуклое подмножество пространства \mathbf{R}^n , то множества $\text{Cl } A$ и $\text{Int } A$ тоже выпуклы.

6.25. Докажите, что выпуклое подмножество A пространства \mathbf{R}^n или содержит шар или же содержится в $(n - 1)$ -мерном аффинном подпространстве пространства \mathbf{R}^n .

6.26. При каких условиях $\text{Fg } A$ выпуклое множество?

4.6.11. Задание топологии посредством операций замыкания и внутренности

6.27. Пусть в множестве всех подмножеств множества X задана операция Cl_* , обладающая следующими свойствами:

- (1) $\text{Cl}_* \emptyset = \emptyset$;
- (2) $\text{Cl}_* A \supset A$;
- (3) $\text{Cl}_*(A \cup B) = \text{Cl}_* A \cup \text{Cl}_* B$;
- (4) $\text{Cl}_* \text{Cl}_* A = \text{Cl}_* A$.

Докажите, что тогда $\Omega = \{U \subset X \mid \text{Cl}_*(X \setminus U) = X \setminus U\}$ является топологической структурой и $\text{Cl}_* A$ совпадает с замыканием $\text{Cl } A$ в пространстве (X, Ω) .

6.28. Найдите систему аксиом для Int , аналогичную системе аксиом для Cl , данной в 6.27.

4.6.12. Плотные множества

Пусть A и B - подмножества топологического пространства X . Говорят, что A *плотно в B* , если $\text{Cl } A \supset B$, и что A *всюду плотно*, если $\text{Cl } A = X$.
6.М. *Множество всюду плотно в некотором пространстве, тогда оно пересекается со всяким непустым, открытым в этом пространстве множеством.*

\Leftrightarrow Всякое непустое открытое множество является окрестностью любой своей точки. Так как эта точка должна принадлежать замыканию всюду плотного множества A , то ее окрестность пересекается с A .
 \Leftarrow Множество, пересекающееся со всяким непустым открытым множеством, содержится в единственном замкнутом множестве - всем пространстве, которое и будет его замыканием.

6.Н. Множество \mathbf{Q} всюду плотно в \mathbf{R} .

См. 6.17.

6.29. Дайте прямое описание множеств, всюду плотных в:

- 1) антидискретном пространстве;
- 2) стрелке;
- 3) $\mathbf{R}_{\text{Т}}$.

6.30. Докажите, что топологическое пространство дискретно, когда в нем имеется единственное всюду плотное подмножество (какое, кстати?).

6.31. Каким свойством обладает топологическая структура, если в пространстве существует всюду плотное одноточечное множество? Найдите соответствующий пример в 2.

6.32. Верно ли, что объединение всюду плотных множеств всюду плотно, пересечение всюду плотных множеств всюду плотно?

- 6.33. Докажите, что пересечение двух открытых всюду плотных множеств всюду плотно.
- 6.34- Какое условие в предыдущей задаче является лишним?
- 6.35. 1) Докажите, что пересечение счетного семейства открытых всюду плотных в пространстве \mathbf{R} множеств всюду плотно. 2) Можно ли заменить \mathbf{R} на произвольное топологическое пространство?
- 6.36. Докажите, что множество \mathbf{Q} не является пересечением никакого счетного семейства открытых всюду плотных в \mathbf{R} множеств.

4.6.13. Нигде не плотные множества

Множество называется *нигде не плотным*, если его внешность всюду плотна.

6. 37. Может ли множество быть одновременно всюду плотным и нигде не плотным?
- 6.О. Множество A нигде не плотно, тогда в любой окрестности любой точки существует точка, входящая в дополнение множества A вместе с некоторой своей окрестностью.
- Сформулированное условие означает, что в любой окрестности любой точки найдется внешняя точка множества A , таким образом внешность A всюду плотна.
- 6.38. Что можно сказать о внутренности нигде не плотного множества?
- 6.39. Является ли \mathbf{R} нигде не плотным в \mathbf{R}^2 ?
- 6-40. Докажите, что если A нигде не плотно, то $\text{Int Cl } A = \emptyset$.
- 6.41. Докажите, что граница замкнутого множества нигде не плотна. Верно ли это утверждение для границы открытого множества; произвольного множества?
- 6.42. Докажите, что объединение конечного набора нигде не плотных множеств нигде не плотно.
- 6.43. Докажите, что для всякого множества A существует наибольшее открытое множество B , в котором A плотно. Крайние случаи $B = X$ и $B = \emptyset$ означают, что A всюду плотно или A нигде не плотно соответственно.
- 6.44. Докажите, что \mathbf{R} не является объединением счетного числа нигде не плотных множеств.

4.6.14. Предельные и изолированные точки

Точка b называется *предельной точкой* множества A , если всякая ее окрестность пересекается с множеством $A \setminus b$.

6. P. Всякая предельная точка множества является его точкой прикосновения.

6.45. Постройте пример, демонстрирующий, что точка прикосновения может не быть предельной точкой.

Точка множества A , не являющаяся предельной для этого множества, называется *изолированной*.

6. Q. Множество A замкнуто, тогда оно содержит все свои предельные точки.

Вспользуйтесь тем, что всякая точка множества $\text{Cl } A \setminus A$ является предельной.

6-46. Укажите предельные и изолированные точки множеств $(0; 1] \cup \{2\}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ в \mathbf{Q} и в \mathbf{R} .

6.47. Укажите предельные и изолированные точки множества \mathbf{N} в \mathbf{R}_{TL} .

4.6.15. Локально замкнутые множества

Говорят, что подмножество топологического пространства *локально замкнуто*, если каждая его точка обладает такой окрестностью U , что $A \cap U$ замкнуто в U (ср. 5.5 -5.6).

6-48. Докажите, что следующие условия равносильны:

(1) A локально замкнуто в X :

(2) A есть открытое подмножество своего замыкания $\text{Cl}_X A$;

(3) A - пересечение открытого и замкнутого подмножеств пространства X .

4.7. Упорядоченные множества

Этот параграф посвящен структурам порядка, которые играют в математике роль, сравнимую с ролью топологических структур. После краткого общего введения мы сосредоточим внимание на связях между структурами этих двух типов. Как и метрические пространства, частично упорядоченные множества определяют естественные

топологические структуры и служат источниками примеров топологических пространств.

4.7.1. Строгие порядки

Напомним, что бинарное отношение ρ в множестве X называется *отношением строгого частичного порядка*, или просто *строгим порядком*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

- *Иррефлексивность*. Ни для какого $a \in X$ не верно, что $a \rho a$,
- *Транзитивность*. Для любых $a, b, c \in X$ из $a \rho b$ и $b \rho c$ следует $a \rho c$.

7. А *Антисимметричность*. Если ρ - строгий порядок в множестве X , то ни для каких $a, b \in X$ не могут выполняться одновременно как $a \rho b$, так и $b \rho a$.

7. В. Отношение $<$ в множестве вещественных чисел \mathbf{R} является строгим порядком.

Формула $a \rho b$ иногда читается как "а меньше, чем b" или "b больше, чем a", но часто для того, чтобы не слишком связывать общее отношения порядка с отношением порядка в \mathbf{R} . вместо этого говорят "b следует за a" или "a предшествует b".

4.7.2. Нестрогие порядки

Бинарное отношение \preceq в множестве X называется *отношением нестрогого частичного порядка*, или просто *нестрогим порядком*, если оно удовлетворяет следующим трём условиям:

- *Транзитивность*. Если $a \preceq b$ и $b \preceq c$, то $a \preceq c$.
- *Антисимметричность*. Если $a \preceq b$ и $b \preceq a$, то $a = b$.
- *Рефлексивность*, $a \preceq a$ для любого a .

7. С. Отношение \leq в \mathbf{R} является нестрогим порядком.

7. D. В множестве \mathbf{N} натуральных чисел отношение $a|b$ (т. е. a является делителем b) есть отношение нестрогого частичного порядка.

7. I. Является ли отношение $a|b$ нестрогим порядком в множестве \mathbf{Z} целых чисел?

7. E. В множестве подмножеств множества X отношение включения является нестрогим порядком.

4.7.3. Взаимосвязь между строгими и нестрогими порядками

7.F. С каждым строгим порядком ρ ассоциировано бинарное отношение \preceq , определённое в том же множестве следующим образом: $a \preceq b$, если либо $a \rho b$, либо $a = b$. Это - нестрогий порядок.

Требуется проверить, что отношение " $a \rho b$, либо $a = b$ " удовлетворяет трём условиям из определения нестрогого порядка, причём проверка должна опираться исключительно на то, что ρ удовлетворяет условиям из определения строгого порядка. Проверим транзитивность. Пусть $a \preceq b$ и $b \preceq c$. Это означает, что либо $a \rho b$ и $b \rho c$, либо $a = b$ и $b \rho c$, либо $a \rho b$ и $b = c$, либо $a = b$ и $b = c$. В первом случае $a \rho c$, в силу транзитивности отношения ρ , и значит $a \preceq c$; во втором случае $a = b \rho c$, так что $a \preceq c$ и $a \rho c$; в третьем случае $a \rho b = c$, и значит $a \rho c$ и $a \preceq c$; в четвертом случае $a = b = c$, так что $a \preceq c$ и $a \rho c$. Аналогично проверяются два других свойства.

7. G. С каждым нестрогим порядком \preceq ассоциировано бинарное отношение ρ , определённое в том же множестве следующим образом: $a \rho b$, если $a \preceq b$ и $a \neq b$. Это - строгий порядок.

7.H. Конструкции предыдущих двух задач взаимно обратны: примененные одна за другой в любом порядке, они дают исходное отношение.

Таким образом, строгий и нестрогий порядки определяются друг по другу и являются разными ликами одной и той же структуры порядка. Мы уже встречались с подобным явлением в топологии: открытые и замкнутые множества топологического пространства определяются друг по другу и дают различные способы задания топологии.

Множество, снабженное отношением частичного порядка (строгим или нестрогим), называется (*частично*) *упорядоченным множеством* или, короче, *чумом*. Другими словами, частично упорядоченное множество (чум) - это пара (X, ρ) , составленная из множества X и отношения строгого частичного порядка ρ на нем. Конечно, сделав необходимые оговорки, вместо строгого частичного порядка можно взять соответствующий нестрогий. Каким порядком, строгим или нестрогим, пользуются в каждом конкретном случае - вопрос удобства, вкуса и традиции. Хотя удобно иметь обе версии, нестрогие порядки постепенно завоевывают одну конкретную ситуацию за другой. Никто, например, не вводит обозначений для строгой делимости, а обозначение \subseteq для нестрогого включения множеств вытесняется обозначением \subset , которое уже почти никогда не понимается как

строгое включение. В абстрактной ситуации мы будем пользоваться и тем и другим порядком, обозначая строгий порядок значком ρ , а нестрогий - значком \preceq .

4.7.4. Конусы

Пусть (X, ρ) - упорядоченное множество и $a \in X$. Множество $\{x \in X \mid \rho x\}$ называется *верхним конусом* элемента a , а множество $\{x \in X \mid x \rho a\}$ - его *нижним конусом*. Сам элемент a не принадлежит своим конусам. Добавив его к ним, мы получим *пополненные конусы*: *верхний пополненный конус* или *звезду* $C_X^+(a) = \{x \in X \mid a \preceq x\}$ и *нижний пополненный конус* $C_X^-(a) = \{x \in X \mid x \preceq a\}$.

7.1 Свойства конусов. Пусть (X, ρ) частично упорядоченное множество.

- (1) $C_X^+(b) \subset C_X^+(a)$, если $b \in C_X^+(a)$;
- (2) $a \in C_X^+(a)$ для любого $a \in X$.
- (3) если $C_X^+(a) = C_X^+(b)$, то $a = b$;

Первое утверждение следует из транзитивности порядка. В самом деле, рассмотрим произвольный элемент $c \in C_X^+(b)$. По определению конуса, $b \preceq c$, а условие $b \in C_X^+(a)$ означает, что $a \preceq b$. В силу транзитивности, отсюда следует, что $a \preceq c$, то есть $c \in C_X^+(a)$. Тем самым, мы показали, что каждый элемент конуса $C_X^+(b)$ принадлежит и $C_X^+(a)$, так что $C_X^+(b) \subset C_X^+(a)$, что и требовалось показать.

Второе утверждение следует из определения конуса и рефлексивности порядка. Действительно, по определению, $C_X^+(a)$ состоит из таких b , что $a \preceq b$, а в силу рефлексивности порядка $a \preceq a$.

Третье утверждение вытекает аналогичным образом из антисимметричности: равенство $C_X^+(a) = C_X^+(b)$ вместе со вторым утверждением влечёт $a \preceq b$ и $b \preceq a$, а отсюда и из антисимметричности следует, что $a = b$.

7.1 Конусы определяют порядок. Пусть X - произвольное множество, и пусть в нём для каждого элемента $a \in X$ определено множество C_a . Если

- (1) $C_b \subset C_a$ для любого $b \in C_a$;
- (2) $a \in C_a$ для любого $a \in X$,
- (3) если $C_a = C_b$, то $a = b$;

то отношение: $a \preceq b$, если $b \in C_a$, является нестрогим порядком в X и относительно этого порядка $C_a = C_X^+(a)$.

Согласно утверждению предыдущей теоремы 7.1, конуса в частично упорядоченном множестве обладают свойствами, входящими в условие рассматриваемой теоремы. В доказательстве теоремы 7.1 мы показали, что эти свойства вытекают из соответствующих условий определения нестрогого порядка. В действительности, они эквивалентны этим условиям. Переставьте слова в доказательстве теоремы 7.1 так, чтобы получилось доказательство теоремы 7.1.

7.2. Пусть $C \subset \mathbf{R}^3$ множество. Рассмотрим отношение \triangleleft_C между точками в \mathbf{R}^3 , которое определяется следующим образом: $a \triangleleft_C b$, если $b - a \in C$. Каким условиям должно удовлетворять C для того, чтобы \triangleleft_C было нестрогим частичным порядком в \mathbf{R}^3 ? Как в этом упорядоченном множестве устроены верхний и нижний конусы произвольного элемента?

7.3. Докажите, что всякий выпуклый конус C в \mathbf{R}^3 с вершиной в $(0, 0, 0)$, пересекающийся с некоторой плоскостью, проходящей через $(0,0,0)$ только по $(0,0,0)$, удовлетворяет условиям, найденным в результате решения предыдущей задачи.

7-4- В пространстве-времени \mathbf{R}^4 специальной теории относительности (в котором точки изображают моментальные точечные события, первые три координаты x_1, x_2, x_3 - пространственные, а четвертая координата t - время) имеется отношение *событие* (x_1, x_2, x_3, t)

предшествует (и может оказать влияние на)

$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{t})$, определяющееся неравенством

$$c(\tilde{t} - t) \geq \sqrt{(\tilde{x}_1 - x_1)^2 + (\tilde{x}_2 - x_2)^2 + (\tilde{x}_3 - x_3)^2}.$$

Является ли это отношение порядком? Если является, то каковы верхние и нижние конусы точки?

7.5. Ответьте на вопросы предыдущей задачи относительно двумерной и трехмерной версий этого пространства, в которых число пространственных координат равно 1 и 2, соответственно, и подмножества которых легче изображать на рисунках.

4.7.5. Расположение элемента относительно множества

Пусть (X, ρ) - это чум, A - некоторое его подмножество. Говорят, что b - *наибольший элемент* множества A , если $b \in A$ и $c \preceq b$ для любого

$c \in A$. Аналогично, b - *наименьший элемент* множества A , если $b \in A$ и $b \preceq c$ для любого $c \in A$.

7.К. Элемент b множества A является *наименьшим*, тогда $A \subset C_X^+(b)$; элемент b множества A является *наибольшим*, тогда $A \subset C_X^-(b)$.

7.Л. Всякое множество имеет не более одного наибольшего и не более одного наименьшего элемента.

Элемент b множества A называется его *максимальным* элементом, если в A нет элемента, большего чем b . Если же в A нет элемента, меньшего, чем b , то b называется *минимальным* элементом множества A .

7.М. Элемент b множества A максимален, тогда $A \cap C_X^-(b) = b$; элемент b множества A минимален, тогда $A \cap C_X^+(b) = b$.

7.б. Как связаны понятия максимального элемента и наибольшего элемента? минимального и наименьшего? Что можно сказать об упорядоченном множестве, для любого подмножества которого эти понятия совпадают?

4.7.6. Линейные порядки

Обратите внимание на то, что определение отношения строгого порядка не требует, чтобы для любых $a, b \in X$ было выполнено или $a \mathbf{p} b$, или $b \mathbf{p} a$, или $a = b$.

Если отношение порядка удовлетворяет этому дополнительному требованию (т. е. любые два элемента a и b множества X сравнимы: или $a \preceq b$, или $b \preceq a$), то говорят, что порядок \preceq *линеен*, а (X, \preceq) - *линейно упорядоченное множество* или просто *упорядоченное множество*.

Изрядную неразбериху в терминологию внес(ли) Бурбаки. Тогда линейные порядки назывались просто порядками, а порядки не линейные назывались частичными порядками, в редких же ситуациях, когда было не известно линеен ли порядок, так прямо и говорили, что это не известно. Бурбаки предложил(и) изъять слово *частично*, мотивируя это тем, что частичный порядок, как явление более общее, чем линейный порядок (который тогда все называли просто порядком), заслуживает более простого и короткого названия. Во Франции они в этом вполне преуспели, в русской терминологии успех был частичен, а в англоязычной - и вовсе не возможен. Дело в том, что частично упорядоченное множество по-английски называется *partially ordered set*, а сокращённо *poset*. От такого короткого удобного слова, конечно же, невозможно отказаться.

Если хотя бы подчеркнуть, что отношение порядка не обязательно линейно, то говорят, что порядок *частичный*, а множество - *частично упорядоченное*.

7.N. Отношение $<$ в множестве вещественных чисел \mathbf{R} является линейным порядком.

Это - важнейший пример линейно упорядоченного множества. Слова и образы, коренящиеся в нем, нередко распространяются и на все линейно упорядоченные множества. Например, конусы называются *лучами*, причем верхние конусы называются *правыми лучами*, а нижние — *левыми*.

7.7. Упорядоченное множество (X, ρ) является линейно упорядоченным, тогда $X = C_X^+(a) \cup C_X^-(a)$ для любого $a \in X$.

7.8. В множестве \mathbf{N} натуральных чисел отношение a/b не является линейным порядком.

7.9. При каких X отношение включения в множестве подмножеств множества X является линейным порядком?

4.7.7. Топологии линейного порядка

7.O. Пусть (X, ρ) - линейно упорядоченное множество. Множество его подмножеств, составленное из множества X и всевозможных правых лучей, т. е. множеств вида $\{x \in X \mid a \prec x\}$, где a пробегает все X , есть база топологической структуры в X .

Топологическая структура, порожденная этой базой, называется *топологией правых лучей* линейно упорядоченного множества (X, ρ) .

Аналогично определяется *топология левых лучей* линейно упорядоченного множества: она порождается базой, составленной из X и множеств вида

$$\{x \in X \mid x \prec a\} \text{ с } a \in X.$$

Согласно теореме 3.B, достаточно показать, что пересечение двух правых лучей представляется в виде объединения правых лучей.

Рассмотрим пересечение лучей

$\{x \in X \mid a \prec x\}$ и $\{x \in X \mid b \prec x\}$. Порядок линейен, поэтому

либо $a \rho b$, либо $b \rho a$. Пусть $a \rho b$. Тогда

$$\{x \in X \mid a \prec x\} \cap \{x \in X \mid b \prec x\} = \{x \in X \mid b \prec x\}.$$

7.10. Топология стрелки (см. 2) совпадает с топологией правых лучей полупрямой $[0; \infty)$, снабженной порядком $<$.

7.11. Насколько условие линейности порядка необходимо в теореме

7.O. Найдите ослабление этого условия, которое обеспечивало бы справедливость заключения теоремы 7.O и позволяло бы представить

топологическую структуру, описанную в задаче 2.2, как топологию правых лучей подходящего частичного порядка на плоскости.

7. P. Пусть (X, ρ) - линейно упорядоченное множество. Множество его подмножеств, составленное из X и всевозможных множеств вида $\{x \in X \mid a \prec x \prec b\}$, $\{x \in X \mid x \prec b\}$ и $\{x \in X \mid a \prec x\}$, где a и b пробегают всё множество X , есть база топологической структуры в X .

Топологическая структура, порожденная этой базой, называется *интервальной топологией* линейно упорядоченного множества.

7.12. Покажите, что интервальная топология есть наименьшая топологическая структура, содержащая топологию правых лучей и топологию левых лучей.

7.Q. Стандартная топология прямой совпадает с интервальной топологией в $(\mathbf{R}, <)$.

4.7.8. Топология частичного порядка

7.R. Пусть (X, \preceq) - (частично) упорядочное множество. Множество его подмножеств, составленное из всевозможных конусов вида

$$C_X^+(a) = \{x \in X \mid a \preceq x\},$$

где a пробегает всё X , есть база топологической структуры в X .

Топологическая структура, порожденная этой базой, называется *топологией порядка*.

Согласно теореме 3.C, достаточно показать, что любой элемент пересечения двух конусов вида $C_X^+(a)$ содержится в этом пересечении вместе с целым конусом того же вида. Пусть $c \in C_X^+(a) \cap C_X^+(b)$ и $d \in C_X^+(c)$. Тогда $a \preceq c \preceq d$ и $b \preceq c \preceq d$, так что $a \preceq d$ и $b \preceq d$.

Следовательно, $d \in C_X^+(a) \cap C_X^+(b)$. Значит,

$$C_X^+(c) \subset C_X^+(a) \cap C_X^+(b).$$

7.S. В топологии порядка всякая точка $a \in X$ обладает наименьшей (по включению) окрестностью. Такой окрестностью является

$$C_X^+(a) = \{x \in X \mid a \preceq x\}.$$

7. T. Следующие свойства топологического пространства равносильны:

- (1) каждая точка обладает наименьшей (по включению) окрестностью,
- (2) пересечение любой совокупности открытых множеств открыто,
- (3) объединение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.

Пространство, удовлетворяющее условиям теоремы 7. T , называется *пространством наименьших окрестностей*.

В пространстве наименьших окрестностей открытые и замкнутые множества удовлетворяют одинаковым условиям. В частности, совокупность замкнутых множеств пространства наименьших окрестностей является топологической структурой. Будем говорить, что эта структура *противоположна* исходной. Она отвечает противоположному частичному порядку.

Эквивалентность второго и третьего свойств доказывается посредством формул де Моргана, ср. 2.F. Докажем, что из первого свойства следует второе. Рассмотрим пересечение произвольной совокупности открытых множеств. Для любой его точки каждое из пересекаемых множеств является окрестностью. Поэтому ее наименьшая окрестность содержится в каждом из пересекаемых множеств, а значит и в пересечении. Итак, любая точка пересечения входит в него вместе с целой окрестностью. Все пересечение является объединением этих окрестностей. Поэтому оно открыто.

Теперь докажем, что если пересечение любой совокупности открытых множеств открыто, то любая точка обладает наименьшей окрестностью.

Откуда взять, как построить такую окрестность?

Возьмем все окрестности одной точки, и рассмотрим их пересечение. В силу предположения это пересечение открыто. Оно содержит эту точку, так что перед нами - ее окрестность. Эта окрестность, как пересечение всех окрестностей, содержится в каждой окрестности, то есть является наименьшей окрестностью.


7.13. Как охарактеризовать в терминах порядка точки, открытые в топологии порядка? То же самое относительно замкнутых точек.

7.14. Дайте непосредственное описание открытых множеств в топологии порядка прямой \mathbf{R} с порядком $<$.


7.15. Дайте непосредственное описание замыкания точки в топологии частичного порядка.

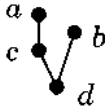
7.16. Какие одноточечные множества всюду плотны в топологии частичного порядка?

7.17. В множестве $\{a, b, c, d\}$ рассмотрим частичный порядок, которым все строгие неравенства таковы: $c < a$, $d < c$, $d < a$, $d < b$. Проверьте, что это - частичный порядок, и докажите, что топология этого порядка

совпадает с топологией пространства  , описанной в задаче 2.3 (1).

4.7.9. Как нарисовать чум

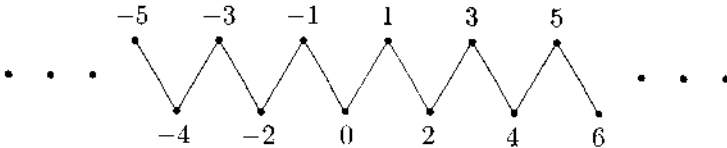
Теперь мы можем объяснить пиктограмму , которой пользуемся для обозначения пространства, определённого в задаче 2.3 (1). Она описывает порядок в множестве $\{a, b, c, d\}$, задающий топологию согласно 7.17. Действительно, если расставить элементы рассматриваемого упорядоченного множества в узлах графа пиктограммы, как



показано на рисунке справа, то окажется, что узлы, отвечающие сравнимым элементам, соединены отрезком или восходящей ломаной, и больший элемент отвечает верхнему узлу. Так можно нарисовать схему, задающую любое конечное частично упорядоченное множество. Элементы его изображаются точками плоскости, причем, если $a \preceq b$, то точка, изображающая b , выше точки, изображающей a и эти точки соединены либо отрезком, либо ломаной, звенья которой соединяют точки, изображающие промежуточные элементы возрастающей цепочки $a \preceq c_1 \preceq c_2 \preceq \dots \preceq c_n \preceq b$. Можно было бы соединить отрезками каждую пару точек, отвечающих сравнимым элементам, по это сделало бы диаграмму излишне запутанной. Поэтому отрезки, которые можно восстановить по другим в силу транзитивности, проводить не стоит.

Диаграммы указанного вида называются *диаграммами Хассе*.

7. U. Докажите, что любое конечное частично упорядоченное множество можно описать такой диаграммой Хассе.
7. V. Опишите топологическую структуру в множестве \mathbf{Z} целых чисел, которая является топологией порядка, заданного следующей диаграммой Хассе



Пространство задачи 7. V называется *цифровой прямой* или *прямой Халимского*. В нем каждое четное число замкнуто и каждое нечетное - открыто.

Минимальная база этой топологии состоит из одноточечных вида $\{2k - 1\}$ с $k \in \mathbb{Z}$ и трехточечных множеств вида $\{2k - 1, 2k, 2k + 1\}$, где снова $k \in \mathbb{Z}$.

7.18. Сопоставим каждому четному числу $2k$ интервал $(2k - 1, 2k + 1)$, а каждому нечетному числу $2k - 1$ одноточечное множество $\{2k - 1\}$. Докажите, что множество целых чисел открыто в топологии Халимского, когда объединение сопоставленных им множеств открыто на стандартной числовой прямой.

1.19. Среди примеров топологических пространств, данных в 2, найдите все, в которых топологию можно задать как топологию порядка. В случаях конечных множеств нарисуйте диаграммы, описывающие соответствующие порядки.

4.7.10х. Циклические порядки в конечном множестве

Циклическим порядком в конечном множестве называется линейный порядок, рассматриваемый с точностью до циклических перестановок. Линейный порядок позволяет занумеровать элементы конечного множества X натуральными числами от 1 до числа элементов множества X , так что $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Циклическая перестановка меняет местами первые k элементов с последними $n - k$ элементами, не меняя порядка в пределах каждой из этих групп:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \mapsto (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Рассматривая циклический порядок, не имеет смысла говорить о том что один элемент следует за другим, поскольку подходящей циклической перестановкой всего множества любые два элемента можно поставить в противоположном порядке. Однако, можно говорить о том, что один элемент непосредственно следует за другим. При этом, разумеется, непосредственно за последним элементом следует самый первый: ведь при любой нетождественной циклической перестановке самый первый элемент будет поставлен непосредственно после самого последнего.

В циклически упорядоченном конечном множестве для каждого элемента имеется единственный непосредственно следующий за ним элемент. Этим определяется отображение множества на себя, простейшая циклическая перестановка

$$x_i \mapsto \begin{cases} x_{i+1}, & \text{если } i < n, \\ x_1, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Эта перестановка действует транзитивно (т. е. ее итерациями любой элемент переводится в любой другой).

7. Ах. *Описанная выше связь обратима: любое отображение $T: X \rightarrow X$, транзитивно действующее в X , определяет в X циклический порядок, в котором непосредственно за элементом $a \in X$ следует $T(a)$.*

7. Вх. *В множестве, состоящем из n элементов, имеется ровно $(n-1)!$ попарно разных циклических порядков.*

В частности, в двухэлементном множестве имеется всего один циклический порядок (и потому не интересен настолько, что иногда даже говорят, что он не имеет смысла), а в трехэлементном множестве имеются два циклических порядка.

4.7.11х. Циклические порядки в бесконечных множествах

Циклические порядки бывают и в бесконечных множествах. В них многие естественные циклические порядки невозможно определить заданием непосредственного следования элементов. Например, точки окружности можно циклически упорядочить по часовой стрелке (или против часовой стрелки). Однако, относительно этого циклического порядка ни одна точка не обладает непосредственно следующей за ней точкой.

Такие "непрерывные" циклические⁴ порядки можно определить почти так же, как мы определили выше циклические порядки в конечном множестве. Разница в том, что не всегда возможно определить достаточное количество *циклических преобразований множества*, и приходится заменить их циклическими преобразованиями отношения порядка. Именно, циклический порядок есть линейный порядок, рассматриваемый с точностью до циклических преобразований, где под **циклическим преобразованием** линейного порядка ρ в множества X мы понимаем переход от ρ к такому линейному порядку \prec' , что множество X можно разбить на подмножества A и B , на каждом из которых по отдельности порядки \prec и \prec' совпадают, тогда как $a \rho b$ и $b \rho' a$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

7. Сх. *Возможность циклического преобразования одного линейного порядка в другой является отношением эквивалентности на множестве всех линейных порядков в фиксированном множестве. Так что циклический порядок есть соответствующий класс эквивалентности.*

7.Дх. Докажите, что в случае конечного множества это определение циклического порядка эквивалентно определению, данному в предыдущем пункте.

7.Ех. Докажите, что циклический порядок "против часовой стрелки" на окружности невозможно определить как линейный порядок с точностью до циклических преобразований множества. Объясните, какие линейные порядки на окружности определяют этот циклический порядок с точностью до циклических преобразований порядка.

7.Фх. Пусть A - подмножество множества X . Если линейные порядки \prec' и \prec на X получаются друг из друга циклическим преобразованием, то и сужения этих линейных порядков на A получаются друг из друга циклическим преобразованием.

7. Гх Следствие. Циклический порядок в множестве определяет циклический порядок в любом его подмножестве.

7.Нх. Циклический порядок в множестве можно восстановить по индуцированным им циклическим порядкам во всех трехэлементных подмножествах этого множества.

7.Нх.1. Циклический порядок в множестве можно восстановить по индуцированным им циклическим порядкам во всех трехэлементных подмножествах этого множества, содержащих любой наперед заданный фиксированный элемент.

Теорема 7.Нх позволяет описывать циклический порядок как тернарное отношение. Именно, для трехэлементного множества $\{a, b, c\}$ будем обозначать через $[a \prec b \prec c]$ циклический порядок, определяемый линейным порядком, в котором справедливы представленные два неравенства (т.е. b следует за a и c следует за b).

7.Их. Циклические порядки, индуцированные в трехэлементных множествах циклическим порядком в множестве X , обладают следующими свойствами:

- (1) ни для каких $a, b \in X$ не верно, что $[a \prec a \prec b]$;
- (2) для любых попарно различных $a, b, c \in X$ либо $[a \prec b \prec c]$, либо $[b \prec a \prec c]$, но оба эти утверждения не могут быть справедливы одновременно;
- (3) $[a \prec b \prec c]$, тогда $[b \prec c \prec a]$, тогда $[c \prec a \prec b]$ для любых $a, b, c \in X$;
- (4) если $[a \prec b \prec c]$ и $[a \prec c \prec d]$, то и $[a \prec b \prec d]$.

Наоборот, если в множестве X задано тернарное отношение, обладающее этими четырьмя свойствами, то оно определяется циклическим порядком в X .

4.7.12х. Топология циклического порядка

7.Лх. Пусть X - циклически упорядоченное множество. Набор множеств, открытых во всякой интервальной топологии для каждого линейного порядка, определяющего данный циклический порядок на X , является топологической структурой на множестве X .

Топология, определенная в теореме 7.Лх, называется *топологией циклического порядка*.

7.Кх. Топология циклического порядка относительно обхода окружности S^1 против часовой стрелки порождается метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ на $S^1 \subset \mathbb{C}$.

5. Непрерывность

5.1. Теоретико-множественное отступление: отображения

5.1.1. Отображения и их основные типы

Отображением множества X в множество Y называется тройка, составленная из X , Y и правила, ставящего в соответствие каждому элементу множества X некоторый элемент множества Y . (Правило (как и всё в теории множеств) можно представлять себе как множество. А именно, оно может быть задано множеством упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$, $y \in Y$, таких что правило ставит элемент y в соответствие элементу x . Это множество пар называется *графиком* отображения. График является подмножеством множества $X \times Y$ всех упорядоченных пар (x, y) . называется *инъективным* или *взаимно однозначным*, если каждый элемент множества Y является образом по более чем одного элемента множества X . Отображение называется *биективным* или *биекцией*, если оно сюръективно и инъективно.)

Чтобы подчеркнуть то, что отображение f есть отображение множества X в множество Y , употребляют обозначения $f : X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Элемент b множества Y , отвечающий при отображении f элементу a множества X , обозначается $f(a)$ и называется *образом* элемента, а при отображении f (пишут $b = f(a)$ или $a \xrightarrow{f} b$ или $f : a \mapsto b$).

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **сюръективным**, или **сюръекцией** (или **отображением на**), если каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X . Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **инъективным** или **взаимно однозначным**, если каждый элемент множества Y является образом не более чем одного элемента множества X . Отображение называется **биективным** или **биекцией**, если оно сюръективно и инъективно.

5.1.2. Образы и прообразы

Образом множества $A \subset X$ при отображении $f : X \rightarrow Y$ называется множество $f(A)$, составленное из образов элементов множества A , т. е. $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Образ всего отображаемого множества X , т. е. $f(X)$, называется **образом отображения** f .

Прообразом множества $B \subset Y$ при отображении $f : X \rightarrow Y$ называется множество $f^{-1}(B)$ тех элементов множества X , образы которых принадлежат B , т. е. $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Предостерегаем читателя от невнимательного обращения с терминами образ и прообраз. Далеко не всегда образ прообраза множества B совпадает с B , а если это и так, то прообраз может быть не единственным множеством, обладающим этим свойством, так что прообраз нельзя определять как множество, образом которого служит данное множество.

8.A. Множество B содержится в образе отображения f , тогда

$$f(f^{-1}(B)) = B.$$

Если $f(f^{-1}(B)) = B$, то B , конечно, содержится в образе f .

Если множество B содержится в образе отображения f , то для всякой точки $y \in B$ найдется точка x , такая что $f(x) = y$. По определению, $x \in f^{-1}(B)$, значит, $y \in f(f^{-1}(B))$. Следовательно, $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Обратное включение верно для любого множества, см. 8.B.

8.B. Для произвольных $f : X \rightarrow Y$ и $B \subset Y$ имеет место включение $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Если $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in B$.

8. C. Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $B \subset Y$ таковы, что $f(f^{-1}(B)) = B$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) $f^{-1}(B)$ является единственным подмножеством множества X , образ которого равен B ;

(2) для любых $a_1, a_2 \in f^{-1}(B)$ из равенства $f(a_1) = f(a_2)$ следует равенство $a_1 = a_2$.

(a) \implies (b) Предположим, что из равенства $f(C) = B$ следует, что $C = f^{-1}(B)$. Если найдутся различные точки $a_1, a_2 \in f^{-1}(B)$, такие что $f(a_1) = f(a_2)$, то $f(f^{-1}(B) \setminus \{a_2\}) = B$, что противоречит предположению.

(b) \implies (a) Проведем рассуждение от противного. Предположим, что существует такое множество $C \neq f^{-1}(B)$, что $f(C) = B$. Рассмотрим Точку $a_1 \in f^{-1}(B) \setminus C$, пусть $b = f(a_1)$. Так как $f(C) = B$, то найдется точка $a_2 \in C$, такая, что $f(a_2) = b$.

8.D. Отображение $f : X \rightarrow Y$ инъективно, тогда для любого $B \subset Y$ $f(f^{-1}(B)) = B$ прообраз $f^{-1}(B)$ является единственным подмножеством множества X , образ которого равен B .

Следствие 8. С.

8.E. $f^{-1}(f(A)) \supset A$ для произвольных $f : X \rightarrow Y$ и $A \subset X$.

Если $x \in A$, то $f(x) = y \in f(A)$, значит, $x \in f^{-1}(f(A))$.

8.F. $f^{-1}(f(A)) = A$, тогда $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$.

Каждое из равенств равносильно тому, что $f(x) \notin f(A)$ для всякого элемента $x \notin A$.

8.I. Правда ли, что для любых множеств $A, B \subset Y$ и любого отображения $f : X \rightarrow Y$ справедливы равенства

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad (10)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \quad (11)$$

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)? \quad (12)$$

8.2. Правда ли, что для любых множеств $A, B \subset X$ и любого отображения $f : X \rightarrow Y$ справедливы равенства

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad (13)$$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), \quad (14)$$

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)? \quad (15)$$

8.3. Приведите примеры, в которых два из равенств предыдущей задачи не выполняются.

8.4. Можно ли заменить неверные равенства задачи 8.2 верными включениями?

8.5. Какое простое условие нужно наложить на $f : X \rightarrow Y$, чтобы для любых множеств $A, B \subset X$ были справедливы все равенства задачи 8.2?

8.6. Докажите, что для любого отображения $f : X \rightarrow Y$ и любых множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ справедливо равенство $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$.

5.1.3. Тожественные отображения и включения

Тожественным отображением множества X называется отображение $X \rightarrow X : x \mapsto x$. Обозначается оно символом id_X или, если из контекста ясно, каково X , просто символом id .

Если A - подмножество множества X , то отображение $A \rightarrow X : x \mapsto x$, называется **включением** A в X и обозначается через $\text{in}_A : A \rightarrow X$, а если A и X не вызывают сомнения, то просто через in .

8. G. Прообразом множества B при включении $\text{in} : A \rightarrow X$ является множество $B \cap A$.

$$\text{in}^{-1}(B) = \{x \in A \mid x \in B\} = A \cap B.$$

5.1.4. Композиции

Композицией отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ называется отображение $X \rightarrow Z : x \mapsto g(f(x))$. Композицию f и g обозначают через $g \circ f$.

8.H Ассоциативность. Для любых отображений

$$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z \text{ и } h : Z \rightarrow U \text{ справедливо равенство}$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Пусть $x \in X$. Тогда

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

8.I. Для любого отображения $f : X \rightarrow Y$ справедливо равенство $f \circ (\text{id}_X) = f = (\text{id}_Y) \circ f$.

8.J. Композиция инъекций есть инъекция.

Если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, так как f - инъекция, и $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, так как g - инъекция.

8.K. Если композиция $g \circ f$ инъективна, то отображение f инъективно.

Если бы f не являлась инъекцией, то найдутся такие точки $x_1 \neq x_2$, что $f(x_1) = f(x_2)$, значит, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, что противоречит тому, что $g \circ f$ - инъекция.

8.L. Композиция сюръекций есть сюръекция.

Если $f(X) = Y$, то $g(f(X)) = g(Y) = Z$, поскольку и отображение g является сюръекцией.

8.M. Если композиция $g \circ f$ сюръективна, то отображение g сюръективно.

8.N. Композиция биекций есть биекция.

8.7. Если композиция $g \circ f$ биективна, то обязательно ли одно из отображений f и g биективно?

5.1.5. Обратные и обратимые

Отображение $g : Y \rightarrow X$ называется *обратным* отображению $f : X \rightarrow Y$, если $g \circ f = \text{id}_X$ и $f \circ g = \text{id}_Y$. Отображение, для которого существует обратное, называется **обратимым**.

8.O. Отображение обратимо, тогда оно - биекция.

\Leftrightarrow Если отображение является биекцией, то оно обратимо. \Leftrightarrow

Если отображение обратимо, то оно является биекцией в силу утверждений 8.K и 8.M.

8.P. Если обратное отображение существует, то оно единственно.

5.1.6. Сужения и подотображения

Если A - подмножество множества X , а B - подмножество множества Y , то всякому отображению $f : X \rightarrow Y$, такому, что $f(A) \subset B$, отвечает отображение $\text{ab}(f) : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$, которое называется *сокращением* отображения f на A, B или *подотображением* отображения f . Если $B = Y$, то $\text{ab}(f) : A \rightarrow Y$ обозначают символом $f|_A$ и называют *сужением* отображения f на A . Если $B \neq Y$, то $\text{ab}(f) : A \rightarrow B$ обозначают символом $f|_{A,B}$ или даже просто f .

8.Q. Сужение отображения $f : X \rightarrow Y$ на $A \subset X$ есть композиция включения $\text{in}_A : A \rightarrow X$ и f . Короче, $f|_A = f \circ \text{in}_A$.

8.R. Любое сокращение (в частности, и любое сужение) инъекции есть инъекция.

8.S. Если сужение отображения есть сюръекция, то и исходное отображение сюръективно.

5.2. Непрерывные отображения

5.2.1. Определение и основные свойства непрерывных отображений

Пусть X, Y - топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого подмноже-

ства пространства Y является открытым подмножеством пространства X .

9. А. *Отображение непрерывно, тогда прообраз любого замкнутого множества замкнут.*

(\Rightarrow) Если отображение f непрерывно, то для всякого замкнутого подмножества $F \subset Y$ множество $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ открыто, значит, множество $f^{-1}(F)$ является замкнутым. Если прообраз любого замкнутого множества замкнут, то аналогичное рассуждение доказывает, что прообраз всякого открытого множества будет открыт.

9. В. *Тождественное отображение любого топологического пространства непрерывно.*

9.1. Пусть Ω_1, Ω_2 - топологические структуры в множестве X .

Отображение $\text{id} : (X, \Omega_1) \rightarrow (X, \Omega_2)$ непрерывно, тогда $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

9.2. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение. Останется ли оно непрерывным, если:

(а) утончить топологию в X ; (b) огрубить топологию в X ;

(с) утончить топологию в Y ; (d) огрубить топологию в Y ?

9.3. Пусть X - дискретное топологическое пространство, а Y произвольное. 1) Какие отображения $X \rightarrow Y$ являются непрерывными?

2) А отображения $Y \rightarrow X$?

9-4- Пусть X - пространство с тривиальной топологической структурой, а Y - произвольное топологическое пространство. 1) Какие отображения $X \rightarrow Y$ являются непрерывными? 2) А отображения $Y \rightarrow X$?

9. С. Пусть A - подпространство пространства X . Тогда отображение $\text{in} : A \rightarrow X$ непрерывно.

Если множество U открыто в пространстве X , то его прообраз $\text{in}^{-1}(U) = U \cap A$ открыт в подпространстве A по определению топологической структуры подпространства.

9.D. Топология Ω_A , индуцированная на $A \subset X$ топологией пространства X , есть самая грубая из тех топологий в A , относительно которых отображение $\text{in} : A \rightarrow X$ непрерывно.

Если $U \in \Omega_A$, то $U = V \cap A$, где $V \in \Omega$. Так как отображение

$\text{in} : (A, \Omega') \rightarrow (X, \Omega)$ непрерывно, то прообраз множества $U = \text{in}^{-1}(V) \in \Omega'$, таким образом, $\Omega_A \subset \Omega'$.

9.5. Утверждение задачи 9.D имеет естественное обобщение со случая включения in на случай произвольного отображения $f : A \rightarrow X$ произвольного множества A . Найдите это обобщение.

9.E. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Если $U \in \Omega_Z$, то $g^{-1}(U) \in \Omega_Y$, и потому

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Omega_X$$

Таким образом, композиция $g \circ f$ является непрерывным отображением.

9.F. Подотображение непрерывного отображения непрерывно.

$$(f|_{A,B})^{-1}(V) = (f|_{A,B})^{-1}(U \cap B) = A \cap f^{-1}(U).$$

9. G. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, тогда непрерывно его подотображение $\text{ab}(f): X \rightarrow f(X)$.

$$\Leftrightarrow f = \text{in}_{f(X)} \circ \text{ab } f. \quad \Leftrightarrow \text{См. 9.F.}$$

9.H. Всякое постоянное отображение (т. е. отображение, образ которого состоит из одной точки) непрерывно.

Прообраз всякого множества при постоянном отображении либо пуст, либо совпадает со всем пространством.

5.2.2. Переформулировки основного определения

9.6. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, тогда $\text{Cl } f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\text{Cl } A)$ для любого $A \subset Y$.

9.7. Сформулируйте и докажите аналогичный критерий с участием $\text{Int}(f^{-1}(A))$ и $f^{-1}(\text{Int } A)$. То же самое для $\text{Cl } f(A)$ и $f(\text{Cl } A)$.

9.8. Пусть Σ - база топологии пространства Y . Докажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, тогда $f^{-1}(U)$ - открытое множество для каждого $U \in \Sigma$.

5.2.3. Примеры

9.9. Непрерывно ли (в топологии, индуцированной топологией прямой) отображение

$$f: [0; 2] \rightarrow [0; 2]: x \mapsto \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 3 - x, & \text{если } x \in [1; 2]? \end{cases}$$

9.10. Непрерывно ли отображение f отрезка $[0; 2]$ (с топологией, индуцированной топологией прямой) в стрелку (см. 2), определяемое формулой

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ x + 1, & \text{если } x \in (1; 2]? \end{cases}$$

9.11. Дайте прямое описание непрерывных отображений пространства $\mathbf{R}_{\text{Т1}}$ (см. 2) в \mathbf{R} .

9.12. Какие отображения $\mathbf{R}_{\text{Т1}} \rightarrow \mathbf{R}_{\text{Т1}}$, непрерывны?

9.13. Дайте прямое описание непрерывных отображений стрелки в стрелку.

9.14. Пусть отображение $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

и пусть $g: \mathbb{Z}_+ \rightarrow f(\mathbb{Z}_+)$ - его подотображение. Снабдим \mathbb{Z}_+ и $f(\mathbb{Z}_+)$ топологией, индуцированной топологией прямой. Непрерывны ли отображения g и g^{-1} ?

5.2.4. Поведение плотных множеств при непрерывных отображениях

9.15. Докажите, что образ всюду плотного множества при сюръективном непрерывном отображении всюду плотен.

9.16. Верно ли, что образ нигде не плотного множества при любом непрерывном отображении нигде не плотен?

9.17. Существует ли в отрезке $[0; 1]$ (с топологией, индуцированной топологией прямой) нигде не плотное подмножество A , допускающее такое непрерывное отображение $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, что $f(A) = [0; 1]$?

5.2.5. Локальная непрерывность

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным в точке* $a \in X$, если для любой окрестности U точки $f(a)$ существует такая окрестность V точки a , что $f(V) \subset U$.

9.1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, тогда оно непрерывно в каждой точке пространства X .

\Rightarrow Если f непрерывна, то в качестве окрестности V точки a мы просто можем взять прообраз $V = f^{-1}(U)$ окрестности точки $f(a)$.

\Leftarrow Если $f(V) \subset U$, то $V \subset f^{-1}(U)$. откуда следует, что любая точка множества $f^{-1}(U)$ - внутренняя, значит, это множество - открытое.

9.1. Пусть X, Y - метрические пространства, $a \in X$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке a , тогда для любого шара с центром в точке $f(a)$ существует шар с центром в точке a , образ которого содержится в первом шаре.

Воспользуйтесь тем, что в любой окрестности точки метрического пространства существует лежащий в этой окрестности шар с центром в этой точке.

9.K. Пусть X, Y - метрические пространства, $a \in X$. отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке a , тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in X$ с $\rho(x, a) < \delta$ имеет место неравенство $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Теорема 9.K гарантирует, что в тех случаях, когда применимо определение непрерывности из курса математического анализа, оно равносильно определению, которое формулируется в терминах топологических структур.

Условие: "для любой точки $x \in X$ с $\rho(x, a) < \delta$ имеет место неравенство $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ " означает, что $f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(a))$.

Осталось применить 9.J.

5.2.6. Свойства непрерывных функций

9.18. Пусть $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывные отображения. Докажите, что следующие формулы определяют непрерывные отображения $X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto f(x) + g(x). \quad (16)$$

$$x \mapsto f(x)g(x). \quad (17)$$

$$x \mapsto f(x) - g(x). \quad (18)$$

$$x \mapsto |f(x)|. \quad (19)$$

$$x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}, \quad (20)$$

$$x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}. \quad (21)$$

9.19. Докажите, что если отображения $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и $0 \notin g(X)$, то непрерывно и отображение $X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

9.20. Постройте такую последовательность непрерывных функций

$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sup\{f_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

определяла функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая не была бы непрерывной.

9.21. Пусть X - произвольное топологическое пространство. Функция

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

непрерывна, тогда каждая из функций $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, непрерывна.

Пространство $Mat(p \times q, \mathbb{R})$ матриц размера $p \times q$ с вещественными коэффициентами отличается от \mathbb{R}^{pq} лишь двойной нумерацией естественных координат в нем.

9.22. Докажите, что если отображения $f : X \rightarrow Mat(p \times q, \mathbb{R})$ $g : X \rightarrow$

$$Mat(q \times r, \mathbb{R})$$

$$X \rightarrow Mat(p \times r, \mathbb{R}) : x \mapsto g(x)f(x)$$

непрерывно.

Напомним, что $GL(n; \mathbb{R})$ подпространство пространства $Mat(n \times n, \mathbb{R})$, состоящее из всех обратимых матриц.

9.23. Докажите, что если отображение $f: X \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ непрерывно, то и отображение $X \rightarrow GL(n; \mathbb{R}): x \mapsto (f(x))^{-1}$ непрерывно.

5.2.7. Непрерывность расстояний

9.L. Для любого подмножества A метрического пространства X функция $X \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой $x \mapsto \rho(x, A)$ (см. 4), непрерывна.

Непосредственное следствие 4.35.

9.24. Топология метрического пространства есть самая грубая топология, относительно которой для любого $A \subset X$ функция $X \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой $x \mapsto \rho(x, A)$, непрерывна.

5.2.8. Изометрии

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) - метрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *изометрическим вложением*, если $\rho_Y(f(a), f(b)) = \rho_X(a, b)$ для любых $a, b \in X$. Биекция, являющаяся изометрическим вложением, называется *изометрией*.

9.M. Всякое изометрическое вложение инъективно.

Если $\rho(f(x), g(x)) = 0$, то $\rho(x, y) = 0$.

9.N. Всякое изометрическое вложение непрерывно.

Поскольку прообраз открытого шара пространства Y является открытым шаром того же радиуса в пространстве X .

5.2.9. Сжимающие отображения

Отображение $f: X \rightarrow X$ метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если существует такое число $\alpha \in (0; 1)$, что $\rho(f(a), f(b)) \leq \alpha \rho(a, b)$ для любых $a, b \in X$.

9.25. Докажите, что всякое сжимающее отображение непрерывно.

Пусть X и Y - метрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *гёльдеровым*, если найдутся такие числа $C > 0$ и $\alpha > 0$, что $\rho(f(a), f(b)) \leq C \rho(a, b)^\alpha$ для любых $a, b \in X$.

9.26. Докажите, что всякое гёльдерово отображение непрерывно.

5.2.10. Множества, задаваемые уравнениями и неравенствами

9. О. Пусть $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, непрерывные отображения. Тогда подмножество пространства X , состоящее из всех решений системы уравнений $f_1(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$, является замкнутым.

Множество решений системы есть пересечение прообразов точки $0 \in \mathbb{R}$. Поскольку отображения непрерывны, а точка замкнута, то замкнуты её прообразы, значит, замкнуто и их пересечение.

9. Р. Пусть $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, - непрерывные отображения. Тогда подмножество пространства X , состоящее из всех решений системы неравенств $f_1(x) \geq 0, \dots, f_n(x) \geq 0$, является замкнутым, а подмножество, состоящее из всех решений системы неравенств $f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0$, - открытым.

Множество решений системы нестрогих неравенств есть пересечение прообразов замкнутого луча $\{0; +\infty\}$, множество решений системы строгих неравенств есть пересечение прообразов открытого луча $(0; +\infty)$

9.27. Где в 9.О и 9.Р конечную систему можно заменить бесконечной?

9.28. Докажите, что в пространстве \mathbf{R}^n с $n \geq 1$ всякое собственное алгебраическое подмножество (т. е. собственное подмножество, задаваемое полиномиальными уравнениями) нигде не плотно.

5.2.11. Теоретико-множественное отступление: покрытия

Множество Γ подмножеств множества X называется его *покрытием*, если X есть объединение множеств из Γ , т. е. если $X = \bigcup_{A \in \Gamma} A$. В этом случае говорят также, что множества, входящие в Γ , *покрывают* X . Имеется и другое, более широкое понимание этих терминов: множество Γ подмножеств множества Y называется *покрытием* множества $X \subset Y$, если X содержится в объединении множеств из Γ , т. е. если $X \subset \bigcup_{A \in \Gamma} A$. Говорят также, что множества из Γ *покрывают* X .

5.2.12. Фундаментальные покрытия

Рассмотрим покрытие Γ топологического пространства X . Каждый элемент покрытия Γ наследует из X топологическую структуру. В каком случае топологию в X можно восстановить по этим структурам?

В частности, при каких условиях на Γ непрерывность отображения $f: X \rightarrow Y$ обеспечивается непрерывностью его сужений на все элементы покрытия Γ ? Чтобы получить ответы на эти естественные вопросы, решите задачи 9.29-9. V.

9.29. Верно ли, что если сужение отображения $f: X \rightarrow Y$ на всякий элемент следующего покрытия Γ непрерывно, то и само отображение f непрерывно:

- (а) $X = [0; 2]$, $\Gamma = \{[0; 1], (1; 2]\}$; (б) $X = [0; 2]$, $\Gamma = \{[0; 1], [1; 2]\}$;
 (с) $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$; (д) $X = \mathbb{R}$, Γ - множество одноточечных подмножеств?

Покрытие Γ пространства X называется *фундаментальным*, если множество $U \subset X$ открыто, тогда его пересечения с каждым множеством $A \in \Gamma$ открыты в подпространстве A .

9.Q. Покрытие Γ пространства X фундаментально, тогда для открытости множества $F \subset X$ достаточно, чтобы его пересечение с каждым множеством $A \in \Gamma$ было открыто в A .

9.R. Покрытие Γ пространства X фундаментально, тогда для замкнутости множества $F \subset X$ достаточно, чтобы его пересечение с каждым множеством $A \in \Gamma$ было замкнутым в A .

Рассмотрите дополнение множества F .

9.30. Покрытие топологического пространства одноточечными множествами фундаментально, тогда пространство дискретно.

Покрытие топологического пространства называется *открытым*, если оно состоит из открытых множеств, и *замкнутым* если из замкнутых.

Покрытие топологического пространства называется *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

9.S. *Всякое открытое покрытие фундаментально.*

Пусть $\Gamma = \{U_\alpha\}$. Если $V \cap U_\alpha$ открыто в U_α , то $V \cap U_\alpha$ открыто в X , поскольку U_α является открытым. Осталось заметить, что, так как Γ является покрытием, то $V = \bigcup_\alpha (V \cap U_\alpha)$.

9. T. *Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство аналогично предыдущему, поскольку объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

9. U. *Всякое локальное конечное замкнутое покрытие фундаментально.* Докажите, что объединение локально конечного набора замкнутых множеств замкнуто.

9.V. *Пусть Γ - фундаментальное покрытие пространства X . Если сужение отображения $f: X \rightarrow Y$ на всякий элемент покрытия Γ непрерывно, то и само отображение f непрерывно.*

Говорят, что покрытие Γ' *вписано* в Γ , если для каждого множества из Γ' существует содержащее его множество из Γ .

Если множество U открыто в Y , то открыты его прообразы при сужениях на каждый элемент V_α покрытия $\Gamma \approx \{V_\alpha\}$. Поскольку

$$(f|_{V_\alpha})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap V_\alpha, \text{ то открыты все пересечения } f^{-1}(U) \cap V_\alpha.$$

Так как по условию покрытие Γ фундаментально, то открыт прообраз $f^{-1}(U)$, таким образом, отображение f непрерывно.

9.31. Если покрытие Γ' вписано в Γ и фундаментально, то и покрытие Γ фундаментально.

9.32. Пусть Δ - фундаментальное покрытие пространства X , а Γ такое покрытие пространства X , что $\Gamma_A = \{U \cap A \mid U \in \Gamma\}$ есть фундаментальное покрытие подпространства $A \subset X$ для всякого $A \in \Delta$. Докажите, что тогда покрытие Γ тоже фундаментальное.

9.33. Докажите, что фундаментальность покрытия представляет собой локальное свойство, т. е. что если каждая точка пространства X обладает такой окрестностью U , для которой покрытие $\Gamma_U = \{U \cap V \mid V \in \Gamma\}$ фундаментально, то и исходное покрытие фундаментально.

5.2.13x. Монотонные отображения

Пусть $(X, <)$ и $(Y, <)$ - частично упорядоченные множества. Говорят, что отображение $f : X \rightarrow Y$

- **монотонно возрастает** или просто **монотонно**, если $f(a) \preceq f(b)$ для любых $a, b \in X$ с $a \preceq b$;
- **монотонно убывает** или **антимонотонно**, если $f(b) \preceq f(a)$ для любых $a, b \in X$ с $a \preceq b$;
- **строго монотонно возрастает** или просто **строго монотонно**, если $f(a) < f(b)$ для любых $a, b \in X$ с $a < b$;
- **строго монотонно убывает** или **строго антимонотонно**, если $f(b) < f(a)$ для любых $a, b \in X$ с $a < b$.

9. Ах. Пусть X и Y - линейно упорядоченные множества. Относительно интервальных топологий в X и Y любое сюръективное строго монотонное или строго антимонотонное отображение $X \rightarrow Y$ непрерывно.

Достаточно проверить открытость прообраза базового множества, что очевидно, так как, к примеру, прообразом множества $\{x \mid a \prec x \prec b\}$

является множество $\{x \mid c \prec x \prec d\}$, где $f(c) = a$ и $f(d) = b$.

9.1x. Покажите, что условие сюръективности в 9. Ax является существенным.

9.2x. Покажите, что условие строгой монотонности в 9. Ax является существенным.

9.3x. В условиях теоремы 9. Ax непрерывно ли отображение f относительно топологии правых (или левых) лучей?

9.Вх. *Отображение одного частично упорядоченного множества в другое монотонно, тогда оно непрерывно относительно топологий порядка.*

Предположим, что отображение $f: X \rightarrow Y$ монотонно. Для доказательства непрерывности f достаточно проверить открытость прообразов базовых множеств. Пусть $U = C_Y^+(b)$, $V = f^{-1}(U)$.

Нетрудно видеть, что $V = \bigcup_{f(x) \in U} C_X^+(x)$, значит, это множество

открыто как объединение базовых (в топологии пространства X).

Проведем рассуждение от противного. Предположим, что f непрерывно в топологиях правых лучей, однако не является монотонным. Значит, найдутся такие точки $a \rho b$, что $f(b) \prec f(a)$. Докажем, что прообраз луча $U = C_Y^+(f(a))$ не является открытым в X множеством. Действительно, равенство $f^{-1}(U) = \bigcup C_X^+(z_\alpha)$ противоречит тому, что $a \in f^{-1}(U)$, тогда как $b \notin f^{-1}(U)$, хотя $a \rho b$.

5.2.14x. Расстояние Громова-Хаусдорфа

9. Сx. Для любых метрических пространств X и Y существует метрическое пространство Z , в которое и X и Y вкладываются изометрически. Изометрически вложив два метрических пространства в одно, мы можем рассмотреть расстояние Хаусдорфа между их образами, см. 4'15x. *Расстоянием Громова-Хаусдорфа* между метрическими пространствами X и Y называется точная нижняя граница расстояний Хаусдорфа для всевозможных пар изометрических вложений этих пространств во всевозможные метрические пространства.

9.Dx. Бывают ли такие метрические пространства, между которыми расстояние Громова-Хаусдорфа равно бесконечности?

9.Еx. Докажите, что расстояние Громова-Хаусдорфа симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника.

9. Fx. В каком смысле расстояние Громова-Хаусдорфа может удовлетворять первой аксиоме расстояния?

5.2.15x. Функции на канторовом множестве и кривые Пеано

Напомним, что канторово множество K можно определить как множество $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \text{ где } a_k = 0 \text{ или } 2\}$.

9.Gx. Докажите, что отображение

$$\gamma_1 : K \rightarrow I : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}.$$

является непрерывной сюръекцией. Нарисуйте его график.

9.Ix. Докажите, что отображение

$$K \rightarrow K : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{3^k}$$

непрерывно.

Обозначим через K^2 множества $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in K, y \in K\}$.

9.Ix. Докажите, что отображение

$$\gamma_2 : K \rightarrow K^2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{3^k} \right)$$

является непрерывной сюръекцией.

9.Jx. Докажите, что отображение $\gamma_3 : K \rightarrow I^2$, являющееся композицией отображения $\gamma_2 : K \rightarrow K^2$ и отображения

$$K^2 \rightarrow I^2 : (x, y) \mapsto (\gamma_1(x), \gamma_1(y)),$$

является непрерывной сюръекцией.

9.Kx. Докажите, что отображение $\gamma_3 : K \rightarrow I^2$ является сужением некоторого непрерывного отображения $I \rightarrow I^2$. (Ср. 2.Вх.2.)

Отображение, существование которого утверждается в последней задаче, является непрерывной сюръекцией $I \rightarrow I^2$, таким образом, кривая может целиком заполнить квадрат. Кривые, обладающие этим свойством, были впервые построены Д. Пеано в 1890 г. С тех пор было найдено множество примеров таких кривых, называемых **кривыми Пеано**. набросок конструкции, предложенной Д. Гильбертом, намечен ниже в задачах 9.Lx- 9. Ox.

9.Lx. Докажите, что существует такая последовательность непрерывных кусочно линейных отображений $f_k : I \rightarrow I^2$, что:

- (1) $f_k(I)$ содержит центры всех 4^k квадратов, получающихся при разбиении каждой стороны на 2^k равных отрезков;
- (2) $\text{dist}(f_k(x), f_{k-1}(x)) \leq \sqrt{2}/2^{k+1}$ для любого $x \in I$ (здесь dist - стандартная евклидова метрика в \mathbb{R}^2).

9.Мх. Докажите, что всякая последовательность функций, которая удовлетворяет требованиям задачи *О.Лх*, сходится к функции $f : I \rightarrow I^2$ (т. е. $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ для любой точки $x \in I$), эта функция непрерывна и её образ всюду плотен в квадрате I^2 .

9.Нх. Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : I \rightarrow I^2$ со всюду плотным образом сюръективно.

Для решения этой задачи мы рекомендуем привлечь средства: либо хорошо известные теоремы анализа, либо результаты, которые будут получены в 16. Ср. задачи *16.0*, *16.Т* и *16.К*.

9.Ох. Обобщите *9.Лх*-*9.Кх* и *О.Лх* *9.Нх*: докажите существование непрерывных сюръекций $I \rightarrow I^n$ с $n \geq 3$.

5.3. Гомеоморфизмы

5.3.1. Определение и основные свойства гомеоморфизмов

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно обратимо, непрерывно, и к тому же обратное к нему отображение также является непрерывным.

10. А. Постройте непрерывную биекцию, не являющуюся гомеоморфизмом.

Например, тождественное отображение дискретного топологического пространства X в то же множество, наделенное тривиальной топологией.

10. В. Постройте непрерывную биекцию $[0; 1) \rightarrow S^1$, не являющуюся гомеоморфизмом.

Рассмотрите отображение $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

10. С. Тождественное отображение (любого топологического пространства) есть гомеоморфизм.

Это и два следующих за ним утверждения сразу следуют из определения гомеоморфизма.

10. D. Композиция гомеоморфизмов есть гомеоморфизм.

10. E. Отображение, обратное гомеоморфизму, есть гомеоморфизм.

5.3.2. Гомеоморфные пространства

Говорят, что пространство X *гомеоморфно* пространству Y , если существует гомеоморфизм $X \rightarrow Y$.

10.F. Гомеоморфность является отношением эквивалентности.

Смотрите ответ на задачу 10.1.

10.1. Как теорема 10.F связана с 10.C-10.E?

5.3.3. Роль гомеоморфизмов

10.G. Если $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, то множество $U \subset X$ открыто (в X), тогда $f(U)$ открыто (в Y).

Пусть $U \subset X$, $V = f(U) \subset Y$, $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$. Так как гомеоморфизм есть биекция, то $U = f^{-1}(V)$. Обозначим через g отображение, обратное к f , так что $V = g^{-1}(U)$. Если U открыто, то множество V открыто, поскольку оно есть прообраз открытого множества U при непрерывном отображении g . Если открыто V , то U — это его прообраз при непрерывном отображении f .

10.H. Отображение $f : X \rightarrow Y$ есть гомеоморфизм, тогда оно является биекцией, которая определяет биекцию между топологическими структурами пространств X и Y .

10.H См. *10.G*.

10.I. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм. Тогда для любого $A \subset X$:

(1) A замкнуто в X , тогда $f(A)$ замкнуто в Y ;

(2) $f(\text{Cl } A) = \text{Cl } f(A)$;

(3) $f(\text{Int } A) = \text{Int } f(A)$;

(4) $f(\text{Fr } A) = \text{Fr } f(A)$;

(5) A - окрестность точки $x \in A$, тогда $f(A)$ - окрестность точки $f(x)$;

(6) etc.

Таким образом, с топологической точки зрения гомеоморфные пространства устроены совершенно одинаково - гомеоморфизм $X \rightarrow Y$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми явлениями в X и Y , которые выражаются в терминах топологических структур.

Гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между открытыми, значит, и между замкнутыми множествами. Для доказательства следующих утверждений воспользуйтесь определениями замыкания, внутренней, границы множества.

На первых этапах развития топологии, когда еще не было выделено понятие топологического пространства, а изучались подпространства евклидовых пространств, их непрерывные отображения и гомеоморфизмы, указанное свойство было положено в основу определения топологии. Ф. Клейн в своей знаменитой Эрлангенской программе, в которой он классифицировал различные геометрии, выделившиеся к тому времени (евклидову, аффинную, геометрию подобия, проективную, геометрию Лобачевского и т. п.), определяя топологию как часть геометрии, изучающую свойства фигур, которые сохраняются при гомеоморфизмах.

5.3.4. Дальнейшие примеры гомеоморфизмов

10. J. Если $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, то для любого $A \subset X$ подотображение $ab(f) : A \rightarrow f(A)$ - тоже гомеоморфизм.

Отображение $ab(f)$ есть биекция, а непрерывность $ab(f)$ и $(ab f)^{-1}$ следует из общей теоремы о сокращении.

10. K. Всякая изометрия (см.5.2) есть гомеоморфизм.

Всякая изометрия непрерывна. Отображение, обратное изометрии, само является изометрией.

10. L. Всякое невырожденное аффинное преобразование пространства \mathbb{R}^n есть гомеоморфизм.

Если $y = Ax + b$, то $x = A^{-1}y - A^{-1}b$, т. е. невырожденное аффинное отображение есть биекция. Их непрерывность следует, к примеру, из их липшицевости.

10. M. Пусть X и Y - линейно упорядоченные множества. Относительно интервальных топологий в X и Y любое сюръективное строго монотонное или строго антимонотонное отображение $X \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом.

Всякое сюръективное строго монотонное отображение обратимо, и обратное к нему также является строго монотонным. Теперь можно применить утверждение 9. Ax.

10. N Следствие. Всякая сюръективная, строго монотонная функция $f : [a; b] \rightarrow [c; d]$ является гомеоморфизмом.

10.2. Докажите, что инверсия

$$x \mapsto \frac{Rx}{|x|^2} : \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$$

есть гомеоморфизм.

10.3. Пусть $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ верхняя полуплоскость. Докажите, что отображение $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ заданное формулой

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

является гомеоморфизмом, если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$.

10-4. Докажите, что биекция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом, когда она - монотонная функция.

10.5. 1) Докажите, что всякая биекция антидискретного пространства на себя является гомеоморфизмом. Докажите, что то же самое верно для: 2) дискретного пространства; 3) прямой с топологией Зариского.

10.6. Найдите все гомеоморфизмы пространства \mathbb{I} (см. 2) на себя.

10.7. Докажите, что всякая непрерывная биекция стрелки на себя является гомеоморфизмом.

10.8. Постройте два гомеоморфных пространства X и Y и непрерывную биекцию $X \rightarrow Y$, не являющуюся гомеоморфизмом.

10.9. Является ли отображение $\gamma_2 : K \rightarrow K^2$, рассмотренное в задаче

9.1х, гомеоморфизмом? Напомним, что K - канторово множество,

$K^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in K, y \in K\}$ и γ_2 определяется формулой

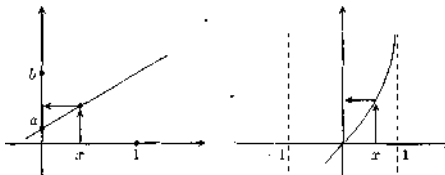
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{3^k} \right)$$

5.3.5. Примеры гомеоморфных пространств

Ниже гомеоморфность обозначается значком \cong . Это не общепринятое обозначение. В литературе в этом смысле используются практически все символы, близкие к символу $=$, но отличные от него, например \sim , \simeq , \approx .

10.0. Докажите, что

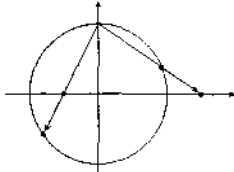
- (1) $[0; 1] \cong [a; b]$ для любых $a < b$,
- (2) $[0; 1] \cong [a; b] \cong (0; 1] \cong (a; b]$ для любых $a < b$,
- (3) $(0; 1) \cong (a; b)$ для любых $a < b$,
- (4) $(-1; 1) \cong \mathbb{R}$,
- (5) $[0; 1) \cong [0; +\infty)$ и $(0; 1) \cong (0; +\infty)$.



В этих задачах гомеоморфизмами являются стандартные функции. К примеру, гомеоморфизм $f : [0; 1] \rightarrow [a; b]$ задается формулой $f(x) = a + (b - a)x$, а гомеоморфизм $f : (-1; 1) \rightarrow \mathbb{R}^1$ - формулой $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. (Во втором случае нетрудно найти

гомеоморфизм, который задается рациональной функцией, однако, достаточно часто появляется именно приведенная формула.)

10.P. Пусть $N = (0,1)$ - Северный полюс на единичной окружности. Тогда $S^1 \setminus N \cong \mathbb{R}^1$



Воспользуйтесь тем, что отображение

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow S^1 \setminus N : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

является гомеоморфизмом и примените утверждения (с) и (d) предыдущей задачи. Приведем также другое решение, которое можно обобщить на высшие размерности.

Сужение f центральной проекции $\mathbb{R}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^1$ (на ось абсцисс) на $S^1 \setminus N$ есть гомеоморфизм. Действительно, очевидно, что отображение f обратимо: f^{-1} - это сужение центральной проекции $\mathbb{R}^2 \setminus N \rightarrow S^1 \setminus N$.

Отображение $S^1 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ задается формулой $(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$, а

обратное ему - формулой $x \mapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$. (Почему эти отображения непрерывны?)

10.Q. График непрерывной функции, заданной на некотором промежутке, гомеоморфен этому промежутку.

Убедитесь, что вертикальная проекция на ось абсцисс определяет гомеоморфизм.

10.R. $S^n \setminus \text{point} \cong \mathbb{R}^n$

Как обычно, отождествим \mathbb{R}^n с подмножеством $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$. Сужение центральной проекции

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

на $S^n \setminus (0, \dots, 0, 1)$ есть гомеоморфизм, который называется

стереографической проекцией. При $n = 2$ он используется в картографии. Это отображение обратимо, обратное к нему является сужением центральной проекции

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0, 1) \rightarrow S^n \setminus (0, \dots, 0, 1)$ на \mathbb{R}^n . Первое отображение задается формулой

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right),$$

а второе - формулой

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).$$

Проверьте это. Убедитесь, что оба отображения непрерывны.

10.10. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны.

Здесь и далее мы для простоты записи (и чтения) будем использовать немного некорректные обозначения. Именно, при задании подмножеств мы будем опускать первую часть " $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ " формулы.

- (1) Вся плоскость \mathbb{R}^2 ;
- (2) открытый квадрат $\text{Int } I^2 = \{x, y \in (0; 1)\}$;
- (3) открытая полоса $\{x \in (0; 1)\}$;
- (4) открытая полуплоскость $\mathcal{H} = \{y > 0\}$;
- (5) открытая полуполоса $\{x > 0, y \in (0; 1)\}$;
- (6) открытый круг $\{x^2 + y^2 < 1\}$;
- (7) открытый прямоугольник $\{a < x < b, c < y < d\}$;
- (8) открытый квадрант $\{x \cdot y > 0\}$;
- (9) открытый угол $\{x > y > 0\}$;
- (10) $\{y^2 + |x| > x\}$ - плоскость с разрезом по лучу $\{y = 0, x \geq 0\}$;
- (11) открытый полукруг $\{x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$;
- (12) открытый сектор $\{x^2 + y^2 < 1, x > y > 0\}$

10.5. Докажите, что

- (1) замкнутый круг D^2 гомеоморфен квадрату $I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0; 1]\}$;
- (2) открытый круг $\text{Int } D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ гомеоморфен открытому квадрату $\text{Int } I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (0; 1)\}$;
- (3) окружность S^1 гомеоморфна контуру квадрата $\partial I^2 = I^2 \setminus \text{Int } I^2$.

Из доказательства данного утверждения уже будет понятно, что не всегда имеет смысл давать явное описание отображения посредством формул, из которых бывает трудно понять, что они дают именно то, что требуется. Проще давать словесное описание отображения, а доказывать его непрерывность и непрерывность обратного к нему, не опираясь на формулы.

- (а). Вместо квадрата I^2 удобнее рассматривать (гомеоморфный ему) квадрат вдвое большего размера с центром в начале координат $K = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Гомеоморфизм $I^2 \rightarrow K$ линеен:
- $$(x, y) \mapsto (2x - 1, 2y - 1).$$

Гомеоморфизмом $K \rightarrow S^1$ является отображение, заданное формулами

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Гомеоморфизмом $K \rightarrow D^2$ является

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x \max\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y \max\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

С геометрической точки зрения этот гомеоморфизм линейно отображает отрезок, соединяющий начала координат с точкой на контуре квадрата, на часть этого отрезка, лежащую внутри круга. (b), (c). Рассмотрите подходящие подотображения построенного выше гомеоморфизма $K \rightarrow D^2$. Конечно, утверждение (b) непосредственно следует из доказательства утверждения (a). Интересно, что в случае (c) искомый гомеоморфизм может задать совсем простой формулой:

$$\partial K \rightarrow S^1 : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

(Это просто центральная проекция!) Наконец, можно разделить окружность на четыре дуги и отобразить каждую из них на свою сторону квадрата K .

10. Т. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ - плоское выпуклое ограниченное множество, внутренность U которого непуста. Докажите, что

- (1) Δ гомеоморфно замкнутому кругу D^2 ;
- (2) U гомеоморфно открытому кругу B^2 ;
- (3) $\text{Fr } \Delta = \text{Fr } U$ гомеоморфно окружности S^1 .

(a) Будем считать для простоты, что $D^2 \subset \Delta$. Для всякой точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ найдется единственное положительное число $a(x)$, такое что $a(x) \cdot \frac{x}{|x|} \in \text{Fr } \Delta$. Рассмотрите отображение

$$\Delta \rightarrow D^2 : x \mapsto \frac{x}{a(x)} \text{ при } x \neq 0, \text{ тогда как } 0 \mapsto 0,$$

которое и является искомым гомеоморфизмом. Обратите внимание, что в случае, когда множество Δ есть квадрат K , мы получим в точности гомеоморфизм, построенный в решении предыдущей задачи.

(b), (c) Рассмотрите подходящие подотображения гомеоморфизма $\Delta \rightarrow D^2$.

10.11. В каком из случаев, рассматриваемых в задаче 10. Т, можно отказаться от ограниченности?

10.12. Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма замкнутые выпуклые подмножества плоскости. (Составьте полный список без повторов; докажите, что всякое такое подмножество гомеоморфно одному из списка; доказательство попарной негомеоморфности отложите до 11.)

10.13*. Обобщите предыдущие три задачи на случай подмножеств пространства \mathbb{R}^n с произвольным n .

Из последних четырех задач можно, сделать вывод, что в топологии изломы по существенны, т. е. свойство линии или границы области иметь изломы не сохраняется при гомеоморфизмах. В связи с этим решите ещё две задачи.

10.14- Докажите, что всякая замкнутая несамопересекающаяся ломаная в \mathbf{R}^2 (и в \mathbf{R}^n с $n > 2$) гомеоморфна окружности S^1 .

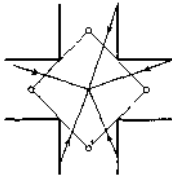
10.15. Докажите, что всякая незамкнутая несамопересекающаяся конечно-звенная ломаная в \mathbf{R}^2 (и в \mathbf{R}^n с $n > 2$) гомеоморфна отрезку $[0; 1]$.

В следующей задаче сформулировано обобщение техники, использованной при решении двух предыдущих задач. Интересно, что она используется чаще, чем это может показаться на первый взгляд.

10.16. Пусть X и Y топологические пространства, на которых заданы их некоторые фундаментальные покрытия:

$X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$ и $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$. Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow Y$, такое что $f(X_{\alpha}) \approx Y_{\alpha}$ для каждого α , причем каждое из подотображений $\text{ab}(f) : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$ является гомеоморфизмом. Тогда и отображение f - гомеоморфизм.

10.17. Докажите, что $\mathbf{R}^2 \setminus \{|x|, |y| > 1\} \cong I^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}$. (Бесконечный "крест" гомеоморфен квадрату без вершин.)



10.18*. Непустое множество $\Sigma \subset \mathbf{R}^2$ называется "звездой с центром c ", если Σ является объединением отрезков и лучей, одним из концов которых является точка c . Докажите, что если множество Σ открыто, то $\Sigma \cong B^2$. (Что можно сказать о замкнутой звезде с непустой границей?)

10.19. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.

- (1) Полуплоскость $\{x \geq 0\}$;
- (2) квадрант $\{x, y \geq 0\}$;
- (3) угол $\{x \geq y \geq 0\}$;
- (4) полуоткрытая полоса $\{y \in [0; 1)\}$;
- (5) квадрат без трех сторон $\{0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
- (6) квадрат без двух сторон $\{0 \leq x, y < 1\}$;
- (7) квадрат без стороны $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$;
- (8) квадрат без вершины $\{0 \leq x, y \leq 1\} \setminus \{1, 1\}$;
- (9) круг без одной граничной точки $\{x^2 + y^2 \leq 1, y \neq 1\}$;

(10) полукруг без диаметра $\{x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$;

(11) круг без радиуса $\{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus [0; 1]$;

(12) квадрат без половины диагонали $\{|x| + |y| \leq 1\} \setminus [0; 1]$.

10.20. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

(1) проколота плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$;

(2) проколотый открытый круг $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

(3) кольцо $\{(x, y) \mid a < x^2 + y^2 < b\}$ где $0 < a < b$;

(4) плоскость без круга $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$;

(5) плоскость без квадрата $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$;

(6) плоскость без отрезка $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]$;

(7) $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, где Δ - замкнутое ограниченное выпуклое множество с непустой внутренностью.

10.21. Если множество $X \subset \mathbb{R}^2$ есть объединение нескольких отрезков с общим концом, то дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$ гомеоморфно проколотой плоскости.

10.22. Если $X \subset \mathbb{R}^2$ есть простая незамкнутая конечнозвенная ломаная, то дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$ гомеоморфно проколотой плоскости.

10.23. Докажите, что если K и L конечные множества точек плоскости, состоящие из одинакового числа точек, то их дополнения гомеоморфны.

10.24. Пусть $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^2$ попарно не пересекающиеся замкнутые круги. Докажите, что дополнение их объединения гомеоморфно плоскости без n точек.

10.25. Пусть $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^2$ попарно непересекающиеся замкнутые круги. Дополнение объединения их внутренностей называется плоскостью с n дырами. Докажите, что любые две плоскости с n дырами гомеоморфны (т. е. при изменении взаимного расположения кругов D_1, \dots, D_n топологический тип дополнения объединения их внутренностей не меняется).

10.26. Пусть $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывные функции, причем $f < g$. Докажите, что промежуток $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$, ограниченный их графиками, гомеоморфен замкнутой полосе $\{(x, y) \mid y \in [0; 1]\}$.

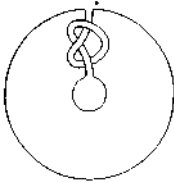
10.27. Докажите, что кофейная чашка (с добротной ручкой) гомеоморфна бублику.

10.28. Поделите следующий набор предметов на классы гомеоморфных: кофейная чашка, блюдце, стакан, ложка, вилка, нож, тарелка, монета, гвоздь, винт, болт, гайка, шайба, шуруп, обручальное кольцо, сверло, цветочный горшок (с отверстием в доньшке), ключ.

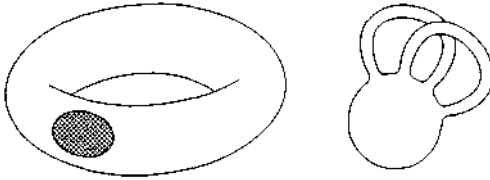
10.29. В шаровом слое (промежутке между двумя концентрическими сферами) просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее

граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару D^3 .

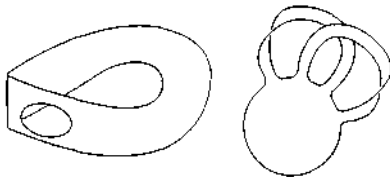
10.30. В шаровом слое просверлили отверстие, соединяющее граничные сферы и имеющее форму заузленной трубки (см. рисунок). Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару D^3 .



10.31. Докажите, что поверхности, показанные на следующем рисунке, гомеоморфны (и то, и другое - так называемая *ручка*).



10.32. Докажите, что поверхности, показанные на следующем рисунке, гомеоморфны.



10.33*. Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup \{(1, 1, 1)\})$.

10.34. Подмножество сферы S^n , определяемое в стандартных координатах пространства \mathbb{R}^{n+1} неравенством,

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 < x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ гомеоморфно $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^{m-k}$.

5.3.6. Примеры негомеоморфных пространств

10. U. Пространства, состоящие из разного числа точек, не гомеоморфны.

Не существует биекции одного пространства на другое.

10. V. Дискретное и аптидискретное пространства, имеющие более одной точки, не гомеоморфны.

В этих пространствах различное число открытых множеств. (К примеру, одноточечное подмножество в одном из них открыто, а в другом - нет.)

10.35. Докажите, что пространства \mathbf{Z} , \mathbf{Q} (с индуцированной из \mathbf{R} топологией), \mathbf{R} , \mathbf{R}_T и стрелка попарно не гомеоморфны.

10.36. Постройте два негомеоморфных пространства X и Y , для которых существуют непрерывные биекции $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$.

5.3.7. Проблема гомеоморфизма и топологические свойства

Одной из классических проблем топологии является *проблема гомеоморфизма*: определить, являются ли данные пространства гомеоморфными. В каждом конкретном случае характер решения зависит от ответа. Для доказательства гомеоморфности достаточно построить гомеоморфизм между пространствами, что в той или иной форме обычно и делается. Для доказательства негомеоморфности недостаточно рассмотреть какое-либо определенное отображение, а непосредственно обозреть все отображения обычно невозможно. Поэтому при доказательстве негомеоморфности чаще всего пользуются косвенными средствами: находят какое-нибудь свойство или характеристику, которыми обладает одно пространство, не обладает другое и которые передаются от пространства к пространству при гомеоморфизме.

Очевидными примерами таких, как говорят, *топологических свойств* и *инвариантов* являются мощность множества точек и мощность топологической структуры (ср. задачи 10.34 и 10.U). Менее очевидные примеры являются основным предметом следующей главы.

Информация: негомеоморфности. Евклидовы пространства разных размерностей не гомеоморфны; шары D^p , D^q с разными p , q не гомеоморфны; сферы S^p , S^q с $p \neq q$ не гомеоморфны; сфера S^2 не гомеоморфна поверхности тора; евклидовы пространства не гомеоморфны ни шарам, ни сферам (любых размерностей); буквы A и B не гомеоморфны (здесь мы считаем, что эти буквы составлены из линий, лишенных толщины); проколота плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \text{point}$ не гомеоморфна плоскости с дырой $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 < 1\}$. Заметим, что эти утверждения – разной степени трудности. Некоторые из них будут доступны уже в следующем параграфе. Некоторые же требуют техники, выходящей за рамки этой книги.

5.3.8. Вложения

Непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *[топологическим] вложением*, если подотображение $\text{ab}(f) : X \rightarrow f(X)$ есть гомеоморфизм.

10. W. Включение подпространства в пространство является вложением.

Действительно, если $\text{in} : A \rightarrow X$ - включение, то подотображение $\text{ab}(\text{in}) = \text{id}_A$ - это тождественный гомеоморфизм.

10. X. Композиция вложений есть вложение.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ - вложения. Тогда подотображение $\text{ab}(g \circ f) = \text{ab}(g) \circ \text{ab}(f) : X \rightarrow g(f(X))$ - гомеоморфизм.

10. Y. Приведите пример непрерывного инъективного отображения, не являющегося топологическим вложением. (Найдите такой пример выше и придумайте новый.)

Уже были примеры $[0; 1] \rightarrow S^1; \mathbb{Z}_+ \rightarrow \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}$. Вот ещё один:

Рассмотрим биекцию $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ и включение $\text{in}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$.

Композиция $\text{in}_{\mathbb{Q}} \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ будет непрерывной инъекцией, но не вложением.

10.37. Найдите такие пространства X и Y , что X вкладывается в Y и Y вкладывается в X , но $X \not\cong Y$.

10.38. Докажите, что \mathbb{Q} не вкладывается в \mathbb{Z} .

10.39. 1) Можно ли вложить дискретное пространство в антидискретное? 2) А наоборот, антидискретное в дискретное?

10-40. Докажите, что пространства $\mathbf{R}, \mathbf{R}_{\Gamma 1}$ и стрелка не вкладываются друг в друга.

10.41 Следствие теоремы об обратной функции. Выведите из теоремы об обратной функции (см., например, любой учебник анализа функций нескольких переменных) следующее утверждение:

Для всякой дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой $\det (\frac{\partial f}{\partial x})(0) \neq 0$, существует такая окрестность U нуля $0 \in \mathbb{R}^n$, для которой отображение $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть вложение и образ $f(U)$ — открытое множество.

5.3.9. Эквивалентность вложений

Вложения $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ называются *эквивалентными*, если существуют такие гомеоморфизмы $h_X : X \rightarrow X$ и $h_Y : Y \rightarrow Y$, что $f_2 \circ h_X = h_Y \circ f_1$ (последнее равенство часто передают, говоря, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ h_X \downarrow & & \downarrow h_Y \\ X & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

коммутативна).

Любое вложение окружности S^1 в \mathbf{R}^3 называется *узлом*.

10.42. Докажите, что узлы $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ с $f_1(S^1) = f_2(S^1)$ эквивалентны.

10.43. Докажите, что узлы  эквивалентны.

Информация: существуют неэквивалентные узлы. Например,



6. Топологические свойства

6.1. Связность

6.1.1. Определение связности и примеры

Топологическое пространство X называется *связным*, если любое его подмножество, открытое и замкнутое одновременно, либо пусто, либо совпадает со всем пространством X .

Разбиением множества называется его покрытие попарно непересекающимися множествами; **разбить** множество - значит построить его разбиение.

11.А. Топологическое пространство связно, тогда его нельзя разбить на два непустых открытых множества, тогда его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества.

Множество A открыто и замкнуто, тогда множества A и $X \setminus A$ открыты, тогда A и $X \setminus A$ замкнуты.

11.1. Связно ли 1) антидискретное пространство; 2) стрелка; 3) \mathbb{R}_{T_1} ?

11.2. Опишите явно все связные дискретные пространства.

11.3. Опишите явно все несвязные двучечные пространства.

11.4. 1) Связно ли пространство \mathbf{Q} рациональных чисел (с топологией, индуцированной из \mathbf{R})? 2) Тот же вопрос относительно множества иррациональных чисел.

11.5. Пусть в множестве X заданы топологические структуры Ω_1 и Ω_2 , причем структура Ω_2 является более тонкой (т. е. $\Omega_1 \subset \Omega_2$). 1) Если пространство (X, Ω_2) связно, то связно ли пространство (X, Ω_1) ? 2) Если пространство (X, Ω_1) связно, то связно ли пространство (X, Ω_2) ?

6.1.2. СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА

Когда говорят, что какое-то множество связно, всегда имеют в виду, что множество лежит в топологическом пространстве (в каком именно - должно быть ясно из контекста) и что с индуцированной этим включением топологией оно является связным пространством.

11.6. Дайте определение несвязного подмножества, не употребляя термин индуцированная топология.

11.7. Связно ли множество $\{0, 1\}$ в 1) \mathbf{R} ; 2) стрелке; 3) \mathbb{R}_{T_1} ?

11.8. Опишите явно все связные подмножества 1) стрелки; 2) пространства \mathbb{R}_{T_1} .

11.9. Покажите, что множество $\{0, 1\} \cup \{2, 3\}$ несвязно в \mathbf{R} .

11.10. Докажите, что всякое невыпуклое подмножество прямой несвязно.

11.11. Докажите, что подмножество A топологического пространства X несвязно, тогда существуют непустые множества B и C такие, что $A = B \cup C$, $B \cap \text{Cl}_X C = \emptyset$ и $C \cap \text{Cl}_X B = \emptyset$.

11.12. Укажите какое-нибудь топологическое пространство и в нём такое несвязное подмножество A , что для любых непересекающихся открытых множеств U и V , образующих покрытие множества A , либо $U \supset A$, либо $V \supset A$.

11.13. Докажите, что для любого несвязного множества в \mathbf{R}^n существуют непересекающиеся открытые множества U и V , такие, что $A \subset U \cup V$, $U \cap A \neq \emptyset$ и $V \cap A \neq \emptyset$.

Сравните 11.11 - 11.13 с 11.6.

6.1.3. СВОЙСТВА СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ

11.14. Пусть X - топологическое пространство. Если подмножество $M \subset X$ связно и непустое собственное подмножество $A \subset X$ открыто и замкнуто, то либо $M \subset A$, либо $M \subset X \setminus A$.

11.В. Замыкание связного множества связно.

Достаточно доказать следующее формально более слабое утверждение: Пространство, в которой существует связное всюду плотное множество, само является связным. (См. 6.3.) Пусть X - пространство

и A - его связное всюду плотное подмножество. Пусть $X = U \cup V$, где множества U и V открыты и не пересекаются. Докажем, что одно из этих множеств пусто. Множества $U \cap A$ и $V \cap A$ не пересекаются и открыты в A , значит

$$A = X \cap A = (U \cup V) \cap A = (U \cap A) \cup (V \cap A).$$

Так как A связно, то одно из множеств разбиения, к примеру $U \cap A$, пусто. Тогда и множество U пусто, поскольку A всюду плотно, см. 6.М.

11.15. Докажите, что если множество A связно и $A \subset B \subset \text{Cl} A$, то множество B тоже связно.

11.С. Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно. (Другими словами: пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ - семейство связных подмножеств пространства X и пусть пересечение любых двух множестве этого семейства непусто. Тогда множество

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

связно.)

Для упрощения обозначений положим $X = \bigcup_{\lambda} A_\lambda$. В силу теоремы 11. А достаточно доказать, что если U и V - открытые множества, составляющие разбиение X , то либо $U = \emptyset$, либо $V = \emptyset$. Для каждого $\lambda \in \Lambda$, поскольку множество A_λ по условию связно, то либо $A_\lambda \subset U$, либо $A_\lambda \subset V$ (см. 11.14). Зафиксируем некоторое $\lambda_0 \in \Lambda$. Для определенности считаем, что $A_{\lambda_0} \subset U$. Так как каждое из множеств A_λ пересекается с A_{λ_0} , то все они лежат в U , так что ни одно из них не пересекается с V , следовательно

$$V = V \cap X = V \cap \bigcup_{\lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda} (V \cap A_\lambda) = \emptyset.$$

11.D Специальный случай. Пусть множества $A, B \subset X$ связны и $A \cap B \neq \emptyset$. Тогда и их объединение $A \cup B$ также связно.

11.E. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ - семейство связных подмножеств пространства X . Предположим, что каждое множество семейства пересекается с множеством A_{λ_0} (для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$). Тогда множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ связно.

Примените теорему 11. С к семейству $\{A_\lambda \cup A_{\lambda_0}\}_{\lambda \in \Lambda}$, которое состоит из связных множеств (в силу 11.D). (Или просто повторите доказательство теоремы 11.С.)

11.F. Если $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ - такая последовательность связных множеств, что $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ при любом $k \in \mathbb{Z}$, то множество $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ связно.

Используйте рассуждение из 11. С, а для доказательства того, что

$A_k \subset U$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, примените метод математической индукции.

11.16. Покажите, что если множества A, B связны и $A \cap B \neq \emptyset$, то $A \cup B$ - связное множество.

11.17. Пусть A - связное подмножество связного пространства X и множество $B \subset X \setminus A$ открыто и замкнуто в топологии подпространства $X \setminus A$ пространства X . Докажите, что множество $A \cup B$ связно.

11.18. Следует ли из связности множеств $A \cup B$ и $A \cap B$ связность множеств A и B ?

11.19. Пусть множества A и B таковы, что и их объединение, и их пересечение есть связное множество. Докажите, что множества A и B тоже связны, если каждое из них: 1) открыто; 2) замкнуто.



11.20. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ - бесконечная убывающая последовательность связных множеств. Обязательно ли связно пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$?

6.1.4. Компоненты связности

Компонентой связности пространства X называется всякое его связное подмножество, не содержащееся ни в каком другом (строго большем) связном подмножестве пространства X .

11.G. Каждая точка содержится в некоторой компоненте связности, причем только в одной: ею является объединение всех связных множеств, содержащих эту точку.

Очевидно, поскольку объединение всех связных множеств, содержащих данную точку, во-первых, связно в силу 11.C, во-вторых, максимально.

11.H. Две компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть A и B - компоненты связности. Предположим, что $A \cap B \neq \emptyset$. В силу 11.D множество $A \cup B$ связно. Поскольку компонента является наибольшим связным содержащим некоторую точку множеством, то $A \supset A \cup B \subset B$, значит $A = A \cup B = B$.

Компоненты связности пространства называются также его *связными компонентами* или просто *компонентами*. Теоремы 11.G и 11.H показывают, что компоненты связности составляют разбиение

топологического пространства. Следующая теорема описывает отношение эквивалентности, соответствующее этому разбиению.

11.1. Две точки содержатся в одной компоненте тогда и только тогда, когда они содержатся в одном связном подмножестве.

Это очевидно, так как компонента связна.

Так как в таком случае компоненты точек пересекаются, то они совпадают

11. J. Следствие. Пространство связно тогда и только тогда, когда любая пара его точек лежит в некотором связном множестве.

11.К. Компоненты связности замкнуты.

Пусть A - компонента связности. В силу 11.В ее замыкание $\text{Cl}A$ также является связным. Так как компонента обладает свойством максимальности, то $\text{Cl}A \subset A$. Значит, $A = \text{Cl}A$, так как обратное включение имеет место вообще для любого множества.

11.21. Если у каждой точки пространства X имеется связная окрестность, то каждая компонента X открыта.

11.22. Пусть точки x и y принадлежат одной компоненте пространства. Если некоторое его подмножество одновременно открыто и замкнуто, то оно либо содержит обе эти точки, либо не содержит ни одной из них (ср. 11.3Т).

6.1.5. Вполне несвязные пространства

Топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если любая его компонента состоит из одной точки.

11.Л Пример. Любое дискретное пространство вполне несвязно.

11.М. Пространство \mathbf{Q} (с индуцированной из \mathbf{R} топологией) вполне несвязно. См. 11.10.

Обратите внимание, что \mathbf{Q} не дискретно.

11.23. Приведите пример несчетного замкнутого вполне несвязного подмножества прямой.

11.24. Канторово множество (см. 2.Вх) вполне несвязно.

6.1.6. Связность и граница множества

11.25. Докажите, что если A - собственное непустое подмножество связного топологического пространства, то $\text{Fr } A \neq \emptyset$.

11.26. Пусть F связное подмножество пространства X . Докажите, что если

$$A \subset X, F \cap A, \text{ и } F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset, \text{ то } F \cap \text{Fr } A \neq \emptyset.$$

11.27. Пусть A - подмножество связного топологического пространства. Докажите, что если $\text{Fr } A$ - связное множество, то $\text{Cl } A$ - тоже связное множество.

11.28. Пусть X - связное топологическое пространство, U и V - его пересекающиеся открытые подмножества, имеющие общие внешние точки, причем ни одно из них не является подмножеством другого. Докажите, что если их границы $\text{Fr } U$ и $\text{Fr } V$ связны, то $\text{Fr } U \cap \text{Fr } V \neq \emptyset$.

6.1.7. Связность и непрерывные отображения

Непрерывным образом пространства называется его образ при непрерывном отображении.

11.N. *Непрерывный образ связного пространства связан. (Другими словами, если $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение и пространство X связно, то и множество $f(X)$ связно.)*

Рассмотрим подотображение $\text{ab}(f) : X \rightarrow f(X)$. Таким образом, достаточно доказать следующую теорему:

Если пространство X связно, а отображение $f : X \rightarrow Y$ - непрерывная сюръекция, то и пространство Y связно.

Рассмотрим разбиение пространства Y на два открытых множества U и V и докажем, что одно из них пусто. В силу непрерывности отображения, прообразы $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ открыты и составляют разбиение пространства X . Поскольку X связно, одно из них пусть.

Пусть $f^{-1}(U) = \emptyset$. Так как f сюръективно, то и $U = \emptyset$.

11.O. Следствие. *Связность - топологическое свойство.*

11.P Следствие. *Число компонент связности является топологическим инвариантом.*

11.Q. *Пространство X несвязно, тогда существует непрерывная сюръекция $X \rightarrow S^0$.*

Пусть $X = U \cup V$, где множества U и V открыты, непусты и непересекаются. Положим $f(x) = -1$ при $x \in U$ и $f(x) = 1$ при $x \in V$. Отображение $f : X \rightarrow S^0$ непрерывно и сюръективно, не правда ли?

Предположим противное, пусть X связно. Тогда, в силу 11.N, будет связным и S^0 - противоречие.

11.29. При помощи 11. Q часто можно получить более короткие доказательства различных утверждений о связных множествах.

Примените её для того, чтобы доказать, к примеру, теоремы 11.B 11.F и решить задачи 11.D и 11.16.

11.30. Пусть X - связное пространство и $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ - непрерывная функция. Тогда множество $f(X)$ является промежутком в \mathbf{K} .

11.31. Если пространство снабжено структурой группы и умножение на любой элемент группы является непрерывным отображением, то связная компонента единицы является нормальной подгруппой.

6.1.8. Связные подмножества числовой прямой

11.R. Отрезок $I = [0; 1]$ *связен*.

Собственно говоря, в силу 11.Q это утверждение есть следствие теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении. Однако естественнее поступить наоборот: вывести теорему о промежуточном значении из задачи 11.Q и связности I .

Итак, пусть $[0; 1] = U \cup V$, где множества U и V не пересекаются и открыты в $[0; 1]$. Предположим, что $0 \in U$, рассмотрим множество $C = \{x \in [0; 1] \mid [0; x] \subset U\}$ и положим $c = \sup C$. Покажите, что каждое из предположений - $c \in U$ и $c \in V$ приводит к противоречию. Другие доказательства теоремы 11.R намечены ниже в леммах 11.R.1 и 11.R.2.

Теорему 11.R можно доказать несколькими способами. Один из них подсказывается задачей 11.Q и опирается на известную теорему о промежуточном значении из математического анализа, см. 12.A. Ниже предлагаются две задачи, доставляющие набросок в сущности того же самого доказательства: комбинации теоремы 11.Q с традиционным доказательством теоремы о промежуточном значении. См. также 2.Ax.

11.R.1. Пусть U, V - подмножества отрезка I , причем $V = I \setminus U$. Пусть $a \in U, b \in V$ и $a < b$. Докажите, что существуют неубывающая последовательность a_n с $a_1 = a, a_n \in U$ и невозрастающая последовательность b_n с $b_1 = b, b_n \in V$, такие что $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n - 1}$.

Проведите рассуждение по индукции. Для каждого $n = 1, 2, 3, \dots$, положите

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := \begin{cases} \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{если } \frac{a_n+b_n}{2} \in U, \\ \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{если } \frac{a_n+b_n}{2} \in V. \end{cases}$$

11.R.2. Если в предположениях 11.R.1 U и V замкнуты в I , то кому из них принадлежит $c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$?

С одной стороны, $c \in U$, так как $c \in \text{Cl}\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}, a_n \in U$,

а множество U замкнуто в I . С другой стороны, то нее рассуждение показывает, что $c \in V$. Это противоречие показывает, что U и V не могут одновременно быть замкнутыми, таким образом, I связан.

11.32. Выведите 11.R из 2.Ax.

11.S. Докажите, что открытое подмножество прямой \mathbf{R} имеет счётное число компонент связности.

Каждое открытое подмножество прямой есть объединение непересекающихся интервалов, а в каждом интервале есть хотя бы одна рациональная точка. Следовательно, всякое открытое подмножество прямой есть объединение не более чем счётного числа интервалов. Осталось заметить, что каждый из них является связным множеством (см. следующее утверждение).

11. T. Пространство \mathbf{R}^1 связано.

Используйте 11.R и 11.J. (Ср. 11.U и 11.X.)

11. U. Всякое выпуклое подмножество \mathbf{R}^n связано. (В частности, таковым является все пространство \mathbf{R}^n , открытый шар B^n и замкнутый шар D^n .)

Используйте 11.R и 11.J. (Напомним, что множество $K \subset \mathbf{R}^n$ называется выпуклым, если $[p; q] \subset K$ для любых точек $p, q \in K$.)

11. V **Следствие.** Любой промежуток в \mathbf{R}^1 связан.

Используйте 11. R и 11.С.

11.W. Всякое звездное подмножество \mathbf{R}^n связано.

11.X Связность на прямой. *Подмножество прямой связано, когда оно есть некоторый промежуток.*

Это в точности утверждение 11.10.

Это в точности утверждение 11.V.

11.Y. Докажите, что n -мерная сфера S^n связана. В частности, связана окружность S^1 .

Используйте 10.R, 11.U, и, например, теорему 11.B (или 11.I).

11.33. Рассмотрим подмножество плоскости, являющееся объединением спирали

$$r = \exp\left(\frac{1}{1 + \varphi^2}\right), \text{ где } \varphi \geq 0$$

(здесь r, φ - полярные координаты), и окружности S^1 . 1) Является ли это множество связным? 2) Изменится ли ответ, если заменить окружность ее частью? (Ср. 11.15.)

11.34. Связны ли следующие подмножества плоскости:

- (1) составленное из точек, обе координаты которых рациональны;
- (2) составленное из точек, хотя бы одна из координат которых рациональна;

(3) составленное из точек, у которых либо обе координаты рациональны, либо обе иррациональны?

11.35. Докажите, что при любом $\varepsilon > 0$ ε -окрестность всякого связного подмножества евклидова пространства связна.

11.36. Докажите, что во всякой окрестности U связного подмножества A евклидова пространства содержится связная окрестности множества A .



11.37. Укажите такое пространство и такие его две точки, лежащие в его различных компонентах связности, что любое одновременно открытое и замкнутое множество либо содержит обе точки, либо не содержит ни одной из них. (Ср. 11.22.)

6.2. Приложения понятия связности

6.2.1. Теорема о промежуточном значении и её обобщения

Следующая теорема обычно входит в курс математического анализа. Вы легко выведете её из результатов этого параграфа. Она в определённом смысле эквивалентна связности отрезка.

12. А. Теорема о промежуточном значении. Любая непрерывная функция

$$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$$

принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Поскольку отрезок связан (см. 11.Р), то в силу 11.Н связан и его образ. Значит (см. 11.30) он является промежутком, следовательно, содержит все точки, лежащие между $f(a)$ и $f(b)$.

Многие задачи, которые можно решить при помощи теоремы о промежуточном значении, можно найти в книжках по анализу. Вот типичная задача этого типа.

12.1. Докажите, что любой многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами обладает вещественным корнем.

12.В Обобщение. Пусть X - связное¹ пространство и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Тогда множество $f(X)$ - промежуток.

См. доказательство 12.A.

12. С. Следствие. Пусть $J \subset \mathbb{R}$ - промежуток и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Тогда множество $f(X)$ также является промежутком. (Другими словами, непрерывные функции отображают промежутки в промежутки.)

6.2.2. Приложение к проблеме гомеоморфизма

Напомним, что связность - топологическое свойство, а число компонент связности - топологический инвариант (см. 10).

12.D. Множества $[0; 2]$ и $\{0; 1\} \cup \{2; 3\}$ не гомеоморфны.

Одно из них связно, а другое - нет.

Простейшие конструкции, которые переводят гомеоморфные пространства в гомеоморфные, например удаление одной или нескольких точек, позволяют применять связность и в доказательствах негомеоморфности некоторых связных пространств.

12.E. Пространства I , \mathbb{R}^1 , S^1 и $\{0; \infty\}$ попарно не гомеоморфны.

К примеру, если $f : I \rightarrow S^1$ - гомеоморфизм, то и $\text{ab } f :$

$I \setminus \frac{1}{2} \rightarrow S^1 \setminus f(\frac{1}{2})$ - гомеоморфизм, что невозможно, поскольку первое множество несвязно, а второе связно, так как гомеоморфно интервалу.

12.2. Окружность не гомеоморфна никакому подмножеству прямой \mathbb{R}^1 .

12.3. Дайте топологическую классификацию букв латинского алфавита A, B, C, ..., рассматриваемых как подмножества плоскости (линии, из которых составлены буквы, считайте лишенными толщины).

12.4. Докажите, что квадрат и отрезок не гомеоморфны.

Напомним что существуют непрерывные сюръекции отрезка на квадрат (кривые Пеано), см. 9.

12.F. Пространства \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^n с $n > 1$ не гомеоморфны.

Аналогично 12.4.

Информация. В действительности, \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q не гомеоморфны при $p \neq q$.

12.5. Докажите, что из негомеоморфности \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q при $p \neq q$ следует негомеоморфность S^p и S^q при $p \neq q$.

6.2.3х. Индукция по связности

Говорят, что функция *локально постоянна*, если у каждой точки её области определения имеется окрестность, сужение данной функции на которую постоянно.

12.1х. Докажите, что всякая локально постоянная функция непрерывна.

12.2х. Локально постоянная функция на связном множестве постоянна.

Потому что для всякой точки $x_0 \in X$ множество $\{x \mid f(x) =$

$f(x_0)\}$ и открыто, и замкнуто (докажите это). Или по-другому:

прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки y - открытое множество.

12.3х. Как связаны задачи 11.26 и 12.2х?

12-4х. Пусть группа G снабжена такой топологией, что для любого

элемента $g \in G$ отображение $G \rightarrow G$, определяемое формулой

$x \mapsto xgx^{-1}$, непрерывно, и пусть в этой топологии группа G связна.

Если в нормальном делителе H группы G индуцированная топология дискретна, то он содержится в центре группы G (т. е. $hg = gh$ при любом $h \in H$ и любом $g \in G$).

12.5х Индукция по связности. Пусть ε - свойство подмножеств топологического пространства, передающееся от множеств любого семейства с непустыми попарными пересечениями к объединению этих множеств. Если каждая точка пространства имеет окрестность, обладающую свойством ε , и пространство связно, то оно обладает и свойством ε .

12.6х. Докажите 12.2х и решите 12.4х основываясь на 12.5х.

По поводу других применений индукции по связности см. задачи 13. Т, 13.4х, 13.6х и 13.8х.

6.2.4х. Разрезание блинов на равные доли

12.7х. Любой блин сколь угодно нерегулярной формы можно рассечь на две части равной площади одним взмахом ножа так, чтобы разрез был параллелен заданному направлению. Другими словами, если A - ограниченное открытое множество на плоскости и l - прямая на этой плоскости, то существует такая прямая L , параллельная l , которая делит A на два множества равной площади.

12.8х. Если в предположениях 12.7х. множество A связно, то прямая L , существование которой утверждается в предыдущей задаче, единственна.

12.9х. Пусть два блина какой угодно формы лежат на одном блюде. Докажите, что оба их можно рассечь на равные половинки одним взмахом ножа. Другими словами, если A и B два ограниченных

открытого множества на плоскости, то существует прямая, которая делит каждое из них на два множества равной площади.

12.10x. Докажите, что плоский блин произвольной формы можно расщепить на четыре куска равной площади двумя прямыми разрезами, перпендикулярными друг другу. Другими словами, если A - ограниченное связное открытое множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные друг другу прямые, которые делят A на четыре части равной площади.

12.11x. А что если нож кривой? Для какой формы лезвия Вы можете сформулировать и решить задачи, подобные задачам 12.7x-12.10x?

12.12x. Сформулируйте и решите задачи, аналогичные задачам 12.7x -12.11x для областей в трёхмерном пространстве. Можете ли вы при этом увеличить число областей в аналогах задач 12.7x и 12.9x?

12.13x. А как насчёт блинов в \mathbf{R}^n ?

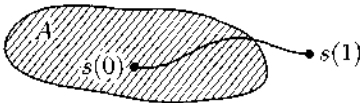
6.3. Линейная связность

6.3.1. Пути

Путь в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение отрезка $I = [0; 1]$ в X . *Началом* пути $s : I \rightarrow X$ называется точка $s(0) \in X$, *концом* - точка $s(1)$. При этом говорят, что путь s соединяет $s(0)$ с $s(1)$.

13.1. Докажите, что для всякого пути $s : I \rightarrow X$ его образ $s(I) \subset X$ - связное множество.

13.2. Пусть $s : I \rightarrow X$ - путь, соединяющий точку множества $A \subset X$ с точкой множества $X \setminus A$. Докажите, что $s(I) \cap \text{Fr}(A) \neq \emptyset$.

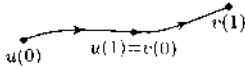


13.3. Пусть A - подмножество пространства X , $in_A : A \rightarrow X$ включение. Докажите, что $u : I \rightarrow A$ - путь в A , тогда композиция $in_A \circ u : I \rightarrow X$ - это путь в X .

Постоянное отображение $s : I \rightarrow X$ называется *постоянным путем* и обозначается e_a , где $a = s(I)$. Если s - путь, то *обратным* ему путем называется путь $s^{-1} : t \mapsto s(1 - t)$. Хотя обозначение s^{-1} уже занято (обратным отображением), к недоразумениям эта двусмысленность не приводит, поскольку когда речь идет о путях, обратные отображения, как правило, не рассматриваются.

Пусть $u : I \rightarrow X$, $v : I \rightarrow X$ - такие пути, что $u(1) = v(0)$. Положим

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } t \in [0; \frac{1}{2}], \\ v(2t - 1), & \text{если } t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases} \quad (22)$$



13.A. Отображение $uv : I \rightarrow X$, определяемое этой формулой, непрерывно (т. е. является путем) Ср. 9. T и 9. V.

Так как покрытие $\left\{ \left[0; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}; 1\right] \right\}$ отрезка $[0; 1]$ является фундаментальным, то из непрерывности сужений отображения на каждый элемент покрытия следует непрерывность самого этого отображения. Путь uv называется *произведением* путей u и v . Напомним, что оно определено только если конец $u(1)$ первого пути u совпадает с началом $v(0)$ второго пути.

6.3.2. Линейно связные пространства

Топологическое пространство называется *линейно связным*, если в нём любую две точки можно соединить путем.

13.B. Отрезок I линейно связан.

Если $x, y \in I$, то $I \rightarrow I : t \mapsto (1 - t)x + ty$ - путь, соединяющий точку x с точкой y .

13. C. Евклидово пространство любой размерности линейно связно.

Если $x, y \in \mathbb{R}^n$, то отображение $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : u(t) = (1 - t)x + ty$ - это путь, соединяющий точку x с точкой y .

13.D. Сфера ненулевой размерности линейно связна.

Воспользуйтесь 10.R и 13. C.

13.E. Нульмерная сфера S^0 не является линейно связной.

Используйте 11.R и 11. Q.

13.4. Какие из следующих пространств линейно связны:

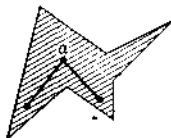
- (a) дискретное пространство; (b) антидискретное пространство;
- (c) стрелка; (d) \mathbb{R}_{T_1} ;
- (e) \mathbb{V}^2 .

6.3.3. Линейно связные множества

Линейно связным множеством называют подмножество топологического пространства (какого именно, должно быть ясно из контекста), линейно связное как пространство с топологией, индуцированной из объемлющего пространства.

13.5. Докажите, что подмножество A топологического пространства X линейно связно, тогда любые две его точки можно соединить в X путём, целиком лежащим в A (т. е. путём s , для которого $s(I) \subset A$).

13.6. Всякое выпуклое подмножество евклидова пространства линейно связно.



13.7. Всякое звездное подмножество \mathbf{R}^n линейно связно.

Воспользуйтесь формулой в 13. С, 13. А и 13.5.

13.8. Образ пути является линейно связным множеством.

13.9. Докажите, что множество плоских выпуклых многоугольников в метрике Хаусдорфа линейно связно.

13.10. Чтo можно сказать об утверждении задачи 13.9 для множества произвольных (не обязательно выпуклых) многоугольников?

6.3.4. Свойства линейно связных множеств

Линейная связность очень похожа на связность и в некоторых важных ситуациях даже равносильна ей. Однако некоторые свойства связности не переносятся на линейную связность (см. 13.Q, 13.R). Те же свойства, которые переносятся, для линейной связности доказываются проще.

13.F. *Объединение любой совокупности попарно пересекающихся линейно связных множеств линейно связно.*

Пусть x и y - точки в рассматриваемом объединении, пусть A и B - множества из данной совокупности, содержащие точки x и y . Если $A = B$, то доказывать нечего. Если $x \in A$, $y \in B$, $z \in A \cap B$, и u - путь, соединяющий x с z , а v — путь, соединяющий z с y , то путь uv соединяет x с y .

13.11. Докажите, что если множества A и B оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то A и B тоже линейно связны.

13.12. 1) Докажите, что внутренность и граница линейно связного множества не обязательно линейно связны. 2) Аналогичное утверждение справедливо для внутренности и границы связного множества.

13.13. Если граница множества $A \subset \mathbf{R}^n$ линейно связна, то замыкание этого множества тоже линейно связно.

13.14. Докажите, что утверждение предыдущей задачи имеет место для подмножества произвольного линейно связного пространства.

6.3.5. Компоненты линейной связности

Компонентой линейной связности топологического пространства X называется такое его линейно связное подмножество, которое не содержится ни в каком строго большем линейно связном множестве.

13. G. Каждая точка содержится в некоторой компоненте линейной связности.

Рассмотрите объединение всех линейно связных множеств, содержащих данную точку и используйте 13.F.

13. H. Две компоненты линейной связности либо не пересекаются, либо совпадают.

Аналог 11.H, вместо 11.D используйте 13.F.

Теоремы 13. G и 13. H показывают, что компоненты линейной связности образуют разбиение рассматриваемого пространства.

Следующая теорема описывает соответствующее отношение эквивалентности.

13. I. Две точки принадлежат одной компоненте линейной связности, тогда их можно соединить путём.

Непосредственно следует из определения.

Следует из доказательства утверждения 13. G.

В противоположность одному из свойств компонент связности, компоненты линейной связности не обязательно замкнуты (см. 13.Q, ср. 13.P, 13.R.)

6.3.6. Линейная связность и непрерывные отображения

13. J. Непрерывный образ линейно связного пространства линейно связен.

Если $\gamma_i = f(x_i)$, $i = 1, 2$, и u - путь, соединяющий x_1 с x_2 , то как построить путь, соединяющий y_1 с y_2 ?

13. K. Следствие. Линейная связность является топологическим свойством.

13. L. Следствие. Число компонент линейной связности - топологический инвариант.

6.3.7. СВЯЗНОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ

13. М. Всякое линейно связанное пространство связно. Рассмотрим множества

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\} \text{ и } X = A \cup \{(0, 0)\}.$$

Сопоставьте 13.8 и 11.1.

13.15. Нарисуйте множество A .

13.N. Множество A линейно связно, а множество X связно.

Множество A - это образ луча $(0; \infty)$ при непрерывном отображении

$$x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2,$$

значит, оно линейно связно, следовательно связно. Связность множества X следует из того, что оно содержится в $C1A$ (Кстати, что из себя представляет множество $C1A$?)

13.O. Выкалывание любой точки множества A делает A и X несвязными (а значит, и не линейно связными).

Это совсем очевидно, так как $A \cong (0; +\infty)$.

13.P. Множество X не является линейно связным.

Докажите, что всякий путь в X с началом в точке $(0,0)$ постоянен. Приведем идею доказательства того, что начало координат нельзя соединить путем с точками множества A . Если такой путь u существует, то найдется последовательность точек $\{t_n\}$, такая, что $u(t_n) = (\frac{2}{\pi + 4\pi n}, 1)$.

Выберем подпоследовательность $t_{n_k} \rightarrow t_*$, тогда точка $u(t_*)$ по непрерывности должна совпадать с точкой $(0,1)$, таким образом, $u(t_*) \notin X$.

13.Q. Приведите пример линейно связанного множества, замыкание которого не является линейно связным.

Множество $A \subset X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \neq 0\}$; см. задачи 13.N-13.P.

13.K. Приведите пример незамкнутой компоненты линейной связности.

13.S. В пространстве, каждая точка которого обладает линейно связанной окрестностью, компоненты линейной связности открыты.

Если U_x - линейно связанная окрестность точки x , то U_x лежит целиком в компоненте линейной связности этой точки.

13. Т. Предположим, что в пространстве X каждая точка обладает линейно связанной окрестностью. Тогда X линейно связно, тогда X связно.

Это утверждение 13.M. Так как компоненты линейной связности пространства X открыты (см. 13.S) и пространство X связно, то в нем имеется всего лишь одна компонента линейной связности

13. У. Для открытых подмножеств евклидова пространства связность и линейная связность равносильны.

Следует из 13.С и 13. Т, поскольку открытый шар в \mathbf{R}^n является линейно связным множеством.

13.16. Для подмножеств прямой связность и линейная связность равносильны .

13.17. Если множество $A \subset \mathbf{R}^n$ связно, то для всякого $\varepsilon > 0$ его ε -окрестность линейно связна.

13.18. Докажите, что во всякой окрестности связного множества в евклидовом пространстве найдется ее линейно связная подокрестность.

6.3.8х. Связность посредством ломаных

Подмножество A евклидова пространства называется *связным посредством ломаных*, если любые две точки из A можно в A соединить конечнозвенной ломаной.

13.1х. Всякое подмножество \mathbf{R}^n , связное посредством ломаных, является линейно связным, значит, и связным.

13-2х. Всякое выпуклое подмножество \mathbf{R}^n связно посредством ломаных.

13. 3х. Всякое звездное подмножество \mathbf{R}^n связно посредством ломаных.

13. 4х. Для открытых подмножеств евклидова пространства связность посредством ломаных равносильна связности.

13.5х. Постройте линейно связное пеодноточечное подмножество евклидова пространства, никакие две точки которого нельзя соединить в нем ломаной.

13.6х. Пусть множество $X \subset \mathbf{R}^n$ счетно. Докажите, что его дополнение $\mathbf{R}^2 \setminus X$ связно посредством ломаных.

13.7х. Пусть множество $X \subset \mathbf{R}^n$ является объединением счетного числа аффинных подпространств, размерности которых не превосходят $n - 2$. Докажите, что его дополнение $\mathbf{R}^2 \setminus X$ связно посредством ломаных.

13.8х. Пусть $X \subset \mathbf{C}^n$ - объединение счетного числа *алгебраических множеств* (т. е. множеств, задаваемых одним или несколькими алгебраическими уравнениями относительно координат в \mathbf{C}^n). Докажите, что его дополнение $\mathbf{C}^n \setminus X$ связно посредством ломаных.

6.3.9х. Связность некоторых множеств матриц

Вещественные $n \times n$ -матрицы образуют координатное пространство, которое отличается от \mathbf{R}^{n^2} лишь двойной нумерацией своих

естественных координат. Аналогично соотносятся множества комплексных $n \times n$ -матриц и пространство \mathbb{C}^{n^2} (гомеоморфное \mathbb{R}^{2n^2}).

13.9х. Найдите компоненты связности и компоненты линейной связности следующих подпространств пространства вещественных $n \times n$ -матриц:

- (1) $GL(n; \mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$;
- (2) $O(n; \mathbb{R}) = \{A \mid A \cdot ({}^t A) = E\}$;
- (3) $Symm(n; \mathbb{R}) = \{A \mid {}^t A = A\}$;
- (4) $Symm(n; \mathbb{R}) \cap GL(n; \mathbb{R})$;
- (5) $\{A \mid A^2 = E\}$.

13.10х. Найдите компоненты связности и компоненты линейной связности следующих подпространств пространства комплексных $n \times n$ -матриц:

- (1) $GL(n; \mathbb{C}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$;
- (2) $U(n; \mathbb{C}) = \{A \mid A \cdot ({}^t \bar{A}) = E\}$;
- (3) $Herm(n; \mathbb{C}) = \{A \mid {}^t A = A\}$;
- (4) $Herm(n; \mathbb{C}) \cap GL(n; \mathbb{C})$.

6.4. Аксиомы отделимости

Предмет этого параграфа - естественные требования на топологическую структуру, приближающие свойства топологического пространства к свойствам метрических пространств. Известно много аксиом отделимости, из которых мы ограничимся пятью наиболее важными. Они имеют номера и обозначаются через T_0 , T_1 , T_2 , T_3 и T_4 . (Буква T в этих обозначениях происходит от немецкого слова *Trennungsaxiom*, которое и означает - *аксиома отделимости*.)

6.4.1. Аксиома Хаусдорфа

Мы начнем с наиболее важной второй аксиомы, называемой еще и *аксиомой Хаусдорфа*. Пространства, удовлетворяющие ей, называются *хаусдорфовыми*. Состоит она в следующем: любые две различные точки обладают непересекающимися окрестностями. Более формальная запись: $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U_x, V_y$, такно что $U_x \cap V_y = \emptyset$.



14.A. Всякое метрическое пространство хаусдорфово.

Если $r_1 + r_2 \leq \rho(x_1, x_2)$, то шары $B_{r_1}(x_1)$ и $B_{r_2}(x_2)$ не пересекаются.

14.1. Какие из следующих пространств хаусдорфовы:

- (а) дискретное пространство; (б) антидискретное пространство;
 (с) стрелка; (д) \mathbb{R}_{T_1} ; (е) \mathbb{V} ?

В случае если следующая задача заставит вас хоть на минуту задуматься, мы советуем более тщательно обдумать определение и решать все простые задачи.

14.B. Является ли отрезок $[0; 1]$ с индуцированной из \mathbf{R} топологией хаусдорфовым? Обладают ли в нем непересекающимися окрестностями точки 0 и 1? Какими?

Отрезок является метрическим пространством, а множества $[0; \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}; 1]$ - это окрестности точек 0 и, соответственно, 1 в $[0; 1]$.

14.C. Пространство X является хаусдорфовым, тогда для каждой точки $x \in X$ имеет место равенство $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$.

Если $y \neq x$, то в пространстве имеются две непересекающиеся окрестности U_x и V_y . Следовательно, $y \notin \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$, значит, $y \notin \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$.

Если $y \neq x$, то $y \notin \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$, откуда следует, что найдется окрестность U_y , такая что $y \notin \text{Cl}U_x$. Положите $V_y = X \setminus \text{Cl}U_x$.

6.4.2. Пределы последовательностей

Пусть $\{a_n\}$ - последовательность точек топологического пространства X . Точка $b \in X$ называется ее **пределом**, если для любой окрестности U точки b существует такое число N , что $a_n \in U$ при всех $n > N$ (Можно сказать несколько по-другому: каждая окрестность точки b содержит все члены последовательности с достаточно большими номерами.) Говорят также, что последовательность a_n **стремится** или **сходится** к b при n , стремящимся к бесконечности.

14-2. Сформулируйте утверждение " b не есть предел последовательности a_n ", употребив частицу "не" как можно позже и не употребляя терминов "предел" и "стремится".

14-3. Предел последовательности не зависит от порядка ее членов. Более точно: пусть a_n сходящаяся последовательность: $a_n \rightarrow b$. Пусть $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ произвольная биекция. Тогда последовательность $a^{\phi(n)}$ также является сходящейся и, более того, имеет тот же самый предел:

$\in \rightarrow b$. Например, если все члены последовательности попарно различны, то ее сходимости и предел, к которому она стремится, зависит только от множества, образованного её членами. Таким образом, понятия сходимости и предела последовательности по своему существу являются понятиями геометрии.

14-D. В хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность не может иметь более одного предела.

Предположим противное: пусть $x_n \rightarrow a$ и $x_n \rightarrow b$, где $a \neq b$. Пусть U и V - непересекающиеся окрестности точек a и b , соответственно. При достаточно больших номерах n мы получим, что $x_n \in U \cap V$, чего быть не может.

Докажите, что в пространстве \mathbb{R}_{T_1} каждая точка является пределом последовательности $a_n = n$.

14-E Окрестность точки в пространстве \mathbb{R}^N имеет вид $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, где, считаем, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Очевидно, что $a_n \in U$ при всех $n > x_N$.

6.4.3. Множество совпадения и множество неподвижных точек

Рассмотрим отображения $f, g : X \rightarrow Y$. Множество $C(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ называется *множеством совпадения* отображений f и g .

14-4. Множество совпадения двух непрерывных отображений произвольного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.

14-5. Постройте пример, показывающий, что условие хаусдорфовости в задаче 14-4 существенно.

Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения $f : X \rightarrow X$, если $f(x) = x$.

14-6. Множество неподвижных точек непрерывного отображения хаусдорфова пространства в себя является замкнутым.

14. 7. Постройте пример, показывающий, что условие хаусдорфовости в задаче 14.6 существенно.

14.8. Если отображения $f, g : X \rightarrow Y$ непрерывны, пространство Y хаусдорфово, A - всюду плотное подмножество пространства X и $f|_A = g|_A$, то $f = g$.

14-9. Как связаны между собой задачи 14.4, 14-б и 14.8?

6.4.4. Наследственные свойства

Топологическое свойство называется **наследственным**, если оно передается от пространства к его подпространствам, т. е. если из того, что пространство X обладает этим свойством, следует, что любое подпространство пространства X тоже им обладает.

14-10. Какие из следующих топологических свойств наследственны:

- (1) конечность множества точек;
- (2) конечность топологической структуры;
- (3) бесконечность множества точек;
- (4) связность;
- (5) линейная связность?

14-F. Хаусдорфовость наследственна.

Пусть X - пространство, $A \subset X$ - его подпространство, точки $x, y \in A$ различны. Так как X хаусдорфово, то у точек x, y имеются непересекающиеся окрестности U и V . Тогда $U \cap A$ и $V \cap A$ - это непересекающиеся окрестности точек x и y в A . (Вспомните определение относительной топологии!)

6.4.5. Первая аксиома отделимости

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет **первой аксиоме отделимости T_1** , если каждая из любых двух различных точек пространства обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек. Более формально: $\forall x, y \in X. x \neq y, \exists U_y$, такая что $x \notin U_y$.



14-G. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме отделимости,

- (1) тогда все одноточечные подмножества пространства X замкнуты;
- (2) тогда все конечные подмножества пространства X замкнуты.

(а) Пусть X удовлетворяет аксиоме T_1 , $x \in X$. Значит, у каждой точки $y \in X \setminus \{x\}$ имеется окрестность U , не содержащая точку x , т. е. $U \subset X \setminus \{x\}$. Следовательно, всякая точка множества $X \setminus \{x\}$ - внутренняя, поэтому множество $X \setminus \{x\}$ открыто, а его дополнение $\{x\}$ - замкнуто.

Если все одноточечные подмножества в X замкнуты, $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $X \setminus \{x\}$ - окрестность точки y , не содержащая точку x . Таким образом, аксиома T_1 выполнена.

(b) (а) Если все одноточечные подмножества замкнуты в X , то замкнуты и все конечные множества (как конечные объединения одноточечных). (b) (а) Очевидно.

14.11. Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости, тогда любая его точка совпадает с пересечением всех своих окрестностей.

14-12. Всякое хаусдорфово пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

14-Н. В хаусдорфовом пространстве все конечные множества замкнуты.

Сопоставьте 14.12 и 14.С

14-1. Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

Сопоставьте 14.А и 14-12.

14-13. Приведите пример, показывающий, что из первой аксиомы отделимости вторая не следует.

14- J- Покажите, что \mathbb{R}_{T_1} удовлетворяет первой аксиоме отделимости и не хаусдорфово. (Ср. 14-13).

В пространстве \mathbb{R}_{T_1} всякая точка замкнута, значит T_1 имеет место, однако в нем всякие две окрестности (непустые открытые множества) пересекаются, так что T_2 места не имеет.

14-К. Первая аксиома отделимости наследственна.

Модифицируйте доказательство 14.F или же воспользуйтесь теоремой 14.G.

14.14. Если для любых различных точек a и b топологического пространства существует такое его непрерывное отображение f в пространство, удовлетворяющее первой аксиоме отделимости, что $f(a) \neq f(b)$, то X удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

14.15. Докажите, что всякое непрерывное отображение пространства с тривиальной топологической структурой в пространство, удовлетворяющее первой аксиоме отделимости, постоянно.

14-16. В каждом множестве существует самая грубая топологическая структура, удовлетворяющая первой аксиоме отделимости. Какова она?

6.4.6. Аксиома Колмогорова

Первая аксиома отделимости получается в результате ослабления аксиомы Хаусдорфа.

14-L. Как ослабить первую аксиому отделимости?

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме Колмогорова или нулевой аксиоме отделимости T_0 , если из любых двух различных точек этого пространства *хотя бы одна* обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.

14-M. Аптидискретное пространство, содержащее не менее двух точек, не удовлетворяет аксиоме T_0 .

14-N. Следующие свойства топологического пространства X эквивалентны:

- (1) X удовлетворяет аксиоме Колмогорова;
 - (2) замыкания любых двух различных одноточечных подмножеств пространства X различны;
 - (3) X не содержит неодноточечного антидискретного подпространства;
 - (4) X не содержит двуточечного антидискретного подпространства.
- (a) \Rightarrow (b) Так как пространство X удовлетворяет аксиоме Колмогорова, то для любых двух точек x и y хотя бы одна не лежит в замыкании другой.

(b) \Rightarrow (a) Пусть $C1\{x\} \neq C1\{y\}$. Считаем, для определенности, что $z \in C1\{x\}$ и $z \notin C1\{y\}$. Тогда найдется окрестность U точки z , которая не содержит точку y . С другой стороны, $x \in U$. Таким образом, мы нашли окрестность точки x , не содержащую точку y .

Ясно, что пространство удовлетворяет аксиоме Колмогорова, тогда топология, индуцированная на всяком двуточечном подпространстве, не является аптидискретной.

Напомним, что топологией наименьших окрестностей называется топологическая структура, в которой пересечение всех окрестностей, содержащих точку пространства, является окрестностью этой точки.

14-O. Топология, является топологией некоторого частичного порядка в множестве, тогда это - топология наименьших окрестностей, удовлетворяющая аксиоме Колмогорова.

Очевидно. Если для каждой точки x пространства существует ее наименьшая окрестность C_x , то будем говорить, что $x \preceq y$, если

$y \in C_x$. Для доказательства транзитивности предположим, что $x \preceq y$ и $y \preceq z$. Следовательно, $y \in C_x$, тем самым C_x - окрестность y , значит, $C_y \subset C_x$, поэтому $z \in C_x$, таким образом, $x \preceq z$. Если $y \in C_x$ и $x \in C_y$, то $C_x = C_y$, значит, ни одну из этих точек нельзя отделить друг от друга. В силу аксиомы Колмогорова такое возможно лишь если $x = y$; таким образом, доказана антисимметричность введенного отношения. Его рефлексивность очевидна. Докажите, что топология введенного частичного порядка совпадает с заданной топологией.

Таким образом, частично упорядоченные множества не только дают многочисленные примеры топологических пространств, среди которых - наиболее фундаментальные пространства, такие как прямая со стандартной топологией, но и получаются все из топологических пространств специального типа, причём весьма удалённого от класса метрических пространств.

6.4.7. Третья аксиома отделимости

Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *третьей аксиоме отделимости* T_3 , если в нём любое замкнутое множество и любая не содержащаяся в этом множестве точка обладает непересекающимися окрестностями, т. е. если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $b \in X \setminus F$ существуют открытые множества $U, V \subset X$, такие что $U \cap V = \emptyset$, $U \supset F$ и $b \in V$.



Топологическое пространство называется *регулярным*, если оно удовлетворяет аксиомам T_1 и T_3 .

14.P. Всякое регулярное пространство хаусдорфово.

Пусть X - регулярное пространство. Рассмотрим в нем две различные точки x и y . Так как пространство удовлетворяет аксиоме T_1 , то множество $\{y\}$ замкнуто. Осталось применить T_3 к точке x и одноточечному множеству $\{y\}$.

14-Q. Пространство регулярно, тогда оно удовлетворяет второй и третьей аксиомам отделимости.

См. *14.P.* См. *Ц.12.*

14-17. Постройте нерегулярное хаусдорфово пространство.

14-18. Постройте пространство, удовлетворяющее третьей аксиоме отделимости и не удовлетворяющее второй.

14-19. Пространство удовлетворяет третьей аксиоме отделимости, тогда в любой окрестности любой его точки содержится замыкание некоторой окрестности этой точки.

14-20. Докажите, что третья аксиома отделимости наследственна.

14-R. Всякое метрическое пространство регулярно.

Пусть X - метрическое пространство, $x \in X$ и $r > 0$. Докажите, что $\text{Cl } B_r(x) \subset B_{2r}(x)$, и воспользуйтесь 14.19.

6.4.8. Четвертая аксиома отделимости

Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *четвертой аксиоме отделимости*, если в нем любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями, т. е. если для любых замкнутых $A, B \subset X$ с $A \cap B = \emptyset$ существуют открытые $U, V \subset X$, такие что $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U$ и $B \subset V$.



Топологическое пространство называется *нормальным*, если оно удовлетворяет первой и четвертой аксиомам отделимости.

14-S. Всякое нормальное пространство регулярно (и, значит, хаусдорфово).

Используйте определение нормальности применительно к точке и замкнутому множеству.

14-T. Пространство нормально, тогда оно удовлетворяет второй и четвертой аксиомам отделимости.

См. 14.S. См. Ц.12.

14-21. Постройте пространство, удовлетворяющее четвертой аксиоме отделимости и не удовлетворяющее второй.

14-22. Докажите, что пространство удовлетворяет четвертой аксиоме отделимости, тогда любая окрестность любого его замкнутого множества содержит замыкание некоторой окрестности этого множества.

14-23. Докажите, что всякое замкнутое подпространство нормального пространства нормально.

14-24. Постройте два замкнутых непересекающихся подмножества некоторого метрического пространства, расстояние между которыми равно нулю.

14.25. Пусть X - пространство, удовлетворяющее аксиоме T_1 , F_1 , F_2 и F_3 его замкнутые подмножества с пустым пересечением, $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$. Докажите, что найдутся окрестности $U_i \supset F_i$, $i = 1, 2, 3$, такие что $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$.

14. U. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Пусть A и B - замкнутые подмножества метрического пространства. Тогда $A \subset U = \{x \in X \mid \rho(x, A) < \rho(x, B)\}$ и $B \subset V = \{x \in X \mid \rho(x, A) > \rho(x, B)\}$. Множества U и V открыты (в силу 9.L) и не пересекаются.

14-26. Если $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное сюръективное отображение, переводящее каждое замкнутое множество в замкнутое, и пространство X нормально, то и пространство Y нормально.

6.4.9x. Пространство Немыцкого

Пусть \mathcal{H} есть верхняя полуплоскость с обычной евклидовой топологией. Положим $\mathcal{N} = \mathcal{H} \cup L$, где L есть ось абсцисс, и введем топологию на \mathcal{N} следующим образом. Открытыми в нем, кроме множеств, открытых в \mathcal{H} , являются еще множества вида $x \cup D$, где $x \in L$, а D есть открытый круг в \mathcal{H} , касающийся оси абсцисс в точке x .

Полученное пространство называется *пространством Немыцкого*.

14-1x- Пространство Немыцкого хаусдорфово.

14-2x. Пространство Немыцкого регулярно.

14-3x. Какая топологическая структура индуцируется из \mathcal{N} на L ?

14-4^x. Пространство Немыцкого не является нормальным.

14-5x Следствие. Существует не нормальное регулярное пространство.

14.6x. Вложите пространство Немыцкого в нормальное пространство так, чтобы дополнение его образа состояло из одной точки.

14.7x Следствие. Теорема 14.23 не распространяется на незамкнутые подпространства, т. е. нормальность не наследственна.

6.4.10x. Лемма Урысона и теорема Титце

14-8x. Пусть A и B - непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства X . Тогда существует непрерывная функция $f : X \rightarrow I$, такая что $f^{-1}(0) = A$ and $f^{-1}(1) = B$.

14.9x. Пусть F - замкнутое подмножество метрического пространства X . Тогда всякую непрерывную функцию $f : F \rightarrow [-1; 1]$ можно продолжить на все пространство X .

14.9x.1. Пусть F -замкнутое подмножество метрического пространства X . Для произвольной непрерывной функции $f : F \rightarrow [-1; 1]$ найдется функция $g : X \rightarrow [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$, такая что $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}$ при всех $x \in F$.

14.Ах **Лемма Урысона.** Для любых непересекающихся замкнутых подмножеств A и B нормального пространства X существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow I$, такое что $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$. Положим $f(x) = \inf\{\lambda \in \Lambda \mid x \in \text{Cl}U_\lambda\}$. Нетрудно видеть, что функция f непрерывна.

14.Ах.1. Пусть A и B - замкнутые подмножества нормального пространства X . Рассмотрим множество $\Lambda = \{\frac{k}{2^n} \mid k, n \in \mathbb{Z}_+, k \leq 2^n\}$. Тогда существует набор $\{U_p\}_{p \in \Lambda}$ открытых подмножеств в X , такой что для любых $p, q \in \Lambda$ верно, что: 1) $A \subset U_0$ и $B \subset X \setminus U_1$ и 2) если $p < q$, то $\text{Cl}U_p \subset U_q$.

Положим $U_1 = X \setminus B$. Так как пространство X нормально, то найдется окрестность $U_0 \supset A$, такая что $\text{Cl}U_0 \subset U_1$. Пусть $U_{1/2}$ - окрестность множества $\text{Cl}U_0$, такая что $\text{Cl}U_{1/2} \subset U_1$. Продолжая построение, мы получим искомый набор $\{U_p\}_{p \in \Lambda}$.

14.Вх **Теорема Титце.** Пусть A - замкнутое подмножество нормального пространства X . Для каждой непрерывной функции $f : A \rightarrow [-1; 1]$ существует непрерывная функция $F : X \rightarrow [-1; 1]$, такая что $F|_A = f$.

Слегка измените доказательство 14.9x, используя лемму Урысона 14.Ах вместо 14.9x.1.

14.Сх **Следствие.** Пусть A - замкнутое подмножество нормального пространства X . Тогда любую непрерывную функцию $A \rightarrow \mathbb{R}$ можно продолжить до непрерывной функции на всем пространстве.

14.10x. Останется ли справедливой теорема Титце, если в ней заменить всюду отрезок $[-1; 1]$ на \mathbb{R} ; на \mathbb{R}^n ; на S^1 ; на S^2 ?

14.11x. Выведите лемму Урысона из теоремы Титце.

6.5. Аксиомы счетности

В этом параграфе мы продолжим изучение топологических свойств, которые имеют характер дополнительных требований, налагаемых на топологическую структуру с целью приблизить рассматриваемую аб-

страктную ситуацию к конкретным и тем самым сделать ее более содержательной. Условия, изучаемые в этом параграфе, ограничивают топологическую структуру сверху: требуется, чтобы нечто было бы счетным.

6.5.1. Теоретико-множественное отступление: счетность

Напомним, что два множества называются *равномощными*, если существует биекция одного из них на другое. Множества, равномощные некоторому подмножеству множества \mathbf{N} натуральных чисел, называются *счетными*.

15.1. Множество X является счетным, тогда существует инъекция $X \rightarrow \mathbf{N}$ (или, чуть более общо, инъекция X в некоторое счетное множество).

Иногда называют счетными только бесконечные счетные множества, т. е. только множества, равномощные всему \mathbf{N} , а наши счетные множества называют не более чем счетными. Это менее удобно; в частности, если последовательно придерживаться такой терминологии, то придется называть этот параграф "Аксиомы не более чем счетности" и терпеть другие неудобства. При нашей терминологии счетность обладает следующими свойствами.

15.A. Всякое подмножество счетного множества счетно.

Поскольку при биективном соответствии исходного множества с подмножеством \mathbf{N} подмножество этого множества также переходит в подмножество \mathbf{N} .

15.B. Образ счетного множества при любом отображении счетен.

Выберем по одной точке в каждом непустом прообразе точки.

Получим подмножество исходного множества, которое находится в биективном соответствии с образом исходного множества, являющегося счетным в силу 15.A.

15. C. Множество \mathbf{Z} счетно.

15.D. Множество $\mathbf{N}^2 = \{(k, n) \mid k, n \in \mathbf{N}\}$ счетно.



Придумайте алгоритм (или даже явную формулу!) для перечисления элементов множества \mathbf{N}^2 .

15.E. Объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Воспользуйтесь 15.D

15.F. Множество \mathbf{Q} счетно.

15. G. Множество \mathbf{R} несчетно.

Выведите это утверждение из 6.44-

15.2. Любой дизъюнктивный набор восьмерок на плоскости счетен.

6.5.2. Вторая аксиома счетности и сепарабельность

В этом параграфе мы будем изучать три ограничения на топологические структуры. Два из них имеют номера (один и два), у третьего номера нет. Как и в предыдущем параграфе, мы начинаем с ограничения номер два.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет **второй аксиоме счетности**, если оно имеет счетную базу. С аксиомой счетности (без номера) связан термин *сепарабельность*. Говорят, что топологическое пространство *сепарабельно*, если оно содержит счетное всюду плотное множество.

15.H. Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно.

Рассмотрите множество, пересечение которого с каждым из множеств счетной базы состоит из одной точки.

15.I. Вторая аксиома счетности наследственна.

Как известно, пересечение базовых множеств с некоторым подмножеством образует базу индуцированной на этом подмножестве топологии.

15.3. Удовлетворяют ли второй аксиоме счетности стрелка и \mathbb{R}_{T_1} ?

15.4. Сепарабельны ли стрелка и \mathbb{R}_{T_1} ?

15.5. Постройте пример, показывающий, что сепарабельность не наследственна.

15.J. Метрическое сепарабельное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Покажите, что если множество $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно, то набор $\{B_r(x) \mid x \in A, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ является счетной базой пространства X . (Используйте теоремы 4.1 и 3.A, чтобы показать, что это база, и 15.E, что она счетна.)

15.K **Следствие.** Для метрических пространств вторая аксиома счетности равносильна сепарабельности.

15.L. (Ср. 15.5.) В метрических пространствах сепарабельность наследственна.

В метрических пространствах сепарабельность равносильна второй аксиоме счетности, которая является наследственной (см. 15.K и 15.I.).

15.М. Евклидовы пространства и любые их подпространства сепарабельны и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

В силу 15. L и 15. J, достаточно указать всюду плотное в \mathbf{R}^n

подмножество, каковым является

$$\mathbf{Q}'' = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \in \mathbf{Q}, i = 1, \dots, n\}.$$

Его плотность проще всего проверить, используя метрику $\rho^{(\infty)}$ Множество \mathbf{Q}'' счетно в силу 15. F и 15. E

15.6. Постройте метрическое пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности.

15.7. Докажите, что в сепарабельном пространстве всякая совокупность попарно непересекающихся открытых множеств счетна.

15.8. Докажите, что число компонент открытого множества $A \subset \mathbf{R}^n$ счетно.

15.N. *Непрерывный образ сепарабельного пространства сепарабелен.*

Поскольку непрерывный образ всюду плотного множества плотен в образе данного непрерывного отображения.

15.9. Постройте пример, показывающий, что непрерывный образ пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, может не удовлетворять этой аксиоме.

15.O. Теорема Линделёфа. *Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить счетный набор множеств, также являющийся покрытием.*

Набор подмножеств данной счетной базы, состоящий из всех тех ее элементов, которые содержатся хотя бы в одном элементе данного покрытия, образует покрытие пространства. Сопоставив каждому элементу полученного набора один из содержащих его элементов исходного покрытия, мы получим искомое счетное подпокрытие.

15.10. Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой его базы можно выделить счетный набор множеств, также являющийся базой этого пространства.

15.11 Теорема Брауэра. Пусть $\mathcal{K} = \{K_\lambda\}$ семейство замкнутых множеств пространства, обладающего счетной базой, и пусть для любой убывающей последовательности $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ множеств, принадлежащих семейству, пересечение

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

также принадлежит этому семейству. Тогда \mathcal{K} обладает минимальным множеством, т. е. таким множеством, никакое собственное подмножество которого не принадлежит \mathcal{K} .

6.5.3. Базы в точке

Пусть X - топологическое пространство, $a \in X$. *Базой* пространства X в точке a или *базой окрестностей* точки a называется такая совокупность окрестностей точки a , что всякая окрестность точки a содержит окрестность из этой совокупности.

15.P. Если Σ - база пространства X , то $\{U \in \Sigma \mid a \in U\}$ есть база в точке a .

Следствие признака базы данной топологии (см. 3.A).

15.12. В метрическом пространстве базами в точке a являются:

- (1) совокупность всех открытых шаров с центром a ;
- (2) совокупность всех открытых шаров с рациональными радиусами и центром a ;
- (3) совокупность всех открытых шаров с центром a и радиусами r_n , где $\{r_n\}$ — любая последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю.

15.13. Каковы минимальные базы в точке в дискретном и в антидискретном пространствах?

6.5.4. Первая аксиома счетности

Говорят, что пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если оно обладает счетными базами во всех своих точках.

15.Q. Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

См. 15.12

15.R. Из второй аксиомы счетности следует первая.

См. 15.P.

15.S. Постройте пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности и не удовлетворяющее второй. (Ср. 15.6.)

Рассмотрите несчетное дискретное пространство.

15. T Если $x_n \in A$ и $x_n \rightarrow a$, то a - точка прикосновения множества A

Если $x_n \in A$ и $x_n \rightarrow a$, то a - точка прикосновения множества A

15.14- Какие из следующих пространств удовлетворяют первой аксиоме счетности:

- (a) дискретное пространство;
- (b) антидискретное пространство;
- (c) стрелка;
- (d) \mathbb{R}_{r_1} ?

15.15. Приведите пример сепарабельного пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, в котором не имеет места вторая аксиома счетности.

15.16. Докажите, что если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то у каждой его точки имеется убывающая база в этой точке: $U_1 \supset U_2 \supset \dots$

6.5.5. Секвенциальный подход к топологии

Специалисты по математическому анализу очень любят последовательности и их пределы. Более того, они любят говорить обо всех топологических явлениях, опираясь на эти понятия. Эта традиция не имеет почти никаких математических оправданий, но зато она имеет долгую историю, восходящую к работам XIX века по обоснованию анализа. На самом деле, почти всегда, за очень редкими исключениями (во всех обязательных лекционных курсах матмеха их можно пересчитать по пальцам), удобнее обходиться без последовательностей (если вы занимаетесь топологическими объектами, а не суммированием ряда, где последовательности входят в определения). Отдавая дань традиции, мы объясним здесь, как и в каких случаях **топологические понятия можно описывать на языке последовательностей**.

Последовательность на латинском языке — **секвенция**. Поэтому соответствующие определения и сам подход называются **секвенциальными**.

Пусть A - подмножество топологического пространства X . СОВОКУПНОСТЬ пределов всевозможных последовательностей точек множества A называются **секвенциальным замыканием** этого множества. Мы будем обозначать его $\text{SCl}A$

15. T. Докажите, что $\text{SCl}A \subset \text{Cl}A$.

15. U. Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то для любого A верно и обратное включение $\text{SCl}A \supset \text{Cl}A$, и, значит, $\text{SCl}A = \text{Cl}A$.

Пусть $a \in \text{Cl}A$. Пусть набирается $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ убывающей базой окрестностей в точке a (см. 15.16). Для каждого n существует $x_n \in U_n \cap A$, и мы легко получаем, что $x_n \rightarrow a$.

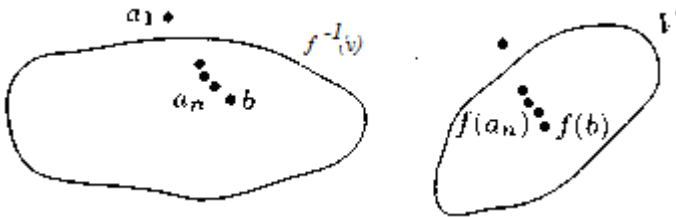
Таким образом, в пространствах, удовлетворяющих первой аксиоме счетности (в частности, во всех метрических пространствах), замыкания множеств можно восстановить (а значит, и определить), зная, какие последовательности сходятся и к какому пределу. По замыканиям, в свою очередь, можно определить и замкнутость, а по замкнутости - открытость и все прочие топологические понятия.

15.17. Пусть X - множество вещественных чисел с топологией, состоящей из \emptyset и дополнений всевозможных счетных подмножеств. (Проверьте, что это действительно топология.) Как устроены в таком X сходящиеся последовательности, секвенциальные замыкания, замыкания? Докажите, что в X имеются множества A , для которых $\text{Cl} A \neq \text{SCl} A$.

6.5.6. Секвенциальная непрерывность

Теперь рассмотрим в том же духе непрерывность отображений. Говорят, что отображение $f : X \rightarrow Y$ **секвенциально непрерывно**, если для любой точки $b \in X$ и любой последовательности $a_n \in X$ точек пространства X , стремящейся к b , последовательность $f(a_n)$ стремится к $f(b)$.

15. V. Всякое непрерывное отображение секвенциально непрерывно.



Действительно, пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, $b \in X$ и $a_n \rightarrow b$. Мы должны доказать, что $f(a_n) \rightarrow f(b)$. Рассмотрим окрестность $V \subset Y$ точки $f(b)$. Так как отображение f непрерывно, то множество $f^{-1}(V) \subset X$ является окрестностью точки b . Поскольку $a_n \rightarrow b$, то $a_n \in f^{-1}(V)$ for $n > N$. Следовательно, $f(a_n) \in V$ при всех $n > N$, что и требовалось доказать.

15. W. Прообраз секвенциально замкнутого множества при секвенциально непрерывном отображении секвенциально замкнут.

15. W Пусть $f : X \rightarrow Y$ - секвенциально непрерывное отображение, A - секвенциально замкнутое множество $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \rightarrow a$. Так как отображение секвенциально непрерывно, то $f(x_n) \rightarrow f(a)$, а поскольку множество A секвенциально замкнуто, то $f(a) \in A$, значит, $a \in f^{-1}(A)$, таким образом, множество $f^{-1}(A)$ секвенциально замкнуто.

15. X. Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то любое секвенциально непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно.

Достаточно проверить, что для всякого замкнутого множества $F \subset Y$ замкнут и его прообраз $f^{-1}(F) \subset X$, т. е., что $\text{Cl}(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(F)$. Пусть $a \in \text{Cl}(f^{-1}(F))$. Так X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то найдется последовательность $x_n \in f^{-1}(F)$, такая что $x_n \rightarrow a$, значит, $f(x_n) \rightarrow f(a)$ в силу секвенциальной непрерывности f . Так как F замкнуто, то $f(a) \in F$, поэтому $a \in f^{-1}(F)$.

Таким образом, для отображений пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, непрерывность и секвенциальная непрерывность равносильны.

15.18. Постройте секвенциально непрерывное, но не непрерывное отображение. (Ср. 15.17.)

6.5.7х. Теоремы вложимости и метризуемости

15. Ах. Пространство l_2 сепарабельно и обладает счетной базой. Заметьте, что множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, несчетно! Поэтому первое побуждение - рассмотреть последовательности, состоящие из рациональных чисел, приводит к несчетному множеству. Искомое множество состоит из таких последовательностей $\bar{x} = \{x_i\}$, $x_i \in \mathbb{Q}$, для которых $\exists N$, такое что $x_i = 0 \forall i > N$ (используйте то, что если ряд $\sum x_i^2$ сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое k , что $\sum_{i=k}^{\infty} x_i^2 < \varepsilon$).

15. Вх. Регулярное пространство со счетной базой нормально.

15. Сх. Докажите, что нормальное пространство со счетной базой вкладывается в l_2 . (Воспользуйтесь леммой Урысона 14-Ах.)

15. Дх. Топологическое пространство со счетной базой метризуемо, когда оно регулярно.

6.6. Компактность

6.6.1. Определение компактности

Топологическое свойство, которому посвящен этот параграф, играет особо важную роль и в топологии, и в ее приложениях. Оно представляет собой нечто вроде топологического аналога свойства множества быть конечным. (Эта аналогия, по-видимому, никогда не была формализована.)

Топологическое пространство называется **компактным**, если любое его покрытие открытыми множествами содержит конечную часть, также являющуюся покрытием.

Покрытия, являющиеся частями данного покрытия, называются его *подпокрытиями*. Таким образом, топологическое пространство компактно, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

16. А. Любое конечное пространство и любое антидискретное пространство компактны.

Компактность этих пространств следует просто из того, что в каждом из них имеется лишь конечное число различных открытых множеств.

16. В. Какие дискретные пространства компактны?

Только конечные.

16. I. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2$ - топологические структуры в множестве X .

1) Следует ли из компактности пространства (X, Ω_2) компактность пространства (X, Ω_1) ?

2) А наоборот?

16. С. Прямая \mathbf{R} некомпактна.

Рассмотрите покрытие \mathbf{R} интервалами $(-n; n)$, $n \in \mathbf{N}$.

16. D. Пространство X некомпактно, тогда существует его открытое покрытие, не имеющее ни одного конечного подпокрытия.

Это в точности отрицание компактности.

16. 2. Компактна ли стрелка? $A \mathbb{R}_{T_1}$?

6.6.2. Терминологические замечания

Первоначально компактностью называлось следующее более слабое свойство: из всякого счетного открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

16. E. Для пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, первоначальное определение равносильно современному.

Воспользуйтесь теоремой Липделефа 150.

Современное понятие компактности ввели, предложив для него термин бикompактность, математики П. С. Александров (1896-1982) и П. С. Урысон (1898-1924). Введенное понятие оказалось настолько удачным, что практически вытеснило старое и даже отобрало от него имя (иногда термин бикompактность все же употребляется - в основном топологами школы Александрова).

Другое отклонение от терминологии идёт от Бурбаки: мы не включаем хаусдорфовость в определение компактности, а Бурбаки включает.

Согласно нашему определению пространство \mathbb{R}_{T_1} компактно, тогда как по Бурбаки не компактно.

6.6.3. Компактность на языке замкнутых множеств

Говорят, что совокупность подмножеств некоторого множества *центрирована*, если пересечение любого конечного набора множеств этой совокупности непусто.

16.F. Совокупность \sum подмножеств множества X является центрированной, тогда она не содержит такой конечной части \sum_1 , что дополнения множеств, входящих в \sum_1 , покрывают X .

Следствие второй из формул де Моргана. Действительно, $\cap A_i = \emptyset$, тогда $X \setminus \cap A_i = X$, тогда $\cup (X \setminus A_i) = X$.

16. G. Топологическое пространство компактно, тогда любая центрированная совокупность его замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Рассмотрим дополнения $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$ множеств этой центрированной совокупности. Если $\cap F_\alpha = \emptyset$, то $\cup U_\alpha = X$, таким образом, множества $\{U_\alpha\}$ образуют покрытие пространства X . Если X компактно, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, что противоречит тому, что дополнения элементов этого покрытия имеют непустое пересечение, поскольку рассматриваемая совокупность замкнутых множеств является центрированной.

Докажите это самостоятельно.

6.6.4. Компактные множества

Когда говорят, что какое-то множество *компактно*, всегда имеют в виду, что это множество лежит в топологическом пространстве (в каком именно, должно быть ясно из контекста) и что, будучи наделено индуцированной топологией, оно является компактным пространством.

16. H. Подмножество топологического пространства X компактно, тогда из любого его покрытия множествами, открытыми в X , можно выделить конечное подпокрытие.

Пусть $\Gamma = \{U_\alpha\}$ - покрытие A множествами, открытыми в пространстве X . Так как A - компактное множество, из его покрытия множествами $A \cap U_\alpha$ можно выделить конечное подпокрытие $\{A \cap U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$, откуда следует, что множества $\{U_{\alpha_i}\}$ образуют конечное подпокрытие исходного покрытия Γ .

Докажите обратное утверждение самостоятельно.

16.3. Компактно ли множество $[1; 2) \subset \mathbb{R}$?

16.4- Компактно ли то же самое множество $[1; 2)$ в стрелке?

- 16.5. Найдите необходимое и достаточное условие компактности множества в стрелке, формулируемое в нетопологических терминах.
- 16.6. Докажите, что любое подмножество пространства \mathbb{R}_{T_1} является компактным.
- 16.7. Пусть A и B - компактные подмножества пространства X .
 1) Верно ли, что множество $A \cup B$ компактно? 2) Верно ли, что множество $A \cap B$ компактно?
- 16.8. Докажите, что множество $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ in \mathbb{R} компактно.

6.6.5. Компактность и замкнутость

16.I. Наследственна ли компактность?

Конечно, компактность не наследственна.

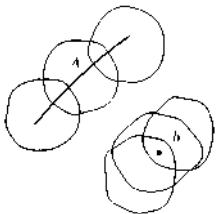
16.J. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Пусть $\{U_\alpha\}$ - открытое покрытие замкнутого множества, тогда

$\{X \setminus F, U_\alpha\}$ - открытое покрытие пространства X , из которого можно

выбрать конечное подпокрытие $\{X \setminus F, U_i\}_{i=1}^n$. Ясно, что $\{U_i\}_{i=1}^n$ - покрытие множества F .

16.K. *Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*



Следствие 16.L.

16.L. *Лемма к 16.K, но не только Если A - компактное подмножество хаусдорфова пространства X и b - точка этого пространства, не лежащая в A , то существуют открытые множества $U, V \subset X$, такие что $b \in V$, $A \subset U$ и $U \cap V = \emptyset$.*

Так как пространство X хаусдорфово, то для всякой точки $x \in A$ найдутся непересекающиеся окрестности U_x точки x и $V_b^{(x)}$ точки b . Набор $\{U_x \mid x \in A\}$ является покрытием множества A . В силу его компактности, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$. Положим $U = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$ и $V = \cap_{i=1}^n V_b^{(x_i)}$.

Множества U и V являются искомыми окрестностями компактного множества A и точки b .

16.9. Сконструируйте незамкнутое компактное подмножество какого-нибудь пространства. Какое минимальное число точек необходимо для этого?

6.6.6. Компактность и аксиомы отделимости

16.M. Компактное хаусдорфово пространство регулярно.

Следствие 16.K в силу 16.J.

16.N. Компактное хаусдорфово пространство нормально.

Поскольку компактное хаусдорфово пространство регулярно, то для замкнутых непересекающихся множеств найдутся такие наборы открытых окрестностей $\{U^{(x)}\}$, где $U^{(x)} \supset A$, и $\{V_x \mid x \in B\}$, что $U^{(x)} \cap V_x = \emptyset$. Далее рассуждайте, как в 16.L.

16.10. Пересечение любого семейства компактных подмножеств хаусдорфова пространства компактно. (Ср. 16.7.)

16.11. Пусть X - хаусдорфово пространство, $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство его компактных подмножеств, U - некоторое открытое множество, содержащее $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$.

Тогда $U \supset \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ для некоторого конечного $A \subset \Lambda$.

16.12. Если $\{K_n\}$ - убывающая последовательность компактных непустых связных подмножеств хаусдорфова пространства, то пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ непусто и связно.

6.6.7. Компактность в евклидовом пространстве

16.O. Отрезок I компактен.

Напомним что n -мерный куб - это множество

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [0; 1] \text{ для } i = 1, \dots, n\}.$$

Если I некомпактен, то существует такое его покрытие Γ_0 , никакая конечная часть которого не покрывает отрезок. Разделим I пополам и обозначим через I_1 ту половину, которая также не покрывается никакой конечной частью покрытия Γ_0 . Теперь разделим пополам I_1 , и так далее. В результате получим последовательность вложенных отрезков I_n , причем длина n -го из них равна 2^{-n} . В силу аксиомы полноты имеем $\bigcap I_n = \{x_0\}$. Рассмотрим элемент $U_0 \in \Gamma_0$, являющийся окрест-

ностью точки x_0 . Ясно, что $I_n \subset U_0$ при достаточно больших n , что противоречит тому, что по построению отрезок I_n не покрывается никакой конечной частью данного покрытия.

16.Р. Куб I^n компактен.

Разбейте куб на 2^n "половинных" кубов и повторите рассуждение, проведенное в доказательстве предыдущей задачи.

16. Q. Компактное подмножество метрического пространства ограничено.

Рассмотрите покрытие $\{B_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$.

Итак, согласно 16.К и 16. Q, компактные подмножества метрического пространства замкнуты и ограничены.

16.Р. Постройте замкнутое ограниченное подмножество метрического пространства, не являющееся компактным.

Пусть $X = [0; 1) \cup (2; 3]$. Множество $[0; 1)$ замкнуто в X , но не является компактным. Или еще проще - смотрите следующую задачу.

16.13. Компактны ли метрические пространства из задачи 4.А?

16.S. Подмножество евклидова пространства компактно, когда оно замкнуто и ограничено.

В силу 16. Q, компактное подмножество \mathbf{R}^n ограничено, в силу 16.К, оно замкнуто. Если подмножество $F \subset \mathbf{R}^n$ ограничено, то оно лежит в некотором кубе, который компактен (16.Р). Поскольку множество F замкнуто, то оно и компактно, в силу 16. J.

16.14. Какие из следующих множеств компактны:

- (a) $[0; 1)$; (b) луч $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$; (c) S^1 ;
 (d) S^n ; (e) однополостной гиперболоид;
 (f) эллипсоид; (g) $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$?

Матрицу $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ с вещественными элементами a_{ij} можно рассматривать как точку пространства \mathbb{R}^{n^2} , занумеровав ее элементы числами от 1 до n^2 каким-либо способом (например, лексикографически). Тем самым множество $L(n, k)$ всех таких матриц отождествляется с \mathbb{R}^{n^2} , и наделяется топологией. (Ср. 13.)

16.15. Какие из следующих подмножеств пространства $L(n, n)$ компактны:

- (1) $GL(n) = \{A \in L(n, n) \mid \det A \neq 0\}$;
- (2) $SL(n) = \{A \in L(n, n) \mid \det A = 1\}$;
- (3) $O(n) = \{A \in L(n, n) \mid A \text{ ортогональная матрица}\}$;
- (4) $\{A \in L(n, n) \mid A^2 = E\}$, (здесь E - это единичная матрица)?

6.6.8. Компактность и непрерывные отображения

16. Т. Непрерывный образ компактного пространства компактен (Другими словами, если X - компактное пространство, $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, то множество $f(X)$ компактно).

Вспользуемся теоремой 16.Н. Пусть $\{U_\alpha\}$ - покрытие $f(X)$ открытыми в Y множествами, тогда $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ - покрытие X открытыми в нем множествами. Так как X компактно, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^n$. Набор $\{U_i\}_{i=1}^n$ - конечное подпокрытие множества $f(X)$.

16. У. На компактном множестве всякая непрерывная функция ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений. (Другими словами, если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ -- непрерывная функция и X компактно, то существует $a, b \in X$, такие что $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ для любого $x \in X$). (Ср. 16.Т и 16.С.)

В силу 16. Т и 16.С, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ компактно, значит ограничено, поэтому существуют $m = \inf f(X)$ и $M = \sup f(X)$. Поскольку $f(X)$ также и замкнуто, то $m, M \in f(X)$, откуда и следует существование таких точек $a, b \in X$, что $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ при всех $x \in X$.

16.16. Если функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то $f(I)$ - замкнутый отрезок.

16.17. Пусть A - подмножество \mathbb{R}^n . Докажите, что A является компактным, тогда всякая непрерывная функция на A является ограниченной.

16.18. Докажите, что если F - замкнутое, а K - не пересекающееся с ним компактное подмножество метрического пространства, то $\rho(F, K) > 0$.

16.19. Любое открытое множество, содержащее компактное подмножество A метрического пространства X , содержит ε -окрестность множества A для некоторого $\varepsilon > 0$.

16.20. Если A - замкнутое связное подмножество пространства \mathbb{R}^n и V - его замкнутая ε -окрестность, то множество V линейно связно.

16.21. Докажите, что если в компактном метрическом пространстве замыкание любого открытого шара есть замкнутый шар с тем же центром и того же радиуса, то в этом пространстве любой шар связан.

16.22. Пусть A - компактное метрическое пространство и $f : X \rightarrow X$ - такое отображение, что $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$ с $x \neq y$.

Тогда отображение f имеет неподвижную точку и такая точка единственна. (Напомним, что неподвижная точка отображения f - это такая точка x , что $f(x) = x$.)

16.23. Для любого покрытия компактного метрического пространства открытыми множествами существует такое число $r > 0$, что любой открытый шар радиусом r содержится по меньшей мере в одном элементе покрытия.

16. *Лемма Лебега.* Пусть $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение компактного метрического пространства X в топологическое пространство Y и Γ - открытое покрытие пространства Y . Тогда существует такое число $\delta > 0$, что образ $f(A)$ любого множества $A \subset X$ диаметра меньше δ содержится в некотором элементе покрытия Γ .

Следует из 16.23: рассмотрите покрытие $\{f^{-1}(U) \mid U \in \Gamma\}$ пространства X .

6.6.9. Замкнутые отображения

Непрерывное отображение называется *замкнутым*, если образы замкнутых множеств замкнуты.

16.24- Непрерывная биекция есть гомеоморфизм, когда она является замкнутым отображением.

16. *W.* Любое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.

Непосредственно следует из 16. *J.* 16. *K* и 16. *T.*

Два важных следствия этой теоремы.

16. *X.* Непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.

Сопоставьте 16. *W* и 16.24.

16. *Y.* Непрерывная инъекция компактного пространства в хаусдорфово является топологическим вложением.

См. 16. *X.*

16.25. Покажите, что в теореме 16. *X* ни одно из четырех условий нельзя выбросить, не сделав формулировку неверной.

16.26. Существует ли такое некомпактное множество в евклидовом пространстве, что любое его непрерывное отображение в хаусдорфово пространство замкнуто⁷ (См. 16. *U* и 16. *W.*)

16.27. Сужение замкнутого отображения на замкнутое подмножество является замкнутым отображением.

16.28. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, $K \subset X$ - компактное множество, а пространство Y хаусдорфово. Предположим, что сужение $f|_K$ является инъективным отображением и для всякой точки $a \in K$

найдется окрестность U_a такая что сужение $f|_{U_a}$ инъективно. Докажите, что у множества K существует окрестность U , такая что сужение $f|_U$ является инъективным отображением.

6.6.10х. Нормы в \mathbf{R}^n

16.1х. Докажите, что любая норма $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ есть непрерывная функция.

16.2х. Докажите, что любые две нормы в \mathbf{R}^n эквивалентны (т. е. задают одну и ту же топологию). См. 4.27, ср. 4.31.

16.3х. Верно ли утверждение предыдущей задачи для метрик в \mathbf{R}^n ?

6.6.11х. Индукция по компактности

Функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ называется *локально ограниченной*, если для каждой точки $a \in X$ существует такая ее окрестность U и такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ при $x \in U$ (т. е. если каждая точка пространства X обладает окрестностью, сужение функции f на которую ограничено).

16.4х. Если пространство X компактно, а функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ локально ограничена, то она ограничена.

Это утверждение является простейшим применением формулируемого ниже (см. 16.5х) общего принципа, который можно назвать *индукцией по компактности*.

Пусть X топологическое пространство, ε - некоторое свойство его подмножеств. Назовем ε *аддитивным*, если объединение любого конечного набора множеств, обладающих свойством ε , также обладает свойством ε . Скажем, что X *локально обладает свойством ε* , если любая его точка имеет окрестность, обладающую этим свойством.

16.5х. Докажите, что компактное пространство, локально обладающее некоторым аддитивным свойством, само обладает этим свойством.

16.6х. Выведите при помощи этого принципа утверждения задач 16. Q, 17.M, и 17.N.

6.7. Секвенциальная компактность

6.7.1. Секвенциальная компактность и компактность

Говорят, что топологическое пространство *секвенциально компактно*, если любая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

17. А. Компактное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, секвенциально компактно.

Точка b называется *ТОЧКОЙ накопления* множества A , если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек этого множества.

17.A.1. В пространстве, удовлетворяющем первой аксиоме отделимости, понятия точки накопления и предельной точки совпадают.

Очевидно. Предположим противное, пусть существует предельная точка x , не являющаяся точкой накопления множества A . Тогда у нее существует окрестность U_x , такая что множество $U_x \cap A$ конечно.

Следовательно, найдется такая окрестность W_x точки x , для которой $(W_x \setminus x) \cap A = \emptyset$ - противоречие.

17.A.2. В компактном пространстве всякое бесконечное множество обладает точкой накопления.

От противного: рассмотрите покрытие пространства такими окрестностями его точек, пересечение которых с данным бесконечным множеством конечно.

17.A.3. Выведите теорему 17.A из 17.A.2.

Пусть A - множество точек данной последовательности. Предположим, что оно бесконечно. По предыдущему утверждению у него имеется точка накопления x_0 . Пусть $\{U_n\}$ - счетная база окрестностей точки x_0 и $x_{n_1} \in U_1 \cap A$. Так как множество $U_2 \cap A$ бесконечно, то найдется $n_2 > n_1$, $x_{n_2} \in U_2 \cap A$. Докажите, что построенная подобным образом подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ исходной последовательности сходится к x_0 . Если множество A конечно, то все значительно проще.

17.B. Секвенциально компактное пространство со счетной базой компактно.

17.B.1. Всякая убывающая последовательность непустых замкнутых множеств секвенциально компактного пространства обладает непустым пересечением.

Рассмотрите последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in F_n$, и покажите, что если $x_{n_k} \rightarrow x_0$, то $x_n \in F_n$ при всех $n \in \mathbf{N}$.

17.B.2. Всякая убывающая последовательность замкнутых непустых множеств имеет непустое пересечение, когда всякая центрированная счетная совокупность замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Если $\{F_k\}$ - центрированная последовательность замкнутых множеств, то $H_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$ - вложенная последовательность замкнутых множеств.

17.B.3. Выведите теорему 17.B из 17.B.1 и 17.B.2.

По теореме Липделёфа 15.О достаточно рассматривать счетные покрытия $\{U_n\}$. Если никакой конечный набор множеств из этого покрытия сам покрытием не является, то множества $F_n = X \setminus U_n$ обра-

зуют центрированную систему замкнутых множеств

17. С. Для пространств со счетной базой компактность и секвенциальная компактность равносильны.

Следует из *17.В* и *17.А*.

6.7.2. Секвенциальная компактность в метрических пространствах

Подмножество A метрического пространства X называется его ε -сетью (где ε - положительное вещественное число), если $\rho(x, A) < \varepsilon$ для любой точки $x \in X$.

17.D. Всякое компактное метрическое пространство обладает конечной ε -сетью для любого $\varepsilon > 0$.

Переформулируем определение ε -сети: A есть ε -сеть, если $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in A}$ - покрытие X . Теперь доказательство очевидно.

17.E. Всякое секвенциально компактное метрическое пространство обладает конечной ε -сетью для любого $\varepsilon > 0$.

Рассуждаем от противного. Если $\{x_i\}_{i=1}^{k-1}$ не есть ε -сеть, то найдется такая точка x_k , что $\rho(x_i, x_k) \geq \varepsilon$, $i = 1, \dots, k-1$. В результате мы получим последовательность, расстояние между любыми двумя членами которой не меньше ε , поэтому у нее нет сходящихся подпоследовательностей.

17.F. Подмножество метрического пространства всюду плотно, тогда оно является ε -сетью для любого $\varepsilon > 0$.

Очевидно: всякий открытый шар метрического пространства - открытое в нем множество. Используйте определение топологии метрического пространства.

17. G. Всякое секвенциально компактное метрическое пространство сепарабельно.

Счетным всюду плотным множеством является объединение его конечных $\frac{1}{n}$ -сетей (см. *17.E*).

17. H. Всякое секвенциально компактное метрическое пространство обладает счетной базой.

Поскольку оно сепарабельно.

17.I. Для метрических пространств компактность и секвенциальная компактность равносильны.

Если X компактно, то оно секвенциально компактно в силу *17.A*. Если X секвенциально компактно, то оно сепарабельно, значит, обладает счетной базой. Поэтому из *17.C* следует, что оно компактно.

17.1. Любое секвенциально компактное метрическое пространство ограничено. (Ср. 17.E и 17.I.)

17.2. Во всяком метрическом пространстве для любого $\varepsilon > 0$ существует:

- (1) дискретная ε -сеть и даже
- (2) такая ε -сеть, что расстояние между любыми двумя ее точками не меньше ε .

6.7.3. Компактность и полнота

Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ точек метрического пространства называется *последовательностью Коши* и говорят, что она *сходится в себе*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N , что

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ для любых } n, m > N.$$

17.J. Всякая сходящаяся в себе последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе, а ее подпоследовательность x_{n_k} имеет своим пределом точку a . Найдем такое число m , что $\rho(x_l, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k, l \geq m$, и такое i , что $n_i > m$ и $\rho(x_{n_i}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда при всех $l \geq m$, верно неравенство

$$\rho(x_l, a) \leq \rho(x_l, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, a) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая его последовательность Коши имеет предел.

17.K. Метрическое пространство является полным, тогда любая убывающая последовательность его замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, обладает непустым пересечением.

Очевидно. Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность.

Пусть n_1 таково, что $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ при всех $n, m \geq n_1$. Значит,

$x_n \in B_{1/2}(x_{n_1})$ для всех $n \geq n_1$. Выберем далее $n_2 > n_1$ так,

чтобы $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{4}$ при всех $n, m \geq n_2$, тогда

$$B_{1/4}(x_{n_2}) \subset B_{1/2}(x_{n_1}).$$

Продолжая построение, получаем такую последовательность вложенных шаров, для единственной общей точки x_0 которых верно, что $x_n \rightarrow x_0$.

17.L. Компактное метрическое пространство полно.

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность точек компактного метрического пространства. Поскольку оно и секвенциально компактно, то некоторая ее подпоследовательность является сходящейся, а тогда сходится и исходная последовательность.

17.M. Полное метрическое пространство компактно, когда для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε -сеть.

Во всяком компактном метрическом пространстве имеется конечная ε -сеть. Теперь предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве существует конечная ε -сеть, и покажем, что это пространство будет секвенциально компактным. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$. Обозначим через A_n конечную $\frac{1}{n}$ -сеть пространства X . Поскольку $X = \bigcup_{x \in A_1} B_1(x)$, то найдется такой шар, в котором лежит бесконечно много членов последовательности; пусть x_{n_1} - первый из них. Из остальных лежащих в первом шаре членов выберем x_{n_2} - первый из лежащих в шаре $B_{1/2}(x)$, $x \in A_2$. Продолжая построение, получаем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Покажите, что она фундаментальна. Поскольку по предположению пространство является полным, то построенная последовательность имеет предел. Таким образом, мы доказали, что пространство секвенциально компактно, следовательно, оно и компактно.

17.N. Полное метрическое пространство компактно, когда для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует компактная ε -сеть.

6.7.4x. Некомпактность бесконечномерных шаров

Обозначим символом l^∞ множество всех ограниченных последовательностей вещественных чисел. Оно является векторным пространством относительно покомпонентных операций. В нем имеется естественная норма

$$\|x\| = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

17.1x. Компактны ли замкнутые шары пространства l^∞ ? А сферы?

17.2x. Компактно ли множество $\{x \in l^\infty \mid |x_n| \leq 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$?

17.3x. Докажите, что множество $\{x \in l^\infty \mid |x_n| = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$

гомеоморфно канторову множеству K (введённому в 2).

17.4x. Существует ли бесконечномерное нормированное пространство, в котором замкнутые шары компактны?

6.7.5x. p -адические числа

Фиксируем простое число p . Формальный ряд вида $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots$, $0 \leq a_n < p$, $a_n \in \mathbb{N}$ называется *целым p -адическим числом*. (Слово *формальный* означает здесь, что плюсы не призывают к немедленному сложению, а рассматриваются как своего рода знаки препинания.) Множество целых p -адических чисел обозначается через

\mathbb{Z}_p . Введем в него следующую метрику: для $x \neq y$ положим $\rho(x, y) = p^{-m}$, где m - первый показатель, при котором коэффициенты в рядах x и y различны.

17.5x. Докажите, что p - действительно -метрика в \mathbb{Z}_p .

Эта метрика называется p -адической, а \mathbb{Z}_p с нею называется *пространством целых p -адических чисел*. Имеется инъекция $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$, при которой число $a_0 + a_1p + \dots + a_n p^n \in \mathbb{Z}$ с $0 \leq a_k < p, a_k \in \mathbb{N}$, ставится в соответствие ряд $a_0 + a_1p + \dots + a_n p^n + 0 \cdot p^{n+1} + \dots$ а число

$-(a_0 + a_1p + \dots + a_n p^n) \in \mathbb{Z}$ с $0 \leq a_k < p, a_k \in \mathbb{N}$ ряд

$b_0 + b_1p + \dots + b_n p^n + (p-1)p^{n+1} + (p-1)p^{n+2} + \dots$, где

$b_0 + b_1p + \dots + b_n p^n = p^{n+1} - (a_0 + a_1p + \dots + a_n p^n)$. Ср. 4-1x-

17.6x. Докажите, что образ этой инъекции является всюду плотным множеством в \mathbb{Z}_p .

17.7x. Является ли пространство \mathbb{Z}_p полным?

17.8x. Компактно ли \mathbb{Z}_p ?

6.7.6x. Пространства выпуклых фигур

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ - замкнутый круг радиуса p . Рассмотрим множество \mathcal{P}_n всех выпуклых многоугольников P , таких что:

- периметр многоугольника P не превосходит p ;
- P содержится в круге D ;
- P имеет не более n вершин (не исключаются случаи одной и двух вершин, при этом периметр отрезка считаем равным удвоенной длине этого отрезка).

См. 4Ax, ср. 4Cx.

17.9x. Снабдите это множество естественной структурой топологического пространства. Например, введите естественную метрику.

17.10x. Докажите, что это пространство компактно.

17.11x. Докажите, что среди многоугольников в \mathcal{P}_n существует многоугольник наибольшей площади.

17.12x. Докажите, что среди многоугольников в \mathcal{P}_n наибольшую площадь имеет правильный n -угольник.

Рассмотрим теперь множество \mathcal{P}_∞ всех выпуклых многоугольников периметра, не превосходящего p , содержащихся в круге радиуса p .

Таким образом,

$$\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n.$$

17.13x. Введите в \mathcal{P}_∞ структуру топологического пространства так, чтобы пространства \mathcal{P}_n были его подпространствами.

17.14 х. Докажите, что пространство $\mathcal{F}(p, \infty)$ построенное в качестве решения задачи 17.13х, не компактно.

Рассмотрим теперь множество \mathcal{F} всех замкнутых выпуклых подмножеств плоскости с периметром, не превосходящим p , и содержащихся в круге радиуса p . (Обратите внимание, что каждое из них компактно.)

17.15х. Введите в это множество топологию, которая бы индуцировала рассмотренные выше топологии пространств многоугольников.

17.16х. Докажите, что пространство \mathcal{F} компактно.

17.17х. Докажите, что среди всех выпуклых плоских множеств с периметром p существует множество наибольшей площади.

17.18х. Докажите, что таковым является круг радиусом $\frac{p}{2\pi}$.

6.8х. Локальная компактность и паракомпактность

6.8.1х. Локальная компактность

Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если у каждой его точки имеется окрестность с компактным замыканием.

18.1х. Компактное пространство локально компактно.

18.2х. Какие из следующих пространств локально компактны:

(а) \mathbb{R} ; (б) \mathbb{Q} ; (с) \mathbb{R}^n ; (д) дискретное пространство?

18.3х. Приведите пример двух локально компактных подмножеств прямой, объединение которых не является локально компактным.

18.4х. Наследственна ли локальная компактность?

Конечно, не наследственна. Пример: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

18.5х. Замкнутое подмножество локально компактного пространства локально компактно.

Пусть U - окрестность с компактным замыканием. Если F замкнуто, то множество $\text{Cl}_F(U \cap F) = \text{Cl}U \cap F$ компактно как замкнутое подмножество компактного множества.

18.6х. Верно ли, что открытое подмножество локально компактного пространства локально компактно?

Нет, не верно. Пусть X не локально компактно (например, $X = \mathbb{Q}$).

Положим $X^* = X \cup \{x_*\}$. $\Omega^* = \{X^*\} \cup \{U \mid U \in \Omega\}$. Пространство X^* компактно, следовательно локально компактно, а X - его открытое подмножество, не являющееся тем не менее локально компактным пространством.

18.Dx. Хаусдорфово локально компактное пространство регулярно. Рассмотрим произвольную окрестность W некоторой точки x пространства. Пусть U_0 - окрестность точки x , имеющая компактное замыкание. Поскольку пространство хаусдорфово, то $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} \text{Cl } U$, следовательно, $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} (\text{Cl } U_0 \cap \text{Cl } U)$. Каждое из множеств $\text{Cl } U_0 \cap \text{Cl } U$ является компактным, значит, в силу 16.11, найдутся такие окрестности U_1, \dots, U_n , что $\text{Cl } U_0 \cap \text{Cl } U_1 \cap \dots \cap \text{Cl } U_n \subset W$. Пусть $V = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n$. Тогда $\text{Cl } V \subset W$. Таким образом, во всякой окрестности точки лежит замыкание некоторой её окрестности. В силу 14.19 пространство является регулярным.

18.Ex. Открытое подмножество локально компактного хаусдорфова пространство локально компактно.

Пусть множество V открыто в хаусдорфовом локально компактном пространстве X и $x \in V$. Пусть U - окрестность точки x , такая что $\text{Cl } U$ - компактное множество. В силу 18.Dx и 14.19 у точки x имеется окрестность W , такая что $\text{Cl } W \subset U \cap V$. Таким образом, $\text{Cl}_V W = \text{Cl } W$ - компактное множество, значит V - локально компактное пространство

18.Fx. Локальная компактность является локальным топологическим свойством для хаусдорфовых пространств. Другими словами, хаусдорфово пространство является локально компактно, тогда каждая его точка обладает локально компактной окрестностью.

Очевидно. Используйте идею из 18.Ex.

6.8.2x. Одноточечная компактификация

Пусть (X, Ω) - хаусдорфово топологическое пространство и X^* - множество, получающееся из X добавлением одной точки x^* (которая, разумеется, не принадлежит X). Пусть Ω^* - совокупность подмножеств X^* , состоящая из

- множеств, открытых в X , и
- множеств вида $X^* \setminus C$, где $C \subset X$ - компактное множество:
 $\Omega^* = \Omega \cup \{X^* \setminus C \mid C \subset X \text{ компактное множество}\}$.

18. Gx. Докажите, что набор Ω^* - топологическая структура.

Так как \emptyset и открыто, и компактно в X , то $\emptyset, X^* \in \Omega^*$. Проверим теперь, что объединения конечные пересечения множеств из Ω^* принадлежат Ω^* . Это очевидно для множеств, принадлежащих Ω .

Пусть $X^* \setminus K_\lambda \in \Omega^*$, где $K_\lambda \subset X$ - компактные множества, $\lambda \in \Lambda$.

Тогда $\bigcup(X^* \setminus K_\lambda) = X^* \setminus \bigcap K_\lambda \in \Omega^*$, поскольку X хаусдорфово, так что множество $\bigcap K_\lambda$ компактно. Аналогичным образом, если Λ конечно, то $\bigcap(X^* \setminus K_\lambda) = X^* \setminus \bigcup K_\lambda \in \Omega^*$. Поэтому остается рассмотреть случай, когда объединяются (пересекаются) множества из Ω^* и множества из Ω . Мы оставляем разбор этого случая читателю в качестве упражнения.

18.Нх. Докажите, что пространство (X^*, Ω^*) компактно.

Рассмотрим тот элемент $U = X^* \setminus K_0$ покрытия, который содержит добавленную точку. Оставшиеся элементы покрытия образуют открытое покрытие компактного множества K_0 .

18.Их. Включение $X \rightarrow X^*$ является топологическим вложением (относительно исходной топологии в X и Ω^*).

Другими словами, топология, индуцированная из X^* на X , совпадает с исходной топологией пространства X . Так оно и есть, поскольку в хаусдорфовом пространстве X компактные множества являются замкнутыми

18.Жх. Если пространство X локально компактно, то пространство (X^*, Ω^*) хаусдорфово. (Напомним, что X в этом пункте предполагается хаусдорфовым.)

Если $x, y \in X$, то все очевидно. Если, к примеру, $y = x_*$, то рассмотрим окрестность U_x точки x , замыкание которой компактно. Тогда U_x и $X \setminus \text{Cl } U_x$ - окрестности, разделяющие точки x и x_* .

Топологическое вложение пространства X в компактное пространство Y называется *компактификацией* пространства X , если его образ плотен в Y . Так же в этой ситуации называется и пространство Y . (Для упрощения обозначений мы будем отождествлять X с его образом в Y .)

18.Кх. Если X - локально компактно хаусдорфово пространство и Y - его хаусдорфова компактификация с одноточечным $Y \setminus X$, то существует гомеоморфизм $Y \rightarrow X^*$, тождественный на X .

Такое пространство Y называется *одноточечной компактификацией* или *компактификацией Александера* пространства X . Из утверждения

18.Кх следует, что пространство Y в понятном смысле единственно.

Пусть $x_* = X^* \setminus X$ и $y = Y \setminus X$. Положим

$$f : Y \rightarrow X^* : x \mapsto \begin{cases} x & \text{при } x \in X, \\ x_* & \text{при } x = y. \end{cases}$$

Если $U \subset X^*$ и $U = X^* \setminus K$, где K - компактное множество в X , то множество $f^{-1}(U) = Y \setminus K$ - открыто в Y , таким образом, отображение f непрерывно. Осталось применить **16.Х**.

18.Лх. Докажите, что одноточечная компактификация плоскости \mathbf{R}^2 гомеоморфна S^2 .

Убедитесь, что если открытое множество $U \subset S^2$ содержит "северный полюс", то дополнение образа этого множества при стереографической проекции компактно в \mathbf{R}^2 .

18.4x. Одноточечная компактификация пространства \mathbf{R}^n гомеоморфна сфере S^n .

18.5x. Явно опишите одноточечные компактификации следующих пространств:

- (1) кольца $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;
- (2) квадрата без вершин $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \in [-1, 1], |xy| < 1\}$;
- (3) полосы $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0, 1]\}$;

(4) компактного пространства.

18.Мх. Локально компактное хаусдорфово пространство регулярно.

18.6x. Пусть X локально компактное хаусдорфово пространство, K - некоторое его компактное подмножество, U окрестность множества K . Тогда существует окрестность V множества K , замыкание $\text{Cl } V$ которой компактно и содержится в U .

Поскольку X^* хаусдорфово и компактно (см. 18.Нх и 18.1х), то оно регулярно в силу 16.М. Пространство X является подпространством X^* , а регулярность наследственна. Попробуйте также доказать утверждение задачи без перехода к одноточечной компактификации.

6.8.3x. Собственные отображения

Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *собственным*, если оно непрерывно и прообраз любого компактного множества при f компактен.

Пусть X, Y - хаусдорфовы пространства. Всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ естественным образом продолжается до отображения

$$f^* : X^* \rightarrow Y^* : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in X, \\ y_* & \text{при } x = x_*. \end{cases}$$

18.Лх. Докажите, что отображение f^* непрерывно, тогда f является собственным.

Если f^* непрерывно, то таково же и f (в силу 18.1х). Пусть $K \subset Y$ - компактное множество. Положим $\bar{U} = Y \setminus K$. Так как f^* непрерывно, то множество $(f^*)^{-1}(\bar{U}) = X^* \setminus f^{-1}(K)$ открыто в X^* , так что множество $f^{-1}(K)$ компактно в X . Следовательно, f - собственное отображение.

Доказательство проводится аналогичным образом.

18. Ох. Всякое собственное отображение хаусдорфова пространства в хаусдорфово локально компактное пространство замкнуто.

Пусть $f^* : X^* \rightarrow Y^*$ - продолжение отображения $f : X \rightarrow Y$.

Докажите, что если F замкнуто в X , то $F \cup \{*\}$ замкнуто, следовательно компактно в X^* . Далее используйте утверждения 18.Nx, 16. W и 18.Ix. Утверждение 18. Ох связано с теоремой 16.W.

18.Рх. Продолжите эту аналогию: сформулируйте и докажите утверждения, соответствующие теоремам 16.У и 16.X.

Собственная инъекция хаусдорфова пространства в локально компактное хаусдорфово пространство является топологическим вложением. Собственная биекция хаусдорфова пространства в локально компактное хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

6.8.4х. Локально конечные семейства

Множество Γ подмножеств пространства X называется *локально конечным*, если всякая точка пространства X обладает окрестностью, пересекающей лишь с конечным числом множеств, принадлежащих Γ .

18. Qx. Любое локально конечное покрытие компактного пространства конечно.

Пусть Γ - локально конечное покрытие. Рассмотрим также покрытие Δ пространства X окрестностями, каждая из которых пересекается с конечным числом элементов покрытия Γ . В силу компактности X , из Δ можно выделить конечное подпокрытие Δ' . Поскольку каждая из окрестностей, входящих в Δ' , пересекается лишь с конечным числом множеств из покрытия Γ , то их всего в Γ имеется конечное число.

18.7х. Если множество Γ подмножеств пространства X локально конечно, то локально конечно и множество $\{C \setminus A \mid A \in \Gamma\}$ замыканий множеств из Γ .

18.8х. Если семейство Γ подмножеств пространства X локально конечно, то каждое компактное подмножество $A \subset X$ пересекается лишь с конечным числом элементов семейства Γ .

18.9х. Если совокупность Γ подмножеств пространства X локально конечна и замыкание $C \setminus A$ каждого $A \in \Gamma$ компактно, то каждое множество $A \in \Gamma$ пересекается только с конечным числом множеств, принадлежащих Γ .

18.10x. Любое локально конечное покрытие секвенциально компактного пространства конечно.

18.Rx. Постройте открытое покрытие евклидова пространства \mathbf{R}^n , которое не обладает локально конечным подпокрытием.

Пусть Γ и Δ покрытия множества X . Говорят, что Δ *вписано* в Γ , если каждый элемент $A \in \Delta$ содержится в некотором элементе $B \in \Gamma$.

Покрытие \mathbf{R}^n шарами $B_n(0)$, $n \in \mathbf{N}$.

18.Sx. Во всякое открытое покрытие евклидова пространства \mathbf{R}^n можно вписать локально конечное покрытие.

Используйте локально конечное покрытие \mathbf{R}^n равными открытыми кубами

18.Tx. Пусть $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ - локально конечное открытое покрытие пространства \mathbf{R}^n . Существует открытое покрытие $\{V_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ пространства

\mathbf{R}^n , такое что $\text{Cl } V_i \subset U_i$ при любом $i \in \mathbf{N}$.

Ср. 18.17x.

6.8.5x. Паракомпактные пространства

Пространство X называется *паракомпактным*, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

18.Ux. Любое компактное пространство паракомпактно.

Очевидно.

18.Vx. Евклидово пространство \mathbf{R}^n паракомпактно.

Это в точности утверждение 18.Sx.

18.Wx. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где множества X_i компактны и таковы, что $X_i \subset \text{Int } X_{i+1}$. Тогда пространство X паракомпактно.

Пусть Γ - открытое покрытие X . Так как каждое из множеств $K_i = X_i \setminus \text{Int } X_{i-1}$ компактно, то Γ содержит конечное подпокрытие Γ_i множества K_i . При этом множества $W_i = \text{Int } X_{i+1} \setminus X_{i-2} \supset K_i$ образуют локально конечное открытое покрытие X . Рассмотрев (для каждого i) пересечения элементов покрытия Γ_i с W_i , мы получим локально конечное покрытие, вписанное в Γ .

18.Xx. Пусть пространство X локально компактно. Если X покрывается счетным числом компактных множеств, то X паракомпактно.

Используя 18.6x, постройте семейство U_i открытых множеств, таких что для каждого i замыкание $X_i = \text{Cl } U_i$ компактно и содержится в $U_{i+1} \subset \text{Int } X_{i+1}$. Осталось воспользоваться утверждением 18.Wx.

18. Ух. Докажите, что если локально компактное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно паракомпактно. Рассмотрим покрытие $\Gamma = \{U_\alpha\}$. В силу 18.18х, существует открытое покрытие $\Delta = \{V_\alpha\}$, такое что $\text{Cl} V_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого α . Пусть $\varphi_\alpha : X \rightarrow I$ - функция Урысопа, такая что $\text{supp } \varphi_\alpha = X \setminus U_\alpha$ и $\varphi_\alpha^{-1}(1) = \text{Cl} V_\alpha$ (см. 14.Ах). Положим $\varphi(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x)$. Тогда набор функций $\{\varphi_\alpha(x)/\varphi(x)\}$ является искомым разбиением единицы.
- 18.12х. Замкнутое подмножество паракомпактного пространства паракомпактно.
- 18.13х. Несвязное объединение паракомпактных пространств паракомпактно.

6.8.6х. Паракомпактность и аксиомы отделимости

18.14х. Пусть X - паракомпактное пространство, F и M - два его непересекающихся подмножества X , причем F замкнуто. Предположим, что F покрыто открытыми множествами U_α , замыкания которых не пересекаются с множеством M : $\text{Cl} U_\alpha \cap M = \emptyset$. Тогда у множеств F и M имеются непересекающиеся окрестности.

18.15х. Хаусдорфово паракомпактное пространство регулярно.

18.16х. Хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.

18.17х. Пусть X - хаусдорфово локально компактное и паракомпактное пространство, Γ - локально конечное открытое покрытие X . Тогда у пространства X имеется локально конечное открытое покрытие Δ , такое что замыкания $\text{Cl} V$, где $V \in \Delta$, компактны и покрытие $\{\text{Cl} V \mid V \in \Delta\}$ вписано в Γ .

Следующее утверждение является более общим (хотя, с формальной точки зрения, более слабым).

18.18х. Пусть X - нормальное пространство и $\Gamma = \{U_\alpha\}$ - его локально конечное открытое покрытие. Тогда существует такое локально конечное открытое покрытие $\{V_\beta\}$, что покрытие $\{\text{Cl} V_\beta\}$ вписано в исходное покрытие Γ .

Информация. Все метризуемы пространства паракомпактны.

6.8.7х. Разбиения единицы

Пусть X - топологическое пространство, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ - функция. Множество $\text{Cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ называется *носителем* функции $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ и обозначается через $\text{supp } f$.

18.19x. Пусть X топологическое пространство, а семейство непрерывных функций $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \Lambda$ таково, что носители $\text{supp}(f_\alpha)$ составляют локально конечное покрытие пространства X . Тогда формула

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x)$$

7. Топологические конструкции

7.1. Перемножение

7.1.1. Теоретико-множественное отступление: перемножение множеств

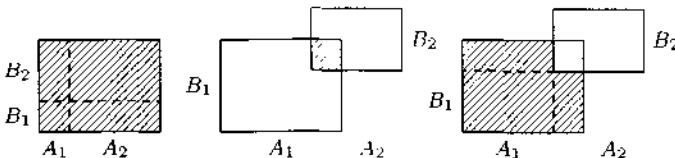
Прямым произведением (декартовым произведением или просто **произведением)** множеств X и Y называется множество $X \times Y$ всех упорядоченных пар (x, y) с $x \in X$ и $y \in Y$. Если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то $A \times B \subset X \times Y$. Множества $X \times b$ с $b \in Y$ и $a \times Y$ с $a \in X$ называются *слоями* произведения $X \times Y$.

19.A. Для любых $A_1, A_2 \subset X$ и $B_1, B_2 \subset Y$ имеют место формулы

$$(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2),$$

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cap (A_1 \times (B_1 \setminus B_2)).$$



Естественные отображения

$\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x$ и $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y$

называются *проекциями*.

К примеру,

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \iff \\ \iff z \in A_1 \times B_1, z \in A_2 \times B_2 &\iff x \in A_1, x \in A_2, y \in B_1, y \in B_2 \iff \\ \iff x \in A_1 \cap A_2, y \in B_1 \cap B_2 &\iff z \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2). \end{aligned}$$

19.В. Докажите, что $\text{pr}_X^{-1}(A) = A \times Y$ для любого множества $A \subset X$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{pr}_X^{-1}(A) &= \{z = (x, y) \in X \times Y \mid \text{pr}_X(z) \in A\} = \\ &= \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A\} = A \times Y. \end{aligned}$$

19.1. Напишите аналогичную формулу для $B \subset Y$.

7.1.2. Графики

Каждому отображению $f: X \rightarrow Y$ можно сопоставить подмножество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$, называемое *графиком* отображения f .

19.С. Множество $\Gamma \subset X \times Y$ является графиком некоторого отображения $f: X \rightarrow Y$, тогда для любого $x \in X$ пересечение Γ с $x \times Y$ состоит ровно из одной точки.

Действительно, $\Gamma_f \cap (x \times Y) = (x, f(x))$. \Leftarrow Если

Пересечение $\Gamma \cap (x \times Y)$ состоит из одной точки (x, y) , то можно положить $f(x) = y$.

19.2. Докажите, что для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ и любых множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ имеют место формулы

$$f(A) = \text{pr}_Y(\Gamma_f \cap (A \times Y)) = \text{pr}_Y(\Gamma_f \cap \text{pr}_X^{-1}(A)) \text{ и}$$

$$f^{-1}(B) = \text{pr}_X(\Gamma_f \cap (X \times B)).$$

Множество $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ называется диагональю произведения $X \times X$.

19.3. Пусть $A, B \subset X$. Докажите, что $(A \times B) \cap \Delta = \emptyset$, тогда $A \cap B = \emptyset$.

19-4- Докажите, что отображение $\text{pr}_X|_{\Gamma_f}$ биективно.

19.5. Докажите, что отображение f инъективно, тогда отображение $\text{pr}_Y|_{\Gamma_f}$ инъективно.

19.6. Рассмотрим отображение $T: X \times Y \rightarrow Y \times X: (x, y) \mapsto (y, x)$.

Докажите, что $\Gamma_{f^{-1}} = T(\Gamma_f)$ для любого обратимого отображения $f: X \rightarrow Y$.

7.1.3. Перемножение топологий

Пусть X и Y - топологические пространства. Множество вида $U \times V \subset X \times Y$, где U открыто в X и V открыто в Y , назовем *элементарным*.

19.D. Совокупность элементарных множеств является базой некоторой топологии в $X \times Y$.

Следует из 3.A, поскольку пересечение элементарных множеств является элементарным множеством.

Произведением топологических пространств X и Y называется множество $X \times Y$ с топологией, базой которой служит совокупность элементарных множеств.

19.7. Для любых подпространств A и B пространств X и Y топология произведения $A \times B$ совпадает с топологией, индуцированной естественным включением $\text{in} : A \times B \rightarrow X \times Y$.

19.E. Произведение $X \times Y$ канонически гомеоморфно $Y \times X$.

Слова "канонически гомеоморфно" означают, что не только существует какой попало гомеоморфизм, но имеется некоторый замечательный (очевидный?) гомеоморфизм, который имеет дополнительные свойства. Убедитесь, что отображение $T : (x, y) \mapsto (y, x)$ есть гомеоморфизм.

19.F. Произведение $(X \times Y) \times Z$ канонически гомеоморфно $X \times (Y \times Z)$.

Между двумя этими множествами имеется каноническая биекция, поэтому мы просто-напросто запишем, что

$$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

Однако элементарные множества в пространствах $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ различны. Докажите, что в обоих этих топологических пространствах набор $\{U \times V \times W \mid U \in \Omega_X, V \in \Omega_Y, W \in \Omega_Z\}$ является базой их топологических структур.

19.8. Если множество A замкнуто в X , а B - в Y , то $A \times B$ замкнуто в $X \times Y$.

19.9. Докажите, что любых $A \subset X$ и $B \subset Y$ имеет место равенство $\text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}A \times \text{Cl}B$.

19.10. Верно ли, что $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}A \times \text{Int}B$?

19.11. Верно ли, что $\text{Fr}(A \times B) = \text{Fr}A \times \text{Fr}B$?

19.12. Верно ли, что $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr}A \times B) \cup (A \times \text{Fr}B)$?

19.13. Верно ли, что если A и B замкнуты, то

$$\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr}A \times B) \cup (A \times \text{Fr}B)?$$

19.14. Найдите формулу, выражающую $\text{Fr}(A \times B)$ в терминах A , B , $\text{Fr}A$ и $\text{Fr}B$.

7.1.4. Топологические свойства проекций и слоев

19. Г. Для любых топологических пространств X и Y естественные проекции $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ и $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ являются непрерывными отображениями.

Действительно, для всякого открытого множества $U \subset X$ его прообраз $\text{pr}_X^{-1}(U) = U \times Y$ является элементарным, значит, открытым в $X \times Y$ множеством.

19. Н. Топология произведения - самая грубая среди топологий в $X \times Y$, относительно которых отображения pr_X и pr_Y непрерывны.

Пусть топология Ω' в $X \times Y$ такова, что проекции pr_X и pr_Y непрерывны. Тогда, если $U \in \Omega_X$ и $V \in \Omega_Y$, то $\text{pr}_X^{-1}(U) \cap \text{pr}_Y^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V \in \Omega'$. Таким образом, всякое базовое множество топологии произведения лежит в Ω' , откуда и следует, что Ω' содержит топологию произведения пространств X и Y .

19. I. Слои произведения канонически гомеоморфны соответствующим сомножителям. Каноническими гомеоморфизмами служат сужения проекций.

Ясно, что $\text{ab}(\text{pr}_X) = \text{pr}_X|_{X \times y_0} : X \times y_0 \rightarrow X$ - непрерывная биекция. Для того, чтобы проверить непрерывность обратного к ней отображения, достаточно показать, что всякое множество, открытое в $X \times y_0$ как в подпространстве произведения $X \times Y$, имеет вид $U \times y_0$. Действительно,

$$W \cap (X \times y_0) = (\cup U_\alpha \times V_\alpha) \cap (X \times y_0) = \bigcup_{y_0 \in V_\alpha} U_\alpha \times y_0.$$

19. J. Докажите, что $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$, $(\mathbb{R}^1)^n = \mathbb{R}^n$, $(I)^n = I^n$.

(Напоминаем, что I^n - это n -мерный куб).

С теоретико-множественной точки зрения $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$. Поскольку в качестве базы топологии в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ можно взять набор открытых прямоугольников (покажите это), то топологии в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ и \mathbb{R}^2 имеют одну и ту же базу, значит, они совпадают.

Второе утверждение доказывается по индукции, а третье является его следствием в силу 19.7.

19.15. Пусть Σ_X и Σ_Y - базы пространств X и Y . Докажите, что множества $U \times V \in \Sigma_X$ и $V \in \Sigma_Y$ составляют базу пространства $X \times Y$.

19.16. Докажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, когда $\text{pr}_X|_{f^{-1}(y)}$ - гомеоморфизм.

19.17. Докажите, что если W открыто в $X \times Y$, то множество $\text{pr}_X(W)$ открыто в X .

Отображение $X \rightarrow Y$ называется *открытым (замкнутым)*, если образ любого открытого (замкнутого) множества открыт (соответственно, замкнут). Таким образом, согласно 19.17, проекция является открытым отображением.

19.18. Является ли pr_X замкнутым отображением?

19.19. Докажите, что для любого пространства X и компактного пространства Y отображение pr_X является замкнутым.

7.1.5. Перемножение отображений

Рассмотрим множества X, Y и Z . Отображение $f : Z \rightarrow X \times Y$,

определяет композиции $f_1 = \text{pr}_X \circ f : Z \rightarrow X$ и

$f_2 = \text{pr}_Y \circ f : Z \rightarrow Y$, называемые *координатными*) отображениями для f . Ясно, что само отображение f восстанавливается по f_1 и f_2 .

19.К. Докажите, что для любых отображений

$f_1 : Z \rightarrow X$ и $f_2 : Z \rightarrow Y$ существует одно и только одно отображение $f : Z \rightarrow X \times Y$ с $\text{pr}_X \circ f = f_1$ и $\text{pr}_Y \circ f = f_2$.

19.20. Докажите, что $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B)$ для любых множеств

$$A \subset X \text{ и } B \subset Y.$$

19.Л. Пусть X, Y и Z - топологические пространства. Докажите, что отображение $f : Z \rightarrow X \times Y$ непрерывно, тогда непрерывны f_1 и f_2 .

Для любых отображений $g_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ и $g_2 : X_2 \rightarrow Y_2$, можно определить отображение

$$g_1 \times g_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (g_1(x_1), g_2(x_2)),$$

которое называется *произведением* отображений g_1 и g_2 .

Если f непрерывно, то $f_1 = \text{pr}_X \circ f$ и $f_2 = \text{pr}_Y \circ f$ непрерывны как композиции непрерывных отображений. Далее, поскольку в силу 19.20. $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$, то из непрерывности f, f_1, f_2 следует непрерывность f .

19.21. Докажите, что $(g_1 \times g_2)(A_1 \times A_2) = g_1(A_1) \times g_2(A_2)$ для любых $A_1 \subset X_1$ и $A_2 \subset X_2$.

19.22. Докажите, что $(g_1 \times g_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = g_1^{-1}(B_1) \times g_2^{-1}(B_2)$ для любых $B_1 \subset Y_1$ и $B_2 \subset Y_2$.

19.М. Докажите, что произведение непрерывных отображений непрерывно.

Вспомните определение произведения топологий и воспользуйтесь

19.22.

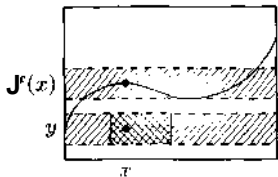
19.23. Докажите, что произведение открытых отображений открыто.

19.24. Докажите, что всякая метрика $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывная функция (относительно топологии, определяемой этой метрикой).

19.25. Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow Y$. Докажите, что его график Γ_f совпадает с прообразом диагонали $\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\} \subset Y \times Y$ при отображении $f \times id_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y$.

7.1.6. Свойства диагонали и других графиков

19.26. Докажите, что пространство X хаусдорфово, тогда диагональ Δ является замкнутым в $X \times X$ множеством.



19.27. Пусть пространство Y хаусдорфово и отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Докажите, что множество Γ_f замкнуто.

19.28. Пусть пространство Y компактно и множество Γ_f замкнуто. Докажите, что отображение f непрерывно.

19.29. Существенно ли условие компактности в задаче 19.28?

19.30. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Докажите, что её график:

- (1) замкнут в \mathbb{R}^2 ;
- (2) связан;
- (3) линейно связан;
- (4) локально связан;
- (5) локально компактен.

19.31. Рассмотрим следующие функции

$$1) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0. \end{cases} \quad 2) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Какими из перечисленных в 19.30 свойств обладают их графики?

19.32. Следует ли из какого-либо одного из свойств, упомянутых в 19.30, непрерывность исходной функции?

19.33. Предположим, что график Γ_f замкнутое множество. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) f непрерывна;
- (2) f локально ограничена;
- (3) график Γ_f связан;

(4) график Γ_j линейно связан.

19.34. Докажите, что если Γ_j — связное и локально связное множество, то функция f непрерывна.

19.35. Докажите, что если график Γ_j связан и локально компактен, то функция f непрерывна.

19.36. Верно ли какое-нибудь из утверждений задач 19.33 - 19.35 для отображений $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

7.1.7. Топологические свойства произведений

19.N. Произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства и точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ различны. Предположим для определенности, что $x_1 \neq x_2$. Так как пространство X хаусдорфово, то у них найдутся непересекающиеся окрестности U_{x_1} и U_{x_2} . Тогда $U_{x_1} \times Y$ и $U_{x_2} \times Y$ — непересекающиеся окрестности точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$.

19.37. Произведение регулярных пространств регулярно.

19.38. Произведение нормальных пространств не обязательно является нормальным.

19.38.1. Пусть \mathcal{R} — прямая с топологией, базой которой является множество промежутков вида $[a; b)$. Докажите, что \mathcal{R} является нормальным пространством.

19.38.2. Множество $\nabla = \{(x, -x) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}\}$ замкнуто, а индуцированная на нём топология дискретна.

19.38.3. Укажите два непересекающихся подмножества в ∇ , которые не имеют в $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ непересекающихся окрестностей.

19.O. Произведение сепарабельных пространств сепарабельно.

Если A и B счетны и всюду плотны в пространствах X и Y соответственно, то множество $A \times B$, во-первых, счетно, во-вторых, плотно в $X \times Y$.

19.P. Произведение пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, удовлетворяет первой аксиоме счетности.

См. доказательство следующего утверждения.

19.Q. Произведение пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Докажите, что если Σ_X, Σ_Y — счетные базы топологий пространств X и Y соответственно, то $\Sigma = \{U \times V \mid U \in \Sigma_X, V \in \Sigma_Y\}$ — база топологии пространства $X \times Y$.

19.R. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Покажите, что если ρ_1, ρ_2 — метрики в пространствах X и Y ,

то $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}$ — метрика в

$X \times Y$.

Какой вид имеют шары в метрике ρ ?

19. S. Произведение связных пространств связно.

Для любых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ множество $(X \times y_2) \cup (x_1 \times Y)$ связно и содержит эти точки

19.39. Докажите, что если X, Y - связные пространства, а A, B - их собственные подмножества, то множество $X \times Y \setminus A \times B$ связно.

19. T. Произведение линейно связных пространств линейно связно.

Если u, v - пути, соединяющие x_1 с x_2 и, соответственно, y_1 с y_2 , то путь $u \times v$ соединяет (x_1, y_1) с (x_2, y_2) .

19. U. Произведение компактных пространств компактно.

Достаточно рассмотреть покрытие, состоящее из элементарных множеств. Поскольку Y компактно, то для любого слоя $x \times Y$ найдется конечное подпокрытие $\{U_i^x \times V_i^{x,i}\}$. Положим $W^x = \cap U_i^x$. Выделим, используя компактность X , конечное подпокрытие W^{x_j} из покрытия $\{W^x\}_{x \in X}$. Набор $\{U_i^{x_j} \times V_i^{x_j}\}$ - искомое конечное подпокрытие.

19.40. Докажите, что произведение локально компактных пространств локально компактно.

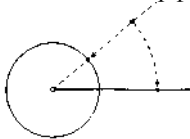
19-41. Докажите, что если пространство X паракомпактно, а пространство Y компактно, то $X \times Y$ паракомпактно.

19.42. Для каких из топологических свойств, рассмотренных выше, из того, что произведение $X \times Y$ обладает этим свойством, следует, что и пространство X им обладает?

19.43. Пусть $f : X \rightarrow Y$ замкнутое (не обязательно непрерывное!) отображение. Предположим, что у всякой точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ является компактным подмножеством в X . Докажите, что если пространство Y компактно, то и X также является компактным.

7.1.8. Представление пространств в виде произведений

19. V. Гомеоморфны ли пространства $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ и $S^1 \times \mathbb{R}$?



Да, гомеоморфны. Рассмотрите отображение

$$(x, y) \mapsto \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

19.44. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ гомеоморфно $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

19.45. Докажите, что пространство $S^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq x_{k+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2\}$ гомеоморфно $S^{k-1} \times D^{n-k+1}$.

19.46. Докажите, что пространство $O(n)$ ортогональных $n \times n$ -матриц гомеоморфно $SO(n) \times O(1)$.

19.47. Докажите, что пространство $GL(n)$ гомеоморфно $SL(n) \times GL(1)$.

19.48. Докажите, что пространство

$$GL_+(n) = \{A \in L(n, n) \mid \det A > 0\}$$

гомеоморфно $SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

19.49. Докажите, что пространство $SO(4)$ гомеоморфно $S^3 \times SO(3)$.

Пространство $S^1 \times S^1$ называется *тором*.

19. W. Вложите тор в \mathbb{R}^3 .



Произведение k сомножителей $S^1 \times \dots \times S^1$ называется *k -мерным тором*.

19.X. Вложите k -мерный тор в \mathbb{R}^{k+1} .

19.Y. Вложите произведения $S^1 \times D^2$, $S^1 \times S^1 \times I$ и $S^2 \times I$ в \mathbb{R}^3 .

7.2. Факторизация

7.2.1. Теоретико-множественное отступление: разбиения и отношения эквивалентности

Напомним, что *разбиение* множества — это его покрытие попарно непересекающимися подмножествами.

С каждым разбиением S множества X связано *отношение эквивалентности* (т. е. рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение): две точки объявляются эквивалентными, если они принадлежат одному элементу разбиения S . Обратное, с каждым отношением эквивалентности в множестве X связано разбиение этого множества на классы эквивалентных элементов. Так что разбиения множества на

непустые подмножества и отношения эквивалентности в нем - это по существу одно и то же, точнее, это два способа описания одного явления.

Пусть X - множество, S - его разбиение. Множество, элементами которого являются подмножества X , составляющие разбиение S , называется *фактормножеством* множества X по разбиению S и обозначается через X/S (это множество называется также *фактормножеством* или *множеством классов эквивалентности* множества X по соответствующему отношению эквивалентности).

На первый взгляд определение фактормножества противоречит одному из наиболее фундаментальных принципов теории множеств, согласно которому множество определяется своими элементами. В самом деле, этот принцип не оставляет никакого сомнения в том, что $X/S = S$, поскольку S и X/S имеют одни и те же элементы. Так что кажется нет необходимости вводить X/S . Истинное значение перехода от разбиения к фактормножеству не в изменении буквального теоретико-множественного смысла, а в изменении нашего отношения к элементам разбиения. Пока мы помним, что они являются подмножествами исходного множества, и не прочь думать об их внутреннем устройстве (хотя бы об их элементах), мы говорим о разбиении. Как только мы стали думать об элементах разбиения как о неделимых частицах, мы начинаем говорить об элементах фактормножества.

20.1. Как эта операция связана с делением чисел? Отчего обозначения и названия похожи?

Отображение $X \rightarrow X/S$, относящее каждой точке $x \in X$ содержащий её элемент разбиения S , называется *проекцией* или *отображением факторизации* и обозначается через pr .

Подмножества множества X , составленное из целых элементов разбиения, называются *насыщенными*. Наименьшее насыщенное множество, содержащее подмножество A множества X , называется *насыщением* множества A .

20.2. Докажите, что множество $A \subset X$ есть элемент разбиения S множества X , тогда $A = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$, где $\text{pr} : X \rightarrow X/S$ естественная проекция.

20.A. Докажите, что насыщение множества A равно $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$.

Прообраз $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$, во-первых, является насыщенным, во-вторых, является наименьшим, так как, если $B \supset A$ - некоторое насыщенное множество, то $B = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(B)) \supset \text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$.

20.B. Докажите, что множество насыщено, тогда оно совпадает со своим насыщением.

7.2.2. Фактортопология

Факормножество X/S топологического пространства X по любому его разбиению S на непустые подмножества наделяется естественной топологией: множество $U \subset X/S$ объявляется открытым в X/S , если открыт его прообраз $\text{pr}^{-1}(U)$ при отображении $\text{pr} : X \rightarrow X/S$.

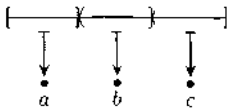
20. С. Если S - разбиение множества X , а Ω - топология в X , то $\{U \subset X/S \mid \text{pr}^{-1}(U) \in \Omega\}$ действительно является топологической структурой в X/S .

Положим $\Omega' = \{U \subset X/S \mid \text{pr}^{-1}(U) \in \Omega\}$. Пусть $U_\alpha \in \Omega'$.

Из того, что $p^{-1}(U_\alpha)$ - открытые множества, следует, что множество $p^{-1}(\cup U_\alpha) = \cup p^{-1}(U_\alpha)$ также является открытым, таким образом, $\cup U_\alpha \in \Omega'$. Проверьте оставшиеся аксиомы топологической структуры самостоятельно.

Эта топологическая структура называется *фактортопологией*, а множество X/S , наделенное ею, называется *факторпространством* пространства X по разбиению S .

20.3. Опишите явно факторпространство отрезка по разбиению S , состоящему из множеств $[0; \frac{1}{3}]$, $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, $(\frac{2}{3}; 1]$.



20.4. Что можно сказать о разбиении S топологического пространства X , если факторпространство X/S дискретно?

20.D. Множество в факторпространстве X/S открыто, тогда оно - образ насыщенного открытого множества при отображении pr .

Если множество $V \subset X$ открыто и насыщенно, то $V = \text{pr}^{-1}(p(V))$, значит, множество $U = \text{pr}(V)$ открыто в X/S . Если $U \subset X/S$ открыто, то $U = \text{pr}(\text{pr}^{-1}(U))$, где $V = \text{pr}^{-1}(U)$ открыто и насыщенно.

20.E. Множество в факторпространстве X/S замкнуто, тогда его прообраз при проекции замкнут в X , тогда оно является образом насыщенного замкнутого множества.

Множество F замкнуто, тогда множество $X/S \setminus F$ открыто, тогда множество $\text{pr}^{-1}(X/S \setminus F) = X \setminus \text{pr}^{-1}(F)$ открыто, тогда множество $p^{-1}(F)$ замкнуто.

20. F. Каноническая проекция $\text{pr} : X \rightarrow X/S$ является непрерывным отображением.

Прямое следствие определения фактортопологии.

20. G. Докажите, что фактортопология является самой тонкой топологией в X/S , по отношению к которой проекция pr непрерывна.

Надо доказать, что если Ω' — такая топология в X/S , что отображение факторизации непрерывно, то $\Omega' \subset \Omega_{X/S}$. Действительно,

Если $U \in \Omega'$, то $p^{-1}(U) \in \Omega_X$, поэтому по определению фактортопологии

$U \in \Omega_{X/S}$.

7.2.3. Топологические свойства факторпространств

20. H. Факторпространство связного пространства связно.

Оно связно, как непрерывный образ связного пространства.

20. I. Факторпространство линейно связного пространства линейно связно.

Оно линейно связно, как непрерывный образ линейно связного пространства.

20. J. Факторпространство сепарабельного пространства сепарабельно.

Оно сепарабельно, как непрерывный образ сепарабельного пространства.

20. K. Факторпространство компактного пространства компактно.

Оно компактно, как непрерывный образ компактного пространства.

20. L. Факторпространство прямой по её разбиению на \mathbb{R}_+ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$ не хаусдорфово.

Это факторпространство состоит из двух точек, одна из которых не открыта в нем.

20. M. Факторпространство топологического пространства X по разбиению S хаусдорфово, тогда любые два элемента этого разбиения обладают непересекающимися насыщенными окрестностями.

Пусть $a, b \in X/S$ и $A, B \subset X$ — соответствующие элементы разбиения. Если U_a, U_b — непересекающиеся окрестности точек a и b , то $p^{-1}(U_a), p^{-1}(U_b)$ — непересекающиеся насыщенные окрестности множеств A и B . Следует из 20..D.

20. 5. Сформулируйте в том же духе условия, необходимые и достаточные для того, чтобы факторпространство удовлетворяло другим аксиомам отделимости и аксиомам счетности.

20. 6. Постройте пример, показывающий, что существование счетной базы может теряться при переходе к факторпространству.

7.2.4. Теоретико-множественное отступление: факторотображения

Пусть S - разбиение множества X на непустые подмножества и $f: X \rightarrow Y$ - отображение, постоянное на каждом элементе разбиения S . Тогда возникает отображение $X/S \rightarrow Y$, относящее каждому элементу A разбиения S элемент $f(A)$. Это отображение обозначается через f/S и называется **фактором** отображения f (по разбиению S).

20.N. 1) Докажите, что отображение $f: X \rightarrow Y$ постоянно на каждом элементе разбиения S множества X , тогда существует такое отображение $g: X/S \rightarrow Y$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{pr} \downarrow & \nearrow g & \\ X/S & & \end{array}$$

коммутативна. 2) Докажите, что каждое такое отображение g совпадает с f/S .

Положите $g = f/S$. Множество $f^{-1}(y) = p^{-1}(g^{-1}(y))$ насыщено, т. е. состоит из элементов разбиения S . Значит, f постоянно на каждом из элементов разбиения. 2) Если A - некоторый элемент разбиения S , a - соответствующая ему точка фактормножества и $x \in A$, то $f/S(a) = f(A) = g(p(x)) = g(a)$.

Более общо, если S и T - разбиения множеств X и Y , то ВСЯКОМУ отображению $f: X \rightarrow Y$, отображающему элементы разбиения S в элементы разбиения T , отвечает отображение $X/S \rightarrow Y/T$, относящее элементу A разбиения S элемент разбиения T , содержащий $f(A)$. Это отображение обозначается через $f/S, T$ и называется **факторотображением** отображения f (по разбиениям S и T).

20.O. Обобщите утверждение задачи 20.N на случай отображений $f/(S, T)$

Отображение f переводит элементы разбиения S в элементы разбиения T , тогда существует такое отображение $g: X/S \rightarrow Y/T$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{pr}_X \downarrow & & \text{pr}_Y \downarrow \\ X/S & \xrightarrow{g} & Y/T \end{array}$$

коммутативна. При этом $f/(S, T) = g$.

Произвольное отображение $f: X \rightarrow Y$ определяет разбиение множества X на непустые прообразы элементов множества Y . Это разбиение обозначается через $S(f)$.

20.P. Отображение $f/S(f) : X/S(f) \rightarrow Y$ инъективно.

Инъективность отображения есть следствие того, что различные элементы разбиения $S(f)$ являются прообразами различных точек пространства Y .

Это отображение называется *инъективным фактором* отображения f .

7.2.5. Непрерывность факторотображений

20. Q. Если X, Y - топологические пространства, S - разбиение пространства X на непустые множества и $f: X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, постоянное на каждом элементе разбиения S , то фактор f/S отображения f является непрерывным отображением. Так как $p^{-1}((f/S)^{-1}(U)) = (f/S \circ p)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, то по определению фактортопологии для любого $U \in \Omega_Y$ множество $(f/S)^{-1}(U)$ открыто, таким образом, отображение f/S является непрерывным.

20.7. Если отображение f открыто, то и факторотображение f/S открыто.

20.8. Пусть X, Y - топологические пространства и S разбиение пространства X на непустые множества. Формула $f \mapsto f/S$ определяет биекцию множества непрерывных отображений $X \rightarrow Y$, постоянных на каждом элементе разбиения S , на множество всех непрерывных отображений $X/S \rightarrow Y$.

20.R. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, для которого существует отображение $f/(S, T) : X/S \rightarrow Y/T$. Тогда это отображение $f/(S, T)$ непрерывно.

См. 20.O и 20.8.

7.2.6х. Замкнутые разбиения

Разбиение S топологического пространства X называется *замкнутым*, если насыщение каждого замкнутого множества замкнуто.

20.1x. Докажите, что разбиение замкнуто, тогда каноническая проекция $X \rightarrow X/S$ является замкнутым отображением.

20.2x. Докажите, что разбиение, содержащее всего один не одноточечный элемент, замкнуто, если этот элемент замкнутое множество.

20. Ах. Пусть X - пространство удовлетворяющее первой аксиоме отделимости, S - его замкнутое разбиение. Тогда факторпространство X/S удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

Каждое одноточечное подмножество факторпространства X/S является образом некоторого одноточечного подмножества в X . Так как в X выполнена аксиома T_1 , то каждое его одноточечное подмножество замкнуто, значит, в силу 20.1х, и его образ также замкнут.

Следовательно в факторпространстве также выполнена аксиома T_1 .

20. Вх. Факторпространство нормального пространства по замкнутому разбиению нормально.

Следует из 14.26.

7.2.7х. Открытые разбиения

Разбиение S топологического пространства X называется *открытым*, если насыщение каждого открытого множества открыто.

20.3х. Докажите, что разбиение открыто, тогда каноническая проекция $X \rightarrow X/S$ является открытым отображением.

20.4х. Докажите, что если множество A насыщено относительно открытого разбиения, то $\text{Int } A$ и $\text{Cl } A$ тоже насыщены.

20. Сх. Факторпространство пространства со счётной базой по открытому разбиению обладает счётной базой.

Пусть $U_n = p(V_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - база пространства X .

Рассмотрим произвольное открытое множество W в факторпространстве. Так как $\text{pr}^{-1}(W) = \cup_{n \in A} V_n$, то $W = \text{pr}(\text{pr}^{-1}(W)) = \cup_{n \in A} U_n$, таким образом, набор $\{U_n\}$ является базой факторпространства.

20. Дх. Факторпространство пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счётности, по открытому разбиению удовлетворяет первой аксиоме счётности.

Для произвольной точки $y \in X/S$ рассмотрите образ счётной базы в некоторой точке $x \in \text{pr}^{-1}(y)$.

20. Ех. Пусть S - открытое разбиение пространства X и T - открытое разбиение пространства Y . Обозначим через $S \times T$ разбиение пространства $X \times Y$, состоящее из множеств вида $A \times B$, где $A \in S$ и $B \in T$. Тогда инъективный фактор $X \times Y/S \times T \rightarrow X/S \times Y/T$ отображения $\text{pr}_1 \times \text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow X/S \times Y/T$ является гомеоморфизмом.

Поскольку инъективный фактор непрерывной сюръекции является непрерывной биекцией, то остается доказать, что он является открытым отображением, что следует, в силу 20.7, из открытости отображения $X \times Y \rightarrow X/S \times Y/T$ (см. 19.23).

7.3. Зверинец факторпространств

7.3.1. Инструмент распознавания факторпространств

21.А. *Инъективный фактор непрерывного отображения компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом. (Иными словами, если $f: X \rightarrow Y$ непрерывное сюръективное отображение, X компактно, Y хаусдорфово, то $f/S(f) : X/S(f) \rightarrow Y$*

гомеоморфизм).

Следует из 20.Р, 20. Q, 20. К и 16.Х.

21.В. *Инъективный фактор непрерывного отображения компактного пространства в хаусдорфово пространство является топологическим вложением.*

Аналогично 21.А; используйте 16. У вместо 16.Х.

21.1. Опишите разбиения отрезка, факторизации по которым дают связанные буквы латинского алфавита.

21.2. Докажите, что существует разбиение отрезка I факторпространство по которому гомеоморфно квадрату $I \times I$.

7.3.2. Описание разбиений

Обычно аккуратное буквальное описание разбиения громоздко, но его можно сократить и сделать понятнее. Конечно, это требует более обширного и гибкого словарного запаса, в котором различия между отдельными словами почти неуловимы. Например, выражения **профакторизуем** и **перейдём к факторпространству** могут заменяться словами **приклеим**, **стянем**, **отождествим** и тому подобные слова из повседневной речи, имеющие в ней чем-то похожие значения.

Некоторые элементы этого языка легко формализуются. Например, факторизация пространства X по разбиению, состоящему из множества A и одноточечных подмножеств дополнения $X \setminus A$, называется **стягиванием** (множества A в точку), а соответствующее факторпространство обозначается через X/A .

21.3. Пусть пересекающиеся множества $A, B \subset X$ составляют фундаментальное покрытие топологического пространства X . Докажите, что факторотображение $A/A \cap B \rightarrow X/B$ включения $A \rightarrow X$ является гомеоморфизмом.

Если A и B - непересекающиеся подпространства пространства X , и $f: A \rightarrow B$ - гомеоморфизм, то факторизация пространства X по разбиению на одноточечные подмножества множества $X \setminus (A \cup B)$ и двучечные множества $\{x, f(x)\}$, где $x \in A$, называется *склеиванием* или *отождествлением* (множеств A и B посредством гомеоморфизма f).

Удобный и гибкий подход к описанию разбиений открывается переходом к соответствующим отношениям эквивалентности. Главное достоинство этого подхода в том, что благодаря транзитивности достаточно указать лишь некоторые пары эквивалентных элементов: если сказано, что $x \sim y$ и $y \sim z$, то нет нужды говорить, что $x \sim z$, так как это следует из уже сказанного.

Таким образом, разбиение может быть описано списком формул вида $x \sim y$, которых достаточно для того, чтобы восстановить эквивалентность. Такой список формул, заключённый в квадратные скобки, будет обозначать ниже соответствующее разбиение. Например, факторпространство пространства X , полученное в результате отождествления подмножеств A и B посредством гомеоморфизма $f: A \rightarrow B$ обозначается через $X/[a \sim f(a) \text{ для любого } a \in A]$ или просто через $X/[a \sim f(a)]$.

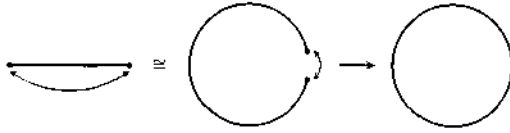
Некоторые разбиения легко описать картинкой, особенно если исходное пространство вкладывается в плоскость. Например, отрезки, которые должны быть склеены посредством линейных гомеоморфизмов, снабжают одинаковыми буквами, а также стрелками, показывающими как налагаются эти отрезки друг на друга.

Ниже мы вводим все эти разновидности описаний разбиений и указываем, как ими пользуются, на примерах, приводя также и громоздкие буквальные описания. Последние выглядят безобразно, но к ним приходится прибегать для того, чтобы поддержать у читателя уверенность в правильном понимании новых слов и ощущение их полезности.

7.3.3. Добро пожаловать в зверинец!

21. С. Докажите, что факторпространство $I/[0 \sim 1]$ гомеоморфно S^1 .

Другими словами, факторпространство отрезка f по разбиению, состоящему из $\{0,1\}$ и множеств $\{a\}$ с $a \in (0;1)$, гомеоморфно окружности.



2.1. С. 1. Постройте непрерывное сюръективное отображение $I \rightarrow S^1$, у которого разбиение на прообразы точек состоит из одноточечных множеств внутренности отрезка и пары его граничных точек.

Если $f : t \in [0; 1] \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$, то разбиение $S(f)$ совпадает с заданным, а факторотображение $f/S(f)$ - это гомеоморфизм как непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово.

21.D. Докажите, что факторпространство D^n/S^{n-1} гомеоморфно сфере S^n .

Другими словами, факторпространство шара D^n по его разбиению на одноточечные подмножества его внутренности и на S^{n-1} гомеоморфно S^n . Далее мы будем говорить, что если *стянуть* границу шара в точку, то получится сфера.

21.D.1. Постройте непрерывное отображение шара D^n на сферу S^n , переводящее границу шара в одну точку и биективно отображающее его внутренность на дополнение этой точки.

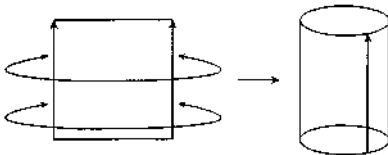
Если $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\frac{x}{r} \sin \pi r, -\cos \pi r) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то разбиение $S(f)$ совпадает с заданным, а $f/S(f)$ - гомеоморфизм.

21.E. Докажите, что факторпространство $I^2/[(0, t) \sim (1, t) \text{ для } t \in I]$ гомеоморфно $S^1 \times I$.

Другими словами, факторпространство квадрата I^2 по разбиению на пары точек $\{(0, t), (1, t)\}$ с $t \in I$ и на одноточечные подмножества из $(0; 1) \times I$ гомеоморфно цилиндру $S^1 \times I$.

Рассмотрите отображение $g = f \times \text{id} : I^2 = I \times I \rightarrow S^1 \times I$ (f определено, как в 21.C.1). Разбиение $S(g)$ совпадает с заданным, так что $g/S(g)$ - гомеоморфизм.

Далее мы будем говорить, что если *склеить* боковые стороны квадрата так, чтобы отождествлялись точки, лежащие на одной высоте, то в результате получится цилиндр.



21.F. Факторпространство $S^1 \times I/[(z, 0) \sim (z, 1) \text{ для } z \in S^1]$

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

Другими словами, факторпространство цилиндра $S^1 \times I$ по разбиению на одноточечные подмножества его внутренности $S^1 \times (0; 1)$ и пары точек оснований, лежащих на одной образующей, гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

Проверьте, что разбиение $S(\text{id}_{S^1} \times f)$ совпадает с заданным.

Говорят, что если *склеить* основания цилиндра, отождествляя точки, лежащие на одной образующей, то получится тор.

21.G. Факторпространство $I^2 / [(0, t) \sim (1, t), (t, 0) \sim (t, 1)]$

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

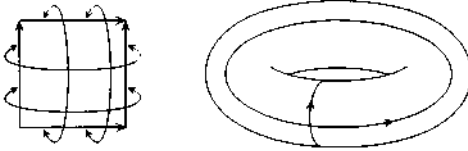
Другими словами, результат факторизации квадрата I^2 по разбиению на

- одноточечные подмножества его внутренности,
- пары точек внутренностей боковых сторон, находящихся на одинаковом расстоянии от нижнего основания,
- пары точек внутренностей оснований, лежащих на одной вертикали,
- и четверку вершин,

гомеоморфен тору $S^1 \times S^1$.

Разбиение $S(f \times f)$ совпадает с заданным.

Говорят, если *склеить* стороны квадрата, как показано на рисунке, то получится тор.



7.3.4. Транзитивность факторизации

Решение задачи 21.G естественно свести к решению задач 21.E и 21.F и применению следующей теоремы.

21.H Транзитивность факторизации. Если S - разбиение пространства X и S' - разбиение пространства X/S , то факторпространство $(X/S)/S'$ канонически гомеоморфно X/T , где T - разбиение пространства X на прообразы элементов разбиения S' при проекции $X \rightarrow X/S$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{p_1} & X/S \\
 p \downarrow & & p_2 \downarrow \\
 X/T & \xrightarrow{q} & X/S/S'
 \end{array}$$

в которой отображение q , очевидно, является биекцией. Утверждение задачи следует из того, что множество U открыто в $X/S/S'$, тогда $p_1^{-1}(p_2^{-1}(U)) = p^{-1}(q^{-1}(U))$ открыто в X , тогда $q^{-1}(U)$ открыто в X/T .

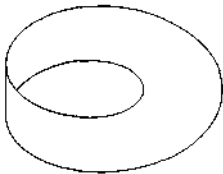
7.3.5. Лента Мёбиуса

Лентой Мёбиуса или *листом Мёбиуса* называется факторпространство $I^2/[(0, t) \sim (1, 1 - t)]$. Другими словами, это факторпространство квадрата I^2 по разбиению на пары симметричных относительно центра квадрата точек его боковых сторон и на не лежащие на боковых сторонах одноточечные подмножества.

Мы будем говорить, что лента Мёбиуса получается при *склеивании* боковых сторон квадрата так, чтобы совместились направления, показанные стрелками:



21.1. Докажите, что лента Мёбиуса гомеоморфна поверхности, заметаемой в \mathbf{R}^3 отрезком, который поворачивается в полуплоскости на 180° вокруг своей середины при одновременном вращении этой полуплоскости на 360° вокруг своей граничной прямой.



Чтобы упростить формулы, мы заменим квадрат I^2 прямоугольником. Формально: рассмотрим отображение

$$\varphi : [0; 2\pi] \times [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto$$

$$((1 + y \sin \frac{x}{2}) \cos x, (1 + y \sin \frac{x}{2}) \sin x, y \sin x).$$

Проверьте, что φ действительно отображает указанный прямоугольник на ленту Мебиуса и что $S(\varphi)$ является указанным разбиением. Конечно, исходным моментом рассуждения является не конкретная формула, вначале следует представить себе, как же должно быть устроено нужное отображение. Горизонтальную среднюю линию прямоугольника отобразим на окружность, являющуюся средней линией ленты Мебиуса, а каждый из его вертикальных отрезков - на отрезок этой ленты, перпендикулярный ее средней линии. Вертикальные стороны прямоугольника при таком отображении переходят в один и тот же отрезок, но при этом друг с другом будут отождествляться противоположные вершины (проверьте это).

7.3.6. Стягивание подпространств

21.4. Докажите, что факторпространство $[0; 1]/[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ гомеоморфно $[0; 1]$, а факторпространство $[0; 1]/\{\frac{1}{3}, 1\}$ гомеоморфно букве P .

21.5. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

- (a) \mathbb{R}^2 ; (b) \mathbb{R}^2/I ; (c) \mathbb{R}^2/D^2 ; (d) \mathbb{R}^2/I^2 ;
- (e) \mathbb{R}^2/A , где A - объединение нескольких замкнутых отрезков с общим концом;
- (f) \mathbb{R}^2/B , где B - простая конечнозвенная ломаная, т. е. объединение конечной последовательности замкнутых отрезков, в которой начало каждого следующего отрезка совпадает с концом предыдущего.

21.6. Докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, то факторпространства X/A и $Y/f(A)$ гомеоморфны.

21.7. Пусть $A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Верно ли, что факторпространство \mathbb{R}^2/A гомеоморфно $\text{Int } D^2 \cup \{(0, 1)\}$?

7.3.7. Пространства некоторых фигураций

21.8. Докажите, что пространство $S^1/[z \sim e^{2\pi i/3}z]$ гомеоморфно S^1 .

Другими словами, факторпространство окружности по ее разбиению на тройки точек, являющихся вершинами равносторонних треугольников, гомеоморфно окружности.

21.9. Докажите, что следующие факторпространства круга D^2 гомеоморфны самому кругу D^2 :

(1) $D^2 / \{(x, y) \sim (-x, -y)\}$,

(2) $D^2 / \{(x, y) \sim (x, -y)\}$,

(3) $D^2 / \{(x, y) \sim (-y, x)\}$.

21.10. Придумайте обобщение задачи 21.9 с D^n вместо D^2 .

21.11. Опишите явно факторпространство прямой \mathbf{R}^1 по отношению эквивалентности $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

21.12. Представьте ленту Мёбиуса как факторпространство цилиндра $S^1 \times I$.

7.3.8. Бутылка Клейна

Бутылкой Клейна называется факторпространство

$$I^2 / \{(t, 0) \sim (t, 1), (0, t) \sim (1, 1 - t)\}.$$

Другими словами, это факторпространство квадрата I^2 по разбиению на

- одноточечные подмножества его внутренности,
- четверку вершин,
- пары точек оснований, расположенных на одной вертикали,
- и пары точек боковых сторон, симметричных относительно центра квадрата.

21.13. Представьте бутылку Клейна как результат факторизации:

(1) цилиндра;

(2) ленты Мёбиуса.

21.14. Докажите, что пространство $S^1 \times S^1 / \{(z, w) \sim (-z, \bar{w})\}$ гомеоморфно бутылке Клейна. (Здесь через \bar{w} обозначается комплексное число, сопряжённое числу w .)

21.15. Вложите бутылку Клейна в \mathbf{R}^4 (ср. 21-1 и 19. W).

21.16. Вложите бутылку Клейна в \mathbf{R}^4 так, чтобы её образ при ортогональной проекции $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ выглядел следующим образом:



7.3.9. Проективная плоскость

Давайте склеим каждую граничную точку круга D^2 с диаметрально противоположной точкой, т. е. профакторизуем круг по разбиению на пары симметричных относительно центра круга точек граничной окружности и одноточечные множества внутренности круга. Результат называется *проективной плоскостью*. Это пространство, как и бутылка Клейна, не вкладывается в \mathbf{R}^3 , так что его не нарисуете. Вместо этого мы представим его по-другому.

21.1. Проективная плоскость есть результат склеивания круга и ленты Мёбиуса при помощи гомеоморфизма, между граничной окружностью круга и граничной окружностью ленты Мёбиуса.

См. рисунок и следующие пункты этого параграфа.

7.3.10. Понимаете ли Вы, что делаете?

Вас спровоцировали... Решив предыдущую задачу, вы сделали нечто не предусмотренное предыдущей теорией. В самом деле, операция над двумя пространствами, которая в 21.1 названа *склеиванием*, раньше не появлялась. Она представляет собой композицию двух операций - сначала нужно изготовить из двух пространств одно, состоящее из не пересекающихся друг с другом копий исходных пространств, а затем нужно профакторизовать это пространство, отождествляя точки копии одного пространства с точками копии другого. Займемся более детально первой операцией.

7.3.11. Сумма множеств

Суммой семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется множество таких пар (x_α, α) , что $x_\alpha \in X_\alpha$. Обозначается это множество символом

$$\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Таким образом, мы можем записать, что

$$\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \times \alpha).$$

Для каждого $\beta \in A$ существует естественная инъекция

$$\text{in}_\beta : X_\beta \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha : x \mapsto (x, \beta).$$

Если рассматривается сумма только двух множеств, скажем X и Y , про которые известно, что общих точек у них нет, то можно обойтись без семейств и без индексов, положив

$$X \sqcup Y = \{(x, X) \mid x \in X\} \cup \{(y, Y) \mid y \in Y\}.$$

7.3.12. Сумма пространств

21.К. Если $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство топологических пространств, то совокупность подмножеств множества $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, прообразы которых при всех включениях $\text{in}_\alpha \subset \alpha \in A$ являются открытыми, образует топологическую структуру.

Сумма множеств $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ с этой топологией называется (*несвязной*) суммой топологических пространств X_α . $\alpha \in A$.

В действительности, проще доказать более общее утверждение. Пусть заданы топологические пространства X_α и отображения $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y$. Тогда $\Omega = \{U \subset Y \mid f_\alpha^{-1}(U) \text{ открыто в } X_\alpha\}$ - это самая тонкая топологическая структура в Y относительно которой все отображения f_α непрерывны.

21.Л. Топология, описанная в 21.К. есть самая тонкая топология, относительно которой все включения in_α непрерывны.

См. указание к 21.К.

21.17. Отображения $\text{in}_\beta: X_\beta \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ являются топологическими вложениями и их образы одновременно открыты и замкнуты в $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$.

21.18. Какие топологические свойства передаются от слагаемым X_α к сумме $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, а какие нет?

7.3.13. Приклеивание пространств

Пусть X, Y - топологические пространства, A - подмножество пространства X и $f: A \rightarrow Y$ - непрерывное отображение. Факторпространство $(X \sqcup Y) / \{a \sim f(a) \mid a \in A\}$ обозначается через $X \cup_f Y$ и называется результатом *приклеивания* пространства X к пространству Y посредством f . Отображение f называется **приклеивающим отображением**.

Разбиение $X \sqcup Y$, по которому производится факторизация, состоит из одноточечных множеств, лежащих в $\text{in}_2(Y \setminus A)$ и $\text{in}_1(X \setminus f(A))$, и множеств $\text{in}_1(x) \cup \text{in}_2(f^{-1}(x)) \subset x \in f(A)$.

21.19. Докажите, что композиция включения $Y \rightarrow X \sqcup Y$ и проекции $X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ является топологическим вложением.

21.20. Докажите, что если Y - точка, то $X \cup_f Y \cong X/A$.

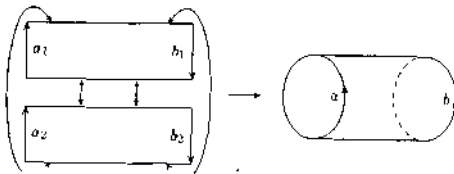
21. М. В результате приклеивания шара к его копии посредством тождественного отображения граничной сферы S^{n-1} получается пространство, гомеоморфное S^n .

Отобразим D^n_1 с D^n_2 в S^n так, чтобы образ D^n_1 совпадал с

верхней полусферой, а образ D^n_2 - с нижней. Разбиение на прообразы совпадает с тем разбиением, фактор по которому есть пространство

$D^n \cup_{id|_{S^{n-1}}} D^n$. Следовательно, соответствующее факторотображение - гомеоморфизм.

21.21. Докажите, что бутылку Клейна можно получить, приклеив ленту Мёбиуса к ее копии посредством тождественного отображения граничной окружности.



21.22. Докажите, что в результате приклеивания цилиндра $S^1 \times I$ к его копии посредством тождественного отображения пары граничных окружностей на пару граничных окружностей получается пространство, гомеоморфное $S^1 \times S^1$.

21.23. Докажите, что в результате приклеивания *полнотория* $S^1 \times D^2$ к его копии посредством тождественного отображения граничного тора $S^1 \times S^1$ получается пространство, гомеоморфное $S^1 \times S^2$.

21.24- Представьте бутылку Клейна как результат приклеивания цилиндра $S^1 \times I$ к своей копии.

21.25. Докажите, что в результате приклеивания полнотория $S^1 \times D^2$ к его копии посредством отображения граничного тора на себя, определяемого формулой

$$S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (x, y) \mapsto (y, x),$$

получается пространство, гомеоморфное трехмерной сфере S^3 .

21. N. Пусть X, Y - топологические пространства, $A \subset X$ и $f, g : A \rightarrow Y$ - непрерывные отображения. Докажите, что если существует такой гомеоморфизм $h : Y \rightarrow Y$, что $h \circ f = g$, то пространства $X \cup_f Y$ и $X \cup_g Y$ гомеоморфны.

Рассмотрим отображение $F : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup Y$, такое, что

$F|_X = \text{id}_X$ и $F|_Y = h$. Это отображение переводит элемент разбиения, отвечающий отношению эквивалентности $z \sim f(x)$ в элемент разбиения, отвечающий отношению эквивалентности $x \sim g(x)$, следовательно, существует непрерывная биекция $H: X \cup_f Y \rightarrow X \cup_g Y$. Поскольку h^{-1} тоже гомеоморфизм, то и отображение H^{-1} непрерывно.

21.О. Пространство $D^n \cup_f D^n$ гомеоморфно S^n для любого гомеоморфизма $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

В силу 21.N, достаточно доказать, что любой гомеоморфизм $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ продолжается до гомеоморфизма $F: D^n \rightarrow D^n$ что очевидно.

21.26. Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма пространства, получающиеся из квадрата при помощи склеивания пары его противоположных сторон посредством некоторых гомеоморфизмов.

21.27. Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма пространства, получающиеся из двух копий $S^1 \times I$ при помощи склеивания двух пар $S^1 \times \{0, 1\}$ посредством некоторых гомеоморфизмов.

21.28. Докажите, что топологический тип результата склеивания двух лент Мёбиуса посредством некоторого гомеоморфизма их граничных окружностей не зависит от выбора гомеоморфизма.

21.29. Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма пространства, получающиеся из $S^1 \times I$ при помощи склеивания $S^1 \times 0$ с $S^1 \times 1$ посредством некоторого гомеоморфизма.

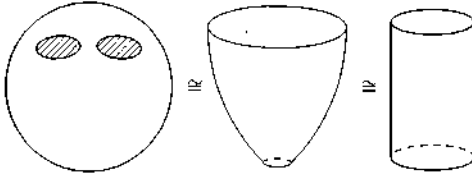
7.3.14. Основные поверхности

Тор $S \times S^1$ с удаленным из него подпространством, представляющим собой внутренность вложенного в $S^1 \times S^1$ круга D^2 , называется *ручкой*. Сфера S^2 с удаленными из нее внутренностями n вложенных и попарно непересекающихся кругов D^2 называется *сферой с n дырами*.

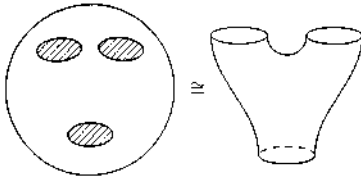
21.Р. Сфера с дырой гомеоморфна кругу D^2 .

Например, стереографическая проекция из внутренней точки "дыры" гомеоморфно отображает сферу с дырой на круг.

21. Q. Сфера с двумя дырами гомеоморфна цилиндру $S^1 \times I$.



Сфера с тремя дырами не гомеоморфна какому-либо пространству, с которым мы встречались выше. Однако она заслуживает особого упоминания. Она называется *штаны*.

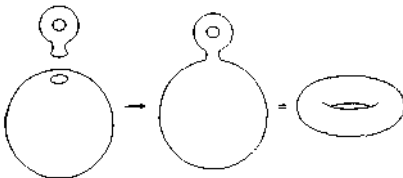


Результат приклеивания к сфере с p дырами суммы p экземпляров ручки посредством вложений их граничных окружностей с образами - граничными окружностями сферы с дырами (края дыр), называется **сферой с p ручками** или (до поры до времени менее понятно), *ориентируемой замкнутой связной поверхностью рода p* .

Стереографическая проекция из внутренней точки одной из "дыр" гомеоморфно отображает сферу с двумя дырами на "круг с круглой дырой". Докажите, что он гомеоморфен цилиндру. (Другой вариант: если выбрать центр проекции в "дыре" надлежащим образом, то сфера с двумя дырами отобразится на круглое кольцо, заведомо гомеоморфное цилиндру.)

21.30. Докажите, что сфера с p ручками определена с точностью до гомеоморфизма (т. е. топологический тип результата приклеивания не зависит от приклеивающих вложений).

21.R. Сфера с одной ручкой гомеоморфна тору $S^1 \times S^1$.

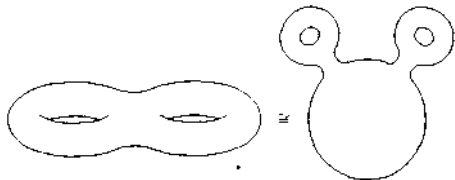


По определению ручка гомеоморфна тору с дырой, а сфера с дырой - диску, который эту дыру как раз и заклеивает.

21. S. Сфера с двумя ручками гомеоморфна результату приклеивания ручки к своей копии посредством тождественного отображения граничной окружности.

Разрежьте сферу с двумя ручками на две симметричные части, гомеоморфные ручке.

Сфера с двумя ручками называется также *кренделем* (иногда так называют и сферу с большим числом ручек).



Пространство, получающееся из сферы с q дырами в результате приклеивания к ней q экземпляров ленты Мёбиуса посредством вложений их граничных окружностей с образами — граничными окружностями дыр, называется *сферой с q пленками* или *неориентируемой замкнутой связной поверхностью рода q* .

21.31. Докажите, что топологический тип сферы с пленками определен однозначно, т. е. не зависит от выбора приклеивающих гомеоморфизмов.

21. Т. Сфера с одной пленкой гомеоморфна проективной плоскости. Воспользуйтесь результатами задач 21.Р и 21. J.

21. U. Сфера с двумя пленками гомеоморфна бутылке Клейна.

Сфера, сферы с ручками и сферы с пленками называются *основными поверхностями*.

Разрежьте квадрат, факторпространством которого является бутылка Клейна, на 5 горизонтальных полосок одинаковой ширины. Тогда средняя полоска склеится в лист Мебиуса, две крайние полоски - еще в один лист Мебиуса, а оставшиеся - в кольцо, т.е. как раз в сферу с двумя дырами. (Вот еще одно, возможно, более наглядное описание. Посмотрите на изображение бутылки Клейна: у нее есть горизонтальная плоскость симметрии. Две горизонтальных плоскости, близкие к плоскости симметрии, и разрезают бутылку Клейна на два листа Мебиуса и кольцо.)

21. V*. Сфера с p ручками и q пленками (здесь $q > 0$) гомеоморфна сфере с $2p + q$ пленками.

Нагляднее всего будет сделать так: выделим одну ручку и одну пленку. Заменим ручку на "трубку". края которой приклеены к краям двух (достаточно маленьких) дыр на сфере, и начнем двигать одну из дыр. (Топологический тип во время такого движения не меняется.) Подведем дыру к краю пленки, сдвинем ее на пленку, обведем вдоль пленки один полный круг и вернем на прежнее место. В результате исходная ручка (тор с дырой) превратится в бутылку Клейна с дырой,

которая, как мы знаем из задачи 21. U , разбивается на два листа Мебиуса - т. е. на две пленки.

21.32. Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма топологические пространства, получающиеся приклеиванием p копий пространства $S^1 \times I$ к сфере с $2p$ дырами.

7.4. Проективные пространства

Этот параграф может рассматриваться как продолжение предыдущего. В нем описываются конкретные факторпространства, но эти факторпространства играют важную роль для того, чтобы относиться к ним просто как к примерам, иллюстрирующим факторизацию.

7.4.1. Вещественные проективные пространства

Вещественное проективное пространство размерности n определяется как факторпространство сферы S^n по разбиению на пары диаметрально противоположных точек и обозначается через $\mathbb{R}P^n$

22. А. Пространство $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно факторпространству n -мерного шара D^n по разбиению на одноточечные подмножества внутренней части шара D^n и пары антимодальных точек граничной сферы S^{n-1} .

Рассмотрим композицию f вложения D^n в S^n в качестве полусферы и проекцию $\text{rg}: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Разбиение $S(f)$ совпадает с заданным.

Следовательно, $f/S(f)$ - гомеоморфизм.

22. В. $\mathbb{R}P^0$ есть точка.

Пространство $\mathbb{R}P^1$ называется *проективной прямой*.

22. С. Пространство $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно окружности S^1 .

Рассмотрим отображение $f: S^1 \rightarrow S^1: z \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$.

Тогда $S^1 / S(f) \cong \mathbb{R}P^1$.

22. D. Пространство $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфно проективной плоскости, которая была определена в предыдущем пункте.

См. 22А.

22. Е. Пространство $\mathbb{R}P^n$ канонически гомеоморфно факторпространству пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ по разбиению на одномерные векторные подпространства пространства \mathbb{R}^{n+1} с удаленным нулем.

Точка пространства $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ есть последовательность вещественных чисел, среди которых хотя бы одно отлично от нуля. В этом контексте их принято нумеровать, начиная нумерацию не с единицы, а с нуля

(чтобы закончить n -ым, а не $(n + 1)$ -ым), и называть *однородными координатами* соответствующей точки пространства $\mathbf{R}P^n$. Точка, ими определяемая, обозначается через $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Однородные координаты определяют точку пространства $\mathbf{R}P^n$, но не определяются ею: одной и той же точке пространства $\mathbf{R}P^n$ отвечают пропорциональные наборы однородных координат.

Рассмотрим композицию f вложения сферы S^n в $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ и проекции на факторпространство по указанному разбиению. Ясно, что разбиение $S(f)$ совпадает с разбиением, факторизация по которому является проективным пространством. Значит, $f/S(f)$ - гомеоморфизм.

22. F. *Пространство $\mathbf{R}P^n$ канонически гомеоморфно пространству прямых пространства \mathbf{R}^{n+1} , проходящих через точку $0 = (0, \dots, 0)$ с метрикой, которая определяется как угол между прямыми (число, не превышающее $\frac{\pi}{2}$). Докажите, что это действительно метрика.*

Указанная функция является метрикой в силу неравенства треугольника между плоскими углами трехгранного угла. Сопоставим всякой точке $x \in S^n$ проходящую через начало координат прямую $l(x)$, для которой x является ее направляющим вектором. Тем самым определено непрерывное (проверьте это) отображение S^n в указанное пространство прямых, инъективный фактор которого является гомеоморфизмом.

22. G. Покажите, что отображение

$$i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}P^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

является топологическим вложением. Каков образ этого отображения и как устроено обратное отображение образа на \mathbf{R}^n ?

Образом этого отображения является множество

$U_0 = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) / x_0 \neq 0\}$, а обратное отображение $j : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^n$ определено формулой

$$\{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \text{ а } \text{ а } \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

Поскольку отображение i и обратное к нему непрерывны, i является топологическим вложением.

22. H. Постройте топологическое вложение $\mathbf{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}P^n$, образ которого совпадает с $\mathbf{R}P^n \setminus i(\mathbf{R}^n)$, где i - вложение, определенное в задаче 22. G.

Рассмотрите вложение $S^{n-1} = S^n \cap \{x_{n+1} = 0\} \rightarrow S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ и индуцированное им вложение $\mathbf{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}P^n$.

Таким образом, проективное пространство $\mathbf{R}P^n$ можно рассматривать как результат присоединения к евклидову пространству \mathbf{R}^n "несоб-

ственных" или "бесконечно-удалённых" точек, составляющих проективное пространство $\mathbf{R}P^{n-1}$ на единицу меньшей размерности.

22.1. Введите естественным образом топологическую структуру в множестве всех прямых на плоскости и докажите, что полученное пространство гомеоморфно: а) $\mathbf{R}P^2 \setminus \text{point}$; б) открытой ленте Мёбиуса (т. е. ленте Мёбиуса с удалённой граничной окружностью).

22.2. Докажите, что множество поворотов трёхмерного пространства \mathbf{R}^3 вокруг всевозможных прямых на всевозможные углы, снабжённое естественной топологической структурой, гомеоморфно $\mathbf{R}P^3$.

7.4.2х. Комплексные проективные пространства

Комплексное проективное пространство размерности n определяется как факторпространство единичной сферы S^{2n+1} пространства \mathbf{C}^{n+1} по ее разбиению на окружности, высекаемые (комплексными) прямыми пространства \mathbf{C}^{n+1} , проходящими через точку начало координат. Обозначается оно через $\mathbf{C}P^n$.

22. Ах. Пространство $\mathbf{C}P^n$ гомеоморфно факторпространству единичного замкнутого шара D^{2n} пространства \mathbf{C}^n по разбиению, элементами которого служат множества внутренности шара D^{2n} и окружности, высекаемые на его граничной сфере S^{2n-1} (комплексными) прямыми пространства \mathbf{C}^n , проходящими через точку начало координат.

22. Вх. Пространство $\mathbf{C}P^0$ состоит из одной точки.

Пространство $\mathbf{C}P^1$ называется *комплексной проективной прямой*.

22. Сх. Комплексная проективная прямая $\mathbf{C}P^1$ гомеоморфна S^2 .

22. Дх. Пространство $\mathbf{C}P^n$ канонически гомеоморфно факторпространству пространства $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \emptyset$ по разбиению на проколотые в точке ноль комплексные прямые пространства \mathbf{C}^{n+1} , проходящие через ноль.

Таким образом, $\mathbf{C}P^n$ можно представить как пространство классов комплексно пропорциональных ненулевых последовательностей (x_0, \dots, x_n) комплексных чисел. Обозначение $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ и термин однородные координаты, введенные выше в вещественном случае, переносятся и на комплексную ситуацию.

22. Ех. Пространство $\mathbf{C}P^n$ канонически гомеоморфно множеству (комплексных) прямых пространства \mathbf{C}^{n+1} , проходящих через точку ноль, топологизированному угловой метрикой (которая принимает значения в промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$).

7.4.3х. Кватернионные проективные пространства

Напомним, что в \mathbf{RM}^4 имеется умножение, открытое Р. В. Гамильтоном (R. W. Hamilton) в 1843 году, которое можно задать формулой

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \times (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4, x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2, x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1).$$

Оно билинейно, и для его описания достаточно указать произведения базисных векторов. Последние в этом контексте принято обозначать, следуя Гамильтону, так:

$$1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0), \quad j = (0, 0, 1, 0) \quad \text{и} \quad k = (0, 0, 0, 1).$$

В этих обозначениях 1 действительно является единицей:

$(1, 0, 0, 0) \times x = x$ для любого $x \in \mathbf{R}^4$. Остаток таблицы умножения выглядит так:

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i \quad \text{и} \quad ik = -j.$$

Вместе с покоординатным сложением это умножение задает в \mathbf{R}^4 структуру алгебры. Её элементы называются *кватернионами*.

22. Fx. Убедитесь в том, что умножение кватернионов ассоциативно. Оно не коммутативно (например, $ij = k \neq -k = ji$). В остальном кватернионы очень похожи на комплексные числа. Как и в множестве комплексных чисел, в множестве кватернионов действует преобразование, которое называется *сопряжением*, обозначается, как и сопряжение комплексных чисел, чертой: $x \mapsto \bar{x}$. Оно задаётся формулой $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$ и обладает следующими двумя свойствами:

22. Gx. $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ для любых кватернионов a и b .

22. Hx. $a\bar{a} = |a|^2$, то есть произведение любого кватерниона a на сопряжённый ему кватернион \bar{a} равно $(|a|^2, 0, 0, 0)$.

Последнее свойство позволяет определить для любого $a \in \mathbf{R}^4$ обратный элемент

$$a^{-1} = |a|^{-2}\bar{a}$$

такой, что $aa^{-1} = 1$.

Таким образом, алгебра кватернионов есть *алгебра с делением* или *тело*. Она обозначается через \mathbf{H} в честь своего открывателя Гамильтона.

В пространстве $\mathbf{H}^n = \mathbf{R}^{4n}$ имеются правые кватернионные прямые, т. е. подмножества вида $\{(a_1\xi, \dots, a_n\xi) \mid \xi \in \mathbf{H}\}$, и аналогичные левые кватернионные прямые $\{(\xi a_1, \dots, \xi a_n) \mid \xi \in \mathbf{H}\}$. Каждая из них

представляет собой вещественное четырёхмерное подпространство пространства

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{4n}.$$

22. *Их.* Найдите правую кватернионную прямую, не являющуюся левой кватернионной прямой.

22. *Их.* Покажите, что две правые кватернионные прямые в \mathbb{H}^n либо пересекаются только в 0, либо совпадают.

Факторпространство единичной сферы S^{4n+3} пространства $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^{4n+4}$ по её разбиению на трёхмерные сферы, отсекаемые правыми кватернионными прямыми пространства \mathbb{H}^{n+1} , называется (*правым*) *кватернионным проективным пространством размерности n* .

Аналогично, только с разбиением на левые кватернионные прямые, определяется (*левое*) *кватернионное проективное пространство размерности n* .

22. *Кх.* Гомеоморфны ли правое и левое кватернионные проективные пространства одинаковых размерностей?

Левое кватернионное проективное пространство размерности n обозначается через \mathbf{HP}^n .

22. *Лх.* Пространство \mathbf{HP}^0 состоит из одной точки.

22. *Мх.* Пространство \mathbf{HP}^n гомеоморфно факторпространству единичного замкнутого шара D^{4n} пространства \mathbb{H}^n по разбиению, элементами которого служат множества внутренней сферы D^{4n} и трёхмерные сферы, отсекаемые на его граничной сфере S^{4n-1} (левыми кватернионными) прямыми пространства \mathbb{H}^n .

Пространство \mathbf{HP}^1 называется *кватернионной проективной прямой*.

22. *Нх.* Кватернионная проективная прямая \mathbf{HP}^1 гомеоморфна S^4 .

22. *Ох.* Пространство \mathbf{HP}^n канонически гомеоморфно факторпространству пространства $\mathbb{H}^{n+1} \setminus 0$ по разбиению на проколотые в точке нуль левые кватернионные прямые пространства \mathbb{H}^{n+1} , проходящие через начало координат.

Таким образом, \mathbf{HP}^n можно представить как пространство классов кватернионно пропорциональных слева ненулевых последовательностей (x_0, \dots, x_n) кватернионов. Обозначение $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ и термин однородные координаты, введенные выше в вещественном случае, переносятся и на кватернионную ситуацию.

22. *Рх.* Пространство \mathbf{HP}^n канонически гомеоморфно множеству (левых кватернионных) прямых пространства \mathbb{H}^{n+1} , топологизированному угловой метрикой (которая принимает значения в промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$).

7.5. Конечные топологические пространства

7.5.1х. Теоретико-множественное отступление: расщепление транзитивного отношения на эквивалентность и порядок

В определениях отношений порядка и эквивалентности условие транзитивности представляется наиболее значимым. В этом пункте мы придадим этому ощущению формальное обоснование, показав, что остальные условия в некотором смысле являются неизбежными естественными спутниками транзитивности, хотя и не следуют из неё.

23. Ах. Пусть ρ - транзитивное отношение на множестве X . Тогда отношение \lesssim , определяемое следующим образом:

$$a \lesssim b, \text{ если } a \prec b \text{ или } a = b,$$

тоже транзитивно (и, кроме того, рефлексивно, т. е. $a \lesssim a$ для любого $a \in X$).

Если $a \lesssim b \lesssim c$, то, либо $a \prec b \prec c$, либо $a = b = c$, либо $a \prec b = c$, либо $a = b \prec c$. Во всех четырех случаях получаем, что $a \lesssim c$.

23. Вх. Очевидно, что отношение \sim рефлексивно, симметрично, а также и транзитивно

Бинарное отношение \lesssim в множестве X называется **предпорядком**, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

- **Транзитивность.** Если $a \lesssim b$ и $b \lesssim c$, то $a \lesssim c$.
- **Рефлексивность.** $a \lesssim a$ для любого a .

Множество X , снабжённое предпорядком \lesssim , называется **предупорядоченным**.

Если предпорядок ещё и антисимметричен, то это - нестрогий порядок.

23. Ix. Является ли отношение a/b предпорядком в множестве \mathbf{Z} целых чисел?

23. Вх. Если (X, \lesssim) -предупорядоченное множество, то отношение \sim , определяемое следующим образом:

$$a \sim b, \text{ если } a \lesssim b \text{ и } b \lesssim a,$$

является отношением эквивалентности (т.е. симметрично, рефлексивно и транзитивно) в X .

Очевидно, что отношение \sim рефлексивно, симметрично, а также и транзитивно

23.2х. Какое отношение эквивалентности определяется на множестве целых чисел предпорядком $a|b$?

23. Сх. Пусть (X, \lesssim) - предпорядоченное множество и \sim - отношение эквивалентности, определённое предпорядком \lesssim на X согласно 23. Вх. Тогда из $a' \sim a$, $a \lesssim b$ и $b \sim b'$ следует $a' \lesssim b'$, и тем самым \lesssim определяет на множестве классов эквивалентности X/\sim отношение.

Это отношение является нестрогим порядком.

Действительно, если $a' \sim a$, $a \lesssim b$ и $b \sim b'$, то $a' \lesssim a \lesssim b \lesssim b'$, значит, $a' \lesssim b'$. Очевидно, что определённое на классах

эквивалентности отношение транзитивно и рефлексивно. Если же для классов эквивалентностей $[a]$ и $[b]$ верно, что $a \lesssim b$ и $b \lesssim a$, то $[a] = [b]$, таким образом, отношение антисимметрично, значит, является нестрогим порядком

Таким образом, всякое транзитивное отношение порождает отношение эквивалентности и порядок в множестве классов эквивалентных элементов.

23. Дх. Во что вырождается эта цепочка конструкций, если исходное транзитивное отношение было

(1) эквивалентностью, или

(2) нестрогим порядком.

(а) В этом случае мы получаем тривиальный нестрогий порядок на одноточечном множестве; (б) получаем тот же самый нестрогий порядок на данном множестве.

23. Ех. Во всяком топологическом пространстве отношение \lesssim , определяющееся следующим образом:

$$a \lesssim b, \text{ если } a \in \text{Cl}\{b\},$$

является предпорядком.

Данное отношение очевидно рефлексивно. Далее, если $a \lesssim b$, то во всякой окрестности U точки a лежит точка b , значит, U является и ее окрестностью, поэтому, если $b \lesssim c$, то $c \in U$. Значит, $a \in \text{Cl}\{c\}$, таким образом, $a \lesssim c$, тем самым это отношение и транзитивно.

23. Зх. Во множестве всех подмножеств произвольного пространства отношение \lesssim , определяющееся следующим образом:

$$A \lesssim B, \text{ если } A \subset \text{Cl}\{B\},$$

является предпорядком. Этот предпорядок определяет отношение эквивалентности, при котором множества эквивалентны, тогда их замыкания совпадают.

23.Fx. Отношение эквивалентности, определённое предпорядком теоремы 23.Ex, определяет разбиение пространства на максимальные (по включению) антидискретные подпространства.

Рассмотрим элемент разбиения, который, по его определению состоит из точек, каждая из которых лежит в замыкании любой другой, значит, всякое открытое в X множество, содержащее одну из этих точек, содержит и любую другую. Таким образом, топология, индуцируемая на каждом элементе разбиения, является антидискретной. Ясно также, что каждый элемент разбиения является максимальным подмножеством, являющимся антидискретным подпространством.

Теперь рассмотрим две точки в факторпространстве и две точки $x, y \in X$, лежащие в соответствующих элементах разбиения.

Поскольку $x \not\sim y$, то найдется открытое множество, содержащее одну из этих точек и не содержащее другую. Так как всякое открытое множество пространства X насыщено относительно рассматриваемого разбиения, то его образ в X/S и является искомой окрестностью.

Факторпространство по этому разбиению удовлетворяет аксиоме Колмогорова T_0 .

Факторпространство теоремы 23.Fx называется *максимальным T_0 -факторпространством пространства X .*

23. Gx. Непрерывный образ антидискретного пространства антидискретен.

23. Hx. Любое непрерывное отображение $X \rightarrow Y$ порождает непрерывное отображение максимального T_0 -факторпространства пространства X в максимальное T_0 -факторпространство пространства Y .

Следствие 23.Fx, 23.Gx и 20.R.

7.5.2x. Структура конечного топологического пространства

Результаты предыдущего пункта дают ключ к пониманию структуры конечных топологических пространств. Пусть X - конечное топологическое пространство. Согласно теореме 23.F оно оказывается разбито на антидискретные кластеры точек. При непрерывном отображении эти антидискретные кластеры отображаются, согласно 23. Gx, друг в друга.

Таким образом, непрерывные отображения конечных пространств индуцируют непрерывные отображения факторпространств по разбиениям на антидискретные кластеры точек, ср. 23.Hx.

Факторпространство конечного пространства по разбиению на максимальные антидискретные множества удовлетворяет, согласно 23. Fx, аксиоме отделимости Колмогорова. Как и всякое конечное пространство, оно является пространством наименьших окрестностей. В силу теоремы 14. O, топология этого факторпространства является топологией порядка. В силу теоремы 9. Bx, гомеоморфизмы между пространствами с топологией порядка являются монотонными биекциями.

Таким образом, конечное топологическое пространство с точностью до гомеоморфизма характеризуется конечным частично упорядоченным множеством, элементы которого снабжены кратностями, представляющими собой натуральные числа. Два таких пространства гомеоморфны, когда между соответствующими упорядоченными множествами существует монотонная биекция, сохраняющая кратности. Для восстановления топологического пространства по упорядоченному множеству с кратностями нужно ввести в это множество топологию порядка, а затем заменить в нём каждую точку антидискретным кластером точек, в котором число точек равно кратности исходной точки.

7.5.3x. Симплициальные схемы

Пусть V - множество и Σ - множество некоторых его конечных подмножеств. Пара (V, Σ) называется *симплициальной схемой* с множеством *вершин* V и множеством *симплексов* Σ , если

- каждое подмножество любого элемента множества Σ само принадлежит Σ ,
- пересечение любого набора элементов множества Σ само принадлежит Σ ,
- каждое одноэлементное подмножество множества V принадлежит Σ .

Множество Σ упорядочено по включению. Наделённое топологией этого частичного порядка, оно называется *пространством симплексов* симплициальной схемы (X, Σ) .

По каждой симплициальной схеме естественным образом строится и другое топологическое пространство. А именно, для симплициальной схемы (V, Σ) рассмотрим множество $S'(V, \Sigma)$ всех таких функций $c : V \rightarrow \mathbb{I}$, таких что

$$\text{Supp}(c) = \{v \in V \mid c(v) \neq 0\}$$

содержится в Σ и $\sum_{v \in V} c(v) = 1$. Снабдим множество $S(V, \Sigma)$ топологией, порождаемой метрикой

$$\rho(c_1, c_2) = \sup_{v \in V} |c_1(v) - c_2(v)|.$$

Пространство $S(V, \Sigma)$ покрыто множествами $\{c \in S \mid \text{Supp}(c) = \sigma\}$, где $\sigma \in \Sigma$. Оно называется *симплициальным* или *триангулированным* пространством, а множества вида $\{c \in S \mid \text{Supp}(c) = \sigma\}$ называются его (*открытыми*) *симплексами*.

23.4X. Какие открытые симплексы симплициального пространства являются открытыми множествами, какие замкнутыми, а какие - ни теми, ни другими?

23.4x. Найдите для каждого $\sigma \in \Sigma$ гомеоморфизм подпространства $\{c \in S \mid \text{Supp}(c) = \sigma\} \subset S(V, \Sigma)$

на открытый симплекс, размерность которого на единицу меньше числа вершин, содержащихся в σ (напомним, что n -мерным открытым симплексом называется множество $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_j > 0$ для $j = 1, \dots, n+1$ и $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$).

23.4x. Докажите, что для любой симплициальной схемы (V, Σ) факторпространство симплициального пространства $S(V, \Sigma)$ по его разбиению на открытые симплексы гомеоморфно пространству S симплексов симплициальной схемы (V, Σ) .

7.5.4x. Барицентрическое подразделение частично упорядоченного множества

23.4x. Найдите частично упорядоченное множество, не изоморфное упорядоченному по включению множеству симплексов какой бы то ни было симплициальной схемы.

Пусть (X, \prec) - частично упорядоченное множество. Рассмотрим множество всевозможных непустых конечных строго возрастающих последовательностей $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$ элементов множества X , то есть множество всех непустых конечных подмножеств, в каждом из которых ρ индуцирует линейный порядок. Обозначим это множество через X' . Оно естественно упорядочено по включению.

Частично упорядоченное множество (X', \subset) называется *производным* частично упорядоченного множества (X, \prec) . Переход от частично упорядоченного множества к его производному можно повторить любое число раз. Так возникают *кратные производные* частично упорядоченного множества.

23.4x. Для любого частично упорядоченного множества (X, \prec) пара

(X, X') является симплициальной схемой.

Имеется естественное отображение $X' \rightarrow X$, относящее элементу множества X' , т.е. конечному непустому линейно упорядоченному подмножеству множества X , его наибольший элемент.

23. Мх. Монотонно ли это отображение? Строго ли монотонно? Монотонно ли аналогичное отображение, относящее конечному непустому линейно упорядоченному подмножеству множества X , его наименьший элемент?

Пусть (V, Σ) - симплициальная схема, и Σ' - производное частично упорядоченное множество множества Σ (упорядоченного по включению). Симплициальная схема (Σ, Σ') называется *производной симплициальной схемой* или *барицентрическим подразделением* симплициальной схемы (V, Σ)

Имеется естественное отображение $\Sigma \rightarrow S(V, \Sigma)$, относящее симплексу $\sigma \in \Sigma$, т.е. подмножеству $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ множества V функцию $b_\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}$ с $b_\sigma(v_i) = \frac{1}{n+1}$ и $b_\sigma(v) = 0$ для любого $v \notin \sigma$.

Определим отображение $\beta : S(\Sigma, \Sigma') \rightarrow S(V, \Sigma)$, отнеся функции

$$\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \text{ функцию}$$

$$V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma} \varphi(\sigma) b_\sigma(v).$$

23. Nx. Отображение $\beta : S(\Sigma, \Sigma') \rightarrow S(V, \Sigma)$ является гомеоморфизмом и этот гомеоморфизм составляет вместе с проекциями $S(V, \Sigma) \rightarrow \Sigma$ и $S(\Sigma, \Sigma') \rightarrow \Sigma'$ на пространства симплексов и естественным отображением $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S(\Sigma, \Sigma') & \xrightarrow{\beta} & S(V, \Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma' & \xrightarrow{\quad} & \Sigma \end{array}$$

7.6х. Пространства непрерывных отображений

7.6.1х. Множества непрерывных отображений

Всюду далее через $\mathcal{C}(X, Y)$ будет обозначаться множество всех непре-

рывных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y .

24.1x. Пусть $X \neq \emptyset$. Докажите, что множество $\mathcal{C}(X, Y)$ состоит из одного элемента, тогда пространство Y одноточечно.

24.2x. Пусть $X \neq \emptyset$. Докажите, что существует естественная инъекция $Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, откуда, в частности, следует, что $\text{card } \mathcal{C}(X, Y) \geq \text{card } Y$.

24-3x. Найдите естественные условия, при выполнении которых $\mathcal{C}(X, Y) = Y$.

24.4x. Пусть $Y = \{0, 1\}$, $\Omega_Y = \{\emptyset, \{0\}, Y\}$. Докажите, что существует биекция между $\mathcal{C}(X, Y)$ и Ω_X .

24-5x. Докажите, что если X — конечное дискретное пространство, то $\mathcal{C}(X, Y)$ можно естественным образом отождествить с декартовым произведением $Y \times \dots \times Y$ (n сомножителей).

24-6x. Пусть дискретное топологическое пространство Y состоит из k точек. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы множество $\mathcal{C}(X, Y)$ состояло из k^2 элементов.

7.6.2x. Топологии в множестве непрерывных отображений

Для $x \in X$, $U \in \Omega_Y$, $K \subset X$ положим

$$W(x, U) = \{f : X \rightarrow Y \mid f(x) \in U\},$$

$$W(K, U) = \{f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subset U\},$$

и рассмотрим семейства $\Delta^{(pw)} = \{W(x, U) \mid x \in X, U \in \Omega_Y\}$ и

$$\Delta^{(co)} = \{W(K, U) \mid K \subset X \text{ — компактное множество, } U \in \Omega_Y\}.$$

24. Ax. Множество $\Delta^{(pw)}$ является предбазой топологической структуры на множестве $\mathcal{C}(X, Y)$.

Достаточно заметить, что множество данного набора покрывает все множество $\mathcal{C}(X, Y)$, следовательно, оно является предбазой некоторой топологии на этом множестве.

Топологическая структура $\Omega^{(pw)}$ с предбазой $\Delta^{(pw)}$ называется *топологией поточечной сходимости*, соответствующее топологическое пространство обозначается через $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$.

24-Вx. Множество $\Delta^{(co)}$ является предбазой топологической структуры на множестве $\mathcal{C}(X, Y)$.

Аналогично **24. Ax.**

Топологическая структура $\Omega^{(co)}$ с предбазой $\Delta^{(co)}$ называется *компактно-открытой топологией*. Всюду далее, если не оговорено

противное, будем предполагать, что топологическое пространство $\mathcal{C}(X, Y)$ - это пространство всех непрерывных отображений $X \rightarrow Y$ с заданной на нем компактно-открытой топологией.

24- Сх. Имеет место включение $\Omega^{(pw)} \subset \Omega^{(co)}$.

24-7х. Пространства $\mathcal{C}(I, I)$ и $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$ не гомеоморфны.

Обозначим через $\text{Const}(X, Y)$ множество всех постоянных отображений $f: X \rightarrow Y$.

24-8х. Докажите, что топологии $\Omega^{(pw)}$ и $\Omega^{(co)}$ индуцируют одну и ту же топологическую структуру на множестве $\text{Const}(X, Y)$, причем полученное топологическое пространство гомеоморфно Y .

24-9х. Докажите, что если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ с дискретной топологией, то пространство $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$ гомеоморфно $Y \times \dots \times Y$ (n сомножителей). Верно ли это для пространства $\mathcal{C}(X, Y)$?

7.6.3х. Топологические свойства пространств непрерывных отображений

24-Dх. Докажите, что если Y хаусдорфово, то и пространство $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$ хаусдорфово. Верно ли это утверждение для пространства $\mathcal{C}(X, Y)$?

Если $f \neq g$, то найдется точка $x \in X$, такая, что $f(x) \neq g(x)$.

Поскольку Y хаусдорфово, то у точек $f(x)$ и $g(x)$ имеются непересекающиеся окрестности U и V , соответственно. Элементы предбазы $W(x, U)$ и $W(x, V)$ являются непересекающимися окрестностями отображений f и g в пространстве $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$. Они же будут непересекающимися окрестностями для f и g в $\mathcal{C}(X, Y)$.

24-10х. Докажите, что пространство $\mathcal{C}(I, X)$ линейно связно, тогда пространство X линейно связно.

24-11х. Докажите, что пространство $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$ не компактно. Компактно ли пространство $\mathcal{C}(I, I)$?

7.6.4х. Метризуемый случай

24-Ех. Если пространство X компактно, а пространство Y метризуемо, то пространство $\mathcal{C}(X, Y)$ метризуемо.

См. утверждение 24-1х.

Рассмотрим компактное пространство X и метрическое пространство (Y, ρ) . Положим

$$d(f, g) = \max\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

24-Fx. Для любого компактного топологического пространства X и для любого метрического пространства Y функция d является метрикой на множестве $\mathcal{C}(X, Y)$.

Пусть X - топологическое пространство, Y - метрическое пространство с метрикой ρ . Говорят, что последовательность f_n отображений $X \rightarrow Y$ *равномерно сходится* к отображению $f : X \rightarrow Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N , такое что $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $x \in X$.

24-Gx Метрика равномерной сходимости. Пусть X - компактное топологическое пространство, а Y - метрическое пространство. Последовательность отображений $f_n : X \rightarrow Y$ сходится к отображению $f : X \rightarrow Y$ в топологии, определенной метрикой d , тогда последовательность f_n равномерно сходится к f .

24-Hx Полнота $\mathcal{C}(X, Y)$. Пусть X - компактное, а (Y, ρ) - полное метрическое пространство. Тогда метрическое пространство $(\mathcal{C}(X, Y), d)$ полно.

Рассмотрим функции $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$, образующие фундаментальную последовательность $\{f_n\}_1^\infty$. Для каждой точки $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной в Y . Поскольку пространство Y полно, то она сходится: положим $f(x) = \lim f_n(x)$. Тем самым определена функция $f : X \rightarrow Y$.

В силу фундаментальности $\{f_n\}$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует число N , такое что $\rho(f_n(x), f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$ при всех $n, k \geq N$ и $x \in X$.

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, мы получаем, что $\rho(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $n \geq N$ и $x \in X$. Таким образом, чтобы доказать, что $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, надо проверить, что $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Для каждой точки $a \in X$ существует ее окрестность U_a такая что $\rho(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $x \in U_a$. Как следствие неравенства треугольника мы получаем, что при всех $x \in U_a$

$$\rho(f(x), f(a)) \leq \rho(f(x), f_N(x)) + \rho(f_N(x), f_N(a)) + \rho(f_N(a), f(a)) < \varepsilon.$$

Следовательно, функция f является непрерывным пределом исходной фундаментальной последовательности.

24.Ix. Метрика d индуцирует на $\mathcal{C}(X, Y)$ компактно-открытую топологию.

Рассмотрим произвольное множество $W(K, U)$ из предбазы.

Пусть $f \in W(K, U)$. Если $r = \rho(f(K), Y \setminus U)$, то $D_r(f) \subset W(K, U)$.

Как следствие получаем, что всякое открытое в компактно-открытой топологии множество открыто в топологии, индуцированной метрикой равномерной сходимости. Для того, чтобы доказать обратное утверждение, достаточно показать, что для всякого отображения $f : X \rightarrow Y$ и всякого $r > 0$ найдутся компактные множества $K_1, K_2, \dots, K_n \subset X$ и открытые множества $U_1, U_2, \dots, U_n \subset Y$, такие что

$$f \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, U_i) \subset D_r(f).$$

Рассмотрим покрытие множества $f(X)$ конечным числом шаров радиуса $r/4$ с центрами в некоторых точках $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Пусть K_i - прообраз замкнутого шара в Y радиуса $r/4$ при отображении f , а U_i - открытый шар радиуса $r/2$. По построению $f \in W(K_1, U_1) \cap \dots \cap W(K_n, U_n)$. Рассмотрим произвольное отображение g из этого пересечения. Для всякой точки $x \in K_1$ верно, что $f(x)$ и $g(x)$ лежат в одном и том же открытом шаре радиуса $r/2$, значит, $\rho(f(x), g(x)) < r$. Поскольку, по построению, множества K_1, \dots, K_n покрывают X , то $\rho(f(x), g(x)) < r$ для всех $x \in X$, следовательно, $d(f, g) < r$, значит, $g \in D_r(f)$.

24-12х. Пространство $C(\mathbb{R}, I)$ метризуемо.

24-13х. Если Y - ограниченное метрическое пространство и $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где множества X_i компактны и $X_i \subset \text{Int } X_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \dots$, то пространство $C(X, Y)$ метризуемо.

Обозначим через $C_b(X, Y)$ множество всех ограниченных непрерывных отображений топологического пространства X в метрическое пространство Y . Положим

$$d^{\infty}(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

24-14х. Функция d^{∞} является метрикой на множестве $C_b(X, Y)$.

24-15х. Пусть X топологическое, а Y метрическое пространство. Последовательность f_n ограниченных отображений $X \rightarrow Y$ сходится к $f : X \rightarrow Y$ в топологии, индуцированной метрикой d^{∞} , тогда f_n равномерно сходится к f .

24-16х. Найдите такие пространства X и Y , для которых топология, индуцированная метрикой d^{∞} , не совпадает с топологией подпространства $C_b(X, Y) \subset C(X, Y)$.

7.6.5х. Связь с другими конструкциями

24-Жх. Для любых непрерывных отображений

$\varphi : X' \rightarrow X$ и $\psi : Y \rightarrow Y'$ отображение

$\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X', Y') : f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi$ непрерывно.

Утверждение следует из того, что для всякого компактного

$K \subset X'$ и $U \subset Y'$ прообразом предбазового множества $W(K, U) \in$

$\Delta^{(co)}(X', Y')$ является предбазовое множество

$W(\varphi(K), \psi^{-1}(U)) \in \Delta^{(co)}(X, Y)$.

24-Кх. Если $A \subset X$, то отображение $\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(A, Y) : f \mapsto f|_A$ непрерывно.

Немедленно следует из предыдущего.

24-Лх. Если $B \subset Y$, то отображение

$\mathcal{C}(X, B) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y) : f \mapsto i_B \circ f$ является топологическим

вложением.

Ясно, что указанное отображение является инъекцией. Для простоты обозначений отождествим пространство $\mathcal{C}(X, B)$ с его образом при этой инъекции. Для всякого компактного множества $K \subset X$ и $U \in \Omega_B$ через $W^B(K, U)$ обозначим соответствующее предбазовое множество в $\mathcal{C}(X, B)$. Если $V \in \Omega_Y$, а $U = B \cap V$, то имеет место равенство $W^B(K, U) = \mathcal{C}(X, B) \cap W(K, V)$, откуда и следует, что из $\mathcal{C}(X, Y)$ на $\mathcal{C}(X, B)$ индуцируется компактно-открытая топология.

24-Мх. Для любых топологических пространств X, Y и Z пространство $\mathcal{C}(X, Y \times Z)$ канонически гомеоморфно $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z)$.

Проверьте, что естественное отображение $f \mapsto (\text{pr}_Y \circ f, \text{pr}_Z \circ f)$ является гомеоморфизмом.

24-Нх. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ - замкнутое покрытие пространства X . Естественное отображение

$\phi : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{C}(X_i, Y) : f \mapsto (f|_{X_1}, \dots, f|_{X_n})$ является топологическим вложением.

Инъективность отображения ϕ следует из того, что $\{X_i\}$ -

покрытие, а его непрерывность - из утверждения 24-Кх. Опять-таки, для простоты обозначений отождествим $\mathcal{C}(X, Y)$ с его образом при инъекции ϕ . Пусть $K \subset X$ - компактное множество, $U \in \Omega_Y$. Положим $K_i = K \cap X_i$ и обозначим через $W^i(K_i, U)$ соответствующий элемент предбазы $\Delta^{(co)}(X_i, Y)$. Поскольку, очевидно,

$$W(K, U) = \mathcal{C}(X, Y) \cap (W^1(K_1, U) \times \dots \times W^n(K_n, U)),$$

то непрерывная инъекция ϕ действительно является топологическим вложением.

24-Ох. Можно ли обобщить предыдущее утверждение?

24-Рх- Пусть Y - хаусдорфовое локально компактное топологическое пространство. Тогда естественное отображение

$\phi : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) : (f, g) \mapsto g \circ f$ непрерывно.

Рассмотрим отображения $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, компактное множество $K \subset X$ и $V \in \Omega_Z$ такие, что $g(f(K)) \subset V$, т. е.

$\phi(f, g) \in W(K, V)$. Тогда справедливо включение

$f(K) \subset g^{-1}(V) \in \Omega_Y$. Поскольку Y хаусдорфово и локально компактно, а множество $f(K)$ компактно, то у $f(K)$ найдется окрестность U , замыкание которой компактно и тоже содержится в $g^{-1}(V)$ (см.

18.6х). В таком случае $\phi(W(K, U) \times W(\text{Cl} U, V)) \subset W(K, V)$ и, следовательно, отображение ϕ непрерывно.

24.17х. Является ли требование локальной компактности Y существенным для справедливости утверждения 24-Рх?

24-Qх- Пусть X - компактное хаусдорфово пространство, а S - такое его разбиение, что факторпространство X/S хаусдорфово. (Это верно, например, если S - замкнутое разбиение, т. е. проекция

$\text{pr} : X \rightarrow X/S$ - замкнутое отображение.) Тогда естественное

отображение $\phi : \mathcal{C}(X/S, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y) : f \mapsto f \circ \text{pr}$ является топологическим вложением. Другими словами, подпространство пространства $\mathcal{C}(X, Y)$, состоящее из отображений, постоянных на каждом элементе разбиения S , можно отождествить с пространством отображений, заданных на факторпространстве X/S .

Непрерывность отображения ϕ следует из 24.1х. его инъективность очевидна. Пусть $K \subset X/S$ - компактное множество, $U \in \Omega_Y$.

Образом открытого предбазового множества $W(K, U) \subset \mathcal{C}(X/S, Y)$ является множество всех отображений $g : X \rightarrow Y$, постоянных на всех элементах разбиения и таких, что $g(\text{pr}^{-1}(K)) \subset U$. Осталось показать, что множество $W(\text{pr}^{-1}(K), U)$ открыто в $\mathcal{C}(X, Y)$. Так как факторпространство X/S хаусдорфово, то множество K замкнуто, а значит, замкнут, а потому и компактен его прообраз $\text{pr}^{-1}(K)$.

Следовательно, $W(\text{pr}^{-1}(K), U)$ - предбазовое множество в $\mathcal{C}(X, Y)$.

24-Rх Отображение вычисления. Пусть X - локально компактное хаусдорфово пространство. Тогда отображение

$\phi : \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y : (f, x) \mapsto f(x)$ непрерывно.

Пусть $x_0 \in X, f_0 \in \mathcal{C}(X, Y)$ и $V \in \Omega_Y$ таковы, что $f_0(x_0) \in V$.

В силу непрерывности отображения f_0 у точки x_0 найдется окрестность U' , такая что $f_0(U') \subset V$. Поскольку пространство X хаусдорфово и

локально компактно, то у точки x_0 имеется окрестность U , замыкание которой компактно и содержится в U' . Осталось заметить, что $f(x) \in V$ для всякого отображения $f \in W = W(\text{Cl}U, V)$ и всякой точки $x \in U$, т.е. $\phi^{-1}(V) \supset W \times U$.

24.18x. Существенны ли наложенные в 24-Rx условия на пространство X ?

7.6.6x. Отображения $X \times Y \rightarrow Z$ и $X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$

24-Sx. Если отображение $f : X \times Y \rightarrow Z$ непрерывно, то и отображение $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$, заданное формулой $F(x)(y) = f(x, y)$, непрерывно.

Пусть $x_0 \in X$, $K \subset Y$ - компактное множество и $V \subset \Omega_Z$, и пусть $F(x_0) \in W(K, V)$, т.е. $f(\{x_0\} \times K) \subset V$. Покажем, что отображение F непрерывно. Для этого найдем в X окрестность U_0 точки x_0 такую, что $F(U_0) \subset W(K, V)$. Последнее включение равносильно тому, что $f(U_0 \times K) \subset V$. Покроем множество $x_0 \times K$ конечным набором окрестностей $U_i \times V_i$, таких что $f(U_i \times V_i) \subset V$. Осталось положить $U_0 = \bigcap_i U_i$.

При некоторых дополнительных условиях верно и обратное.

24-Tx. Пусть Y - хаусдорфово локально компактное пространство, и пусть дано непрерывное отображение $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$. Тогда и отображение $f : X \times Y \rightarrow Z : (x, y) \mapsto F(x)(y)$ непрерывно.

Пусть $(x_0, y_0) \in X \times Y$ и пусть G - окрестность точки $z_0 = f(x_0, y_0) = F(x_0)(y_0)$. Поскольку отображение $F(x_0) : Y \rightarrow Z$ непрерывно, то у точки y_0 найдется окрестность W , такая что $F(x_0)(W) \subset G$. Так как Y хаусдорфово и локально компактно, то у y_0 имеется окрестность V с компактным замыканием, такая что $\text{Cl}V \subset W$ и, следовательно, $F(x_0)(\text{Cl}V) \subset G$, т.е.

$F(x_0) \in W(\text{Cl}V, G)$. В силу непрерывности отображения F у точки x_0 найдется окрестность U такая, что $F(U) \subset W(\text{Cl}V, G)$. Тогда, если $(x, y) \in U \times V$, то $F(x) \in W(\text{Cl}V, G)$, значит, $f(x, y) = F(x)(y) \in G$. Таким образом, $f(U \times V) \subset G$, т.е. отображение f непрерывно.

24-Ux. Если пространство X хаусдорфово и набор $\Sigma_Y = \{U_\alpha\}$ является предбазой топологической структуры пространства Y , то набор $\{W(K, U) \mid U \in \Sigma\}$ является предбазой компактно-открытой топологии в $\mathcal{C}(X, Y)$.

Достаточно показать, что для любого компактного множества $K \subset X$, любого открытого множества $U \subset Y$ и любого отображения

$f \in W(K, U)$ найдутся такие компактные множества

$K_1, K_2, \dots, K_m \subset K$ и такие открытые множества

$U_1, U_2, \dots, U_m \in \Sigma_Y$, что

$$f \in W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2) \cap \dots \cap W(K_m, U_m) \subset W(K, U).$$

Пусть $x \in K$. Так как $f(x) \in U$, то найдутся такие множества

$U_1^x, U_2^x, \dots, U_{n_x}^x \in \Sigma_Y$, что $f(x) \in U_1^x \cap U_2^x \cap \dots \cap U_{n_x}^x \subset U$. Из

непрерывности f следует, что существует окрестность G_x точки x , такая что $f(x) \in U_1^x \cap U_2^x \cap \dots \cap U_{n_x}^x$. Поскольку X локально компактно и

хаусдорфово, то оно регулярно, следовательно, у точки x найдется ее окрестность V_x такая что $\text{Cl } V_x$ компактное множество и $\text{Cl } V_x \subset G_x$.

Так как множество K компактно, то оно покрывается конечным числом окрестностей $V_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n$. Положим

$K_i = K \cap \text{Cl } V_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ и $U_{ij} = U_j^{f_i}, j = 1, 2, \dots, n_{x_i}$. Тогда

множество

$$\bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^{n_i} W(K_j, U_{ij})$$

является искомым.

24-Vx Экспоненциальный закон. Введем отображение

$$\Phi : \mathcal{C}(X \times Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \quad \Phi(f)(x) : y \mapsto f(x, y).$$

Тогда:

- 1) если пространство X хаусдорфово, то Φ непрерывно;
- 2) если пространство X хаусдорфово, а пространство Y локально компактно и хаусдорфово, то Φ - гомеоморфизм.

Прежде всего заметим, что из утверждения 24-Sx следует, что отображение Φ определено (т.е. при $f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ действительно $\Phi(f) \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$), а из утверждения 24-Tx следует, что если

пространство Y локально компактно и хаусдорфово, то Φ обратимо.

1) Пусть $K \subset X$ и $L \subset Y$ - компактные множества, $V \in \Omega_Z$.

Множества вида $W(L, V)$ образуют предбазу в $\mathcal{C}(Y, Z)$. В силу 24-Ux, множества вида $W(K, W(L, V))$ образуют предбазу в $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$.

Осталось заметить, что

$$\Phi^{-1}(W(K, W(L, V))) = W(K \times L, V) \in \Delta^{(co)}(X \times Y, Z). \text{ Следо-}$$

вательно, отображение Φ непрерывно.

2) Пусть $Q \subset X \times Y$ - компактное множество и $G \subset \in \Omega_Z$. Пусть $\varphi \in \Phi(W(Q, G))$, таким образом $\varphi(x) : y \mapsto f(x, y)$ для некоторого отображения $f \in W(Q, G)$. Для каждой точки $q \in Q$ выберем ее окрестность $U_q \times V_q$ такую, что: множество $\text{Cl } V_q$ компактно и

$f(U_q \times \text{Cl } V_q) \subset G$. Поскольку Q компактно, то $Q \subset \bigcup_{i=1}^n (U_{q_i} \times V_{q_i})$.

Множества $W_i = W(\text{Cl } V_{q_i}, G)$ открыты в $\mathcal{C}(Y, Z)$, значит, множества $T_i = W(p_X(Q) \cap \text{Cl } U_{q_i}, W_i)$ открыты в $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$.

Следовательно, $T = \bigcap_{i=1}^n T_i$ - окрестность точки φ .

Покажем, что $T \subset \Phi(W(Q, G))$. Действительно, если $\psi \in T$, то $\psi = \Phi(g)$, причем $g(x, y) \in G$ при $(x, y) \in Q$, так что $g \in W(Q, G)$, откуда следует, что $\psi \in \Phi(W(Q, G))$. Следовательно, множество $\Phi(W(Q, G))$ открыто, таким образом Φ - гомеоморфизм.

24-Wh. Пусть S - разбиение топологического пространства X , $\text{pr} : X \rightarrow X/S$ - проекция. На пространстве $X \times Y$ возникает естественное разбиение $S' = \{A \times y \mid A \in S, y \in Y\}$. Если топологическое пространство Y хаусдорфово и локально компактно, то естественное факторотображение

$f : (X \times Y)/S' \rightarrow X/S \times Y$ проекции $\text{pr} \times \text{id}_Y$ является гомеоморфизмом.

Факторотображение f очевидно является непрерывной биекцией.

Рассмотрим отображение факторизации $p : X \times Y \rightarrow (X \times Y)/S'$.

В силу утверждения 24-Sx отображение $\Phi : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, (X \times Y)/S')$,

где $\Phi(x)(y) = p(x, y)$, является непрерывным. Заметим, что отображение Φ постоянно на элементах разбиения S , следовательно, его фактор $\tilde{\Phi} : X/S \rightarrow \mathcal{C}(Y, (X \times Y)/S')$ непрерывен. В силу утверждения 24-Tx непрерывно и отображение

$g : X/S \times Y \rightarrow (X \times Y)/S'$, где $g(z, y) = \tilde{\Phi}(z)(y)$. Осталось

заметить, что отображения g и f являются взаимно обратными.

24-19x. Попробуйте доказать утверждение предыдущей теоремы непосредственно.

8. Элементы топологической алгебры

В этой главе мы будем изучать топологические пространства, тесно связанные с группами: иногда сами пространства являются группами (при этом все отображения, возникающие из групповых соображений, непрерывны), или же группы действуют на топологических пространствах и как бы состоят из гомеоморфизмов этого пространства.

Этот материал связан с различными разделами математики, и хотя он и играет в них существенную роль, не столь уж важен при изучении общей топологии. Чаще всего его изучение можно отложить до той поры, пока он не появится содержательным образом в других математических курсах (в которых речь пойдет о группах Ли, функциональном анализе и т. д.). Он интересен тем, что обеспечивает большой набор разнообразных примеров и упражнений.

Понятие группы принадлежит алгебре. В математике, основанной на понятии множества, основными объектами являются множества с дополнительными структурами. До сих пор мы встречались лишь с немногими важнейшими из них, такими как топология, метрика, частичный порядок. Топология и метрика возникают из геометрических соображений. Изначально в алгебре рассматривались операции с числами, и ее вклад в общий контекст изучения структур на множестве состоял во введении различных структур, связанных с операциями на множествах. Одной из самых простых является групповая структура, появляющаяся в контексте разнообразных математических задач. Достаточно часто она возникает одновременно с некоторой связанной с ней топологической структурой. **Предметом топологической алгебры является изучение групповой и топологической структур в их взаимодействии друг с другом.**

В части этой книги, посвященной алгебраической топологии, группы будут играть более содержательную роль. Так что уже в следующей главе читатель встретится с группами, снова увидит взаимосвязи между топологией и алгеброй, пространствами и группами, однако их взаимодействие будет носить другой характер. Структуры топологического пространства и группы уже не будут заданы на одном и том же множестве и, так сказать, сосуществовать совместно. Такие алгебраические характеристики, как фундаментальная группа (гомотопические группы) будут нести информацию о топологических свойствах рассматриваемого пространства.

8.1.x. Алгебраическое отступление: группы и гомоморфизмы

Этот раздел включен в основном для того, чтобы напомнить читателю основные определения и утверждения, связанные с понятием группы. Мы не предполагаем дать в нем сколь-нибудь полное изложение теории групп, поскольку надеемся, что читатель знаком с понятием группы, гомоморфизма, подгруппы, факторгруппы, и т. д. Если же это

не так, то мы настоятельно рекомендуем прочесть какой-либо учебник, посвященный элементарной теории групп. При наличии математической культуры, безусловно необходимой для того, чтобы можно было разобраться в материале, представленном в нашей книге, такое чтение будет одновременно простым, приятным и полезным. На первых порах будет достаточно прочесть определения и доказать теоремы, сформулированные в данном разделе.

8.1.1х. Понятие группы

Напомним, что *группой* называется множество G , в котором задана групповая операция. **Групповой операцией** в множестве G называется отображение $\omega : G \times G \rightarrow G$, удовлетворяющее следующим трем условиям (так называемым **аксиомам группы**):

- **Ассоциативность.** $\omega(a, \omega(b, c)) = \omega(\omega(a, b), c)$ для всех $a, b, c \in G$.

- **Существование нейтрального элемента.** Существует элемент $e \in G$, такой что $(\omega(e, a) = \omega(a, e) = a$ для всех $a \in G$.

- **Существование обратного элемента.** Для любого элемента $a \in G$ существует элемент $b \in G$, такой что $\omega(a, b) = \omega(b, a) = e$.

25. Ах Единственность нейтрального элемента. *В любой группе существует единственный нейтральный элемент.*

25. Вх Единственность обратного элемента. *Для каждого элемента группы существует единственный обратный ему элемент.*

25. Сх. Примеры групп. Проверьте, действительно ли в каждом случае мы имеем дело с группой. Каков нейтральный элемент в этой группе? Как найти элемент, обратный данному?

(1) Множество G - множество b целых чисел, групповая операция - сложение: $\omega(a, b) = a + b$.

(2) Множество G - множество $\mathbb{Q}_{>0}$ положительных рациональных чисел, групповая операция умножение: $\omega(a, b) = ab$.

(3) $G = \mathbb{R}$, $\omega(a, b) = a + b$.

(4) $G = \mathbb{C}$, $\omega(a, b) = a + b$.

(5) $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\omega(a, b) = ab$.

(6) G - это множество всех биекций некоторого множества A на себя, групповой операцией является композиция биекций: $\omega(a, b) = a \circ b$.

25.1х Простейшая группа. 1) Может ли группа быть пустой?

2) Может ли она состоять из одного элемента?

Группа, состоящая из одного элемента, называется *тривиальной*.

25.2x Решение уравнений. Пусть в множестве G задана ассоциативная операция $\omega : G \times G \rightarrow G$. Докажите, что G с введенной операцией является группой, тогда для любых элементов $a, b \in G$ существуют единственные элементы $x, y \in G$, такие что $\omega(a, x) = b$ и $\omega(y, a) = b$.

8.1.2x. Аддитивные и мультипликативные обозначения

Обозначения, введенные выше, никогда не используются!

Единственное исключение - определение группы. Вместо этого обычно используются *мультипликативные* или *аддитивные* обозначения.

В мультипликативных обозначениях групповая операция и называется *умножением*, и обозначается как умножение: $(a, b) \mapsto ab$. Нейтральный элемент называется *единицей* и для него используется обозначение 1 (или 1_G ; или e). Элемент, обратный a , обозначается a^{-1} . Такие обозначения естественны, к примеру, когда мы рассматриваем множество ненулевых рациональных чисел с обычным умножением.

В аддитивных обозначениях групповая операция называется *сложением* и обозначается как сложение: $(a, b) \mapsto a + b$. Нейтральный элемент называется *нулем* и для него используется обозначение 0. Элемент, обратный a , обозначается $-a$. Такие обозначения естественны, к примеру, если мы имеем дело с группой целых чисел относительно обычного сложения.

Говорят, что групповая операция $\omega : G \times G \rightarrow G$ *коммутативна*, если $\omega(a, b) = \omega(b, a)$ для всех $a, b \in G$. Группа с коммутативной групповой операцией называется *коммутативной* или *абелевой*.

Традиционно аддитивные обозначения используются для абелевых групп. Мультипликативные обозначения используются как в некоммутативном, так и в коммутативном случае. В дальнейшем мы по большей части будем использовать мультипликативные обозначения.

25.3x. Проверьте, является ли группой:

- (1) одноточечное множество $\{a\}$ с операцией $aa = a$;
- (2) множество S_n всех биекций множества $\{1, 2, \dots, n\}$, операцией в котором является композиция биекций (*симметрическая группа порядка n*);
- (3) множество \mathbf{R}^n или \mathbf{C}^n с покомпонентным сложением;
- (4) множество $\text{Homeo}(X)$ всех гомеоморфизмов топологического пространства X на себя, операцией в котором является композиция гомеоморфизмов;

- (5) множество $GL(n, \mathbb{R})$ всех обратимых вещественных $n \times n$ -матриц с операцией матричного умножения;
- (6) множество $M_n(\mathbf{R})$ всех действительных $n \times n$ -матриц с операцией матричного сложения;
- (7) множество всех подмножеств множества X , операцией в котором является симметрическая разность множеств:
 $(A, B) \mapsto (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
- (8) множество \mathbf{Z}_n классов натуральных чисел, сравнимых по модулю n , с операцией сложения, индуцированной сложением натуральных чисел;
- (9) множество комплексных корней степени n из единицы с операцией умножения;
- (10) множество $\mathbb{R}_{>0}$ положительных вещественных чисел с операцией умножения;
- (11) множество $S^1 \subset \mathbb{C}$ с операцией умножения;
- (12) множество всех параллельных переносов плоскости, операцией в котором является композиция переносов.

Свойство ассоциативности операции гарантирует, что для всякой конечной последовательности элементов данной группы однозначно определено их произведение, которое может быть вычислено путем последовательного попарного перемножения элементов группы.

Последовательность умножений определяется способом расстановки скобок, к примеру, $(ab)(c(de))$ или $a(b((cd)e))$. Свойство ассоциативности умножения как раз и обеспечивает независимость результата перемножения данных элементов от способа, каким были расставлены скобки. Если всего имелось три элемента, то скобки можно было расставить двумя способами, и равенство $(ab)c = a(bc)$ в точности означает, что умножение ассоциативно.

25.Дх. Выведите из свойства ассоциативности операции независимость результата перемножения n элементов от порядка исполнения умножений, определенного способом расстановки скобок.

Для каждого элемента a группы G равенства $a^{n+1} = a^n a$, $a^0 = 1$ и $a^{-n} = (a^{-1})^n$ определяют его степень a^n , $n \in \mathbb{Z}$.

25.Ех. Докажите, что операция возведения в степень обладает свойствами: $a^p a^q = a^{p+q}$ и $(a^p)^q = a^{pq}$.

8.1.3х. Гомоморфизмы

Отображение $f : G \rightarrow H$ группы G в группу H называется *гомоморфизмом*, если $f(xy) = f(x)f(y)$ для любых элементов $x, y \in G$.

25.4х. Данное выше определение гомоморфизма было приведено в мультипликативных обозначениях. Как оно будет выглядеть, если использовать аддитивные обозначения? А в случае, когда для одной группы использованы аддитивные обозначения, тогда как в другой мультипликативные?

25.5х. Пусть a является элементом некоторой мультипликативной группы G . Является ли гомоморфизмом отображение $\mathbb{Z} \rightarrow G$, определенное формулой $n \mapsto a^n$?

25.5х. Рассмотрим группы G и H . Является ли гомоморфизмом постоянное отображение $G \rightarrow H$, отображающее всю группу G в нейтральный элемент группы H ? Является ли гомоморфизмом какое-либо другое постоянное отображение $G \rightarrow H$?

25.6х. *Всякий гомоморфизм переводит нейтральный элемент одной группы в нейтральный элемент, он также переводит любые два взаимно обратных элемента этой группы во взаимно обратные.*

25.6х. Тождественное отображение любой группы есть гомоморфизм. Композиция гомоморфизмов есть гомоморфизм.

Гомоморфизм называется *эпиморфизмом*, если он является сюръекцией, *моморфизмом*, если он - инъекция, *изоморфизмом*, если он есть биекция.

25.6х. *Отображение, обратное изоморфизму, есть изоморфизм.*

Две группы называются *изоморфными*, если существует изоморфизм одной из них на другую.

25.6х. *Отношение изоморфности групп является отношением эквивалентности.*

25-6х. Покажите, что аддитивная группа \mathbf{R} изоморфна мультипликативной группе \mathbf{R}_+ .

8.1.4х. Подгруппы

Подмножество A группы G называется *подгруппой* группы G , если оно, во-первых, инвариантно относительно групповой операции в G (т. е. $ab \in A$ для любых $a, b \in A$), во-вторых, множество A , операция в котором определена групповой операцией в G , само является группой. Введем следующие обозначения. Для любых подмножеств A и B группы G через AB будем обозначать множество всех попарных произведений элементов этих групп: $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, пусть, также, $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$.

25.6х. Подмножество A мультипликативной группы G является её подгруппой, тогда $AA \subset G$ и $A^{-1} \subset A$.

- 25.7х. Одноэлементное подмножество, состоящее из нейтрального элемента группы, является ее подгруппой.
- 25.8х. Докажите, что подмножество A конечной группы G является ее подгруппой, тогда $AA \subset A$.
- 25.9х. Перечислите все подгруппы аддитивной группы \mathbb{Z} .
- 25.10х. Является ли группа $GL(n, \mathbb{R})$ подгруппой $M_n(\mathbb{R})$? (См. обозначения в задаче 25.3х.)
- 25.1х. Образ всякого гомоморфизма $f : G \rightarrow H$ является подгруппой группы H .
- 25.1х. Пусть $f : G \rightarrow H$ - гомоморфизм, K - подгруппа H . Тогда множество $f^{-1}(K)$ есть подгруппа группы G . Другими словами, прообраз подгруппы относительно гомоморфизма есть подгруппа.
- Пусть $f : G \rightarrow H$ - гомоморфизм. Прообраз $f^{-1}(e)$ нейтрального элемента группы H называется *ядром* гомоморфизма f и обозначается через $\text{Ker } f$.
- 25.1х. Следствие 25.1х. Ядро гомоморфизма есть подгруппа.
- 25.0х. Гомоморфизм является мономорфизмом, тогда его ядро тривиально.
- 25.1х. Пересечение любого набора, подгрупп данной группы является ее подгруппой.
- Говорят, что подгруппа H группы G порождается подмножеством $S \subset G$, если она является наименьшей (по включению) подгруппой, содержащей это множество.
- 25.0х. Подгруппа, порожденная множеством S , совпадает с пересечением всех, содержащих множество S подгрупп группы G . С другой стороны, эта подгруппа есть множество всех элементов, являющихся произведениями элементов множества S и элементов, обратных к ним. Элементы множества, порождающего всю группы G , называются **об-разующими** этой группы. Группа, порожденная одним элементом, называется *циклической*.
- 25.1х. Циклическая группа состоит из всех степеней её образующей. (Т. е. если группа G - циклическая и a - её образующая, то $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.) Всякая циклическая группа является абелевой.
- 25.11х. Подгруппа H группы G циклическая, тогда существует эпиморфизм $f : \mathbb{Z} \rightarrow H$.
- 25.1х. Всякая подгруппа циклической группы является циклической. Число элементов группы G называется *порядком* этой группы и обозначается через $|G|$.
- 25.1х. Пусть G - конечная циклическая группа. Для всякого положительного делителя d порядка $|G|$ этой группы существует единственная подгруппа H группы G , порядок которой равен d .

Всякий элемент любой группы порождает подгруппу, состоящую из всех его степеней. Порядок подгруппы, порожденной элементом $a \in G$, называется *порядком* элемента a . Если подгруппа, порожденная элементом a , бесконечна, то говорят, что элемент a имеет бесконечный порядок.

Для всякой подгруппы H группы G ее *правыми смежными классами* называются множества $Ha = \{xa \mid x \in H\}$, $a \in G$. Аналогично, множества aH называются ее *левыми смежными классами*. Количество различных правых (или левых) классов смежности по подгруппе H называется *индексом* этой подгруппы.

25. Ух Теорема Лагранжа. Пусть H - подгруппа конечной группы G .

Тогда порядок группы H является делителем порядка группы G .

Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если $aHa^{-1} \in H$ для всех элементов $h \in H$ и $a \in G$, т. е. $GHG^{-1} \subset H$. Нормальные подгруппы также называют её *нормальными делителями* или же *инвариантными подгруппами*.

У всякой нормальной подгруппы ее левые классы смежности совпадают с правыми классами смежности. Множество классов смежности нормальной подгруппы является группой, произведение в которой определено по правилу $(aH)(bH) = abH$. Группа классов смежности подгруппы H в группе G называется *факторгруппой G по H* и обозначается G/H .

25. Vx. Ядро всякого гомоморфизма $f : G \rightarrow H$ является нормальной подгруппой группы G .

25. Wx. Образ $f(G)$ всякого гомоморфизма $f : G \rightarrow H$ изоморфен факторгруппе $G/\text{Ker } f$ группы G по ядру гомоморфизма f .

25. Xx. Факторгруппа \mathbb{R}/\mathbb{Z} канонически изоморфна группе S^1 . Опишите образ группы $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ при этом изоморфизме.

25. Yx. Пусть A - нормальная подгруппа, B - подгруппа некоторой группы G . Тогда AB также является подгруппой G , а $A \cap B$ - нормальной подгруппой группы B , при этом $AB/A \cong B/A \cap B$.

8.2x. Топологические группы

8.2.1x. Определение топологической группы

Топологической группой называется множество G на котором заданы как топологическая, так и групповая структура. При этом требуется, чтобы отображения $G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$ и $G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$ были бы непрерывны.

26.1x. Пусть G - одновременно группа и топологическое пространство.

Докажите, что отображения $\omega : G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$ и

$\alpha : G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$ непрерывны, тогда непрерывно отображение

$\beta : G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$.

26.2x. Докажите, что для всякой топологической группы G отображение $G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$ является гомеоморфизмом.

26-3x. Пусть G - топологическая группа, X - топологическое пространство и $f, g : X \rightarrow G$ - отображения, непрерывные в точке

$x_0 \in X$. Докажите, что отображения $X \rightarrow G : x \mapsto f(x)g(x)$ и

$X \rightarrow G : x \mapsto (f(x))^{-1}$ также будут непрерывны в точке x_0 .

26. Ax. Всякая группа, наделенная дискретной топологической структурой, является топологической группой.

Это так, поскольку всякое отображение из дискретного топологического пространства является непрерывным.

26. Ax. Будет ли топологической группой группа, наделенная антидискретной топологической структурой?

8.2.2x. Примеры топологических групп

26. Bx. Группы, перечисленные в задаче 25. Cx и наделенные стандартной топологией, являются топологическими группами.

В тех случаях, когда группа конечна, наделите ее дискретной топологической структурой; в силу 26. Ax. она станет топологической.

Более содержательные примеры рассматриваются далее (см. 26. 5x-26. 6x).

26. 5x. Единичная окружность $S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ с операцией умножения и стандартной топологической структурой является топологической группой.

26. 6x. Являются ли топологическими группами:

(1) пространства \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n и \mathbb{H}^n с покомпонентным сложением;

(2) множества $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ и $M_n(\mathbb{H})$ всех $n \times n$ -матриц с вещественными, комплексными и, соответственно, кватернионными коэффициентами, операцией в которых является матричное сложение, а топологией является топология пространства \mathbb{R}^k (мы отождествляем $M_n(\mathbb{R})$ с \mathbb{R}^{n^2} , $M_n(\mathbb{C})$ с \mathbb{C}^{n^2} и $M_n(\mathbb{H})$ с \mathbb{H}^{n^2});

(3) множество $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ и $GL(n, \mathbb{H})$ всех обратимых $n \times n$ -матриц с вещественными, комплексными и, соответственно, кватернионными коэффициентами, операцией в которых является матричное умножение, а топология индуцирована вложением $A(n, K) \subset M_n(K)$ (где $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или \mathbb{H});

(4) множества $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $O(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SO(n)$, $SO(n, \mathbb{C})$,

$SU(n)$, и другие подгруппы групп $GL(n, K)$ с $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ и \mathbb{H} .

26.7x. Введите на группе \mathbf{R} с операцией сложения топологическую структуру, отличную от стандартной, дискретной и антидискретной, так, чтобы в результате мы получили топологическую группу.

26.8x. Укажите пару топологических групп, которые гомеоморфны как топологические пространства, но не являются изоморфными, как группы.

Любые две неизомерфные (в алгебраическом смысле) и состоящие из одинакового числа элементов конечные группы, наделенные дискретной топологией. Более интересный пример: топологическая группа $GL_+(2, \mathbf{R})$ обратимых (2×2) -матриц с положительным определителем гомеоморфна $S^1 \times \mathbf{R}^3$. Однако первая из них неабелева, тогда как вторая - абелева.

26.9x. Определим в множестве $G = [0; 1)$ (со стандартной топологической структурой) операцию сложения $\omega(x, y) = x + y \pmod{1}$. Является ли G топологической группой?

8.2.3x. Автогомеоморфизмы, делающие топологическую группу однородной

Отображения группы G на себя, определенные формулами $x \mapsto ax$ и $x \mapsto xa$, называются, соответственно, *левым* и *правым* *сдвигом* и обозначаются L_a и R_a . Заметим, что $L_a \circ L_b = L_{ab}$, тогда как $R_a \circ R_b = R_{ba}$ (чтобы подправить последнее соотношение некоторые авторы определяют правый сдвиг как отображение $x \mapsto xa^{-1}$).

26. Сx. *Левый и правый сдвиги являются автогомеоморфизмами топологической группы.*

Любой сдвиг непрерывен, а сдвиги, заданные элементами a и a^{-1} взаимно обратны друг другу.

Сопряжением, порожденным элементом a группы G , называется отображение $G \rightarrow G : x \mapsto axa^{-1}$.

26. Dx. *Всякое сопряжение является автогомеоморфизмом топологической группы.*

Аналогично доказательству утверждения 26. Сx.

Следующее свойство топологической группы показывает определенную "однородность" топологической структуры на группе.

26. Ex. Для всякого открытого множества U в топологической группе G и для любого ее элемента $x \in G$ множества xU , Ux and U^{-1} являются открытыми.

Для всякого открытого множества U указанные множества являются его образами при гомеоморфизмах, соответственно: левого сдвига на элемент x , правого сдвига на этот элемент, взятия обратного элемента.

26.10x. Справедливо ли аналогичное утверждение для замкнутых множеств?

26.11x. Докажите, что если U and V подмножества топологической группы и множество U открыто, то UV и VU - открытые множества.

26.12x. Останется ли верным аналог предыдущего утверждения для замкнутого множества?

26.13x. Какие из следующих подгрупп аддитивной группы \mathbf{R} являются замкнутыми множествами:

- (1) \mathbb{Z} ;
- (2) $\sqrt{2}\mathbb{Z}$;
- (3) $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$?

26.Fx. Докажите, что если множество U компактно, а множество V - замкнуто, то множества UV and VU также являются замкнутыми.

Пусть $x \notin UV$. Так как множества U и xV^c не пересекаются, то в силу 26.Fx.1 найдется окрестность W единицы, такая что множества WU и xV^c дизъюнкты. Значит, множество $W^c x$ не пересекается с UV , следовательно, дополнение UV^c открытое множество.

26.Fx.1. Рассмотрим непересекающиеся подмножества F и C топологической группы G . Если множество F замкнуто, а C компактно, то найдется окрестность V единицы, такая что множество $CV \cup VC$ не пересекает F . Если топологическая группа G локально компактна, то окрестность V можно выбрать так, чтобы множество $C!(CV \cup VC)$ было компактным.

Для каждой точки $x \in C$ выберем окрестность V_x единицы так, чтобы окрестность xV_x не пересекалась с множеством F . В силу 26.1x существует окрестность единицы W_x такая что $W_x^2 \subset V_x$. Так как множество C компактно, то у него существует конечное покрытие множествами $W_1 = x_1 W_{x_1}, \dots, W_n = x_n W_{x_n}$. Положим $V_1 = \bigcap_1^n W_{x_n}$. Тогда $CV_1 \subset \cup W_i V \subset \cup x_i W_{x_i}^2 \subset \cup x_i V_{x_i}$, таким образом множество CV_1 не пересекается с F . Аналогично строится окрестность V_2 , такая что множество $V_2 C$ не пересекается с F . Окрестность $V = V_1 \cap V_2$ обладает требуемым свойством. Если G - локально компактная группа, то следует взять окрестность V_x с компактным замыканием.

8.2.4х. Окрестности

26. Gx. Если Γ - база окрестностей единицы в топологической группе G , то $\Sigma = \{aU \mid a \in G, U \in \Gamma\}$ - база, топологии в G .

Подмножество A группы G называется симметричным, если $A^{-1} = A$. Пусть множество V открыто в G , $a \in V$. Если окрестность $U \in \Gamma$ такова, что $U \subset a^{-1}V$, то $aU \subset V$. В силу признака базы данной топологии, Σ - база топологии группы G .

26. Hx. Во всякой окрестности единицы топологической группы содержится симметричная окрестность единицы.

Если U - некоторая окрестность единицы, то $U \cap U^{-1}$ - симметричная окрестность единицы.

26. Ix. Для всякой окрестности U единицы топологической группы существует окрестность V единицы, такая что $VV \subset U$.

Из непрерывности умножения следует, что найдутся такие окрестности единицы V_1 и V_2 , что $V_1V_2 \subset U$. Если $V = V_1 \cap V_2$, то $VV \subset U$.

26. I4x- Для всякой окрестности U единицы топологической группы и всякого натурального числа n существует симметричная окрестность V единицы, такая что $V^n \subset U$.

26. I5x. Если V - симметричная окрестность единицы топологической группы, то множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ есть подгруппа этой группы, являющаяся одновременно открытым и замкнутым множеством.

26. I6x. Пусть G - группа и Σ - некоторый набор подмножестве. Докажите, что для того, чтобы существовала топологическая топологическая структура на G , в которой Σ есть база окрестностей единицы, относительно которой G является топологической группой, необходимо и достаточно, чтобы набор Σ удовлетворял следующим пяти условиям:

- (1) каждое из множеств $U \in \Sigma$ содержит единицу группы G ,
- (2) для каждого элемента $x \in U \in \Sigma$ существует множество $V \in \Sigma$, такое что $xV \subset U$,
- (3) для каждого множества $U \in \Sigma$ существует множество $V \in \Sigma$, такое что $V^{-1} \subset U$,
- (4) для каждого множества $U \in \Sigma$ существует множество $V \in \Sigma$, такое что $VV \subset U$,
- (5) для каждого элемента $x \in G$ и множества существует $U \in \Sigma$ множество $V \in \Sigma$, такое что $V \subset x^{-1}Ux$.

26. Jx. В каком смысле включение 26.Ix напоминает неравенство треугольника?

26. Kx. Пусть C - компактное подмножество топологической группы G . Докажите, что для всякой окрестности U единицы группы существует окрестность V единицы, такая что для каждого элемента $x \in C$ справедливо включение $V \subset x^{-1}Ux$.

Пусть W - симметричная окрестность единицы, такая что $W^3 \subset U$. Выберем конечное покрытие C множествами вида $W_1 = x_1W, \dots, x_nW$, где $x_1, \dots, x_n \in C$. Положим $V = \cap(x_iWx_i^{-1})$. Ясно, что V - окрестность единицы. Если $x \in C$, то найдется элемент $w_i \in W$, такой что $x = x_iw_i$. Следовательно, $x^{-1}Vx = w_i^{-1}x_i^{-1}Vx_iw_i \subset w_i^{-1}Ww_i \subset W^3 \subset U$.

8.2.5x. Аксиомы отделимости

26.Lx. Топологическая группа является хаусдорфовой, тогда она удовлетворяет первой аксиоме отделимости, тогда одноточечное множество $\{1\}$ замкнуто.

Если множество $\{1\}$ является замкнутым, то все одноточечные подмножества этой топологической группы являются замкнутыми, таким образом, G удовлетворяет первой аксиоме отделимости, тогда $\{1\}$ - замкнутое множество. Докажем, что в этом случае G и хаусдорфова. Пусть $g \neq 1$ и U - окрестность единицы, не содержащая элемент g . В силу 26.14x найдется симметричная окрестность V единицы, такая что $V^2 \subset U$. Докажите, что множества gV и V не пересекаются и выведите отсюда хаусдорфовость данной топологической группы.

26.Mx. Топологическая группа является хаусдорфовой, тогда пересечение всех окрестностей единицы совпадает с $\{1\}$.

См. 14.C.

Если единица совпадает с пересечением всех своих окрестностей, то всякий элемент группы есть пересечение своих окрестностей, следовательно, топологическая группа удовлетворяет первой аксиоме отделимости. В силу 26.Lx, она хаусдорфова.

26.Nx. Если единица топологической группы замкнута, то эта топологическая группа удовлетворяет третьей аксиоме отделимости.

Для доказательства используйте следующее утверждение.

26.Nx.1. Для всякой окрестности U единицы в топологической группе G существует окрестность V единицы, такая что $\text{Cl}V \subset U$.

26. Ox Следствие. В топологических группах первые три аксиомы отделимости эквивалентны.

26.17x. Докажите, что на конечной группе G существует ровно столько топологических структур, относительно которых она является

топологической группой, сколько в G имеется нормальных подгрупп. Точнее, для каждой нормальной подгруппы N конечной группы G множества gN , $g \in G$, образуют базу топологической структуры, согласованной с групповой.

8.2.6х. Аксиомы счетности

26.Рх. Если Γ - база окрестностей в единице топологической группы G и множество S плотно в G , то набор $\Sigma = \{aU \mid a \in S, U \in \Gamma\}$ есть база топологии группы G . (Ср. 26. Gx and 15. J.)

Рассмотрим открытое множество W и элемент $g \in W$. Выберем симметричную окрестность V единицы, такую что $V^2 \subset W$. Существует окрестность $U \in \Gamma$ единицы, такая что $U \subset V$. Найдется точка $a \in S$, такая что $a \in gU^{-1}$. Тогда $g \in aU$ и $a \in gU^{-1} \subset gV^{-1} = gV$.

Значит, $aU \subset aV \subset gV^2 \subset W$.

26. Qx Следствие. Всякая сепарабельная и удовлетворяющая первой аксиоме счетности топологическая группа удовлетворяет второй аксиоме счетности.

26. 18x*. (Ср. 15.Dx) Всякая топологическая группа, удовлетворяющая первой аксиоме отделимости и второй аксиоме счетности, метризуема.

8.3. Конструкции

8.3.1х. Подгруппы

27. Ax. Если H - подгруппа топологической группы G , то H является топологической группой относительно групповой и топологических структур, наследуемых ею из группы G .

27. 1x. Пусть H подгруппа абелевой группы G . Докажите, что для всякой структуры топологической группы на H и базы топологии в единице существует структура топологической группы на G с той же самой базой окрестностей в единице.

27. 2x. Докажите, что подгруппа топологической группы открыта, когда ее внутренность непуста.

27. 3x. Докажите, что всякая открытая подгруппа топологической группы является одновременно и замкнутой.

27. 4x. Докажите, что всякая замкнутая подгруппа конечного индекса является открытой.

27. 5x. Приведите пример подгруппы топологической группы, которая:

(1) замкнута, но не открыта;

(2) не открыта и не замкнута.

27.6х. Докажите, что топология, индуцированная на подгруппе топологической группы, является дискретной, когда в этой подгруппе имеется изолированная точка.

27.7х. Докажите, что подгруппа H топологической группы G замкнута, когда существует открытое множество V , такое что

$U \cap H = U \cap C1 \neq \emptyset$, т. е. когда H локально замкнута хотя бы в одной из своих точек.

27.8х. Докажите, что если H не является замкнутой подгруппой топологической группы G , то множество $C1H \setminus H$ плотно в $C1H$.

27.9х. *Замыкание подгруппы топологической группы является подгруппой этой группы.*

27.10х. Верно ли, что внутренность подгруппы топологической группы является подгруппой этой группы?

27.Вх. Связная топологическая группа порождается всякой окрестностью единицы этой группы.

Следует из 26.15х.

27. Сх. Пусть H - подгруппа группы G . Введем отношение: $a \sim b$, если $ab^{-1} \in H$. Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности, классы эквивалентности по которому совпадают с правыми классами смежности подгруппы H .

27. 11х. Каков аналог утверждения 27. Сх для левых классов смежности?

Множество левых классов смежности подгруппы H в G обозначается через G/H , множество правых классов – через $H \setminus G$. В случае, если G является топологической группой, множества G/H и $H \setminus G$ наделяются топологической структурой фактопространства и называются *пространствами классов смежности*.

27.Дх. Для всякой топологической группы G и её подгруппы H , естественные проекции $G \rightarrow G/H$ и $G \rightarrow H \setminus G$ являются открытыми отображениями.

Это так, поскольку для всякого открытого в G множества U , множество UH (соответственно, HU) также открыто в G .

27.Ех. Пространство левых (и правых) классов смежности замкнутой подгруппы топологической группы является регулярным.

Пространство G/H удовлетворяют первой аксиоме отделимости, так как для всякого элемента $g \in G$ множество gH замкнуто в G .

Поскольку каждое открытое в G/H множество имеет вид

$\{gH \mid g \in U\}$ (для некоторого открытого в G множества U), то

достаточно проверить, что для всякой окрестности U единицы в группе

G найдется окрестность V единицы, такая что $\text{Cl}(VH) \subset UH$. Пусть V - симметричная окрестность единицы, такая что $V^2 \subset U$, см. 26.14x. Если $x \in \text{Cl}VH$, то в окрестности Vx имеется элемент vh , где $v \in V$ и $h \in H$. Значит существует элемент $v' \in V$, такой что $v'x = vh$. Следовательно $x \in V^{-1}VH = V^2H \subset UH$.

27.Fx. Если подгруппа H группы G , а также пространство G/H компактны, то и сама группа G компактна; если подгруппа H группы G , а также пространство G/H связны, то и сама группа G связна.

Докажем, что если подгруппа H компактна, то проекция $p : G \rightarrow G/H$ замкнута. Пусть множество $F \subset G$ замкнуто и $x \notin FH$. В силу 26.Fx множество FH замкнуто, значит у точки x имеется окрестность U , не пересекающаяся с FH , следовательно, множества UH и FH не пересекаются. Тем самым мы нашли насыщенное открытое в G множество, не пересекающееся с насыщением замкнутого множества F , откуда и следует замкнутость проекции. Рассмотрим произвольное центрированное семейство замкнутых в G множеств. По доказанному их образы при проекции p образуют центрированное семейство замкнутых множеств, которое, в силу компактности G/H имеет непустое пересечение. Следовательно, найдется точка $g \in G$, такая что пересечения всех множеств исходного семейства с множеством gH образуют центрированную систему замкнутых множеств. В силу компактности gH , пересечение всех множеств этой системы непусто, значит, группа G компактна. Теперь докажем связность G . Пусть $G = U \cup V$, где U и V - открыты в G , непусты и не пересекаются друг с другом. Из связности любого класса смежности gH , $g \in G$, следует, что каждый из них содержится целиком в одном из открытых множеств, U либо V . Таким образом, группа G распадается в объединение двух открытых и насыщенных множеств, что противоречит связности пространства G/H .

27.Gx. Если подгруппа H группы G связна, то прообраз всякой компоненты пространства G/H является компонентой группы G .

Рассуждение аналогично доказательству связности группы в утверждении 27.Fx

27.12x. Рассмотрим группу $SO(n-1)$ как подгруппу $SO(n)$. Если $n \geq 2$, то пространство $SO(n)/SO(n-1)$ гомеоморфно S^{n-1} .

27.13x. Для всякого $n \geq 1$ группы $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ компактны и связны. Сколько компонент связности имеют группы $O(n)$, $O(p, q)$ ($O(p, q)$ - это группа всех линейных преобразований

пространства \mathbb{R}^{p+q} сохраняющих квадратичную форму $x_1^2 + \dots + x_p^2 - y_1^2 - \dots - y_q^2$?

8.3.2х. Нормальные подгруппы

27.Нх. Докажите, что замыкание нормальной подгруппы топологической группы G является нормальной подгруппой группы G .

Это так, поскольку, если $aHa^{-1} \subset H$, то $a \text{Cl}(H)a^{-1} = \text{Cl}(aHa^{-1}) \subset \text{Cl}(H)$.

27.Их. Компонента связности единицы в топологической группе есть замкнутая нормальная подгруппа этой группы.

Пусть C - компонента связности единицы. Как всякая компонента связности, множество C замкнуто. Так как множество C^{-1} связно и содержит единицу, то $C^{-1} \subset C$. Для всякого элемента $g \in C$ множество gC связно и пересекается с C , поэтому $gC \subset C$.

Следовательно C - подгруппа. Наконец, для любого $g \in G$ множество gCg^{-1} связно и содержит единицу, значит $gCg^{-1} \subset C$, таким образом C - нормальная подгруппа.

27.14.х. Компонента линейной связности единицы в топологической группе есть нормальная подгруппа этой группы.

27. Jх. Факторгруппа топологической группы является топологической группой.

27. Jх Пусть G - топологическая группа, H - ее нормальная подгруппа, $a, b \in G$. Рассмотрим в G/H произвольную окрестность класса смежности abH ; ее прообразом в группе G является открытое множество W состоящее из классов смежности подгруппы H и содержащее элемент ab , в частности, W - окрестность точки ab .

Поскольку G является топологической группой, найдутся окрестности U и V точек a и b , соответственно, такие что

$UV \subset W$. Тогда $(UH)(VH) = (UV)H \subset WH$, следовательно, произведение элементов факторгруппы определяет непрерывное отображение $G/H \times G/H \rightarrow G/H$. Докажите самостоятельно, что непрерывно и отображение

$G/H \times G/H : aH \rightarrow a^{-1}H$.

27.Кх. Естественная проекция, топологической группы на ее факторгруппу является открытым отображением.

Это утверждение является частным случаем **27.Дх.**

27.Лх. Факторгруппа группы, удовлетворяющей первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворяет первой (соответственно, второй) аксиоме счетности.

Если набор $\{U_\alpha\}$ является базой топологии группы G (или базой топологии в некоторой точке), то набор $\{U_\alpha H\}$ есть база топологии в G/H (соответственно, база топологии в соответствующей точке факторпространства).

27.Мх. Факторгруппа G/H топологической группы G регулярна, когда подгруппа H замкнута.

Это утверждение является частным случаем **27.Ех.**

27.Нх. Докажите, что нормальная подгруппа H открыта в топологической группе G , тогда факторгруппа G/H дискретна.

Если H - открытая нормальная подгруппа, то все классы смежности также открыты, значит, каждое одноточечное подмножество G/H открыто. Если единица в факторгруппе открыта, то по определению фактортопологии множество H открыто в G .

Центром группы G называется множество

$$C(G) = \{x \in G \mid xg = gx \text{ при всех } g \in G\}.$$

27.15х. Всякая дискретная нормальная подгруппа связной топологической группы G содержится в центре $C(G)$ этой группы.

8.3.3х. Гомоморфизмы

Если G и H - топологические группы, то отображение $f : G \rightarrow H$ называется гомоморфизмом, если оно непрерывно и является гомоморфизмом с алгебраической точки зрения.

27.Ох. Групповой гомоморфизм одной топологической группы в другую является гомоморфизмом в смысле топологических групп, тогда он непрерывен в единице.

Очевидно. Пусть $f : G \rightarrow H$ - групповой гомоморфизм, непрерывный в единице, $a \in G$ и $b = f(a) \in H$. Для произвольной окрестности U элемента b множество $b^{-1}U$ является окрестностью единицы группы H . Значит, найдется окрестность V единицы группы G , такая что $f(V) \subset b^{-1}U$. Тогда множество aV - окрестность элемента a и $f(aV) = f(a)f(V) = bf(V) \subset bb^{-1}U = U$. Таким образом, f непрерывен в любой точке $a \in G$, т. е. f - гомоморфизм в смысле топологических групп.

Все теоретико-групповые понятия переносятся на топологические группы без изменений. Единственное, что включается дополнительно в определения, связано с существованием на группах топологической структуры. В частности, в теории групп *изоморфизмом* называется обратимый гомоморфизм. Отображение, обратное к нему, автоматически является гомоморфизмом. В теории топологических

групп в само определение изоморфизма следует вставить дополнительное условие. Именно, **изоморфизмом** одной топологической группы на другую называется обратимый гомоморфизм, обратный к которому также является гомоморфизмом. Другими словами, в теории топологических групп под изоморфизмом мы понимаем отображение, которое является изоморфизмом в алгебраическом смысле и гомеоморфизмом топологических пространств.

27.16x. Докажите, что отображение $f : [0; 1) \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ - гомоморфизм (топологических групп).

27.Px. Эпиморфизм $f : G \rightarrow H$ является открытым отображением, тогда его инъективный фактор $\hat{f} = f/S(f) : G/\text{Ker } f \rightarrow H$ является изоморфизмом.

Пусть $f : G \rightarrow H$ - открытый эпиморфизм. Для всякого открытого в $G/\text{Ker } f$ множества U его образ $\hat{f}(U) = f(p^{-1}(U))$ открыт (здесь $p : G \rightarrow G/\text{Ker } f$ - проекция). Если отображение \hat{f} открыто, то в силу **27.Dx**, f открыто как композиция открытых отображений.

27. Qx. Эпиморфизм компактной топологической группы на топологическую группу с замкнутой единицей является открытым отображением.

Следует из **27.Px**, **26.Lx** и **16.X**.

27.Rx. Докажите, что факторгруппа \mathbb{R}/\mathbb{Z}_f изоморфна мультипликативной группе $S^1 \subset \mathbb{C}$.

Следует из **27.Px**, поскольку, как нетрудно видеть, проекция $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ - открытое отображение.

8.3.4x. Локальные изоморфизмы

Пусть G и H - топологические группы. *Локальным изоморфизмом* группы G в группу H называется гомеоморфизм f некоторой окрестности U единицы в группе G на окрестность V единицы в группе H , такой что

- $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in U$, таких что $xy \in U$,
- $f^{-1}(zt) = f^{-1}(z)f^{-1}(t)$ для всех $z, t \in V$, таких что $zt \in V$.

Топологические группы называются *локально изоморфными*, если существует локальный изоморфизм одной из них в другую.

27.Sx. Изоморфные топологические группы локально изоморфны.

27. Tx. Аддитивная группа \mathbf{R} вещественных чисел и мультипликативная группа S^1 комплексных чисел, по модулю равных единице, локально изоморфны, но не изоморфны.

- 27.17х. Докажите, что отношение локальной изоморфности является отношением эквивалентности на классе всех топологических групп.
- 27.18х. Укажите окрестности единиц в \mathbf{R} и S^1 и гомеоморфизм между ними, удовлетворяющие первому условию из определения локального изоморфизма, но не удовлетворяющие второму.
- 27.19х. Докажите, что для любого гомеоморфизма окрестности единицы одной топологической группы на окрестность единицы другой, удовлетворяющего первому условию из определения локального гомеоморфизма, найдется локальный изоморфизм, являющийся его подотображением.

8.3.5х. Прямые произведения

Пусть G и H — топологические группы. В теории групп произведение $G \times H$ наделяется групповой структурой: $(x, u)(y, v) = (xy, uv)$. В топологии было определено произведение топологических пространств (см. 19).

27. Ух. Произведение топологических групп является топологической группой.

Тем самым, $G \times H$ — топологическая группа, которая называется *прямым произведением* групп G и H . С этим произведением связаны четыре канонических гомоморфизма: два гомоморфизма включения $i_G : G \rightarrow G \times H : x \mapsto (x, 1)$ и $i_H : H \rightarrow G \times H : x \mapsto (1, x)$, каждый из которых является мономорфизмом, и две проекции $p_G : G \times H \rightarrow G : (x, y) \mapsto x$ и $p_H : G \times H \rightarrow H : (x, y) \mapsto y$, каждая из которых — эпиморфизм.

27.20х. Докажите, что топологические группы $G \times H / i_H(H)$ и G изоморфны.

27.21х. Перемножение топологических групп коммутативно и ассоциативно: $G \times H$ канонически изоморфно $H \times G$, а $G \times (H \times K)$ канонически изоморфно $(G \times H) \times K$.

Говорят, что топологическая группа G *раскладывается в прямое произведение своих подгрупп* A и B , если отображение

$A \times B \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$ является изоморфизмом. В этом случае группу G обычно отождествляют с произведением $A \times B$.

Предположим, что группа G раскладывается в прямое произведение своих подгрупп A и B в алгебраическом смысле. Напомним, что это имеет место, когда A и B порождают группу G , являются ее нормальными подгруппами и $A \cap B = \{1\}$. Поэтому, если эти условия выполнены, то отображение $(x, y) \mapsto xy : A \times B \rightarrow G$ изоморфизм.

27.22x*. Докажите, что в описанной ситуации отображение $(x, y) \mapsto xy : A \times B \rightarrow G$ непрерывно. Приведите пример, в котором обратный гомоморфизм не является непрерывным.

27. Vx. Докажите, что если компактная хаусдорфова топологическая группа G раскладывается в прямое произведение своих замкнутых подгрупп в алгебраическом смысле, то G является их прямым произведением (и в топологическом смысле).

В данном случае отображение $A \times B \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$ является непрерывной биекцией из компактного пространства в хаусдорфово, следовательно, в силу 16.X, оно - гомеоморфизм.

27.23x. Докажите, что мультипликативная группа $\mathbb{R} \setminus 0$ вещественных чисел изоморфна (как топологическая группа) прямому произведению мультипликативной группы $S^0 = \{1, -1\}$ и мультипликативной группы $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

27.24x. Докажите, что мультипликативная группа $\mathbb{C} \setminus 0$ комплексных чисел изоморфна (как топологическая группа) прямому произведению мультипликативной группы $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и мультипликативной группы \mathbb{R}_+^* .

27.25x. Докажите, что мультипликативная группа $\mathbb{H} \setminus 0$ кватернионов изоморфна (как топологическая группа) прямому произведению мультипликативной группы $S^3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ и мультипликативной группы \mathbb{R}_+^* .

27.26x. Докажите, что подгруппа $S^0 = \{1, -1\}$ группы $S^3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ не является ее прямым фактором.

27.27x. Найдите топологическую группу, гомеоморфную $\mathbb{R}P^3$.

Пусть группа G содержит нормальную подгруппу A и подгруппу B , такие что $AB = G$ и $A \cap B = \{1_G\}$. Если подгруппа B также является нормальной, то G является прямым произведением $A \times B$. В противном случае говорят о *полупрямом произведении*.

27. Wx. Пусть топологическая группа G является полупрямым произведением своих подгрупп A и B . Если для любых окрестностей единицы $U \subset A$ и $V \subset B$ их произведение UV также содержит окрестность единицы, то пространство G гомеоморфно произведению $A \times B$.

Отображение $A \times B \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$ является непрерывной биекцией. Докажем, что оно также и открыто. Пусть $U \subset A$ и $V \subset B$ - окрестности единиц, $a \in A$ и $b \in B$. Множество $UaVb = abU'V'$, where $U' = b^{-1}a^{-1}Uab$ and $V' = b^{-1}Vb$, содержит abW' , где W' - это содержащаяся в $U'V'$ окрестность единицы.

8.3.6х. Группы гомеоморфизмов

Обозначим через $\text{Тор } X$ группу гомеоморфизмов топологического пространства X . Напомним, что групповой операцией в этой группе является композиция гомеоморфизмов. Для того, чтобы сделать её топологической, мы изменим топологическую структуру на пространстве гомеоморфизмов по сравнению с компактно-открытой топологией на пространстве $\mathcal{C}(X, X)$.

27.Xx. Набор множеств вида $W(C, U)$ и $(W(C, U))^{-1}$ взятых для всех компактных подмножеств $C \subset X$ и всех открытых подмножеств $U \subset X$ является предбазой некоторой топологической структуры на группе $\text{Тор}X$.

См. 24.Bx.

Всюду в дальнейшем мы считаем, что на пространстве $\text{Тор}X$ задана топологическая структура с предбазой, описанной в 27.Xx.

27. Yx. Если пространство X является хаусдорфовым и локально компактным, то $\text{Тор}X$ - топологическая группа.

Отображение $\text{Тор } X \rightarrow \text{Тор } X : g \mapsto g^{-1}$ непрерывно, так как

оно переводит предбазовые множества топологии в $\text{Тор } X$ в предбазовые. Следовательно, утверждение будет следовать из 27. Yx. 1.

27. Yx.1. Если X хаусдорфово и локально компактно, то отображение $\phi : \text{Тор } X \times \text{Тор } X \rightarrow \text{Тор } X : (g, h) \mapsto g \circ h$ непрерывно.

Достаточно проверить открытость прообраза любого элемента из предбазы топологии. Для предбазовых множеств вида $W(C, U)$ это следует из утверждения 24.Px, в доказательстве которого было показано, что для любых элементов $gh \in W(C, U)$ существует откры-

тое множество U' с компактным замыканием, такое что $h(C) \subset U'$ и $g(\text{Cl}U') \subset U$. В таком случае $h \in W(C, U')$, $g \in W(\text{Cl}U', U)$, and $gh \in \phi(W(\text{Cl}U', U) \times W(C, U')) \subset W(C, U)$. Теперь рассмотрим

предбазовое множество $(W(C, U))^{-1}$ и сведем проверку открытости его прообраза к рассмотренному случаю. Действительно,

$gh \in (W(C, U))^{-1}$, тогда $h^{-1}g^{-1} \in W(C, U)$. Выберем открытое

множество U' с компактным замыканием так, чтобы

$g^{-1}(C) \subset U'$ и $h^{-1}(\text{Cl}U') \subset U$. Тогда $g^{-1} \in$

$W(C, U')$, $h^{-1} \in W(\text{Cl}U', U)$, следовательно

$h^{-1}g^{-1} \in \phi(W(\text{Cl}U', U) \times W(C, U')) \subset W(C, U)$.

Заметим, что утверждение леммы справедливо также для обычной компа: открытой топологии на множестве $\text{Тор}X$.

8.4х. Действия топологических групп

8.4.1х. Действие группы на множестве

Левым действием группы G на множестве X называется отображение $G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto gx$, такое что $1x = x$ для любого $x \in X$ и $(gh)x = g(hx)$ для любого $x \in X$ и любых $g, h \in G$. Множество X , на котором задано такое действие, называется *левым G -множеством*. Правые G -множества определяются аналогичным образом.

28. Ах. На всяком левом G -множестве X формула $(x, g) \mapsto g^{-1}x$ определяет правое действие группы G .

28. Вх. Пусть X - левое G -множество. Тогда для любого $g \in G$ отображение $X \rightarrow X : x \mapsto gx$ является биекцией.

Левое действие группы G на X называется *эффeктивным*, если для любого отличного от единицы элемента g группы G отображение $x \mapsto gx$ не является тождественным. Отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ одного левого G -множества в другое называется *G -эквивариантным*, если $f(gx) = gf(x)$ для всех $x \in X, g \in G$.

Говорят, что X является *однородным левым G -множеством* (или что G действует *транзитивно* на X), если для любых $x, y \in X$ существует элемент $g \in G$, такой что $y = gx$.

С очевидными изменениями та же самая терминология применима и для правых действий.

28. Сх. Естественные действия группы G на множествах G/H и $H \backslash G$ превращает их в однородные левое и, соответственно, правое G -множество.

Пусть X - однородное левое G -множество. Рассмотрим точку $x \in X$ и множество $G^x = \{g \in G \mid gx = x\}$. Очевидно, что G^x есть подгруппа группы G . Подгруппа G^x называется *изотропной подгруппой*, соответствующей точке x .

28. Dx. Всякое однородное левое (правое) G -множество X изоморфно G/H (соответственно, $H \backslash G$), где через H обозначена изотропная подгруппа, соответствующая некоторой точке множества X .

28. Dx. I. Все изотропные подгруппы $G^x, x \in G$, являются попарно сопряженными.

Нормализатором $Nr(H)$ подгруппы H группы G называется множество $\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Другими словами, нормализатор есть наибольшая подгруппа в G , содержащая H в качестве своей нормальной подгруппы.

28. Ex. Группа всех автоморфизмов однородного G -множества X изоморфна группе $N(H)/H$, где H - изотропная подгруппа, соответствующая некоторой точке множества X .

28. Ex. I. Если изотропные подгруппы, соответствующие точкам $x, y \in X$, совпадают друг с другом, то найдется автоизоморфизм G -множества X , переводящий x в y .

8.4.2х. Непрерывные действия

Левым G -пространством называется топологическое пространство X , на котором задано левое действие топологической группы G , такое что отображение $G \times X \rightarrow X$ является непрерывным. Все определения, связанные с понятием G -множеств естественным образом переносятся на G -пространства.

Отметим, что если группа G дискретна, то любое ее действие задается непрерывным отображением, тем самым всякое её действие определяет G -пространство.

28. Fx. Пусть X - левое G -пространство. Естественное отображение $\phi : G \rightarrow \text{Тор } X$, индуцированное действием G на X , является групповым гомоморфизмом.

28. Gx. В предположениях предыдущего утверждения, если к тому же пространство X хаусдорфово и локально компактно, то гомоморфизм $G \rightarrow \text{Тор } X$ непрерывен.

Достаточно проверить открытость прообраза каждого элемента из предбазы топологии. Для предбазовых множеств вида это следует из утверждения 24. Px. Теперь пусть $\phi(g) \in (W(C, U))^{-1}$. Тогда $\phi(g^{-1}) \in W(C, U)$, следовательно найдется открытая окрестность V элемента $g^{-1} \in G$, такая что $\phi(V) \subset W(C, U)$. Значит V^{-1} -

окрестность g в G , такая что $\phi(V^{-1}) \subset (W(C, U))^{-1}$. (Обратите внимание, что условия, наложенные на пространство X требовались исключительно для того, чтобы группа $\text{Тор } X$ была топологической.)

28. Lx. Проверьте, является ли непрерывным действие данной топологической группы на данном топологическом пространстве и будет ли непрерывным гомоморфизм $G \rightarrow \text{Тор } X$?

Проверим, что элемент $1 \in G$ является изолированной точкой. Пусть V - окрестность единицы с компактным замыканием. Так как хаусдорфово локально компактное пространство регулярно, то найдется окрестность U единицы, такая что $\text{Cl } U \subset V$, в частности, $\text{Cl } U$ - компактное множество. Для каждого из конечного набора элементов $g_k \in G$, таких что $(g_k U) \cap V \neq \emptyset$ выберем точку $x_k \in X$ таким

образом, что $g_k(x_k) \neq x_k$ и ее окрестность U_k не содержащую точку $g_k(x_k)$. Убедитесь, что пересечение $G \cap W(CIU, V) \cap \bigcap W(x_k, U_k)$ является одноточечным множеством, содержащим только единицу.

- (1) G - топологическая группа, $X = G$ и G действует на X посредством левых (или правых) сдвигов, или же посредством сопряжения;
- (2) G - топологическая группа, H - ее подгруппа, $X = G/H$ и G действует на X по формуле $g(uH) = (gu)H$;
- (3) $G = GL(n, K)$ (где $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или \mathbb{H}) и G действует в K^n стандартным образом (как умножение матрицы на вектор);
- (4) $G = GL(n, K)$ (где $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или \mathbb{H}) и G действует в $K^{P^{n-1}}$ посредством матричного умножения;
- (5) $G = O(n, \mathbb{R})$ and G действует в S^{n-1} посредством матричного умножения;
- (6) аддитивная группа \mathbf{R}^1 действует на торе $S^1 \times \dots \times S^1$ по правилу $(w_1, \dots, w_r) \mapsto (e^{2\pi i a_1 t} w_1, \dots, e^{2\pi i a_r t} w_r)$; такое действие называется *иррациональным потоком*, если числа a_1, \dots, a_r линейно независимы над \mathbf{Q} .

Заметим, что если действие G на X не является эффективным, то мы можем рассмотреть его ядро $G^{Ker} = \{g \in G \mid gx = x \text{ для всех } x \in X\}$, которое является замкнутой нормальной подгруппой в G . Топологическая группа G/G^{Ker} будет естественным образом, и притом эффективно, действовать на X .

28.Hx. Формула $gG^{Ker}(x) = gx$ определяет эффективное непрерывное действие группы G/G^{Ker} на пространстве X .

Говорят, что группа G действует *вполне разрывно* на пространстве X , если для всякого компактного множества $C \subset X$ множество $\{g \in G \mid gC \cap C \neq \emptyset\}$ является конечным.

28.1x. Если группа G действует вполне разрывно и эффективно на хаусдорфовом локально компактном пространстве X , то $\phi(G)$ является дискретным подмножеством $\text{Тор } X$. (Здесь, как и ранее $\phi : G \rightarrow \text{Тор } X$ - гомоморфизм, индуцированный G -действием.) В частности, G - дискретная топологическая группа.

28.2x. Перечислите (с точностью до подобия) все треугольники на плоскости \mathbf{R}^2 , для которых группа, порожденная симметриями относительно их сторон, действует в \mathbf{R}^2 вполне разрывно.

8.4.3x. Пространства орбит

Пусть X - G -пространство. Для $x \in X$ множество $G(x) = \{gx \mid g \in$

G } называется *орбитой* точки x . Транзитивность действия G на X означает, что в пространстве X есть всего одна орбита — все пространство. Для подмножеств $A \subset X$ и $E \subset G$ положим

$$E(A) = \{ga \mid g \in E, a \in A\}.$$

28. 1x. Если компактная топологическая группа G действует на хаусдорфовом топологическом пространстве X , то для всякой точки $x \in X$ каноническое отображение $G/G_x^x \rightarrow G(x)$ является гомеоморфизмом.

Следует из 16.X.

28. 3x. Приведите пример хаусдорфова G -пространства X , для которого тем не менее факторпространство G/G_x не гомеоморфно $G(x)$.

28. Kx. Если компактная топологическая группа G действует на компактном хаусдорфовом пространстве X , то X/G - компактное хаусдорфово пространство.

Пространство X/G компактно как непрерывный образ компактного пространства X . Чтобы доказать хаусдорфовость X/G , рассмотрим две различные орбиты $G(x)$ и $G(y)$. В силу компактности орбиты $G(y)$ найдутся непересекающиеся окрестности $U \ni x$ и $V \supset G(y)$. В силу компактности орбиты $G(x)$ существует конечный набор элементов $g_k \in G$, такой что множества $\cup g_k U$ покрывают $G(x)$. Тогда множество $\text{Cl}(\cup g_k U) = \cup \text{Cl} g_k U = \cup g_k \text{Cl} U$ не пересекается с $G(y)$, так как $\text{Cl} U \cap G(y) = \emptyset$. Следовательно X/G хаусдорфово пространство.

28. 4x. Если группа G компактна, то для всякого G -пространства X множество $G(A)$ будет замкнутым (компактным), если замкнуто (соответственно, компактно) множество $A \subset X$.

28. 5x. Рассмотрим каноническое действие мультипликативной группы $G = \mathbb{R}^*$ на $X = \mathbb{R} : (s, t) \mapsto st$. Найдите все его орбиты и изотропные подгруппы. Опишите пространство орбит X/G .

28. 6x. Пусть G - группа, порожденная симметриями относительно сторон некоторого треугольника в \mathbb{R}^2 . Опишите эту группу и пространство орбит \mathbb{R}^2/G .

28. 7x. Пусть G - группа из задачи 28. 6x, а H - её подгруппа индекса 2, состоящая из сохраняющих ориентацию преобразований плоскости. Опишите эту группу и пространство орбит \mathbb{R}^2/G .

28. 8x. Рассмотрим диагональное действие тора $G = (S^1)^{n+1}$ на $X = \mathbb{C}P^n$, заданного правилом $(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (\theta_0 z_0, \theta_1 z_1, \dots, \theta_n z_n)$.

Найдите все его орбиты и изотропные подгруппы. Опишите пространство орбит X/G .

28.9x. Рассмотрим каноническое действие (порожденное перестановкой координат) симметрической группы $G = Sym(n)$ в $X = \mathbb{R}^n$; $X = \mathbb{C}^n$. Найдите все орбиты и изотропные подгруппы.

Опишите пространство орбит X/G .

28.10x. Рассмотрим действие группы $G = SO(3)$ на пространстве X всех симметричных вещественных 3×3 -матриц с нулевым следом посредством сопряжения $x \mapsto gxg^{-1}$. Найдите все орбиты и изотропные подгруппы. Опишите пространство орбит X/G .

8.4.4x. Однородные пространства

G -пространство называется *однородным*, если группа G действует на нем транзитивно.

28. Lx. Всякая топологическая группа G является однородным H -пространством относительно действия всякой своей подгруппы посредством сдвигов. Факторпространство G/H является однородным G -пространством относительно действия группы G .

28.Mx. Пусть X - G -пространство. Если X и G локально компактны и G имеет счетную базу топологии, то для всякой точки $x \in X$ пространство X гомеоморфно факторпространству G/G^x .

В силу 28.Nx достаточно доказать, что каноническое отображение $f : G/G^x \rightarrow X$ является открытым. Пусть V - окрестность единицы с компактным замыканием, а окрестность U единицы такова, что $CU \cdot CU \subset V$. Поскольку в группе G имеется счетное всюду плотное множество, то существует последовательность элементов $g_n \in G$, такая что множества $g_n U$ образуют открытое покрытие группы G .

Осталось доказать, что по крайней мере одно из множеств $f(g_n U) = g_n f(U) = g_n U(x)$ имеет внутреннюю точку. Предположим противное. Поскольку пространство X хаусдорфово и локально компактно, и каждое из множеств $f(g_n CU)$ также является компактным, построим по индукции вложенную последовательность открытых множеств $W_n \subset X$ с компактным замыканием, такую что множество W_n не пересекается с множествами $g_k Ux$ при всех $k < n$, а пересечение $g_n Ux \cap W_n$ замкнуто в W_n . В результате мы получим непустое множество $\cap W_n$, не пересекающееся с $G(x)$, что противоречит условию.

28.Nx. Пусть X - однородное G -пространство. Каноническое отображение $G/G^x \rightarrow X$ является гомеоморфизмом, когда оно открыто.

Это так, поскольку каноническое отображение $G/G^x \rightarrow X$ является непрерывной биекцией. Поэтому оно - гомеоморфизм, когда оно открыто.

28.11x. Покажите, что $O(n)/O(n-1) = S^n$ и $U(n)/U(n-1) = S^{2n-1}$.

28.12x. Покажите, что

$$O(n+1)/O(n) \times O(1) = \mathbb{R}P^n \text{ и } U(n+1)/U(n) \times U(1) = \mathbb{C}P^n.$$

28.13x. Покажите, что $Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$, где $Sp(n) = \{A \in GL(\mathbb{H}) \mid AA^* = \mathbb{E}\}$.

28.14x. Представьте тор $S^1 \times S^1$ и бутылку Клейна как однородные пространства.

28.15x. Опишите в геометрических терминах однородные пространства:

1) $O(n)/O(1)^n$; 2) $O(n)/O(k) \times O(n-k)$; 3)

$O(n)/SO(k) \times O(n-k)$; 4) $O(n)/O(k)$.

28.16x*. Представьте $S^2 \times S^2$ как однородное пространство.

28.17x. Опишите пространство орбит $SO(n,1)/SO(n)$.

9. Гомотопии и фундаментальная группа

В этой части книги будем рассматривать вопросы, относящиеся к алгебраической топологии - раздела топологии, в котором топологические задачи связываются с алгебраическими. Эти связи используются в обоих направлениях, однако сведение топологических задач к алгебре на первых порах оказывается полезное, поскольку алгебра обычно легче.

Связи обычно устанавливаются согласно следующей схеме. Изобретается конструкция, которая по всякому топологическому пространству X сооружает некоторый алгебраический объект $A(X)$. Это может быть группа, кольцо, пространство с квадратичной формой и т. п. Сопутствующая конструкция по всякому непрерывному отображению $f : X \rightarrow Y$ создаёт гомоморфизм

$$A(f) : A(X) \rightarrow A(Y).$$

Эти конструкции должны удовлетворять некоторым естественным условиям, которые позволили бы связывать топологические явления с их алгебраическими образами.

Существует бесчисленное множество конструкций подобного рода. В этой части мы будем заниматься почти исключительно одной из них - самой первой с точки зрения хронологии математики. Изобрёл её Анри Пуанкаре в конце XIX века.

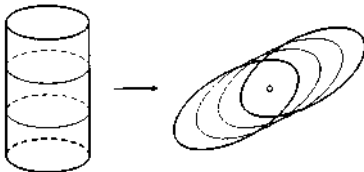
9.1. Гомотопии

9.1.1. Непрерывные деформации отображений

29.A. Возможно ли непрерывной деформацией превратить:

- (1) тождественное отображение $\text{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в постоянное отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto 0$;
 - (2) тождественное отображение $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ в симметрию $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto -z$ (здесь z - комплексное число);
 - (3) тождественное отображение $S^1 \rightarrow S^1$ в постоянное отображение $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto 1$;
 - (4) тождественное отображение $S^1 \rightarrow S^1$ в двукратное обёртывание $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^2$ (здесь окружность S^1 отождествляется с множеством $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$);
 - (5) включение $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в постоянное отображение;
 - (6) включение $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ в постоянное отображение?
- (a), (b), (e) - да; (c), (d), (f) - нет. См. 29.B.

29.B. Какой смысл вы вкладывали в слова "непрерывная деформация", решая предыдущую задачу? См. 29'2



Этот параграф посвящен понятию *гомотопии*, которое как раз и формализует наши интуитивные представления о непрерывной деформации отображения.

9.1.2. Гомотопия как отображение и как семейство отображений

Пусть f, g - два непрерывных отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y и пусть $H : X \times I \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, такое что $H(x, 0) = f(x)$ и $H(x, 1) = g(x)$ для всех $x \in X$. Тогда отображения f и g называются *гомотопными*, а H называется *гомотопией* между f и g .

Для $x \in X$ и $t \in I$ обозначим $H(x, t)$ через $h_t(x)$. За подобным изменением обозначений стоит изменение точки зрения на H . Действительно, для фиксированного t формула $x \mapsto h_t(x)$ определяет отображение $h_t : X \rightarrow Y$, и H теперь предстаёт как семейство отображений h_t , занумерованных числами $t \in I$.

29.С. Каждое из отображений h_t непрерывно.

Отображение h_t непрерывно как сужение гомотопии H на слой $X \times t \subset X \times I$.

29.Д. Следует ли из непрерывности отображений h_t непрерывность отображения H ?

Не следует.

Условия $H(x, 0) = f(x)$ и $H(x, 1) = g(x)$ в исходном определении гомотопии могут быть записаны как $h_0 = f$ и $h_1 = g$. Тем самым гомотопию между f и g можно рассматривать и как *непрерывное семейство непрерывных отображений*, соединяющее f и g . Подробнее мы поговорим об этом в 29'10.

9.1.3. Гомотопность как отношение

29.Е. Гомотопность является отношением эквивалентности.

29.Е.1. Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ отображение $H : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto x$ является гомотопией между f и f .

Отображение H непрерывно как композиция проекции

$\text{pr}_X : X \times I \rightarrow X$ и отображения f , при этом

$H(x, 0) = f(x) = H(x, 1)$. Следовательно, H является гомотопной.

29.Е.2. Если H - гомотопия между f и g , то отображение $H' : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$ является гомотопией между f и g .

Отображение H' непрерывно как композиция гомеоморфизма

$X \times I \rightarrow X \times I : (x, t) \mapsto (x, 1 - t)$ и гомотопии H , при этом

$H'(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$ и $H'(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$. Значит, H' - гомотопия.

29.E.3. Пусть H - гомотопия между f и f' , а H' - гомотопия между f' и f'' . Тогда отображение H'' , определенное формулой

$$H''(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{при } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H'(x, 2t - 1) & \text{при } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

является гомотопией между f и f'' .

Действительно, $H''(x, 0) = f(x)$, $H''(x, 1) = H'(x, 1) = f''(x)$.

Непрерывность H'' следует из того, что сужение отображения H'' на каждое из множеств $X \times [0; \frac{1}{2}]$ и $X \times [\frac{1}{2}; 1]$ непрерывно и эти множества образуют фундаментальное покрытие произведения $X \times I$. В дальнейшем мы не будем доказывать непрерывность гомотопии, поскольку это всегда будет следовать из явных формул.

Гомотопность, будучи отношением эквивалентности, определяет разбиение множества $\mathcal{C}(X, Y)$ всевозможных непрерывных отображений пространства X в пространство Y на классы эквивалентности. Они называются *гомотопическими классами* или *классами гомотопных отображений*. Множество гомотопических классов отображений $X \rightarrow Y$ обозначается через $\pi(X, Y)$ (встречаются и другие обозначения, например $[X, Y]$). Если отображение гомотопно постоянному, то будем говорить, что оно *гомотопно нулю*.

29.1. Докажите, что для любого X множество $\pi(X, I)$ состоит из одного элемента.

29.2. Докажите, что два постоянных отображения $Z \rightarrow X$ гомотопны, когда их образы лежат в одной компоненте линейной связности пространства X .

29.3. Докажите, что число элементов множества $\pi(I, Y)$ совпадает с числом компонент линейной связности пространства Y .

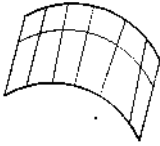
9.1.4. Прямолинейная гомотопия

29.F. Любые два непрерывных отображения $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопны. Каждое из них гомотопно постоянному отображению, переводящему все пространство в начало координат, к примеру, если $H(x, t) = (1 - t)f(x)$, то $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ - гомотопия между f и постоянным отображением $x \rightarrow 0$. (Существует более удобная гомотопия между произвольными отображениями в \mathbb{R}^n - см. 29. G.)

29. G. Решите предыдущую задачу, показав, что формула

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

задает гомотетию между отображениями f и g .



Действительно, $H(x, 0) = f(x)$ и $H(x, 1) = g(x)$. Непрерывность отображения H очевидна. Она, к примеру, следует из неравенства $|H(x, t) - H(x', t')| \leq |f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')| + (|f(x)| + |g(x)|)|t - t'|$. Гомотопия, построенная в 29.G, называется *прямолинейной гомотопией*.

29. H. Два любых непрерывных отображения произвольного пространства в выпуклое подмножество евклидова пространства \mathbf{R}^n гомотопны. Пусть K - выпуклое подмножество \mathbf{R}^n , $f, g : X \rightarrow K$ - непрерывные отображения и H - прямолинейная гомотопия между f и g . Тогда $H(x, t) \in K$ при всех $(x, t) \in X \times I$ и мы получаем гомотопию $H : X \times I \rightarrow K$.

9.1.5. Отображения в звёздные множества

Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *звёздным*, если существует такая точка $a \in A$, что для любой точки $x \in A$ отрезок $[a; x]$ между a и x содержится в A . Будем называть точку a центром звезды (конечно, центр звезды определен неоднозначно).

29-4. Докажите, что любые два непрерывных отображения в звёздное множество гомотопны.

9.1.6. Отображения из звездных множеств

29.5. Докажите, что всякое непрерывное отображение звездного множества $C \subset \mathbf{R}^n$ в произвольное пространство гомотопно постоянному отображению.

2,9.6. Найдите условие (формулируемое в терминах известных топологических свойств пространства X), при выполнении которого любые два непрерывных отображения звездного множества в пространство X гомотопны.

9.1.7. Простые гомотопии

29.7. Докажите, что всякое несюръективное непрерывное отображение произвольного топологического пространства в S^n гомотопно нулю.

29.8. Докажите, что два любых отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^n \setminus 0$ при $n > 1$ гомотопны.

29.9. Найдите два негомотопных отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R} \setminus 0$.

29.10. Вычислите, при различных значениях m, n и k , число гомотопических классов отображений

$$\{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\},$$

предполагая, что топология в множестве $\{1, 2, \dots, m\}$ дискретна.

29.11. Пусть X - произвольное топологическое пространство, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$ - непрерывные отображения. Докажите, что если $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ для любого $x \in X$, то отображения f и g гомотопны.

29.12. Докажите, что для любых двух многочленов p и q над \mathbb{C} одной и той же степени существует такое число $r > 0$, что для всякого $R > r$ формулы $z \mapsto p(z)$ и $z \mapsto q(z)$ определяют гомотопные отображения $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$.

29.13. Пусть X - произвольное топологическое пространство. Если непрерывные отображения $f, g : X \rightarrow S^n$ таковы, что $|f(x) - g(x)| < 2$ для всякого $x \in X$, то f гомотопна g .

29.14. Пусть $f : S^n \rightarrow S^n$ - непрерывное отображение. Докажите, что если оно не имеет неподвижных точек, т. е. если $f(x) \neq x$ для любой точки $x \in S^n$, то f гомотопна центральной симметрии $x \mapsto -x$.

9.1.8. Два естественных свойства гомотопий

29.I. Если $h : A \rightarrow X$, $f, f' : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow B$ - непрерывные отображения и $F : X \times I \rightarrow Y$ - гомотопия между f и f' , то $g \circ F \circ (h \times \text{id}_I)$ - гомотопия между $g \circ f \circ h$ и $g \circ f' \circ h : A \rightarrow B$.

Отображение $H = g \circ F \circ (h \times \text{id}_I) : A \times I \rightarrow B$ непрерывно,

$$H(a, 0) = g(F(h(a), 0)) = g(f(h(a))) \text{ и}$$

$$H(a, 1) = g(F(h(a), 1)) = g(f'(h(a))). \text{ Следовательно,}$$

H - гомотопия.

29. J. В условиях предыдущей задачи 29.I определите естественным образом отображение $\pi(X, Y) \rightarrow \pi(A, B)$ и выпишите естественные свойства этой конструкции.

Сопоставим отображению $f : X \rightarrow Y$ композицию $g \circ f \circ h : A \rightarrow B$. Предыдущее утверждение показывает, что данное

соответствие сохраняет отношение гомотопности, и значит, оно переносится на гомотопические классы отображений. Тем самым определено отображение $\pi(X, Y) \rightarrow \pi(A, B)$.

29.K. Непрерывные отображения $f, g : X \rightarrow Y \times Z$ гомотопны, тогда $\text{pr}_Y \circ f$ гомотопно $\text{pr}_Y \circ g$ и $\text{pr}_Z \circ f$ гомотопно $\text{pr}_Z \circ g$.

(Здесь $\text{pr}_Y : Y \times Z \rightarrow Y$ и $\text{pr}_Z : Y \times Z \rightarrow Z$ - проекции.)

Всякое отображение $f : X \rightarrow Y \times Z$ однозначно определяется своими координатными отображениями $\text{pr}_X \circ f$ и $\text{pr}_Y \circ f$. Если H -гомотопия между f и g , то $\text{pr}_Y \circ H$ -гомотопия между $\text{pr}_Y \circ f$ и $\text{pr}_Y \circ g$, $\text{pr}_Z \circ H$ - между $\text{pr}_Z \circ f$ и $\text{pr}_Z \circ g$. Если H_Y -гомотопия между $\text{pr}_Y \circ f$ и $\text{pr}_Y \circ g$, H_Z -гомотопия между $\text{pr}_Z \circ f$ и $\text{pr}_Z \circ g$, то формула $H(x, t) = (H_Y(x, t), H_Z(x, t))$ задает гомотетию между f и g .

9.1.9. СВЯЗАННЫЕ ГОМОТОПИИ

Пусть $A \subset X$. Говорят, что гомотопия $H : X \times I \rightarrow Y$ *связана на A* или, короче, что это *A-гомотопия*, если $H(x, t) = H(x, 0)$ для всех $x \in A, t \in I$. Отображения, которые можно соединить A-гомотопией, называются *A-гомотопными*.

Конечно, A-гомотопные отображения обязаны совпадать на множестве A. Если хотят подчеркнуть, что никакого условия связанности не предполагается, то говорят, что рассматриваемая гомотопия является *свободной*. Если же мы, наоборот, хотим подчеркнуть, что рассматривается связанная гомотопия, то говорим, что она является *относительной* (существует похожее понятие с тем же названием - относительная гомотопия, однако отличающееся от введенного выше.)

29.L. Так же как и для обычной (свободной) гомотопии, отношение A-гомотопности отображений есть отношение эквивалентности.

Классы, на которые отношение A-гомотопности разбивает множество непрерывных отображений $X \rightarrow Y$, совпадающих на A с отображением

$f : A \rightarrow Y$, называются *A-гомотопическими* или *относительными* классами непрерывных продолжений отображения f на X .

Доказательство ничем не отличается от доказательства утверждения 29. E.

29. M. Для каких $A \subset X$ прямолинейная гомотопия между непрерывными отображениями $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ связана на A ?

Для тех множеств A , на которых $f|_A = g|_A$ (т. е. множеств, содержащихся в множестве совпадения этих отображений).

9.1.10. Гомотопии и пути

Напомним, что *путём* в пространстве X называется любое непрерывное отображение $I \rightarrow X$. (См. 13.)

29. N. В каком смысле всякий путь является гомотопией?

Путь - это гомотопия отображения точки, ср. 29.8.

29. O. В каком смысле всякая гомотопия состоит из путей?

Для всякой точки $x \in X$ отображение $u_x : I \rightarrow X : t \mapsto h(x, t)$ является путем.

29. P. В каком смысле всякая гомотопия является путем?

Если H - это гомотопия, то для всякого $t \in I$ формула $h_t = H(x, t)$ определяет непрерывное отображение $X \rightarrow Y$. Таким образом, мы получаем отображение $\mathcal{H} : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ отрезка в множество всех непрерывных отображений из X в Y . Далее см. 29. Ax и 29. Bx.

Напомним, что *компактно-открытой топологией* в множестве $\mathcal{C}(X, Y)$ называется топология, предбазой которой являются всевозможные множества вида $\{\varphi \in \mathcal{C}(X, Y) \mid \varphi(K) \subset U\}$ для компактных множеств $K \subset X$ и открытых множеств $U \subset Y$ (см. 24x).

29. Ax. Всякая гомотопия $h_t : X \rightarrow Y$ определяет путь $u : t \mapsto h_t$ в пространстве $\mathcal{C}(X, Y)$, снабженном компактно-открытой топологией. Следует из 24. Sx.

29. Bx. Если пространство X локально компактно и хаусдорфово, то всякий путь в $\mathcal{C}(X, Y)$ (с компактно-открытой топологией) определяет некоторую гомотопию.

Следует из 24. Tx.

9.1.11. Гомотопии путей

29. **Q.** Два пути в пространстве X свободно гомотопны, когда их образы лежат в одной и той же компоненте линейной связности этого пространства.

Следует из решения задачи 29.3.

Результат этой задачи показывает, что понятие свободной гомотопии путей не представляет интереса. С другой стороны, одна из разновидностей относительной гомотопии путей играет очень важную роль. Это $\{0,1\}$ -гомотопия. В связи с этим традиционно под *гомотопией путей* всегда понимают гомотопию, связанную на концах отрезка I (т. е. на множестве $\{0,1\}$).

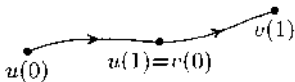
Обозначение: $\{0,1\}$ -гомотопический класс пути s (в дальнейшем просто - гомотопический класс) обозначается через $[s]$.

9.2. Гомотопические свойства умножения путей

9.2.1. Умножение гомотопических классов путей

Напомним (см. 13), что пути u и v в пространстве X можно перемножить, если начало $v(0)$ пути v совпадает с концом $u(1)$ пути u . Произведение uv определено формулой

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{при } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ v(2t - 1) & \text{при } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



30. **A.** Если путь u гомотопен пути u' , путь v гомотопен пути v' и существует произведение uv , то существует произведение $u'v'$, и оно гомотопно произведению uv .

Определим произведение гомотопических классов путей u и v как гомотопический класс пути uv . Таким образом, произведение $[u][v]$ определено тогда же, когда определено и произведение uv , и $[u][v] = [uv]$. Это определение - из тех, что требуют доказательства.

1) Начнем с наглядного описания искомой гомотопии. Пусть

$u_t : I \rightarrow X$ - гомотопия, соединяющая u и u' , а $v_t : I \rightarrow X$ - гомотопия, соединяющая v и v' . Тогда пути $u_t v_t$, $ct \in [0; 1]$ составляют гомотопию между uv и $v'v'$.

2) Теперь приведем более формальное рассуждение. Так как произведение uv определено, то $u(1) = v(0)$. Так как $u \sim u'$, то $u(1) = u'(1)$, аналогичным образом и $v(0) = v'(0)$. Значит, определено произведение $u'v'$. Гомотопией между uv и $u'v'$ является отображение

$$H : I \times I \rightarrow X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H'(2s, t) & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ H''(2s - 1, t) & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

(Оно непрерывно, поскольку множества $[0; \frac{1}{2}] \times I$ и $[\frac{1}{2}; 1] \times I$ составляют фундаментальное покрытие квадрата $I \times I$, а сужение H на каждое из этих множеств является непрерывным.)

30.В. Произведение гомотопических классов путей определено корректно, т. е. если $[u] = [u']$ и $[v] = [v']$, то $[uv] = [u'v']$.

Конечно, в том случае, когда конечная точка первого пути совпадает с начальной точкой второго.

Непосредственно следует из 30.А.

9.2.2. Ассоциативность

30.С. Ассоциативно ли умножение путей?

Нет; см. 30.Д, ср. 30.1.

Конечно, этот вопрос стоит сформулировать более точно.

30.Д. Пусть u, v и w - пути в некотором пространстве, для которых определены произведения uv и vw (т. е. $u(1) = v(0)$ и $v(1) = w(0)$).

Всегда ли верно, что $(uv)w = u(vw)$?

Нет, почти никогда не верно (см. 30.1 и 30.2). Вот простейший пример.

Пусть $u(s) = 0$ и $w(s) = 1$ при всех $s \in [0; 1]$ и $v(s) = s$. Тогда $((uv)w)(s) = 0$ только при $s \in [0; \frac{1}{3}]$, а $(u(vw))(s) = 0$ при $s \in [0; \frac{1}{2}]$.

30.1. Докажите, что для путей в хаусдорфовом пространстве равенство $(uv)w = u(vw)$ имеет место, тогда каждый из этих путей является постоянным отображением.

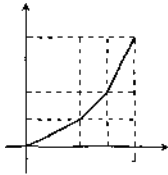
30.2. Найдите непостоянные пути u, v и w в антидискретном пространстве, такие что $(uv)w = u(vw)$.

30.Е. Умножение гомотопических классов путей ассоциативно.

30.E. 1. Переформулируйте теорему 30.E в терминах путей и их гомотопий.

Переформулировка: для всяких путей u , v и w , для которых определены произведения $(uv)w$ и $u(vw)$ гомотопны.

30.E. 2. Найдите такое отображение $\varphi : I \rightarrow I$, что если u , v и w - это пути, причем $u(1) = v(0)$ и $v(1) = w(0)$, то $((uv)w) \circ \varphi = u(vw)$.



Пусть

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{s}{2} & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ s - \frac{1}{4} & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}], \\ 2s - 1 & \text{при } s \in [\frac{3}{4}; 1]. \end{cases}$$

Убедитесь в том, что φ - искомая функция, т. е. что $((uv)w)(\varphi(s)) = (u(vw))(s)$.

30.E.3. Всякий путь I в начинающийся в нуле и заканчивающийся в единице, гомотопен пути $\text{id} : I \rightarrow I$.

Рассмотрите прямолинейную гомотопию, которая, к тому же, будет связана на $\{0, 1\}$.

30.E.4. Пусть u , v и w - такие пути в некотором пространстве, что произведения uv и vw определены (т. е. $u(1) = v(0)$ и $v(1) = w(0)$). Тогда путь $(uv)w$ гомотопен пути $u(vw)$.

Следует из 29.1, 30.E.2 и 30.E.3.

Если вы хотите понять смысл теоремы 30.E, то нужно прежде всего осознать, что пути $(uv)w$ и $u(vw)$ имеют одну и ту же траекторию, а различаются лишь "расписанием движения" по ней. Поэтому для того, чтобы найти гомотопию между ними, нужно лишь найти непрерывный способ перехода от расписания одного из них на расписание другого. Предложенные выше леммы дают формальный способ такого перехода, но того же эффекта можно добиться и многими другими способами.

30.3. Выпишите явные формулы для гомотопии H между путями $(uv)w$ и $u(vw)$.

9.2.3. Единица

Для произвольной точки $a \in X$ обозначим через e_a путь $I \rightarrow X : t \mapsto a$.

30.F. Является ли путь e_a единицей (с точки зрения произведения путей)?

См. **30.G.**

Раскроем смысл этого вопроса:

30.G. Пусть u - путь, начинающийся в точке a , т. е. $u(0) = a$. Верно ли, что $e_a u = u$? Аналогично, верно ли, что если $v(1) = a$, то $v e_a = v$?

Вообще говоря, нет; см. **30.4.**

30.4. Докажите, что если $e_a u = u$ и пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости, то $u = e_a$.

30.H. Гомотопический класс $[e_a]$ пути e_a является единицей относительно умножения гомотопических классов путей.

Пусть

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2s - 1, & \text{если } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Убедитесь, что $e_a u = u \circ \varphi$. Так как $\varphi \sim \text{id}_I$, то $u \circ \varphi \sim u$, следовательно

$$[e_a][u] = [e_a u] = [u \circ \varphi] = [u].$$

9.2.4. Обратные элементы

Напомним, что для всякого пути u обратным к нему называется путь u^{-1} , определенный формулой $u^{-1}(t) = u(1 - t)$ (см. 13).

30.I. Является ли обратный путь обратным в смысле умножения путей?

См. **30.J.**

Другими словами:

30.J. Верно ли, что если путь u начинается в точке a и заканчивается в точке b , то $u u^{-1} = e_a$ и $u^{-1} u = e_b$?

Конечно, нет.

30.5. Докажите, что если $u u^{-1} = e_a$, то $u = e_a$.

30.K. Для всякого пути v гомотопический класс обратного пути v^{-1} является обратным к гомотопическому классу пути v : $[v]^{-1} = [v^{-1}]$.

30.K.I. Найдите такое отображение $\varphi : I \rightarrow I$, что $v v^{-1} = v \circ \varphi$ для всякого пути v .

Рассмотрите отображение

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s, & \text{если } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2 - 2s, & \text{если } s \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

30.K.2. Всякий путь в I , начинающийся и заканчивающийся в нуле, гомотопен постоянному пути $e_0 : I \rightarrow I$.

Рассмотрите прямолинейную гомотопию.

Мы видим, что хотя с алгебраической точки зрения операция умножения путей не обладает обычными свойствами, такими как ассоциативность и т. п., она определяет в множестве гомотопических классов путей операцию, которая обладает привычными алгебраическими свойствами. Единственный недостаток этой операции в том, что она определена не для любых двух классов путей.

30.L. Какие подмножества множества гомотопических классов путей являются группами относительно перемножения, изученного выше?

Группами являются множества классов таких путей u , для которых $u(0) = u(1) = x_0$, где x_0 — некоторая фиксированная точка пространства X , а также любые их подгруппы.

9.3. Фундаментальная группа

9.3.1. Определение фундаментальной группы

Пусть X — топологическое пространство, $x_0 \in X$. Путь в X , который начинается и заканчивается в точке x_0 , назовем *петлей* пространства X в x_0 . Обозначим через $\Omega_1(X, x_0)$ множество петель X в точке x_0 , а через $\pi_1(X, x_0)$ — множество гомотопических классов таких петель. В обоих множествах $\Omega_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_0)$ имеется операция умножения.

31. А. Для любого топологического пространства X и любой его точки x_0 множество $\pi_1(X, x_0)$ гомотопических классов петель пространства X в точке x_0 с введенной в 30 операцией умножения гомотопических классов является группой.

Непосредственно следует из утверждений 30.B, 30.E, 30.H и 30.K.

Группа $\pi_1(X, x_0)$ называется *фундаментальной группой* пространства

X в точке x_0 . Она была введена А. Пуанкаре, поэтому иногда ее называют *группой Пуанкаре*. Буква π в обозначении - тоже в честь Пуанкаре.

9.3.2. Откуда индекс 1?

Нижний индекс 1 в обозначении $\pi_1(X, x_0)$ появился много позже чем буква π . Он связан с еще одним названием фундаментальной группы: *первая* (или *одномерная*) *гомотопическая группа*. Имеется бесконечная последовательность групп $\pi_r(X, x_0)$ с $r = 1, 2, \dots$, и фундаментальная группа - первая из них. Многомерные гомотопические группы были введены Витольдом Гуревичем в 1935 г., более чем через 30 лет после определения фундаментальной группы. Грубо говоря, общее определение $\pi_r(X, x_0)$ получается из определения $\pi_1(X, x_0)$ посредством повсеместной замены отрезка I на куб I^r .

31.В. Как можно обобщить все задачи этого параграфа так, чтобы в них повсюду отрезок I был бы заменён кубом I^r ?

Имеется ещё и так называемая "нульмерная гомотопическая группа"¹ $\pi_0(X, x_0)$, которая, как правило, группой не является. Это - множество компонент линейной связности пространства X . Хотя в множестве $\pi_0(X, x_0)$ нет никакой естественной операции умножения (если только пространство X не снабжено дополнительной алгебраической структурой), однако в нём имеется единица: так называют естественный выделенный элемент - компоненту линейной связности пространства X , содержащую точку x_0 .

9.3.3. Круговые петли

Пусть X - топологическое пространство, $x_0 \in X$. Непрерывное отображение $l : S^1 \rightarrow X$, такое что $l(1) = x_0$, называется *круговой петлей* в x_0 . Свяжем с каждой такой круговой петлей l определенную выше петлю пространства X в той же точке, взяв композицию l с экспоненциальным отображением $I \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$.

31.С. Всякая петля может быть получена таким образом из некоторой круговой петли.

Если $l : I \rightarrow X$ - петля, то существует факторотображение $\tilde{y} : I/\{0, 1\} \rightarrow X$. Осталось заметить, что $I/\{0, 1\} \cong S^1$.

Круговые петли называются *гомотопными*, если они 1-гомотопны (т. е. если гомотопия между ними является связанной в точке $1 \in S^1$). Го-

мотопия круговых петель, не связанная в точке 1, называется *свободной*.

31.D. Круговые петли гомотопны, тогда гомотопны соответствующие им обычные петли.

Если $H : S^1 \times I \rightarrow X$ гомотопия круговых петель, то гомотопия H' обычных петель задается формулой

$H'(s, t) = H(e^{2\pi i s}, t)$. Гомотопии круговых петель является факторами гомотопий обычных петель по разбиению квадрата, порожденному отношением $(0, t) \sim (1, t)$.

31.1. Какие свободные гомотопии путей соответствуют свободным гомотопиям круговых петель?

31.2. Опишите операцию над круговыми петлями, соответствующую умножению путей.

31.3. Пусть U и V — круговые петли с общей начальной точкой $U(1) = V(1)$, отвечающие петлям u и v . Докажите, что круговая петля, определяемая формулой

$$z \mapsto \begin{cases} U(z^2) & \text{при } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ V(z^2) & \text{при } \operatorname{Im} z \leq 0, \end{cases}$$

отвечает произведению петель u и v .

31.4. Как построить фундаментальную группу, отправляясь от круговых петель?

9.3.4. Самые первые вычисления

31.E. Группа $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ тривиальна (т. е. состоит из одного элемента.)

Это так, поскольку имеется линейная гомотопия между всякой петлей в \mathbb{R}^n в начале координат и постоянной петлей.

31.F. Обобщите задачу 31.E на случаи, описанные в задачах 29. H и 29.4

Вот возможный вариант обобщения: для всякого выпуклого (и даже звёздного) множества $V \subset \mathbb{R}^n$ и всякой точки $x_0 \in V$ фундаментальная группа $\pi_1(V, x_0)$ тривиальна.

31.5. Вычислите фундаментальную группу антидискретного пространства.

31.6. Вычислите фундаментальную группу факторпространства круга D^2 , полученного в результате отождествления каждой точки $x \in D$ с точкой $-x$.

31.7. Докажите, что линейно связное двуточечное пространство односвязно.

31.G. При $n \geq 2$ группа $\pi_1(S^n, (1, 0, \dots, 0))$ тривиальна.

Независимо от того, решили Вы задачу 31.G или нет, мы советуем решить задачи 31.G.1 и 31.G.3, которые намечают подход к решению задачи 31.G, предупреждают о естественной ошибке и подготавливают важный инструмент для дальнейших вычислений фундаментальных групп.

31.G.1. Пусть $n \geq 2$. Докажите, что всякая петля $u : I \rightarrow S^n$, образ которой не заполняет сферу S^n целиком (т. е. $s(I) \neq S^n$), гомотопна постоянной петле. (Ср. 29.7.)

Пусть $p \in S^n \setminus u(I)$. Рассмотрим стереографическую проекцию $\tau : S^n \setminus p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Петля $v = \tau \circ u$ гомотопна нулю, пусть h - соответствующая гомотопия. Тогда $H = \tau^{-1} \circ h$ является гомотопией, соединяющей данную петлю u и постоянную петлю на сфере.

Предостережение: для любого n существуют петли, заполняющие S^n . См. 9.Ох.

31.G.2. Может ли петля, заполняющая всю сферу S^2 , быть гомотопной нулю?

Такие петли заведомо существуют. Действительно, если петля u заполняет всю сферу, то петля uu^{-1} также ее заполняет, но она, тем не менее, гомотопна нулю.

31.G.3 Следствие леммы Лебега (см. 16. V). Пусть $u : I \rightarrow X$ путь и Γ - открытое покрытие пространства X . Существует последовательность точек

$$a_1, \dots, a_N \in I, \text{ где } 0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1,$$

такая что для всякого i образ $u([a_i, a_{i+1}])$ содержится в некотором элементе покрытия Γ .

31. G.4- Пусть $n \geq 2$. Докажите, что для любого пути $u : I \rightarrow S^n$ существует такое разбиение отрезка I на конечное число отрезков, что сужение пути u на каждый из них связано гомотопно (относительно множества концевых точек этих отрезков) пути, образ которого нигде не плотен на сфере.

Пусть x - произвольная точка сферы. Покроем сферу двумя открытыми множествами $U = S^n \setminus \{x\}$ и $V = S^n \setminus \{-x\}$. В силу леммы 31. G.3

найдется такая последовательность точек $a_1, \dots, a_N \in I$, где $0 =$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1, \text{ что для всякого } i \text{ образ}$$

$u([a_i, a_{i+1}])$ целиком содержится в U или в V . Поскольку каждое из

этих множеств гомеоморфно \mathbb{R}^n , где любые два пути с одинаковым

началом и концом гомотопны, то каждое из сужений $u|_{[a_i, a_{i+1}]}$

гомотопно пути, образом которого является, к примеру, "дуга большой окружности" сферы S^n . Таким образом, путь u гомотопен пути, образ которого не то что не заполняет сферу, а даже нигде не плотен в пей.

31.G.5. Пусть $n \geq 2$. Докажите, что всякая петля в S^n гомотопна петле, не заполняющей эту сферу целиком.

Прямое следствие предыдущей леммы.

31. G.6. 1) Выведите 31.G из 31.G.1 и 31.G.5. 2) Укажите все моменты полученного таким образом решения задачи 31.G, в которых использовалось условие $n \geq 2$.

1) Прямое следствие лемм 31.C5 и 31. G. 1.

2) Условие $n > 2$ использовалось только в лемме 31.G.4.

9.3.5. Фундаментальная группа произведения

31.H. Фундаментальная группа произведения топологических пространств канонически изоморфна произведению фундаментальных групп сомножителей:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Сопоставим петле $u : I \rightarrow X \times Y$ в точке (x_0, y_0) петли в X и Y , являющиеся координатными отображениями $u_1 = \text{pr}_X \circ u$ и $u_2 = \text{pr}_Y \circ u$. В силу утверждения 29.1, петли u и v гомотопны, тогда $u_1 \sim v_1$ и $u_2 \sim v_2$. Следовательно, сопоставив классу петли u пару $([u_1], [u_2])$, мы получим биекцию между фундаментальной группой $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ произведения пространств и произведением $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ фундаментальных групп его сомножителей.

Осталось проверить, что построенная биекция является гомоморфизмом, что также очевидно, поскольку

$$\text{pr}_X \circ (uv) = (\text{pr}_X \circ u)(\text{pr}_X \circ v).$$

31.8. Рассмотрим петлю $u : I \rightarrow X$ в точке x_0 , петлю $v : I \rightarrow Y$ в точке y_0 и петлю $w = u \times v : I \rightarrow X \times Y$. Введем петли

$$u' : I \rightarrow X \times Y : t \mapsto (u(t), y_0) \text{ и}$$

$$v' : I \rightarrow X \times Y : t \mapsto (x_0, v(t)). \text{ Докажите, что } u'v' \sim w \sim v'u'.$$

31.9. Докажите, что при $n \geq 3$ группа $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus 0, (1, 0, \dots, 0))$ тривиальна.

9.3.6. Односвязность

Непустое топологическое пространство X называется *односвязным*, если оно линейно связно и всякая петля в нем гомотопна нулю. Таким образом, линейно связное пространство X называется однопсвязным, если для всякой его точки $x \in X$ фундаментальная группа $\pi_1(X, x)$ тривиальна.

31.I. Пусть X - линейно связное топологическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) пространство X односвязно;
- (2) всякое непрерывное отображение $f : S^1 \rightarrow X$ (свободно) гомотопно нулю;
- (3) всякое непрерывное отображение $f : S^1 \rightarrow X$ может быть продолжено до непрерывного отображения $D^2 \rightarrow X$;
- (4) всякие два пути $u_1, u_2 : I \rightarrow X$, соединяющие одни и те же точки x_0 и x_1 , гомотопны друг другу.

(a) \Rightarrow (b): Пространство X односвязно \Rightarrow всякая петля в X гомотопна постоянной \Rightarrow всякая круговая петля в X связанно гомотопна нулю \Rightarrow всякая круговая петля свободно гомотопна нулю.

(b) \Rightarrow (c): По предположению, для произвольного отображения $f : S^1 \rightarrow X$ существует гомотопия $h : S^1 \times I \rightarrow X$, такая что $h(p, 0) = f(p)$ и $h(p, 1) = x_0$. Следовательно, существует непрерывное отображение $h' : S^1 \times I / (S^1 \times 1) \rightarrow X$, такое что $h = h' \circ \text{pr}$. Осталось заметить, что $S^1 \times I / (S^1 \times 1) \cong D^2$.

(c) \Rightarrow (d): Положим $g(t, 0) = u_1(t)$, $g(t, 1) = u_2(t)$, $g(0, t) = x_0$ и $g(1, t) = x_1$ при $t \in I$. Таким образом, определено отображение границы квадрата $I \times I$ в X . Поскольку квадрат гомеоморфен кругу, а его граница - окружности, то можно продолжить отображение с границы на весь квадрат. Полученное продолжение и является гомотопией между u_1 и u_2 .

(d) \Rightarrow (a): Очевидно.

Теорема 31.1 тесно связана со следующей теоремой 31. J. При этом, поскольку в теореме 31. J речь идёт не обо всех петлях, а об индивидуальной петле, она применима в большем круге ситуаций.

31.J. Пусть $s : I \rightarrow X$ - петля в топологическом пространстве X . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) петля s гомотопна нулю;
- (2) отображение $f : S^1 \rightarrow X : e^{2\pi it} \mapsto s(t)$, свободно гомотопно нулю;
- (3) отображение $f : S^1 \rightarrow X : e^{2\pi it} \mapsto s(t)$, может быть продолжено до непрерывного отображения $D^2 \rightarrow X$;
- (4) пути $s_{\pm} : I \rightarrow X : t \mapsto f(e^{\pm\pi it})$ гомотопны друг другу.

Для доказательства теоремы осталось установить справедливость импликации (d) \Rightarrow (a). Сформулируем утверждение, не используя понятия круговых петель. Пусть дана петля $s : I \rightarrow X$. Положим $s_+(t) = s(2t)$ и $s_-(t) = s(1 - 2t)$. Таким образом, надо доказать, что если пути s_+ и s_- гомотопны, то петля s гомотопна нулю. Постарайтесь доказать это самостоятельно.

31. J.1. Доказательство эквивалентности утверждений (a)-(d) требует доказательства по меньшей мере 4 импликаций. Какие импликации вы выберете для наиболее экономного доказательства теоремы 31. J.?

Разумно рассмотреть импликации $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

31. J.2. Следует ли из гомотопности круговых петель их свободная гомотопность?

Конечно, следует. При этом, раз петля s гомотопна нулю, то круговая петля f также гомотопна нулю, причем гомотопия даже является связанной в точке $1 \in S^1$. Таким образом, $(a) \Rightarrow (b)$.

31. J.3. Существует факторотображение гомотопии между некоторым отображением окружности и постоянным отображением окружности, у которого отображаемое пространство гомеоморфно кругу.

Данное утверждение подсказывает основную идею доказательства импликации $(b) \Rightarrow (c)$. Гомотопия между некоторой круговой петлей f и постоянной петлей есть отображение $H : S^1 \times I \rightarrow X$, постоянное на верхнем основании цилиндра. Следовательно, существует факторотображение $S^1 \times I / S^1 \times 1 \rightarrow X$. Осталось заметить, что факторпространство цилиндра по его верхнему основанию гомеоморфно кругу.

31. J.4. Переформулируйте задачу построения гомотопии между путями s_+ и s_- , как задачу продолжения некоторого непрерывного отображения контура квадрата на его внутренность.

По определению гомотетии $H : I \times I \rightarrow X$ между двумя путями, задано сужение отображения H на контур квадрата. Следовательно, задача построения гомотопии между двумя путями есть задача продолжения отображения с контура квадрата на сам этот квадрат.

31. J.5. Помогает ли решению задачи продолжения, сформулированной в результате решения задачи 31.J.4, продолжимость круговой петли $f : S^1 \rightarrow X$, где $f(e^{2\pi i t}) = s(t)$, до непрерывного отображения круга?

Все, что осталось заметить для доказательства импликации $(c) \Rightarrow (d)$, так это то, что если $F : D^2 \rightarrow X$ - это продолжение круговой петли f , то формула $H(t, \tau) = F(\cos \pi t, (2\tau - 1) \sin \pi t)$ определяет гомотопия между s_+ и s_- .

31.10. Какие из следующих пространств являются односвязными:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|----------------------|
| (a) дискретное пространство; | (b) антидискретное пространство; | (c) \mathbf{R}^n ; |
| (d) выпуклое множество; | (e) звездное множество; | |
| (f) S^n ; | (g) $\mathbf{R}^n \setminus 0$? | |

31.11. Докажите, что топологическое пространство, представимое в виде объединения двух открытых односвязных множеств, пересечение которых линейно связно, само является односвязным.

31.12. Покажите, что требования открытости множеств в предыдущей задаче 31.11 существенны.

31.13*. Пусть множества U и V открыты в пространстве X . Докажите, что если множества $U \cup V$ и $U \cap V$ односвязны, то и сами U и V односвязны.

9.3.7х. Фундаментальная группа группы топологической

Пусть G - топологическая группа. Определим для любых петель $u, v : I \rightarrow G$ начинающихся в единице $1 \in G$ петлю $u \odot v : I \rightarrow G$ формулой $(u \odot v)(s) = u(s) \cdot v(s)$, где \cdot обозначает групповую операцию в G .

31. Ах. Докажите, что множество $\Omega(G, 1)$ всех петель в G , начинающихся в 1, с операцией \odot является группой.

Ассоциативность операции \odot следует из ассоциативности умножения в группе G ; единицей в множестве $\Omega(G, 1)$ всех петель является постоянная петля в единице группы: обратным к петле u элементом является путь v , где $v(s) = (u(s))^{-1}$.

31. Вх. Докажите, что операция \odot в $\Omega(G, 1)$ определяет групповую операцию в $\pi_1(G, 1)$ и что эта операция совпадает со стандартной групповой операцией (определённой перемножением путей; ср 31.8).

Докажем, что если $u \sim u_1$, то $u \odot v \sim u_1 \odot v$, для чего достаточно убедиться в том, что если h - это гомотопия между u и u_1 , то формула $H(s, t) = h(s, t)v(s)$ определяет гомотопию между $u \odot v$ и $u_1 \odot v$.

Далее, так как $ue_1 \sim u$ и $e_1v \sim v$, то $uv = (ue_1) \odot (e_1v) \sim u \odot v$, значит, пути uv и $u \odot v$ лежат в одном гомотопическом классе. Следовательно, операция \odot порождает в множестве гомотопических классов путей стандартную групповую операцию.

31. Вх.1. Для петель $u, v : I \rightarrow G$ начинающихся в 1, найдите $(ue_1) \odot (e_1v)$.

Убедитесь, что $(ue_1) \odot (e_1v) = uv$.

31. Сх. Фундаментальная группа любой топологической группы абелева.

Достаточно доказать, что $uv \sim vu$, а это следует из цепочки

$$uv = (ue_1) \odot (e_1v) \sim u \odot v \sim (e_1u) \odot (ve_1) = vu.$$

9.3.8х. Высшие гомотопические группы

Пусть X - топологическое пространство, $x_0 \in X$. Непрерывное отображение $I^r \rightarrow X$, отображающее границу ∂I^r куба I^r в x_0 , называется r -мерным сфероидом пространства X в точке x_0 . Два r -мерных сфероида называются *ГОМОТОПНЫМИ*, если они ∂I^r -гомотопны. Произведение uv сфероидов u и v размерности $r \geq 1$ определяется формулой

$$uv(t_1, t_2, \dots, t_r) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \dots, t_r) & \text{if } t_1 \in [0; \frac{1}{2}], \\ v(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_r) & \text{if } t_1 \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Обозначим через $\Omega_r(X, x_0)$ множество r -мерных сфероидов пространства X в точке x_0 . Множество гомотопических классов r -мерных сфероидов пространства X в точке x_0 называется r -й (или r -мерной) *группой гомотопий* или *гомотопической группой* $\pi_r(X, x_0)$ этого пространства в x_0 . Произведение сфероидов индуцирует произведение в множестве $\pi_r(X, x_0)$ их гомотопических классов, превращая $\pi_r(X, x_0)$ в группу.

31.Dx. Найдите $\pi_r(\mathbb{R}^n, 0)$.

Эта группа тривиальна. Доказательство аналогично доказательству утверждения **31.E**.

31.Ex. При $r \geq 2$ группа $\pi_r(X, x_0)$ абелева для любых X и x_0 .

31.Fx. Для всякой пары X, x_0 и любого числа $r \geq 2$ группа $\pi_r(X, x_0)$ является фундаментальной группой некоторого вспомогательного пространства. Какого?

Аналогично тому, как это было описано в 31'3, высшие гомотопические группы можно построить не из гомотопических классов отображений $(I^r, \partial I^r) \rightarrow (X, x_0)$, но как

$$\pi(S^r, (1, 0, \dots, 0); X, x_0).$$

Еще один стандартный путь их построения заключается в определении $\pi_r(X, x_0)$ как $\pi(D^r, \partial D^r; X, x_0)$.

31.Gx. Постройте естественные биекции

$$\pi(I^r, \partial I^r; X, x_0) \rightarrow \pi(D^r, \partial D^r; X, x_0) \rightarrow \pi(S^r, (1, 0, \dots, 0); X, x_0).$$

31.Hx. Докажите следующее обобщение теоремы **31.H**:

$$\pi_r(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_r(X, x_0) \times \pi_r(Y, y_0).$$

31.Ix. Сформулируйте и решите аналоги задач **31.Ax** и **31.Bx** для высших гомотопических групп и $\pi_0(G, 1)$.

9.4. Роль отмеченной точки

9.4.1. Предварительное описание роли отмеченной точки

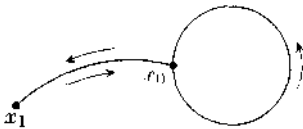
В одних ситуациях выбор отмеченной точки ни на что не влияет, в других - его роль очевидна, в третьих это очень деликатная тема. В этом параграфе нам предстоит разобраться во всех нюансах, связанных с отмеченной точкой, и мы начнём с предварительных формулировок, описывающих предмет в целом, но без технически лишних деталей. Грубо говоря, выбор отмеченной точки влияет на фундаментальную группу следующим образом.

- Если мы изменяем отмеченную точку, оставаясь в пределах одной компоненты линейной связности, то фундаментальная группа остается в одном и том же классе изоморфных групп.
- Однако, если фундаментальная группа не коммутативна, невозможно найти естественного изоморфизма между фундаментальными группами с разными отмеченными точками, даже если они лежат в одной и той же компоненте линейной связности.
- Если же отмеченные точки лежат в разных компонентах линейной связности, то соответствующие фундаментальные группы вообще никак не связаны друг с другом.

В этом параграфе всё это будет доказано. Доказательство содержит конструкции, значение которых выходит за рамки исходного вопроса о роли отмеченной точки.

9.4.2. Перенос вдоль пути

Пусть x_0 и x_1 - точки топологического пространства X , а s - путь, соединяющий x_0 с x_1 . Обозначим гомотопический класс пути s через σ . Определим отображение $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ формулой $T_s(\alpha) = \sigma^{-1}\alpha\sigma$ (см. 30.K).



32.1. Для любой петли $\alpha : I \rightarrow X$, представляющей элемент $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, и всякого пути $s : I \rightarrow X$ с $s(0) = x_0$ существует свободная

гомотопия $H : I \times I \rightarrow X$ между a и петлей, представляющей элемент $T_s(\alpha)$, такая что $H(0, t) = H(1, t) = s(t)$, $t \in I$.

32.2. Пусть петли $a, b : I \rightarrow X$ гомотопны посредством такой гомотопии $H : I \times I \rightarrow X$, что $H(0, t) = H(1, t)$ (т. е. H является свободной гомотопией петель: в каждый момент $t \in I$ начальная точка совпадает с конечной). Положим $s(t) = H(0, t)$ (таким образом, s есть путь, определяемый движением начальной точки рассматриваемой петли при рассматриваемой гомотопии). Тогда гомотопический класс петли b является образом гомотопического класса петли a при отображении $T_s : \pi_1(X, s(0)) \rightarrow \pi_1(X, s(1))$.

9.4.3. Свойства отображения T_s

32.A. *Отображение T_s является групповым гомоморфизмом.*

Напомним - это означает, что $T_s(\alpha\beta) = T_s(\alpha)T_s(\beta)$.

Действительно, если $\alpha = [u]$ и $\beta = [v]$, то

$$T_s(\alpha\beta) = \sigma^{-1}\alpha\beta\sigma = \sigma^{-1}\alpha\sigma\sigma^{-1}\beta\sigma = T_s(\alpha)T_s(\beta).$$

32. B. *Если путь u соединяет x_0 с x_1 , а путь v соединяет x_1 с x_2 , то*

$T_{uv} = T_v \circ T_u$. Другими словами, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{T_u} & \pi_1(X, x_1) \\ T_{uv} \searrow & & \downarrow T_v \\ & & \pi_1(X, x_2) \end{array} .$$

Действительно,

$$T_{uv}(\alpha) = [uv]^{-1}\alpha[uv] = [v]^{-1}[u]^{-1}\alpha[u][v] = T_v(T_u(\alpha)).$$

32. C. *Если пути u и v гомотопны, то $T_u = T_v$.*

По самому определению переноса вдоль пути гомоморфизм T_s зависит только от гомотопического класса пути s .

32.D. $T_{e_a} = \text{id}_{\pi_1(X, a)} : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$.

32.E. $T_{s^{-1}} = T_s^{-1}$.

Так как $s^{-1}s \sim e_{x_1}$, то из 32. B-32.D следует, что

$$T_{s^{-1}} \circ T_s = T_{s^{-1}s} = T_{e_{x_1}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)} .$$

Аналогичным образом, $T_s \circ T_{s^{-1}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Значит, $T_{s^{-1}} = T_s^{-1}$.

32.F. *Для всякого пути s гомоморфизм T_s является изоморфизмом.*

В силу 32.E у гомоморфизма T_s имеется обратный, следовательно, T_s - изоморфизм.

32. *G* Теорема. Если точки x_0 и x_1 лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства X , то группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны.

Если точки x_0 и x_1 лежат в одной компоненте линейной связности, то их можно соединить путем s . В силу 32.F, $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ - изоморфизм.

Несмотря на результат теоремы 32. *G*, мы не можем писать $\pi_1(X)$ даже если топологическое пространство X линейно связно. Дело в том, что хотя группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны, но между ними нет никакого канонического изоморфизма (см. далее 32.X).

32.H. Пространство X односвязно, тогда оно линейно связно и для некоторой точки $x_0 \in X$ группа $\pi_1(X, x_0)$ тривиальна.

Прямое следствие теоремы 32. *G*.

9.4.4. Роль пути

32.I. Если петля s является представителем элемента σ фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$, то T_s является внутренним автоморфизмом этой группы, определённым формулой $\alpha \mapsto \sigma^{-1}\alpha\sigma$.

Прямое следствие определения гомоморфизма T_s .

32. *J*. Пусть X - топологическое пространство, точки $x_0, x_1 \in X$. Изоморфизм $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ не зависит от пути s , тогда фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.

Предположим, что изоморфизм переноса не зависит от пути, в частности, изоморфизм переноса вдоль петли в точке x_0 тривиален (т. е. является тождественным). Рассмотрим произвольный элемент

$\beta \in \pi_1(X, x_0)$ и петлю s из гомотопического класса β . По условию $\beta^{-1}\alpha\beta = T_s(\alpha) = \alpha$ для любого $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Значит, $\alpha\beta = \beta\alpha$ для любых элементов $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$, что и означает, что группа $\pi_1(X, x_0)$ - абелева.

Рассмотрим пути s_1, s_2 , соединяющие точку $x_0 \in X$ точкой x_1 . Так как $T_{s_1 s_2^{-1}} = T_{s_2^{-1}} \circ T_{s_1}$, то $T_{s_1} = T_{s_2}$, тогда $T_{s_1 s_2^{-1}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Пусть $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ - это класс петли $s_1 s_2^{-1}$.

Если группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева, то $T_{s_1 s_2^{-1}}(\alpha) = \beta^{-1}\alpha\beta = \alpha$, таким образом, $T_{s_1 s_2^{-1}} = \text{id}$, значит, $T_{s_1} = T_{s_2}$.

Из теоремы 32. *J* следует, что если фундаментальная группа топологического пространства X является абелевой, мы вправе писать просто $\pi_1(X)$.

9.4.5х. Перенос вдоль пути в топологической группе

В случае, если G - топологическая группа, группы $\pi_1(G, x_0)$ и $\pi_1(G, x_1)$ можно связать и по-другому: имеются гомеоморфизмы $L_g : G \rightarrow G$:

$x \mapsto xg$ и $R_g : G \rightarrow G : x \mapsto gx$, и они определяют

изоморфизмы $(L_{x_0^{-1}x_1})_* : \pi_1(G, x_0) \rightarrow \pi_1(G, x_1)$ и

$(R_{x_1x_0^{-1}})_* : \pi_1(G, x_0) \rightarrow \pi_1(G, x_1)$.

32. Ах. Пусть G - топологическая группа, $s : I \rightarrow G$ - путь. Докажите, что

$$T_s = (L_{s(0)^{-1}s(1)})_* = (R_{s(1)s(0)^{-1}})_* : \pi_1(G, s(0)) \rightarrow \pi_1(G, s(1)).$$

Пусть u - петля в точке $s(0)$. Формула $H(\tau, t) = u(\tau)s(0)^{-1}s(1)$ определяет свободную гомотопию между u и петлей $L_{s(0)^{-1}s(1)}(u)$, при этом $H(0, t) = H(1, t) = s(t)$. Поэтому, в силу 32.2, петли

$L_{s(0)^{-1}s(1)}(u)$ и $s^{-1}us$ являются гомотопными, откуда и следует

равенство $T_s = (L_{s(0)^{-1}s(1)})_*$. Равенство для $R_{s(0)^{-1}s(1)}$ доказывается

аналогично.

32. Вх. Выведите из 32.Ах что фундаментальная группа любой топологической группы абелева (ср. 31.Сх).

В силу 32.Ах, $T_s = (L_s)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ для всякой петли s в

точке x_0 , таким образом, если β - это класс петли s , то

$$T_s(\alpha) = \beta^{-1}\alpha\beta = \alpha, \text{ откуда и следует, что } \alpha\beta = \beta\alpha.$$

32. Ix. Докажите, что фундаментальные группы следующих пространств коммутативны:

(1) пространства невырожденных вещественных $n \times n$ матриц

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\};$$

(2) пространства ортогональных вещественных их n матриц $O(n, \mathbb{R}) =$

$$\{A \mid A \cdot ({}^t A) = \mathbb{E}\};$$

(3) пространства специальных унитарных комплексных $n \times n$ матриц

$$SU(n) = \{A \mid A \cdot ({}^t \bar{A}) = \mathbb{E}, \det A = 1\}.$$

9.4.6х. Перенос вдоль пути в высших гомотопических группах

32. Сх. Догадайтесь, как обобщить T_s на высшие гомотопические группы.

Вот другой вариант той же задачи: в нем больше подсказки.

32. Dx. Как по пути $s : I \rightarrow X$ с $s(0) = x_0$ и сфероиду

$f : I^r \rightarrow X$ в точке x_0 соорудить сфероид того же пространства в точке $x_1 = s(1)$?

32. Ex. Докажите, что для любого пути $s : I \rightarrow X$ и любого сфероид

$f : I^r \rightarrow X$, где $f(\text{Fr } I^r) = s(0)$, существует его гомотопия

$H : I^r \times I \rightarrow X$ такая, что $H(\text{Fr } I^r \times t) = s(t)$ для всякого $t \in I$,

причем сфероид, полученный в результате этой гомотопии, единственен с точностью до гомотопии и тем самым определяет элемент $\pi_r(X, s(1))$, зависящий лишь от гомотопического класса пути s и элемента группы $\pi_r(X, s(0))$, представленного сфероидом f .

Конечно, решение задачи **32. Ex** даст ответ на вопрос предшествующих ей задач **32. Dx** и **32. Сх**. Отображение $\pi_r(X, s(0)) \rightarrow \pi_r(X, s(1))$, которое определено в **32. Ex**, обозначается через T_s . В силу **32.2**, оно обобщает отображение T_s , определённое в **32'2** в случае $r = 1$.

32. Fx. Докажите, что свойства отображения T_s , сформулированные в задачах **32. А-32. G**, имеют место во всех размерностях.

32. Gx. Каковы аналоги теорем **32. Ах а** **32. Вх** для высших гомотопических групп?

10. Накрытия и вычисление фундаментальной группы

10.1. Накрытия

10.1.1. Определение накрытия

Пусть X и B - топологические пространства, $p : X \rightarrow B$ - непрерывное отображение. Предположим, что p сюръективно и что у каждой точки пространства B существует такая окрестность U , что её прообраз $p^{-1}(U)$ при отображении p представляется в виде объединения непере-

секающихся открытых множеств V_α , каждое из которых посредством p отображается гомеоморфно на U . В этом случае $p : X \rightarrow B$ называется **накрытием** (пространства B), B называется **базой** этого накрытия, X - **накрывающим пространством** для B и **тотальным пространством** этого накрытия. Говорят, что окрестность U является **правильно накрытой** или **правильно накрываемой**. Отображение p также называется **накрывающим отображением** или **проекцией** этого накрытия.

33.А. Для любого топологического пространства B и любого дискретного пространства F проекция $\text{pr}_B : B \times F \rightarrow B$ является накрытием. Покажем, что само множество B является правильно накрытым. Действительно, $(\text{pr}_B)^{-1}(B) = X = \bigcup_{y \in F} (B \times y)$, а поскольку топология в пространстве F дискретна, то каждое из множеств $B \times y$ открыто в тотальном пространстве накрытия, а сужение pr_B на каждое из них есть гомеоморфизм.

33.1. Если $U' \subset U \subset B$ и окрестность U является правильно накрытой, то и окрестность U' правильно накрыта.

Следующее утверждение показывает, что в некотором смысле всякое накрытие локально устроено так же, как накрытие в 33.А.

33.В. Непрерывная сюръекция $p : X \rightarrow B$ есть накрытие, тогда у каждой точки $a \in B$ прообраз $p^{-1}(a)$ является дискретным подпространством пространства X и существует такая её окрестность U в B и такой гомеоморфизм $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(a)$, что $\text{pr}_{p^{-1}(U)} = \text{pr}_U \circ h$.

Построим гомеоморфизм $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(a)$ для произвольной правильно накрытой окрестности $U \subset B$ точки a . По определению правильно накрытой окрестности, $p^{-1}(U) = \bigcup U_\alpha$.

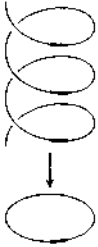
Пусть $x \in p^{-1}(U)$, Рассмотрим то из открытых множеств U_α , которое содержит точку x , и сопоставим ей пару $(p(x), c)$, где $\{c\} = p^{-1}(a) \cap U_\alpha$. Ясно, что соответствие $x \mapsto (p(x), c)$ определяет гомеоморфизм $h : p^{-1}(U) \rightarrow$

$$U \times p^{-1}(a).$$

В силу 33.1, U является правильно накрытой окрестностью, значит, $p : X \rightarrow B$ есть накрытие.

Однако накрытие, представленное в 33. А, само по себе не очень интересно. Такие накрытия называются *тривиальными*. А вот первый действительно интересный пример накрытия.

33. С. Отображение $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ является накрытием.



Для всякой точки $z \in S^1$ множество $U_z = S^1 \setminus \{-z\}$ является ее правильно накрытой окрестностью. Действительно, пусть $z = e^{2\pi i x}$. Тогда прообраз окрестности U_z - это объединение $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (x + k - \frac{1}{2}; x + k + \frac{1}{2})$, а сужение накрытия на каждый из указанных интервалов является гомеоморфизмом.

Для того, чтобы выделить наиболее содержательные примеры, будем называть накрытия с линейно связным тотальным пространством *накрытиями в узком смысле*. Конечно, накрытие из 33.C- это накрытие в узком смысле.

10.1.2. Примеры накрытий

33.D. Отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, y)$ является накрытием.

Правильно накрытой окрестностью точки $(z, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$ является произведение $(S^1 \setminus \{-z\}) \times \mathbb{R}$; ср. 33.E.

33.E. Докажите, что если $p : X \rightarrow B$ и $p' : X' \rightarrow B'$ - накрытия, то и $p \times p' : X \times X' \rightarrow B \times B'$ - накрытие.

Если $p : X \rightarrow B$ и $p' : X' \rightarrow B'$ - накрытия, то $p \times p' : X \times X' \rightarrow B \times B'$ будем называть *произведением накрытий* p и p' . Первый пример произведения накрытий приведен в 33. D.

33.F. Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto e^z$ является накрытием.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h^*} & \mathbb{C} \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \setminus \{0\}, \end{array}$$

в которой

$$g(z, x) = ze^x, \quad h(x, y) = y + 2\pi i x, \quad \text{а} \quad q(x, y) = (e^{2\pi i x}, y). \quad \text{Из}$$

равенства $g(q(x, y)) = e^{2\pi i x} \cdot e^y = e^{y+2\pi i x} = p(h(x, y))$ следует, что она коммутативна. Ясно, что отображения g и h являются гомеоморфизмами. Поскольку, в силу 33.D, отображение q является накрытием, то и p - накрытие.

33.2. В каком смысле накрытия из 33.D и 33.F одинаковы? Введите подходящее отношение эквивалентности накрытий.

33. G. Отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1 : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ является накрытием.

В силу 33.E, данное утверждение следует из 33. C. Конечно, его нетрудно доказать и непосредственно. Правильно накрытой окрестностью точки $(z, z') \in S^1 \times S^1$ будет произведение $(S^1 \setminus \{-z\}) \times (S^1 \setminus \{-z'\})$.

33.H. Для каждого натурального числа n отображение $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^n$ является накрытием.

Пусть $z \in S^1$. Прообраз точки $-z$ при проекции состоит из n точек, которые разбивают тотальное пространство накрытия на n дуг, при этом сужение проекции на каждую из них определяет гомеоморфизм этой дуги на окрестность $S^1 \setminus \{-z\}$ точки z .

33.3. Докажите, что для каждого натурального числа n отображение $\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z^n$ является накрытием.

33.I. Для любых натуральных чисел p и q отображение $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^p, w^q)$ является накрытием.

В силу 33.E, это утверждение следует из 33.H.

33. J. Естественная проекция $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ есть накрытие.

Прообраз точки $y \in \mathbb{R}P^n$ - это пара $\{x, -x\} \subset S^n$ антиподальных точек. Проходящая через центр сферы плоскость, ортогональная вектору x , разбивает сферу на две открытых полусферы, каждая из которых гомеоморфно проецируется на (гомеоморфную R^n) окрестность точки $y \in \mathbb{R}P^n$.

33.K. Является ли накрытием отображение $(0; 3) \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$? (Ср. 33.14)

Нет, не является, поскольку у точки $1 \in S^1$ не существует правильно накрытой окрестности.

33.L. Является ли накрытием проекция $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$? Действительно, почему бы не взять в качестве правильно накрытой окрестности открытый интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$: его прообраз $(a; b) \times \mathbb{R}$ есть объединение открытых интервалов $(a; b) \times y$, каждый из которых гомеоморфно проецируется (при стандартной проекции $(x, y) \mapsto x$) на $(a; b)$?

Указанные в формулировке открытые интервалы не являются открытыми подмножествами плоскости. Более того, поскольку прообраз всякого интервала есть связное множество, его вообще нельзя разбить на открытые непересекающиеся подмножества.

33.4. Постройте накрытие ленты Мёбиуса цилиндром.

33.5. Постройте нетривиальные накрытия ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса.

33.6. Постройте накрытие бутылки Клейна тором. Ср. с задачей 21.14.

33.7. Постройте накрытия бутылки Клейна: плоскостью \mathbf{R}^2 ; цилиндром $S^1 \times S^1$: нетривиальное накрытие самой бутылкой Клейна.

33.8. Дайте прямое описание разбиения плоскости на прообразы точек при накрытии бутылки Клейна плоскостью.

33.9*. Постройте накрытие сферы с данным числом плёнок сферой с некоторым числом ручек. Для каких чисел плёнок это удалось сделать?

10.1.3. Локальные гомеоморфизмы и накрытия

33.10. Любое накрытие является открытым отображением.

(Напомним, что отображение называется открытым, если образ любого открытого множества открыт.)

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если у всякой точки пространства X имеется окрестность U , образ которой $f(U)$ открыт в Y , а приведение $U \rightarrow f(U)$ отображения f есть гомеоморфизм.

33.11. Докажите, что всякое накрытие есть локальный гомеоморфизм.

33.12. Существуют ли локальные гомеоморфизмы, не являющиеся накрытиями?

33.13. Докажите, что сужение локального гомеоморфизма на всякое открытое подмножество есть локальный гомеоморфизм.

33.14. Для каких подмножеств прямой \mathbf{R} сужение отображения

$$\mathbf{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$$
 является накрытием?

33.15. Найдите нетривиальное накрытие $X \rightarrow B$, у которого тотальное пространство X гомеоморфно базе B , и убедитесь в том, что оно действительно удовлетворяет определению накрытия (хотя B и не является правильно накрываемой окрестностью).

10.1.4. Число листов накрытия

Пусть $p : X \rightarrow B$ есть накрытие. Мощност (т. е. число точек) прообраза $p^{-1}(a)$ точки $a \in B$ называется *кратностью* накрытия в a или *числом листов над a* .

33.М. Если база накрытия связна, то кратность накрытия в точке базы не зависит от выбора этой точки.

Докажите, что из определения накрытия следует, что множество точек базы, у которых прообраз имеет заданную мощность, является открытым, и воспользуйтесь связностью базы накрытия.

Тем самым в случае накрытия со связной базой имеет смысл говорить о *числе листов* данного накрытия, понимая под этим число листов над произвольной точкой его базы. Если число листов конечно и равно n , то накрытие называется *n -листным*. В противном случае говорят, что накрытие *бесконечнолистно*. Ясно, что хотя мы и говорим о числе листов накрытия, сами листы выделить невозможно, если только накрытие не является тривиальным. С другой стороны, мы введем следующее соглашение. По определению, прообраз $p^{-1}(U)$ всякой правильно накрытой окрестности $U \subset B$ разбивается на открытые подмножества, $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$, такие что сужение $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ - гомеоморфизм. Будем называть каждое из подмножеств V_α *листом* над U .

33.16. Чему равны числа листов у накрытий пункта 33'2'?

Мы не предполагаем, что читатель сможет строго обосновать решения задач 33.17- 33.19. Это будет сделано далее в задачах 39.3-39.6.

33.17. Какие числа могут быть реализованы как числа листов накрытия цилиндром $S^1 \times I$ ленты Мёбиуса?

33.18*. Какие числа вы можете реализовать как числа листов накрытия ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса?

33.19*. Какие числа вы можете реализовать как числа листов накрытия бутылки Клейна тором?

33.20*. Какие числа могут быть реализованы как числа листов накрытия бутылки Клейна бутылкой Клейна?

33.21*. Постройте d -листное накрытие сферы с p ручками сферой с $d(p - 1) + 1$ ручками.

33.22. Пусть $p : X \rightarrow Y$ и $q : Y \rightarrow Z$ накрытия. Докажите, что если q конечнолистно, то и $q \circ p : X \rightarrow Z$ - накрытие.

33.23*. Покажите, что предположение о конечности числа листов в задаче 33.22 является существенным.

33.24. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие с компактной базой B . Докажите, что:

- 1) если пространство X компактно, то накрытие конечнолистно;
- 2) если B хаусдорфово и накрытие конечнолистно, то X компактно.

33.25. Пусть X - топологическое пространство, представимое в виде объединения открытых связных множеств U и V . Докажите, что если пересечение $U \cap V$ не связно, то X обладает связным бесконечнолистным накрытием.

10.1.5. Универсальные накрытия

Накрытие $p : X \rightarrow B$ называется *универсальным*, если пространство X односвязно. Появление в этом контексте слова *универсальное* будет объяснено позже.

33. N. Какие из накрытий, обсуждавшихся выше, являются универсальными?

Те, в которых накрывающим пространством является $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n \setminus 0$ с $n \geq 3, S^n$ с $n \geq 2$, т. е. односвязное пространство.

10.2. Теоремы о накрывающих путях

10.2.1. Поднятие отображений

Пусть $p : X \rightarrow B$ и $f : A \rightarrow B$ произвольные отображения. Говорят, что отображение $g : A \rightarrow X$ *накрывает* отображение f или является его *поднятием* (по отношению к p), если $p \circ g = f$.

Множество топологических задач могут быть сформулированы как задачи поиска непрерывного накрывающего для данного непрерывного отображения. Задачи этого типа называются *задачами поднятия*. Их формулировки могут включать дополнительные требования на поднятия, например, в некоторых из них требуется, чтобы поднятие было фиксировано на некотором подпространстве.

34-A. Докажите, что тождественное отображение $S^1 \rightarrow S^1$ не может быть поднято по отношению к накрытию $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$.

(Другими словами, не существует такого непрерывного отображения $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, что $e^{2\pi i g(x)} = x$ для всех $x \in S^1$.)

Предположим, что поднятие g тождественного отображения окружности в себя существует; оно является непрерывной инъекцией $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Покажем, что таких инъекций не существует. Пусть $g(S^1) = [a; b]$. Из теоремы о промежуточном значении следует, что всякая точка $x \in (a; b)$ является образом по крайней мере двух точек окружности. Следовательно, g - не инъекция.

10.2.2. Поднятие пути

34-B. *Теорема о накрывающем пути.* Пусть $p : X \rightarrow B$ накрытие, $x_0 \in X$, $b_0 \in B$ - такие точки, что $p(x_0) = b_0$. Для любого пу-

ти $s : I \rightarrow B$, начинающегося в b_0 , существует единственный путь $\tilde{s} : I \rightarrow X$, начинающийся в точке x_0 и накрывающий путь s . (Другими словами, существует единственный путь $\tilde{s} : I \rightarrow X$, такой, что $\tilde{s}(0) = x_0$ и $p \circ \tilde{s} = s$.)

Рассмотрим покрытие базы набором правильно накрытых окрестностей его точек и такое разбиение отрезка $[0; 1]$ точками $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$, что образ $s([a_i; a_{i+1}])$ содержится целиком в одной из правильно накрытых окрестностей; $s([a_i; a_{i+1}]) \subset U_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$. Поскольку сужение накрытия на прообраз $p^{-1}(U_0)$ является тривиальным накрытием и $f([a_0; a_1]) \subset U_0$, то существует поднятие отображения $s|_{[a_0; a_1]}$, такое что $\tilde{s}(a_0) = x_0$, пусть $x_1 = \tilde{s}(a_1)$. Аналогичным образом, существует единственное поднятие $\tilde{s}|_{[a_1; a_2]}$, такое что $\tilde{s}(a_1) = x_1$; пусть $x_2 = \tilde{s}(a_2)$, и так далее. Таким образом, поднятие $\tilde{s} : I \rightarrow X$ существует.

Его единственность очевидна. Тем, кто с этим не согласен, мы предлагаем провести, к примеру, рассуждение по индукции.

Можно доказать и более общее утверждение, чем теорема 34-B см. задачи 34.1- 34.3.

34-1- Пусть $p : X \rightarrow B$ - тривиальное накрытие, $x_0 \in X$ и $b_0 \in B$ - такие точки, что $p(x_0) = b_0$. Для всякого непрерывного отображения $f : A \rightarrow B$, переводящего некоторую точку $a_0 \in A$ в b_0 , существует его непрерывное поднятие $\tilde{f} : A \rightarrow X$, для которого $\tilde{f}(a_0) = x_0$.

34.2. Пусть $p : X \rightarrow B$ - тривиальное накрытие, $x_0 \in X$ и $b_0 \in B$ - такие точки, что $p(x_0) = b_0$. Если множество A связно, то для всякого непрерывного отображения $f : A \rightarrow B$, переводящего некоторую точку $a_0 \in A$ в b_0 , непрерывное поднятие $\tilde{f} : A \rightarrow X$ с $\tilde{f}(a_0) = x_0$ единственно.

34-3. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, а A - некоторое связное и локально связное пространство. Если непрерывные отображения $f, g : A \rightarrow X$ совпадают в некоторой точке и $p \circ f = p \circ g$, то $f = g$.

34-4- Если в задаче 34-2 заменить точки x_0, b_0 и a_0 парами точек, то может статься, что задача поднятия не допускает решения \tilde{f} с $\tilde{f}(a_0) = x_0$. Сформулируйте условие, необходимое и достаточное для существования такого решения.

34-5. Покажите, что теорема о накрывающем пути 34-B не обобщается на локальные гомеоморфизмы, такие как локальный гомеоморфизм $(0, 3) \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ задачи 34-4-

34-6. Рассмотрим накрытие $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto e^z$. Найдите пути, накрывающие пути $u(t) = 2 - t, v(t) = (1 + t)e^{2\pi i t}$, и их произведения uv и vu .

10.2.3. Поднятие гомотопии

34-С Теорема о накрывающей гомотопии. Пусть $p : X \rightarrow B$ накрытие, $x_0 \in X$ и $b_0 \in B$ - такие точки, что $p(x_0) = b_0$. Пусть пути $u, v : I \rightarrow B$ начинаются в точке b_0 и $\tilde{u}, \tilde{v} : I \rightarrow X$ - накрывающие их пути с началом в точке x_0 . Тогда, если пути u, v гомотопны, то пути \tilde{u}, \tilde{v} также гомотопны.

Пусть $h : I \times I \rightarrow B$ - гомотопия между путями u и v , таким образом,

$$h(\tau, 0) = u(\tau), h(\tau, 1) = v(\tau), h(0, t) = b_0 \text{ и } h(1, t) = b_1 \in B.$$

Покажем, что существует отображение $\tilde{h} : I \times I \rightarrow X$, накрывающее h и такое, что $\tilde{h}(0, 0) = x_0$. Доказательство существования

накрывающей гомотопии аналогично доказательству теоремы о накрывающем пути. Разобьем квадрат $I \times I$ на квадраты меньшего размера, образ каждого которых при отображении h содержится в некоторой правильно накрытой окрестности в пространстве B .

Сужение $h_{k,l}$ гомотопии h на каждый из "маленьких" квадратов $I_{k,l}$

будет накрываться соответствующим отображением $\tilde{h}_{k,l}$. Для того, чтобы получить накрывающую h гомотопию, необходимо только добиться, чтобы эти отображения совпали на пересечениях этих

квадратов. В силу 34.3, для этого достаточно потребовать, чтобы эти отображения совпали хотя бы в одной точке. Сделаем первый шаг:

пусть $h(I_{0,0}) \subset U_{b_0}$ и $\tilde{h}_{0,0} : I_{0,0} \rightarrow X$ - это такое накрывающее отображение, что $\tilde{h}_{0,0}(a_0, c_0) = x_0$. Теперь положим $b_1 = h(a_1, c_0)$

и $x_1 = \tilde{h}(a_1, c_0)$. Существует отображение $\tilde{h}_{1,0} : I_{1,0} \rightarrow X$,

накрывающее $h|_{I_{1,0}}$, такое что $\tilde{h}_{1,0}(a_1, c_0) = x_1$. Продолжая

построение, мы и получим отображение \tilde{h} , заданную на всем квадрате.

Осталось проверить, что \tilde{h} - это гомотопия путей. Рассмотрим

накрывающий путь $\tilde{u} : t \mapsto \tilde{h}(0, t)$. Поскольку $p \circ \tilde{u}$ - постоянный путь,

то и путь \tilde{u} обязан быть постоянным, значит, $\tilde{h}(0, t) = x_0$.

Аналогичным образом, $\tilde{h}(1, t) = x_1$ - фиксированная точка

накрывающего пространства. Значит, \tilde{h} - это гомотопия путей. В

заключение заметим, что её единственность следует, опять-таки, из леммы 34.3.

34-D Следствие. В предположениях теоремы 34-С накрывающие пути \tilde{u} и \tilde{v} кончатся в одной и той же точке (т. е. $\tilde{u}(1) = \tilde{v}(1)$).

Подчеркнём, что в 34-С и 34-Д предполагается, что у накрывающих путей общее начало x_0 , а тогда, согласно 34-Д, совпадают и их концы. Формально это действительно следствие, но, собственно говоря, это уже было показано при доказательстве теоремы 34-С

34-Е Следствие следствия 34-Д. Пусть $p : X \rightarrow B$ -накрытие.

Если петля $s : I \rightarrow B$ накрывается, незамкнутым путём (так сказать, размыкается при поднятии), то она не гомотопна постоянной.

Постоянный путь накрывается постоянным путем. В силу 34-Д, всякая петля, гомотопная постоянной петле, накрывается петлей.

34-7. Линейно связное пространство B , обладающее нетривиальным линейно связным накрытием, неодносвязно.

34-8. Докажите, что любое накрытие $p : X \rightarrow B$ с односвязным B и линейно связным X является гомеоморфизмом.

34-9. Какие следствия можно извлечь из 34-7 относительно приведенных в 33 примеров накрытий?

34-10. Так ли уж важно условие теоремы 34'3, согласно которому отображения u и v являются путями? На какой класс отображений и пространств вы можете обобщить эту теорему?

К примеру, обобщите теорему 34-В на отображения $f : S^n \rightarrow B$ при $n > 1$ (ср. 39. Wx and 39. Xx).

10.3. Вычисление фундаментальных групп при помощи универсальных накрытий

10.3.1. Фундаментальная группа окружности

Для каждого натурального числа n обозначим через s_n петлю $I \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi int}$. Начальной точкой петли является точка $1 \in \mathbb{C}$.

Гомотопический класс петли s_1 обозначим через α . Таким образом, $\alpha \in \pi_1(S^1, 1)$.

35.А. Петля s_n является представителем класса α^n .

Рассмотрим пути $\tilde{s}_n : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto nt$,

$\tilde{s}_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto (n-1)t$ и $\tilde{s}_1 : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto n-1+t$.

накрывающие пути s_n , s_{n-1} и s_1 , соответственно. Поскольку произведение $\tilde{s}_{n-1}\tilde{s}_1$ определено и имеет те же начало и конец, что и путь \tilde{s}_n , то $\tilde{s}_n \sim \tilde{s}_{n-1}\tilde{s}_1$, поэтому $s_n \sim s_{n-1}s_1$.

Значит, $[s_n] = [s_{n-1}]\alpha$, откуда по индукции и следует равенство

$$[s_n] = \alpha^n.$$

35.В. Укажите путь в \mathbb{R} , начинающийся в точке $0 \in \mathbb{R}$ и накрывающий

петлю s_n относительно универсального накрытия $\mathbb{R} \rightarrow S^1$.

См. доказательство предыдущего утверждения: это путь, заданный формулой $\tilde{s}_n(t) = nt$.

35. С. Гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1) : n \mapsto \alpha^n$, является изоморфизмом.

В силу 35. С.1, рассматриваемое отображение определено корректно и является гомоморфизмом. В силу 35.С.2, оно - эпиморфизм, а в силу 35.С.1. Формула $n \mapsto \alpha^n$ определяет гомоморфизм $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$.

Если $n \mapsto \alpha^n$ и $k \mapsto \alpha^k$, то $n + k \mapsto \alpha^{n+k} = \alpha^n \cdot \alpha^k$.

35.С.2. Если путь $\tilde{s} : I \rightarrow \mathbb{R}$ с началом в $0 \in \mathbb{R}$, накрывающий петлю $s : I \rightarrow S^1$ (с началом в 1), кончается в точке n (т. е. $\tilde{s}(1) = n$), то петля s гомотопна петле s_n .

Из односвязности прямой \mathbb{R} следует, что пути \tilde{s} и \tilde{s}_n гомотопны, значит, гомотопны и пути s, s_n . Следовательно, $[s] = [s_n] = \alpha^n$.

35.С.3 - мономорфизм. Значит, оно является изоморфизмом.

35.С.3. Если петля s_n гомотопна постоянной, то $n = 0$. Следовательно, гомоморфизм φ - мономорфизм.

Если $n \neq 0$, то путь \tilde{s}_n заканчивается в точке n , значит не является петлей. Следовательно, петля s_n не гомотопна нулю.

35.1. Найдите прообраз гомотопического класса петли $t \mapsto e^{2\pi it^2}$ при изоморфизме теоремы 35. С.

Обозначим через \deg изоморфизм, являющийся обратным к изоморфизму 35.С.

35.2. Для любой петли $s : I \rightarrow S^1$, начинающейся в единице, $\deg([s])$ есть целое число, совпадающее с конечной точкой пути, начинающегося в $0 \in \mathbb{R}$ и накрывающего петлю s .

35.D Следствие теоремы 35. С. *Фундаментальная группа n -мерного тора $(S^1)^n$ свободная абелева группа ранга n (т. е. это есть группа, изоморфная \mathbb{Z}^n).*

Это следует из проведенного вычисления фундаментальной группы окружности и утверждения 31.H:

$$\underbrace{\pi_1(S^1 \times \dots \times S^1)}_{n \text{ сомножителей}}(1, 1, \dots, 1) \cong \underbrace{\pi_1(S^1, 1) \times \dots \times \pi_1(S^1, 1)}_{n \text{ сомножителей}} \cong \mathbb{Z}^n.$$

35.E. Укажите петли, гомотопические классы которых являются образующими фундаментальной группы тора $S^1 \times S^1$.

Пусть $S^1 \times S^1 = \{(z, w) : |z| = 1, |w| = 1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Образующими фундаментальной группы $\pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1))$ являются петли $s_1 : t \mapsto (e^{2\pi it}, 1)$ и $s_2 : t \mapsto (1, e^{2\pi it})$.

35.F Следствие теоремы 35.С. *Фундаментальная группа проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ есть бесконечная циклическая группа.*

Поскольку $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \cong S^1 \times \mathbb{R}$, то $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0, (1, 0)) \cong \pi_1(S^1, 1) \times \pi_1(\mathbb{R}, 1) \cong \mathbb{Z}$.

35.3. Решите задачи 35.D 35.F, не ссылаясь на теоремы 35.C и 31.H, а опираясь на явное построение соответствующего универсального накрытия.

10.3.2. Фундаментальные группы проективных пространств

Фундаментальной группой проективной прямой является бесконечная циклическая группа, поскольку проективная прямая гомеоморфна окружности. Нульмерное проективное пространство состоит из одной точки, так что его фундаментальная группа тривиальна. Вычислим теперь фундаментальные группы всех прочих проективных пространств. Пусть $n \geq 2$ и $l : I \rightarrow \mathbb{R}P^n$ петля, которую накрывает путь $\tilde{l} : I \rightarrow S^n$, соединяющий две диаметрально противоположные точки сферы, скажем, полюсы $P_+ = (1, 0, \dots, 0)$ и $P_- = (-1, 0, \dots, 0)$. Обозначим через λ гомотопический класс петли l в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{R}P^n, (1 : 0 : \dots : 0))$.

35. G. Для каждого $n \geq 2$ группа $\pi_1(\mathbb{R}P^n, (1 : 0 : \dots : 0))$ является циклической группой порядка 2. Она состоит из λ и 1.

В силу 35. G. 1 фундаментальная группа состоит из двух элементов, значит, она является циклической группой порядка два.

35.G.1 Лемма. Произвольная петля в $\mathbb{R}P^n$ с началом в точке $(1:0:\dots:0)$ гомотопна или петле l или постоянной петле. Это зависит от того, соединяет ли путь, накрывающий эту петлю, полюсы P_+ и P_- , или же он сам является петлей.

Пусть u - петля в $\mathbb{R}P^n$, а \tilde{u} - накрывающий её путь в S^n .

При $n \geq 2$ сфера S^n односвязна и, если \tilde{u} является петлей, то \tilde{u} , значит, и u гомотопны нулю. Если же \tilde{u} петлей не является, то, опять-таки в силу односвязности S^n , $\tilde{u} \sim \tilde{l}$, следовательно, $u \sim l$.

35-4- Где в доказательствах теоремы 35.C7 и леммы 35. G. 1 использовано предположение $n \geq 2$?

10.3.3. Фундаментальная группа букета окружностей

Рассмотрим семейство топологических пространств $\{X_\alpha\}$, в каждом

из которых отмечено по одной точке x_α . Рассмотрим несвязную сумму $\bigsqcup_\alpha X_\alpha$ этих пространств и отождествим в нём все отмеченные точки.

Полученное факторпространство называется *букетом* пространств $\{X_\alpha\}$ и обозначается через $\bigvee_\alpha X_\alpha$. В частности, *букет q окружностей* - это пространство, являющееся объединением q

экземпляров окружностей, имеющих одну общую точку, называющуюся *центром* этого букета.

Обозначим букет q окружностей через B_q , а его центр - через c . Пусть

u_1, \dots, u_q - петли в B_q , каждая из которых начинается в c и па-

раметризует соответствующую окружность букета B_q . Обозначим через

α_i гомотопический класс петли u_i .

35. Н Теорема. *Группа $\pi_1(B_q, c)$ является свободной группой, свободно порожденной элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_q$.*

См. 35.5.

10.3.4. Алгебраическое отступление: свободные группы

Напомним, что группа G есть свободная группа со свободными образующими a_1, \dots, a_q , если:

- каждый ее элемент $x \in G$ представляется как произведение степеней (с целыми, но не обязательно положительными показателями)

элементов a_1, \dots, a_q . Т. е. $x = a_{i_1}^{\epsilon_1} a_{i_2}^{\epsilon_2} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$;

- это представление однозначно с точностью до следующих тривиальных операций: можно вставлять и удалять произведения вида $a_i a_i^{-1}$ и $a_i^{-1} a_i$ или заменять a_i^m на $a_i^p a_i^q$ с $p + q = m$ и обратно.

35.1. *Свободная группа определена с точностью до изоморфизма числом своих свободных образующих.*

Число свободных образующих свободной группы называется ее *рангом*.

Стандартным представителем в классе изоморфных свободных

групп ранга q является группа слов алфавита, состоящего из q букв

a_1, \dots, a_q и обратных к ним $a_1^{-1}, \dots, a_q^{-1}$. Два слова представляют один

и тот же элемент этой группы тогда и только тогда, когда одно из них

может быть получено из другого посредством вставок и удалений

фрагментов $a_i a_i^{-1}$ и $a_i^{-1} a_i$. Для этой группы мы будем использовать

обозначение $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_q)$ или просто \mathbb{F}_q , если нас не интересуют

конкретные образующие.

35. J. *Всякий элемент группы $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_q)$ обладает единственным*

кратчайшим представителем. Им является слово, в котором нельзя

произвести никаких сокращений.

Число букв, входящих в кратчайшее представление элемента $x \in \mathbb{F}(a_1, \dots, a_q)$, называется *длиной* элемента x и обозначается через $l(x)$. Конечно, для того чтобы длина была определена, необходимо, чтобы были фиксированы образующие этой группы.

35.5. Покажите, что автоморфизм группы \mathbb{F}_q может переводить элемент $x \in \mathbb{F}_q$ в элемент, имеющий другую длину. При каких значениях q это невозможно? Можно ли таким образом получить слово произвольной длины?

35.К. *Группа G является свободной группой, свободно порожденной своими элементами a_1, \dots, a_q , тогда любое отображение множества $\{a_1, \dots, a_q\}$ в произвольную группу X продолжается до единственного гомоморфизма $G \rightarrow X$.*

Иногда утверждение теоремы 35.К принимается за определение свободной группы. Определения такого сорта в большей степени подчеркивают взаимосвязи между различными группами, нежели внутреннюю структуру каждой группы. Конечно, такие взаимосвязи позволяют в конечном итоге восстановить и внутреннюю структуру групп.

Теперь мы можем переформулировать теорему 35.Н так:

35.Л. *Гомоморфизм $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_q) \rightarrow \pi_1(B_q, c)$, отображающий a_i в элемент a_i фундаментальной группы букета окружностей, является изоморфизмом.*

Прежде всего, для простоты ограничимся случаем $q = 2$, чтобы избежать ненужных сложностей в обозначениях и рисунках. Это простейший случай, который действительно полностью представляет общую ситуацию, в то время как в случае $q = 1$ слишком много специфики (хотя бы потому, что в этом случае группа коммутативна). Чтобы воспользоваться преимуществами букета двух окружностей, удалим индексы из обозначений. Положим

$$B = B_2, u = u_1, v = u_2, \alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_2.$$

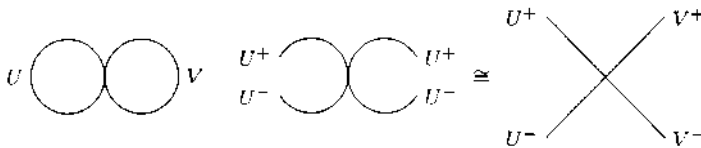
Теперь утверждение 35.Л выглядит следующим образом:

Гомоморфизм $\mathbb{F}(a, b) \rightarrow \pi(B, c)$, при котором $a \mapsto \alpha$ и $b \mapsto \beta$, является изоморфизмом.

Эту теорему можно бы доказать так же как теоремы 35.С и 35.Г, если бы только знать, как устроено универсальное накрытие букета B . Таким образом, для доказательства теоремы нам придется построить универсальное накрывающее пространство букета двух окружностей.

10.3.5. Универсальное накрытие букета двух окружностей

Обозначим через U и V точки, антиподальные точке c на окружностях букета B . Разрежем B в этих точках, удалив их из B и затем добавив вместо каждой из них две новые точки. Какова бы ни была эта операция разрезания, её результатом является *крест* K , представляющий собой объединение четырех отрезков с общим концом c . Отрезки мы будем называть *лучами креста*. Имеется естественное отображение $P: K \rightarrow B$, переводящее центр c креста K в центр c букета B , сужение которого на каждый из лучей креста является гомеоморфизмом этого луча на соответствующую полуокружность букета. Поскольку окружности букета B параметризованы петлями u и v , то половинки каждой из окружностей можно упорядочить. Обозначим через U^+ ту точку прообраза $P^{-1}(U)$, которая принадлежит лучу, отображающемуся в первую из половин окружности, содержащей точку U , и через U^- - вторую точку из составляющих этот прообраз. Аналогично обозначим через V^+ и V^- точки прообраза $P^{-1}(V)$.



Сужение отображения P на $K \setminus \{U^+, U^-, V^+, V^-\}$ является гомеоморфизмом на $B \setminus \{U, V\}$. Поэтому P является накрытием пространства $B \setminus \{U, V\}$. Однако точки U и V не имеют правильно накрытых окрестностей. Более того, прообраз каждой из них состоит из двух точек (соответствующих концевых точек креста), в окрестности которых P даже не является локальным гомеоморфизмом. Чтобы справиться с этой неприятностью, приклеим в каждой из четырех концевых точек креста K еще один экземпляр креста K и продолжим естественным образом отображение P на полученное в результате топологическое пространство. Но теперь появились новые 12 концевых точек, в которых наше отображение не является локальным гомеоморфизмом. Что же, повторим ту же операцию, приклеив 12 новых копий креста K . И вот уже у каждой из этих 12 точек есть окрестность, гомеоморфно отображающаяся на свой образ в B . Но зато возникли 36 новых концевых точек. И так далее... Эта деятельность кажется вполне безумной: исправляя дефекты, мы создаём на каждом шаге в три раза больше новых. Однако если

повторить это бесконечно много раз, то все плохие точки исправятся и полученное топологическое пространство с заданным на нем продолжением отображения P окажется накрывающим пространством. Это напоминает сказочную историю о битве со Змеем Горынычем, но неожиданная счастливая развязка показывает, что математика обладает магической мощью, о какой герои сказок не могли и помыслить. И в самом деле, мы встретили Змея Горыныча K с четырёх головах, доблестно отсекали ему все головы, но, в соответствии с традицией жанра, на месте каждой старой головы выросли 3 новые. Мы отсекали и их, и история повторилась. А мы и не думаем, как бы избежать этого размножения голов. Знай рубим! В отличие от героев сказок, мы действуем вне Времени, и нам некуда спешить. Повторив бесконечное количество раз упражнение в отсекании экспоненциально растущего числа голов, мы победили! У нашего Горыныча голов-то и не осталось! Такова типичная картина успешной бесконечной конструкции в математике. Иногда, как в нашем случае, такую бесконечную конструкцию можно заменить конечной, но имеющей дело с бесконечными объектами. Однако, случается, что важная конструкция включает бесконечное повторение, которого никак невозможно избежать.

35.М. Формализуйте описанную выше конструкцию накрытия букета B .

См. абзац, следующий за формулировкой данного утверждения.

Рассмотрим группу $\mathbb{F}(a, b)$ как топологическое пространство с дискретной топологией и построим его произведение на крест K . Результат пространство $K \times \mathbb{F}(a, b)$ - можно рассматривать как набор экземпляров креста K , занумерованных элементами группы $\mathbb{F}(a, b)$. Топологически это несвязная сумма этих экземпляров. отождествим в $K \times \mathbb{F}(a, b)$ точку (U^-, g) с (U^+, ga) и точку (V^-, g) с (V^+, gb) для каждого элемента $g \in \mathbb{F}(a, b)$. Обозначим полученное

факторпространство через X .

35.Н. Композиция естественной проекции $K \times \mathbb{F}(a, b) \rightarrow K$ и отображения $P : K \rightarrow B$ определяет непрерывное факторотображение $p : X \rightarrow B$.

Очевидное следствие определения отображения P .

35.О. Отображение $p : X \rightarrow B$ является накрытием.

Очевидное следствие определения отображения p .

35.Р. Пространство X линейно связно. Для каждого элемента $g \in \mathbb{F}(a, b)$ существует путь, соединяющий точку $(c, 1)$ с точкой (c, g) , накрывающий петлю в B , полученную в результате замены в слове g буквы a петлей u , а буквы b - петлей v .

Проведите доказательство по индукции.

35.9. Пространство X односвязно.

Воспользуйтесь тем, что образ всякой петли, будучи компактным множеством, пересекается только с конечным числом отрезков, из которых состоит тотальное пространство X накрытия, и воспользуйтесь индукцией по числу таких отрезков.

10.3.6. Фундаментальные группы некоторых конечных пространств

35.6. Докажите, что всякое линейно связное трехточечное пространство односвязно (ср. 31-7).

35.7. Рассмотрим топологическое пространство X , состоящее из точек a, b, c и d , в котором топология задана базой, составленной из множеств $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a,b,c\}$ и $\{c, d,a\}$. Докажите, что пространство X не односвязно.

35.8. Вычислите $\pi_1(X)$.

35.9. Пусть X - конечное топологическое пространство с нетривиальной фундаментальной группой. Пусть n_0 - наименьшее число точек такого пространства. 1) Найдите n_0 . 2) Каковы нетривиальные фундаментальные группы пространства, число точек в котором равно n_0 ?

35.10. 1) Постройте конечное топологическое пространство с неабелевой фундаментальной группой. 2) Каково наименьшее число точек, необходимое для такого пространства?

35.11*. Пусть пространство X является объединением открытых множеств U и V , пересечение которых имеет не менее трёх компонент связности. Докажите, что фундаментальная группа пространства X неабелева, и, более того, может быть отображена эпиморфно на свободную группу ранга 2.

35.12*. Постройте конечное топологическое пространство с фундаментальной группой \mathbf{Z}_2 .

11. Фундаментальная группа и отображения

11.1. Индуцированные гомоморфизмы и их первые применения

11.1.1. Индуцированный гомоморфизм

Пусть $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y . Пусть $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0) \in Y$. В таком случае говорят, что f отображает пространство с отмеченной точкой (X, x_0) в пространство с отмеченной точкой (Y, y_0) и пишут $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Обозначим через $f_{\#}$ отображение $\Omega_1(X, x_0) \rightarrow \Omega_1(Y, y_0) : s \mapsto f \circ s$.

36.A. Отображение $f_{\#}$ переводит гомотопные петли в гомотопные.

Поэтому $f_{\#}$ определяет отображение $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Следует из 29.1.

36. В. Для любого непрерывного отображения $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ отображение $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ является гомоморфизмом.

Гомоморфизм $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ называется гомоморфизмом, **индуцированным** непрерывным отображением f .

Пусть $[u], [v] \in \pi_1(X, x_0)$. Так как $f \circ (uv) = (f \circ u)(f \circ v)$, то $f_{\#}(uv) = f_{\#}(u)f_{\#}(v)$ и

$$f_*([u][v]) = f_*([uv]) = [f_{\#}(uv)] = [f_{\#}(u)f_{\#}(v)] =$$

$$[f_{\#}(u)][f_{\#}(v)] = f_*([u])f_*([v]).$$

36. С. Пусть $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ и $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ - непрерывные отображения. Тогда

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0).$$

Пусть $[u] \in \pi_1(X, x_0)$. Поскольку $(g \circ f)_{\#}(u) = g \circ f \circ u = g_{\#}(f_{\#}(u))$, то, следовательно

$$(g \circ f)_*([u]) = [(g \circ f)_{\#}(u)] = [g_{\#}(f_{\#}(u))] = g_*([f_{\#}(u)]) = g_*(f_*([u])),$$

таким образом, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

36.D. Если отображения $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ x_0 - гомотопны, то $f_* = g_*$.

Пусть $H : X \times I \rightarrow Y$ - гомотопия между f и g , причем $H(x_0, t) = y_0$ при всех $t \in I$; u - некоторая петля в X . Рассмотрим отображение $h = H \circ (u \times \text{id}_I)$, таким образом,

$h : (\tau, t) \mapsto H(u(\tau), t)$. Тогда

$$h(\tau, 0) = H(u(\tau), 0) = f(u(\tau)), \quad h(\tau, 1) = H(u(\tau), 1) = g(u(\tau)),$$

таким образом, h является гомотетией между петлями $f \circ u$ и $g \circ u$.

Более того, $h(0, t) = H(u(0), t) = H(x_0, t) = y_0$, аналогичным образом, $h(1, t) = y_0$, значит, h является гомотопией между петлями $f_{\#}(u)$ и $g_{\#}(u)$, следовательно,

$$f_*([u]) = [f_{\#}(u)] = [g_{\#}(u)] = g_*([u]).$$

36. E. Как обобщить теорему 36. D на случай свободно гомотопных отображений?

Пусть H - это гомотопия между отображениями f и g и петля s задана формулой $s(t) = H(x_0, t)$. В силу утверждения 32.2, $g_* = T_s \circ f_*$.

36.F. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, а точки x_0 и x_1 пространства X соединены путем $s : I \rightarrow X$. Положим $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ T_s \downarrow & & \downarrow T_{f \circ s} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

т. е. $T_{f \circ s} \circ f_* = f_* \circ T_s$.

Данное утверждение является очевидным следствием равенства $f_{\#}(s^{-1}us) = (f \circ s)^{-1}f_{\#}(u)(f \circ s)$.

36.1. Докажите, что отображение $\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z^3$ не гомотопно тождественному отображению $\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z$.

36.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что если непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ продолжается до непрерывного отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow Y$, то гомоморфизм $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ тривиален (т. е. отображает всю группу в единицу) для любой точки $x_0 \in X$.

36.3. Докажите, что фундаментальная группа всякого линейно связного хаусдорфова пространства, содержащего открытое множество, гомеоморфное пространству $S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$, бесконечна и не является циклической.

36.3.1. Докажите, что если пространство X , удовлетворяющее условиям задачи 36.3, может быть так отображено посредством непрерывного отображения в пространство Y с бесконечной нециклической

фундаментальной группой, чтобы это отображение индуцировало бы эпиморфизм группы $\pi_1(X)$ на $\pi_1(Y)$.

36.4- Докажите, что фундаментальная группа пространства $GL(n, \mathbb{C})$ комплексных неособых $(n \times n)$ -матриц бесконечна.

11.1.2. Основная теорема высшей алгебры

Здесь мы докажем теорему, которая, на первый взгляд, никакого отношения к фундаментальной группе не имеет.

36.G Основная теорема высшей алгебры. *Всякий многочлен положительной степени от одной переменной с комплексными коэффициентами обладает комплексным корнем.*

Выберем число R , удовлетворяющее условию утверждения 36. G.2 и рассмотрим петлю $u : u(t) = Re^{2\pi it}$. Петля u , конечно, гомотопна в \mathbb{C} постоянной петле. Теперь предположим, что $p(z) \neq 0$ ни при каком z , для которого $|z| \leq R$. Тогда петля $p \circ u$ гомотопна постоянной петле в $\mathbb{C} \setminus 0$, в силу 36.G.3, и петля $q \circ u$ гомотопна постоянной петле в $\mathbb{C} \setminus 0$. Однако $(q \circ u)(t) = R^n e^{2\pi i n t}$, значит, эта петля не гомотопна постоянной. Полученное противоречие доказывает теорему.

Эквивалентная формулировка:

Пусть $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ - многочлен степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами. Тогда существует такое комплексное число w , что $p(w) = 0$.

Хотя эта теорема формулируется чисто алгебраически и называется основной теоремой высшей алгебры, у неё нет ни одного чисто алгебраического доказательства. Её доказательства основаны или на топологических рассуждениях или апеллируют к комплексному анализу. Это не случайно, так как поле \mathbb{C} комплексных чисел, так же, как и поле \mathbb{R} , нельзя описать в чисто алгебраических терминах. Все его построения включают какую-либо конструкцию пополнения, ср. 17.

36.G.1 Редукция к задаче об отображении. Выведите теорему 36. G из следующего утверждения:

Каков бы ни был комплексный многочлен $p(z)$ положительной степени, образ отображения $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto p(z)$ содержит точку $0 \in \mathbb{C}$. Другими словами, формула $z \mapsto p(z)$ не определяет отображения $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$.

Это в точности утверждение теоремы 36.G.

36.G.2 Оценка младших членов. Пусть

$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ комплексный многочлен,

$q(z) = z^n$ и $r(z) = p(z) - q(z)$. Тогда существует такое положительное число R , что $|r(z)| < |q(z)| = R^n$ для каждого z с $|z| = R$.

К примеру, достаточно взять число R , удовлетворяющее неравенству $R > \max\{1, |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|\}$.

36.G.3 Лемма о даме с собачкой. (Ср. 29.11.) "Дама" $q(z)$ и её "собачка" $p(z)$ гуляют на проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus 0$ по замкнутому маршруту (т. е. считаем, что $z \in S^1$). Докажите, что если во всякий момент времени "дама" $q(z)$ отпускает от себя "собачку" $p(z)$ меньше, чем на $|q(z)|$, то путь "собачки" $S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto p(z)$ будет гомотопен пути "дамы"

$$S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto q(z).$$

Воспользуемся прямой гомотопией $h(z, t) = tp(z) + (1-t)q(z)$. Все, что осталось проверить - это то, что $h(z, t) \neq 0$ при всех z и t . Действительно, так как по условию $|p(z) - q(z)| < |q(z)|$, то $|h(z, t)| \geq |q(z)| - t|p(z) - q(z)| \geq |q(z)| - |p(z) - q(z)| > 0$.

36. G.4 Очевидная лемма. (Ср. 29.12.) Если $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение и $s : S^1 \rightarrow X$ - стягиваемая петля, то и петля $f \circ s : S^1 \rightarrow Y$ тоже стягиваема.

Действительно, совсем очевидная лемма; см. 36.A.

11.1.3х. Обобщение теоремы о промежуточном значении

36. Ax. Что может быть аналогом теоремы о промежуточном значении 12. A для отображений $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$?

См. 36.Dx.

36. Vx. Выясните, эквивалентна ли теорема о промежуточном значении 12.A следующему утверждению:

Пусть $f : D^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ - непрерывное отображение. Если $0 \notin f(S^0)$ и подотображение $f_0 : S^0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \setminus 0$ отображения f индуцирует непостоянное отображение $\pi_0(S^0) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}^1 \setminus 0)$, то существует такая точка $x \in D^1$, что $f(x) = 0$.

Да, эквивалентна.

36. Sx. Придумайте обобщение теоремы о промежуточном значении на случай отображений $D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое обобщало бы пере-

формулировку этой теоремы, предложенную в задаче 36.Вх. Для этого вам придется дать определение индуцированного гомоморфизма для гомотопических групп.

См. 36.Дх.

36.Дх. Пусть $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - непрерывное отображение. Если $f(S^{n-1})$ не содержит $0 \in \mathbb{R}^n$ и подотображение $f_0 : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$ отображения f индуцирует ненулевой гомоморфизм,

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0),$$

то существует такая точка $x \in D^n$, что $f(x) = 0$.

Пусть $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ - включение. Предположим, что $f(x) \neq 0$ при всех $x \in D^n$. Сохраним обозначение f за подотображением $D^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$ и рассмотрим гомоморфизмы включения

$$i_* : \pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(D^n) \text{ и } f_* : \pi_{n-1}(D^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0).$$

Поскольку все гомотопические группы шара D^n тривиальны, то композиция $(f \circ i)_* = f_* \circ i_*$ - нулевой гомоморфизм. Однако композиция $f \circ i$ совпадает с отображением f_0 - которое, по условию, индуцирует ненулевой гомоморфизм $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow$

$$\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0).$$

Применение теоремы 36.Дх осложнено условием, труднопроверяемым при $n > 0$. При $n = 2$ это всё же не выходит за рамки теории, развитой выше.

36.1х. Пусть $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывное отображение. Если $f(S^1)$ не содержит точки $a \in \mathbb{R}^2$ и круговая петля $f|_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus a$ определяет нетривиальный элемент группы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus a)$. то существует такая точка $x \in D^2$, что $f(x) = a$.

36.2х. Пусть $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывное отображение, сужение которого на граничную окружность S^1 круга совпадает со включением $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Тогда

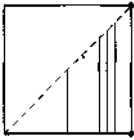
$$f(D^2) \supset D^2.$$

36.3х. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывно и существует такое вещественное число m , что $|f(x) - x| \leq m$ при любом $x \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что тогда f сюръективно.

36.4х. Пусть $u, v : I \rightarrow I \times I$ - такие пути, что $u(0) = (0, 0)$, $u(1) = (1, 1)$, $v(0) = (0, 1)$ и $v(1) = (1, 0)$. Докажите, что тогда $u(I) \cap v(I) \neq \emptyset$.

36.4х.1. Пусть u, v - такие как и 36.4х. Докажите, что $0 \in \mathbb{R}^2$ принадлежит образу отображения $w : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определённого формулой $w(x, y) = u(x) - v(y)$.

36.5x. Докажите, что существуют такие связные дизъюнктные множества $F, G \subset I^2$, что $(0, 0), (1, 1) \in F$ и $(0, 1), (1, 0) \in G$.



36.6x. Можно ли дополнительно потребовать, чтобы множества F и G , удовлетворяющие условиям предыдущей задачи, были замкнутыми?

36.7x*. Пусть C гладкая простая замкнутая кривая на плоскости, имеющая две точки перегиба. Докажите, что существует прямая, пересекающая C в таких четырёх точках a, b, c, d , что отрезки $[a; b]$, $[b; c]$ и $[c; d]$ имеют одинаковую длину.

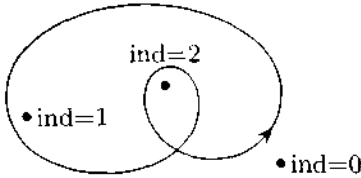


11.1.4x. Степень точки относительно петли

Как мы знаем (см. 35.F), фундаментальная группа проколотой плоскости $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$. Имеются два изоморфизма, получающихся друг из друга посредством умножения на -1 . Выберем один из них, скажем, тот, который сопоставляет классу петли $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ элемент $1 \in \mathbb{Z}$. В терминах круговых петель этот изоморфизм можно представлять себе как функцию, ставящую в соответствие каждой петле $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ целое число. Это число есть не что иное как то число раз, которое эта петля обходит вокруг 0 (с учетом направления движения).

Поменяем теперь точку зрения: фиксируем петлю, но будем варьировать точку. Пусть $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ круговая петля на плоскости и $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \varphi(S^1)$. Будем называть *степенью* точки x относительно петли u , а также *индексом* петли u относительно точки x и обозначать через $\text{ind}(u, x)$ целое число, соответствующее гомотопическому классу $[u] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x)$ этой круговой петли при естественном изоморфизме $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x) = \mathbb{Z}$ (мы используем по существу то же самое отождествление группы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x)$ с \mathbb{Z} , переводящее в 1 гомотопический класс петли

$$t \mapsto x + (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$



Число $\text{ind}(u, x)$ удобно охарактеризовать также следующим образом.

Одновременно с круговой петлей $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus x$ рассмотрим

отображение $\varphi_{u,x} : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto \frac{u(z)-x}{|u(z)-x|}$. Гомоморфизм

$(\varphi_{u,x})_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$ переводит образующую α фундаментальной группы окружности в элемент $k\alpha$, где $k = \text{ind}(u, x)$.

36.8x. Соответствие $x \mapsto \text{ind}(u, x)$ определяет локально постоянную функцию на $\mathbb{R}^2 \setminus u(S^1)$.

Рассмотрим круговую окрестность U точки x , не пересекающуюся с образом $u(S^1)$ рассматриваемой круговой петли и пусть $y \in U$.

Соединим x и y линейным путем $s : t \mapsto ty + (1-t)x$.

$$h(z, t) = \varphi_{u,s(t)}(z) = \frac{u(z) - s(t)}{|u(z) - s(t)|}$$

определяет гомотетию между отображениями $\varphi_{u,x}$ и $\varphi_{u,y}$, значит,

$(\varphi_{u,x})_* = (\varphi_{u,y})_*$, откуда и следует, что $\text{ind}(u, y) = \text{ind}(u, x)$ для

любой точки $y \in U$. Следовательно, функция $\text{ind} : x \mapsto \text{ind}(u, x)$ постоянна на данной окрестности.

36.8x. Пусть $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - круговая петля и $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1)$. Докажите, что если $\text{ind}(u, x) \neq \text{ind}(u, y)$, то любой путь в \mathbb{R}^2 , соединяющий x с y , пересекает $u(S^1)$.

36.9x. Если $u(S^1)$ содержится в некотором круге, а точка x не принадлежит этому кругу, то $\text{ind}(u, x) = 0$.

36.10x. Найдите множество значений функции $\text{ind} : \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ для следующих круговых петель:

(a) $u(z) = z$; (b) $u(z) = \bar{z}$; (c) $u(z) = z + z^{-1} + z^2 - z^{-2}$ (здесь, как обычно, $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$).

36.11x. Вычислите индексы всевозможных петель, образом которых является лемниската (стандартно вложенный букет двух окружностей), относительно различных точек плоскости.

36.12x. Найдите такую круговую петлю $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которой существуют точки $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ с $\text{ind}(f, x) = \text{ind}(f, y)$,

принадлежащие разным компонентам связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$.

36.13x. Докажите, что для любого луча $R \subset \mathbb{R}^2$, исходящего из точки x ,

количество точек в $f^{-1}(R)$ не меньше $|\text{ind}(f, x)|$.

36. Fx. Если отображение $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является сужением отображения $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\text{ind}(u, x) \neq 0$, то $x \in F(D^2)$.

Если $x \notin F(D^2)$, то круговая петля u будет гомотопной нулю в $\mathbb{R}^2 \setminus x$, так как $u = F \circ i$, где i - стандартное вложение $S^1 \rightarrow D^2$, а i гомотопна нулю в D^2 .

36. Gx. Если u и v - круговые петли в \mathbb{R}^2 с общей начальной точкой (т.е. $u(1) = v(1)$), и uv - их произведение, то $\text{ind}(uv, x) = \text{ind}(u, x) + \text{ind}(v, x)$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus uv(S^1)$.

Это так, поскольку $[uv] = [u][v]$, а $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x) \rightarrow \mathbb{Z}$ - гомоморфизм.

36. Hx. Пусть $u, v : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ круговые петли, а $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (u(S^1) \cup v(S^1))$.

Формула

$$h(z, t) = \varphi_{u_t, x}(z) = \frac{u_t(z) - x}{|u_t(z) - x|}$$

определяет гомотопию между отображениями $\varphi_{u, x}$ и $\varphi_{v, x}$, откуда и следует, что $\text{ind}(u, x) = \text{ind}(v, x)$; ср. **36. Ex**.

Если существует (свободная) гомотетия $u_t, t \in I$, переводящая u в v и не задевающая точку x (т.е. такая, что $x \in \mathbb{R}^2 \setminus u_t(S^1)$ для каждого $t \in I$), то $\text{ind}(u, x) = \text{ind}(v, x)$.

36. Ix. Пусть $u : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ круговая петля и $a \in \mathbb{C} \setminus u(S^1)$. Тогда

$$\text{ind}(u, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{|u(z) - a|}{u(z) - a} dz.$$

36. Jx. Пусть $p(z)$ - многочлен с комплексными коэффициентами, $R > 0$ и пусть $z_0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим круговую петлю $u : S^1 \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto p(Rz)$.

Если $z_0 \in \mathbb{C} \setminus u(S^1)$, то у многочлена $p(z) - z_0$ в открытом круге B_R^2 имеется, (с учетом кратностей) ровно $\text{ind}(u, z_0)$ корней.

36. Kx. На что можно заменить круговую петлю u , область B_R и многочлен $p(z)$, чтобы сформулированное утверждение сохранило силу?

11.1.5x. Теорема Борсука-Улама

36. Lx Одномерная теорема Борсука-Улама. Для любого непрерывного отображения $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ существует такая точка $x \in S^1$, что $f(x) = f(-x)$.

Определим отображение $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$. Тогда

$$\varphi(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -\varphi(x),$$

таким образом φ - нечетное отображение. Следовательно, если, например, $\varphi(1) \neq 0$, то образ $\varphi(S^1)$ содержит значения разных знаков. Поскольку окружность связна, то найдется точка $x \in S^1$, такая что $f(x) - f(-x) = \varphi(x) = 0$.

36. Мх Двумерная теорема Борсука-Улама. Для любого непрерывного отображения $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ существует такая точка $x \in S^2$, что

$$f(x) = f(-x).$$

Все, что осталось заметить для доказательства теоремы Борсука-Улама, так это то, что нетривиальных гомоморфизмов $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1)$ не существует, так как первая из этих групп изоморфна \mathbb{Z}_2 , а вторая изоморфна \mathbb{Z} .

36. Мх.1 Лемма. Если существует непрерывное отображение $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с $f(x) \neq f(-x)$, такое что для любой точки $x \in S^2$, то существует непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$, индуцирующее нетривиальный гомоморфизм $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1)$.

Предположим, что $f(x) \neq f(-x)$ при всех $x \in S^2$. В таком

случае формула $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$ определяет отображение $g : S^2 \rightarrow S^1$.

Поскольку $g(-x) = -g(x)$, то отображение g переводит антиподальные точки сферы S^2 в антиподальные точки окружности S^1 . Фактор отображения g является непрерывным отображением $\varphi : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$. Покажем, что индуцируемый им гомоморфизм $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1)$ нетривиален. Образующей λ группы $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ является класс петли l , накрываемой путем \tilde{l} , который соединяет две противоположные точки сферы S^2 . Путь $g \circ \tilde{l}$ также соединяет две противоположные точки, лежащие на окружности, следовательно, накрываемая им петля $\varphi \circ l$ не гомотопна нулю. Таким образом, $\varphi_*(\lambda)$ - это нетривиальный элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{R}P^1)$.

36.14х. Докажите, что в каждый момент времени существует пара антиподальных точек на поверхности земного шара, в которых величины атмосферного давления и температуры воздуха равны. Теоремы 36. Lx и 36. Мх- частные случаи следующей общей теоремы.

36. Nx Теорема Борсука-Улама. Для любого непрерывного отображения $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует такая точка $x \in S^n$, что $f(x) = f(-x)$.

11.2. Ретракции и неподвижные точки

11.2.1. Ретракции и ретракты

Непрерывное отображение топологического пространства на своё подпространство называется *ретракцией*, если его сужение на это подпространство есть тождественное отображение. Другими словами, если X - топологическое пространство, $A \subset X$, то отображение $\rho : X \rightarrow A$ называется ретракцией, если $\rho|_A = \text{id}_A$.

37.A. Пусть ρ - непрерывное отображение топологического пространства X на своё подпространство A . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) ρ - ретракция;
- (2) $\rho(a) = a$ для любой точки $a \in A$;
- (3) $\rho \circ \text{in} = \text{id}_A$;
- (4) $\rho : X \rightarrow A$ есть продолжение тождественного отображения $A \rightarrow A$.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Подпространство A топологического пространства X называется *ретрактом* X , если существует ретракция $X \rightarrow A$.

37.B. Всякое одноточечное подмножество является ретрактом.

Множество из двух точек может не быть ретрактом.

Поскольку всякое отображение в одноточечное пространство является непрерывным, то отображение $\rho : X \rightarrow \{x_0\}$ - ретракция.

37. C. Никакое двуточечное подмножество прямой \mathbf{R} не является ее ретрактом.

Прямая связна, поэтому ее ретракт (как её непрерывный образ) тоже должен быть связан. Однако, двоеточие на прямой не связно.

37.1. Если A - ретракт пространства X и B - ретракт пространства A , то B - ретракт пространства X .

37.2. Если A - ретракт пространства X и B - ретракт пространства Y , то $A \times B$ - ретракт пространства $X \times Y$.

37.3. Отрезок $[a;b]$ является ретрактом прямой \mathbf{R} .

37.4- Интервал $(a; b)$ не является ретрактом прямой \mathbf{R} .

37.5. Какие топологические свойства передаются от объемлющего пространства к его ретрактам?

37.6. Докажите, что ретракт хаусдорфова пространства замкнут (в этом пространстве).

37.7. Докажите, что объединение оси ординат и множества $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$ не является ретрактом плоскости \mathbf{R}^2 и, более того, не является ретрактом никакой своей окрестности.

37.D. Двоеточие S^0 не является ретрактом отрезка D^1 .

Роль понятия ретракта проясняется следующей теоремой.

См. доказательство утверждения 37. С

37. E. Подмножество A топологического пространства X является его ретрактом, тогда всякое непрерывное отображение $A \rightarrow Y$ в произвольное пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения $X \rightarrow Y$.

Пусть $\rho : X \rightarrow A$ ретракция. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $f : A \rightarrow Y$. Композиция $F = f \circ \rho : X \rightarrow Y$

является продолжением отображения f . Рассмотрим тождественное отображение $\text{id} : A \rightarrow A$. Его непрерывное продолжение на X как раз и является ретракцией $\rho : X \rightarrow A$.

11.2.2. Фундаментальная группа и ретракции

37.F. Если $\rho : X \rightarrow A$ -ретракция, $i : A \rightarrow X$ -включение и $x_0 \in A$, то $\rho_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ есть эпиморфизм, а $i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ - мономорфизм.

Поскольку

$$\rho_* \circ i_* = (\rho \circ i)_* = (\text{id}_A)_* = \text{id}_{\pi_1(A, x_0)},$$

то гомоморфизм ρ_* является эпиморфизмом, а гомоморфизм i_* - мономорфизмом.

37. G. Какое из двух утверждений предыдущей теоремы (о ρ_* или об i_*) легче использовать для доказательства того, что множество $A \subset X$ не есть ретракт пространства X ?

Утверждение об i_* , к примеру, смотрите доказательство следующего утверждения.

37. H. Теорема Борсука в размерности два. *Окружность S^1 не является ретрактом круга D^2 .*

Так как группа $\pi_1(D^2)$ тривиальна, а группа $\pi_1(S^1)$ - нетривиальна, то $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D^2, 1)$ не может быть мономорфизмом.

Следовательно, в силу утверждения 37. F круг D^2 нельзя ретрагировать на его границу S^1 .

37.8. Является ли проективная прямая ретрактом проективной плоскости?

Следующие задачи труднее теоремы 37.H в том смысле, что их решение не сводится к прямой ссылке на теорему 37.F, а требует обращения к главной идее ее доказательства: тождеству

$$\rho_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(A, x_0)}.$$

37.9. Докажите, что граничная окружность ленты Мёбиуса не является ретрактом самой ленты Мёбиуса.

37.10. Докажите, что граничная окружность ручки не является ретрактом самой ручки.

Теорема Борсука в полной общности (т. е. обобщение теоремы 37.Н на старшие размерности) не может быть получена из теоремы 37.Е подобно тому, как был выведен ее частный случай. Однако её можно доказать, используя обобщение теоремы 37.Е на старшие гомотопические группы.

37.11. Теорема Борсука. *Сфера S^{n-1} не является ретрактом шара D^n .* Доказательство дословно повторяет рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 37.Н. Необходимо только вместо фундаментальных групп использовать $(n - 1)$ -мерные гомотопические группы. Дело в том, что группа $\pi_{n-1}(D^n)$ тривиальна, а группа $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ (т. е. нетривиальна).

На первый взгляд эта теорема может показаться бесполезной. Зачем нам знать, что в какой-то ситуации не существует отображений крайне специального типа - ретракций? Однако в математике теоремы, утверждающий несуществование чего-то, могут быть тесно связаны с другими, более привлекательными результатами. К примеру, из теоремы Борсука следует теорема Брауэра, имеющая широкую область применения. Однако прежде всего мы введем одно важное понятие, связанное с теоремой Брауэра.

11.2.3. Неподвижные точки

Точка $a \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения $f: X \rightarrow X$, если $f(a) = a$. Говорят, что пространство X *обладает свойством неподвижной точки*, если всякое непрерывное отображение $X \rightarrow X$ имеет неподвижную точку. Свойство неподвижной точки означает разрешимость широкого класса уравнений.

37.11. Докажите, что свойство неподвижной точки является топологическим.

37.12. Докажите, что отрезок $[a; b]$ обладает свойством неподвижной точки.

37.13. Докажите, что если топологическое пространство обладает свойством неподвижной точки, то этим свойством обладает и всякий его ретракт.

37.14. Пусть X и Y - топологические пространства, $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Докажите, что X и Y обладают свойством неподвижной точки, тогда их

букет $(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / [x_0 \sim y_0]$ также обладает свойством неподвижной точки.

37.15. Докажите, что всякое конечное дерево (см. 42'4x) обладает свойством неподвижной точки. (Верно ли это утверждение для бесконечных деревьев?)

37.16. Обладает ли пространство \mathbf{R}^n при $n > 0$ свойством неподвижной точки?

37.17. Обладает ли сфера S^n свойством неподвижной точки?

37.18. Докажите, что при нечетных n вещественное проективное пространство $\mathbf{R}P^n$ не обладает свойством неподвижной точки.

(Подсказка: $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^{(n+1)/2}$.)

37.19*. Докажите, что при нечетных n комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^n$ не обладает свойством неподвижной точки.

Информация. При четных n проективные пространства $\mathbf{R}P^n$ и $\mathbf{C}P^n$ обладают свойством неподвижной точки.

37. J Теорема Брауэра. Шар D^n обладает свойством неподвижной точки

Будем рассуждать от противного. Предположим, что отображение $f : D^n \rightarrow D^n$ не имеет неподвижных точек. Рассмотрим луч, исходящий из точки $f(x) \in D^n$ и проходящий через точку $x \in D^n$, и обозначим через $\rho(x)$ точку его пересечения с граничной сферой S^{n-1} . Ясно, что $\rho(x) = x$ при $x \in S^{n-1}$. Докажите, что отображение ρ непрерывно, тогда $\rho : D^n \rightarrow S^{n-1}$ - это ретракция. Однако в силу теоремы Борсука такой ретракции не существует.

37.J.1. Выведите теорему Брауэра в размерности n (т. е. утверждение, что шар D^n обладает свойством неподвижной точки) из теоремы Борсука в той же размерности (т. е. утверждения, что сфера S^{n-1} не является ретрактом шара D^n).

37.K. Выведите теорему Борсука из теоремы Брауэра.

Существование неподвижных точек можно доказывать не только из топологических соображений.

37.20. Докажите, что если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - периодическое аффинное преобразование (т. е. $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_p \text{ раз} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ при некотором p), то uf есть

неподвижная точка.

11.3. Гомотопические эквивалентности

11.3.1. Гомотопическая эквивалентность как отображение

Пусть X и Y - топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ - непрерывные отображения. Рассмотрим композиции $f \circ g : Y \rightarrow Y$ и $g \circ f : X \rightarrow X$. Если эти композиции являются тождественными отображениями, то f и g являются взаимно обратными гомеоморфизмами. Если же композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям id_Y и id_X , то отображения f и g называются *гомотопически обратными* друг другу. Если непрерывное отображение f имеет гомотопически обратное, то говорят, что f *гомотопически обратимо*, или что f - *гомотопическая эквивалентность*.

38.А. Докажите, что

- (1) Всякий гомеоморфизм есть гомотопическая эквивалентность.
- (2) Всякое отображение, гомотопически обратное гомотопической эквивалентности, само есть гомотопическая эквивалентность.
- (3) Композиция гомотопических эквивалентностей есть гомотопическая эквивалентность.

38.1. Приведите пример гомотопической эквивалентности, не являющейся гомеоморфизмом.

11.3.2. Гомотопическая эквивалентность как отношение

Топологические пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если существует гомотопическая эквивалентность $X \rightarrow Y$.

38.В. Отношение гомотопической эквивалентности топологических пространств является эквивалентностью.

Прямое следствие утверждения 38.А.

Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом*. Таким образом, о гомотопически эквивалентных пространствах говорят, что они принадлежат одному и тому же гомотопическому типу или имеют один и тот же гомотопический тип.

38.2. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств - одинаковое число компонент линейной связности.

38.3. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств - одинаковое число компонент связности.

38-4- Найдите бесконечное число пространств, принадлежащих одному и тому же гомотопическому типу, но попарно не гомеоморфных друг другу.

11.3.3. Деформационные ретракции

Ретракция $\rho : X \rightarrow A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция $\text{in} \circ \rho$ с включением $\text{in} : A \rightarrow X$ гомотопна тождественному отображению id_X . Если композиция $\text{in} \circ \rho$ на A гомотопна id_A , то ρ называется *строгой деформационной ретракцией*. Если существует (строгая) деформационная ретракция X на A , то A называется (*строгим*) *деформационным ретрактом* пространства X .

38. С. Всякая деформационная ретракция является гомотопической эквивалентностью.

Так как ρ - ретракция, то одно из условий, содержащихся в определении гомотопически обратных отображений, выполнено автоматически: $\rho \circ \text{in} = \text{id}_A$. Второе требование: $\text{in} \circ \rho$ гомотопно id_X , выполнено по условию.

38.D. Если A - деформационный ретракт X , то пространства X и A гомотопически эквивалентны.

Следует из 38. С.

38.E. Любые два деформационных ретракта одного и того же пространства гомотопически эквивалентны.

Следует из 38.D и 38.B.

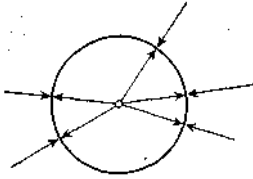
38.F. Если A есть деформационный ретракт пространства X , а B есть деформационный ретракт пространства Y , то $A \times B$ - деформационный ретракт пространства $X \times Y$.

Пусть $\rho_1 : X \rightarrow A$ и $\rho_2 : Y \rightarrow B$ - деформационные ретракции.

Докажите, что $\rho_1 \times \rho_2$ - деформационная ретракция.

11.3.4. Примеры гомотопических эквивалентностей

38. G. Окружность S^1 является деформационным ретрактом проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.



Рассмотрим отображение $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow S^1 : x \mapsto \frac{x}{|x|}$. Формула $h(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{|x|}$ определяет прямолинейную гомотопию между тождественным отображением пространства $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ и композицией $\rho \circ i$, где i - стандартное включение $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$.

38.5. Докажите, что лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна окружности.

38.6. Расклассифицируйте буквы латинского алфавита с точностью до гомотопической эквивалентности.

38.H. Докажите, что плоскость, из которой удалены s точек, имеет тот же гомотопический тип, что и букет s окружностей.

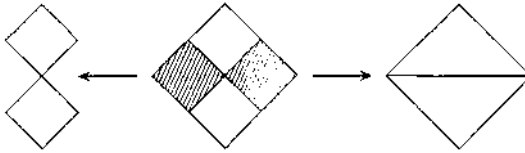


Топологический тип $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ не зависит от расположения точек x_1, x_2, \dots, x_s на плоскости. Расположим их на единичной окружности, к примеру, взяв их равными корнями s -й степени из 1.

Рассмотрим на плоскости s простых замкнутых кривых, каждая из которых охватывает ровно одну из данных точек, проходит через начало координат, и которые не имеют других общих точек, кроме начала координат. Возможно, что будет проще вместо кривых взять, к примеру, ромбы с центрами в данных точках. Остается доказать, что объединение этих кривых (или ромбов) является деформационным ретрактом проколотой в s точках плоскости. Ясно, что не имеет смысла выписывать явные формулы, хотя это и возможно. Рассмотрим отдельный ромб и его центр. Центральная проекция отображает дополнение центра ромба на его границу и имеется прямолинейная гомотопия между центральной проекцией и тождественным отображением проколотого ромба. Осталось показать, что ту часть плоскости, которая лежит вне объединения ромбов, также можно деформационно ретрагировать на объединение их контуров. Как

можно поступить, чтобы рассуждение стало похоже на доказательство? Рассмотрим вначале многоугольник, вершинами которого являются вершины ромбов, противоположные началу координат. Нетрудно видеть, что этот многоугольник является строгим деформационным ретрактом плоскости (так же как круг является ее деформационным ретрактом). Осталось показать, что объединение ромбов будет являться деформационным ретрактом рассматриваемого многоугольника, что очевидно.

38.1. Докажите, что объединение контура квадрата с одной из его диагоналей гомотопически эквивалентно букету двух окружностей.



Разделим квадрат на четыре части при помощи двух его средних линий и рассмотрим множество K , являющееся объединением его контура, средних линий и двух его "четвертинок", содержащих одну из его диагоналей. Покажите, что каждое из двух следующих множеств является деформационным ретрактом пространства K : объединение контура квадрата и его диагонали; объединение контуров "пустых" четвертинок этого квадрата.

38.7. Докажите, что ручка гомотопически эквивалентна букету двух окружностей.

38.8. Докажите, что ручка гомотопически эквивалентна объединению трех дуг, имеющих общие концы (т. е. греческой букве θ).

38.9. Докажите, что пространство, полученное из сферы S^2 в результате отождествления каких-либо двух её точек, гомотопически эквивалентно букету окружности и сферы.

38.10. Докажите, что пространство комплексных квадратных многочленов со старшим коэффициентом 1 и с различными корнями, т. е. пространство

$$\{(p, q) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + pz + q = 0 \text{ имеет два различных корня}\},$$

гомотопически эквивалентно окружности.

38.11. Докажите, что пространство обратимых вещественных $(n \times n)$ -матриц $GL(n, \mathbf{R})$ гомотопически эквивалентно пространству ортогональных матриц $O(n)$.

38.12. Какое отношение имеет решение предыдущей задачи к ортогонализации Грама-Шмидта, а ортогонализация Грама-Шмидта - к деформационной ретракции?

38.13. Постройте деформационные ретракции:

(a) $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$; (b) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \rightarrow S^{n-m-1}$; (c) $S^3 \setminus S^1 \rightarrow S^1$;

(d) $S^n \setminus S^m \rightarrow S^{n-m-1}$ (e) $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^{n-m-1}$.

11.3.5. Деформационные ретракции и гомотопические эквивалентности

38. J. 1) Можно ли одно из пространств задачи 38.1 вложить в другое?

2) Можно ли вложить каждое из них в плоскость с двумя выколотыми точками в качестве деформационного ретракта?

1) Ни одно из этих пространств не вкладывается в другое. Докажите это самостоятельно, предварительно доказав следующую лемму. Пусть J_n - это объединение n отрезков с общим концом. Тогда ни при каких $n > k \geq 2$ пространство J_n не вкладывается в J_k .

2) Ответ на второй вопрос положителен; см. доказательство утверждения 38.1.

Деформационные ретракции составляют особую разновидность гомотопических эквивалентностей. Они более доступны наглядному представлению, но, как это видно из 38. J, бывают такие гомотопически эквивалентные пространства, что ни одно из них не вкладывается в другое. Создаётся впечатление, что деформационных ретракций не хватает для установления гомотопической эквивалентностей.

Однако, это не так.

38.14*. Докажите, что любые два гомотопически эквивалентных пространства могут быть вложены в качестве деформационных ретрактов в одно и то же топологическое пространство.

11.3.6. Стягиваемые пространства

Топологическое пространство называется X *стягиваемым*, если тождественное отображение $\text{id}_X : X \rightarrow X$ гомотопно нулю.

38.15. Покажите, что отрезок I и прямая \mathbb{R} стягиваемы.

38.16. Докажите, что всякое стягиваемое пространство линейно связно.

38.17. Эквивалентны ли следующие свойства пространства X ?

(1) Пространство X стягиваемо.

(2) Пространство X гомотопически эквивалентно точке.

(3) Существует деформационная ретракция X на точку.

- (4) Некоторая точка $x \in X$ является деформационным ретрактом пространства X .
- (5) Всякое непрерывное отображение произвольного пространства Y в X гомотопну нулю.
- (6) Всякое непрерывное отображение из X в произвольное пространство Y гомотопну нулю.
- 38.18. Верно ли, что если пространство X стягиваемо, то для любого пространства Y :
- (1) любые два непрерывных отображения $X \rightarrow Y$ гомотопны;
- (2) любые два непрерывных отображения $Y \rightarrow X$ гомотопны?
- 38.19. Какие из нижеследующих пространств стягиваемы?
- (1) \mathbf{R}^n ,
- (2) выпуклое множество в \mathbf{R}^n ,
- (3) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$,
- (4) звёздное множество в \mathbf{R}^n .
- (o) конечное дерево (см. 42'4x).
- 38.20. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств стягиваемо, тогда каждый сомножитель X и Y стягиваем.

11.3.7. Фундаментальная группа и гомотопический тип

38. К. Пусть отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ гомотопически взаимно обратны, $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ - такие точки, что $f(x_0) = y_0$ и $g(y_0) = x_0$, и, более того, гомотопии, соединяющие $f \circ g \circ \text{id}_Y$ и id_Y , $g \circ f \circ \text{id}_X$ и id_X , неподвижны на y_0 и x_0 , соответственно. Тогда f_* и g_* являются взаимно обратными изоморфизмами между группами $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(Y, y_0)$.

Так как композиция $g \circ f$ x_0 -гомотопна нулю, то $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Аналогичным образом, $f_* \circ g_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$. Таким образом, f_* и g_* - взаимно обратные гомоморфизмы.

38.L Следствие. Если $\rho : X \rightarrow A$ - строгая деформационная ретракция, $x_0 \in A$, то

$\rho_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ и $\text{id}_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ взаимно обратные изоморфизмы.

Действительно, это - прямое следствие теоремы 38.K.

38.21. Вычислите фундаментальные группы следующих пространств:

- (a) $\mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}^1$, (b) $\mathbf{R}^N \setminus \mathbf{R}^n$, (c) $S^3 \setminus S^1$, (d) $\mathbf{R}^N \setminus S^n$,
- (e) $\mathbf{R}^3 \setminus S^1$, (f) $S^N \setminus S^n$. (g) $\mathbf{R}P^3 \setminus \mathbf{R}P^1$, (h) ручка,
- (i) лента Мёбиуса, (j) сфера с s дырами,

(к) бутылка Клейна с одной уда- (l) лента Мёбиуса с s дырами, ленной точкой,

38.22. Докажите, что граничная окружность ленты Мёбиуса, стандартно вложенной в \mathbf{R}^3 (см. 21.18), не ограничивает вложенного в \mathbf{R}^3 диска, внутренность которого не пересекала бы ленту Мёбиуса.

38.23. 1) Вычислите фундаментальную группу пространства Q всех квадратичных комплексных многочленов $ax^2 + bx + c$, имеющих различные корни.

2) Вычислите фундаментальную группу его подпространства Q_1 , состоящего из многочленов с $a = 1$.

38.24. Можно ли решить задачу 38.23 посредством выкладок, дающих традиционный вывод формулы для корней квадратного трехчлена?

38.M. Ослабим предположения теоремы 38.K следующим образом. Будем считать, что $g(y_0) \neq x_0$ и (или) гомотопии. Соединяющие $f \circ g \circ \text{id}_Y$ и $g \circ f \circ \text{id}_X$, не связаны в точках y_0 и x_0 , соответственно? Как тогда связаны между собой f_* и g_* ? Изоморфны ли группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(Y, y_0)$?

Пусть $x_1 = g(x_0)$. Для всякой гомотопии h между id_X и $g \circ f$ формула $s(t) = h(x_0, t)$ определяет путь в точке x_0 . В силу ответа на задачу 36.E, композиция $g_* \circ f_* = I_{x_1}$ - изоморфизм.

Аналогичным образом, композиция $f_* \circ g_*$ является изоморфизмом. Значит, f_* и g_* изоморфизмы.

11.4. Накрытия и фундаментальная группа

11.4.1. Гомоморфизм, индуцированный проекцией

39.A. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, $x_0 \in X$ и $b_0 = p(x_0)$. Тогда $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ - гомоморфизм.

Если u - петля в X , такая что петля $p \circ u$ в B гомотопна нулю, то в силу теоремы о накрывающей гомотопии 34. С петля u также гомотопна нулю. Таким образом, если $p_*([u]) = [p \circ u] = 0$, то $[u] = 0$, что и означает, что p_* - гомоморфизм.

Назовем *группой накрытия* $p : X \rightarrow B$ в точке x_0 подгруппу $p_*(\pi_1(X, x_0))$ группы $\pi_1(B, b_0)$.

39.B. Определяется ли группа накрытия накрытием?

Нет, не определяется. Если $p(x_0) = p(x_1) = b_0$, $x_0 \neq x_1$ и

группа $\pi_1(B, b_0)$ не абелева, то подгруппы $p_*(\pi_1(X, x_0))$ и $p_*(\pi_1(X, x_1))$ вполне могут быть различны (см. S9.D).

39. С. Группа накрытия и подъём петель. Опишите на языке теоремы о накрывающем пути 33. J те петли в базе накрытия, гомотопические классы которых принадлежат группе накрытия.

Группа $p_*(\pi_1(X, x_0))$ накрытия состоит из гомотопических классов тех петель в точке b_0 , для которых накрывающий их путь с началом в точке x_0 является петлей.

39.D. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, точки $x_0, x_1 \in X$ находятся в одной и той же компоненте линейной связности пространства X и $b_0 = p(x_0) = p(x_1)$. Тогда подгруппы $p_*(\pi_1(X, x_0))$ и $p_*(\pi_1(X, x_1))$ сопряжены в $\pi_1(B, b_0)$ (т. е. существует такой элемент α группы $\pi_1(B, b_0)$, что $p_*(\pi_1(X, x_1)) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha$).

Пусть s - путь в X , соединяющий точку x_0 с точкой x_1 . Обозначим через α класс петли ros и рассмотрим внутренний автоморфизм $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0) : \beta \mapsto \alpha^{-1}\beta\alpha$. Докажем коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{T_s} & \pi_1(X, x_1) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(B, b_0). \end{array}$$

Действительно, поскольку $T_s([u]) = [s^{-1}us]$, то

$$p_*(T_s([u])) = [p \circ (s^{-1}us)] = [(p \circ s^{-1})(p \circ u)(p \circ s)] = \alpha^{-1}p_*([u])\alpha.$$

Поскольку диаграмма коммутативна и T_s - изоморфизм, то

$$p_*(\pi_1(X, x_1)) = \varphi(p_*(\pi_1(X, x_0))) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha,$$

таким образом, группы $p_*(\pi_1(X, x_0))$ и $p_*(\pi_1(X, x_1))$ сопряжены.

39.E. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, $x_0 \in X$ и $b_0 = p(x_0)$. Для любого гомотопического класса $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ существует точка $x_1 \in p^{-1}(b_0)$, такая что $p_*(\pi_1(X, x_1)) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha$.

Пусть s - петля в X , являющаяся представителем класса $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$.

Пусть путь \tilde{s} накрывает s и начинается в точке x_0 . Если положить $x_1 = \tilde{s}(1)$, то, как следует из доказательства утверждения 39. D,

$$p_*(\pi_1(X, x_1)) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha.$$

39.F. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие в узком смысле и $G \subset \pi_1(B, b_0)$ - группа этого накрытия, отвечающая отмеченной точке x_0 . Подгруппа $H \subset \pi_1(B, b_0)$ является группой того же накрытия, тогда она сопряжена подгруппе G .

Следствие 39. D и 39. E.

11.4.2. Еще раз о числе листов накрытия

39. Г. Число листов и индекс группы накрытия. У конечнолистного накрытия в узком смысле число листов равно индексу его группы. См. 39.Н.

39.Н. Листы и правые смежные классы. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие в узком смысле, $b_0 \in B$, $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Постройте естественную биекцию множества $p^{-1}(b_0)$ на множество $p_*(\pi_1(X, x_0)) \setminus \pi_1(B, b_0)$ правых смежных классов фундаментальной группы базы этого накрытия по группе накрытия.

Обозначим для краткости $H = p_*(\pi_1(X, x_0))$. Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in p^{-1}(b_0)$; пусть s - путь с началом в x_0 и концом в x_1 , а $\alpha = [p \circ s]$. Сопоставим точке x_1 правый класс смежности $H\alpha \subset \pi_1(B, b_0)$. Проверим корректность данного определения. Пусть s_1 - другой путь из x_0 в x_1 , $\alpha_1 = [p \circ s_1]$. Путь ss_1^{-1} является петлей, значит, $\alpha\alpha_1^{-1} \in H$, поэтому $H\alpha = H\alpha_1$. Теперь докажем, что указанное соответствие является сюръекцией. Пусть $H\alpha$ - некоторый класс смежности.

Рассмотрим петлю u , являющуюся представителем класса α , пусть \tilde{u} - это накрывающий ее путь с началом и концом в точке x_0 , а $x_1 = \tilde{u}(1) \in p^{-1}(b_0)$. По построению, точке x_1 сопоставляется класс смежности $H\alpha$, значит, данное соответствие сюръективно. Наконец, проверим его инъективность. Пусть $x_1, x_2 \in p^{-1}(b_0)$, s_1 и s_2 - пути, соединяющие x_0 с x_1 и x_2 , соответственно, $\alpha_i = [p \circ s_i]$, $i = 1, 2$. Предположим, что $H\alpha_1 = H\alpha_2$ и покажем, что тогда $x_1 = x_2$. Рассмотрим петлю $u = (p \circ s_1)(p \circ s_2^{-1})$ и накрывающий ее путь \tilde{u} , который является петлей в силу того, что $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in H$. Осталось заметить, что пути s'_1 и s'_2 , где $s'_1(t) = u(\frac{t}{2})$ и $s'_2(t) = \tilde{u}(1 - \frac{t}{2})$ начинаются в точке x_0 и накрывают пути $p \circ s_1$ и $p \circ s_2$, соответственно.

Значит, $s_1 = s'_1$ и $s_2 = s'_2$, таким образом,

$$x_1 = s_1(1) = s'_1(1) = \tilde{u}(\frac{1}{2}) = s'_2(1) = s_2(1) = x_2.$$

39.1 Число листов универсального накрытия. Число листов универсального накрытия равно порядку фундаментальной группы его базы.

39.2 Нетривиальность накрытия влечет нетривиальность фундаментальной группы. Фундаментальная группа любого топологического пространства, обладающего нетривиальным линейно связным накрывающим пространством, не тривиальна.

- 39.3. Какие числа возникают как число листов накрытия ленты Мёбиуса цилиндром $S^1 \times I$?
- 39.4. Чему могут равняться числа листов накрытия ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса?
- 39.5. Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна тором?
- 39.6. Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна бутылкой Клейна?
- 39.7. Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна плоскостью \mathbf{R}^2 ?
- 39.8. Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна цилиндром $S^1 \times \mathbf{R}$?

11.4.3. Иерархия накрытий (в узком смысле)

Пусть $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow B$ - накрытия в узком смысле, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $p(x_0) = q(y_0) = b_0$. Говорят, что накрытие q с отмеченной точкой y_0 *подчинено* накрытию p с отмеченной точкой x_0 , если существует такое отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, что $q \circ \varphi = p$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Отображение φ в этом случае называется *подчинением*.

39.И. Подчинение является накрытием.

Обозначим группу автоморфизмов накрытия $p : X \rightarrow B$ через $\text{Aut}(p)$. Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$, пусть $b = q(y)$ и U_b - окрестность точки b , которая является правильно накрытой для каждого из накрытий p и q . Пусть, далее, V - это лист над U_b , содержащий точку y , а $\{W_\alpha\}$ - набор листов над U_b , объединение которых есть $\varphi^{-1}(V)$.

Ясно, что отображение $\varphi|_{W_\alpha} = (q|_V)^{-1} \circ p|_{W_\alpha}$ - гомеоморфизм.

39.И. Если подчинение существует, то оно единственно. Ср. 34-В.

Говорят, что накрытия $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow B$ *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $h : X \rightarrow Y$ такой что $p = q \circ h$.

Гомеоморфизмы h и h^{-1} называются в этом случае *эквивалентностями*.

Пусть p и q - накрытия. Рассмотрим произвольную точку

$x \in X$ и путь s , соединяющий заданную точку x_0 с x . Пусть $u = p \circ s$.

В силу утверждения 34-В существует единственный путь $\tilde{u} : I \rightarrow Y$, накрывающий u и начинающийся в точке y_0 . Значит, $\tilde{u} = \varphi \circ s$, следовательно, точка $\varphi(x) = \varphi(s(1)) = \tilde{u}(1)$ определена однозначно.

39.К. Если два накрытия с отмеченной точкой подчинены друг другу, то соответствующие подчинения являются эквивалентностями.

Пусть $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow X$ - подчинения, причем

$\varphi(x_0) = y_0$ и $\psi(y_0) = x_0$. Ясно, что композиция $\psi \circ \varphi$ является подчинением накрытия $p : X \rightarrow B$ самого над собой. Следовательно, в силу единственности подчинения (см. 39.1), $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$.

Аналогичным образом, $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$, что и означает, что подчинения φ и ψ являются взаимно обратными эквивалентностями.

39.L. Эквивалентность накрытий с отмеченной точкой действительно является отношением эквивалентности на множестве накрытий с данной базой.

39.M. Подчинение определяет отношение частичного порядка на множестве классов эквивалентных накрытий с отмеченной точкой и данной базой.

Ясно, что если накрытия p и p' эквивалентны и q подчинено p , то q подчинено и p' , поэтому отношение подчинения переносится с накрытий на их классы эквивалентности. При этом оно очевидно является транзитивным. Как доказано в 39.K, если накрытия подчинены друг другу, то они эквивалентны, следовательно, это отношение антисимметрично.

39.9. Какой класс эквивалентных накрытий минимален (т.е. подчинён всем)?

39.N. Пусть $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow B$ - накрытия, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $p(x_0) = q(y_0) = b_0$. Если накрытие q с отмеченной точкой y_0 подчинено накрытию p с отмеченной точкой x_0 , то группа накрытия p содержится в группе накрытия q , т. е. $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$.

Так как $p_* = (q \circ \varphi)_* = q_* \circ \varphi_*$, то

$$p_*(\pi_1(X, x_0)) = q_*(\varphi_*(\pi_1(X, x_0))) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

11.4.4x. Существование подчинений

Топологическое пространство называется *локально линейно связным*, если в каждой окрестности U любой его точки существует линейно связная окрестность $V \subset U$ этой точки.

39.Ix. Постройте линейно связное, но не локально линейно связное пространство.

39.Ax. Пусть B - локально линейно связное пространство, $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow B$ - его накрытия в узком смысле, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $p(x_0) = q(y_0) = b_0$. Накрытие q подчинено накрытию p , тогда $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$.

39.Ax.1. В условиях утверждения 39.Ax, если пути $u, v : I \rightarrow X$ имеют общую начальную точку x_0 и общую конечную точку, то пути, накрывающие пути rou и rov и имеющие общую начальную точку y_0 , оканчиваются также в одной и той же точке.

Обозначим через $\tilde{u}, \tilde{v} : I \rightarrow Y$ пути, начинающиеся в точке y_0 и накрывающие пути $p \circ u$ и $p \circ v$, соответственно. Рассмотрим путь uv^{-1} , который по условию является петлей в точке x_0 , петлю $(p \circ u)(p \circ v)^{-1} = p \circ (uv^{-1})$ и ее класс $\alpha \in p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$.

Тем самым $\alpha \in q_*(\pi_1(Y, y_0))$, значит, путь с началом в точке y_0 , накрывающий петлю $(p \circ u)(p \circ v)^{-1}$, также является петлей. Следовательно, пути, накрывающие $p \circ u$ и $p \circ v$ и начинающиеся в точке y_0 , оканчиваются в одной и той же точке. Осталось заметить, что ими и являются пути \tilde{u} и \tilde{v} .

39. Ах. 2. В условиях утверждения 39.Ах отображение $X \rightarrow Y$, определенное посредством 39.Ах.1 (что это за отображение?), непрерывно.

Определим отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ следующим образом.

Пусть $x \in X$, u - путь, соединяющий точку x_0 ТОЧКОЙ x , то $\varphi(x) = y$, где y - это конечная точка пути $\tilde{u} : I \rightarrow Y$, накрывающего путь $p \circ u$. В силу предыдущего утверждения, отображение φ определено корректно. Докажем, что отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ непрерывно. Пусть $x_1 \in X$, $b_1 = p(x_1)$ и $y_1 = \varphi(x_1)$, по построению, $q(y_1) = b_1$.

Рассмотрим произвольную окрестность V точки y_1 . Мы вправе считать, что V является листом над правильно накрытой линейно связной окрестности U точки b_1 . Пусть W - это содержащий точку x_1 лист над U , таким образом, окрестность W также линейно связна. Рассмотрим произвольную точку $x \in W$. Пусть путь $v : I \rightarrow W$ соединяет x_1 с x . Ясно, что образ пути \tilde{v} , начинающегося в y_1 и накрывающего путь $p \circ v$, содержится в окрестности V , значит, $\varphi(x) \in V$. Таким образом, $\varphi(W) \subset V$, следовательно, отображение φ непрерывно в точке x .

39.2х. Постройте пример, показывающий, что условие локальной линейной связности в 39.Ах.2 и в 39. Ах необходимо.

39.Вх. Два накрытия, $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow B$, с общей локально линейно связной базой эквивалентны, тогда для некоторых $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ с $p(x_0) = q(y_0) = b_0$ группы $p_*(\pi_1(X, x_0))$ и $q_*(\pi_1(Y, y_0))$ сопряжены в

$$\pi_1(B, b_0).$$

Следует из 39.Е, 39. Ах и 39.К.

39. 3х. Постройте пример, показывающий, что условие локальной линейной связности базы в 39.Вх необходимо.

11.4.5х. Микроодносвязность

Топологическое пространство X называется *микроодносвязным*, если у каждой точки $a \in X$ есть такая окрестность U , что гомоморфизм включения $\pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ тривиален.

39.4х. Всякое односвязное пространство микроодносвязно.

39.5х. Укажите микроодносвязное, но не односвязное пространство.

Топологическое пространство называется *локально стягиваемым в точке a* , если всякая окрестность U точки a содержит такую её окрестность V , что включение $V \rightarrow U$ гомотопно нулю (так будет, например, в случае, когда в окрестности U содержится стягиваемая окрестность точки a). Топологическое пространство называется *локально стягиваемым*, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

39.6х. Любое конечное топологическое пространство локально стягиваемо.

39.7х. Покажите, что всякое локально стягиваемое пространство микроодносвязно.

39.8х. Постройте не микроодносвязное пространство.

В литературе микроодносвязность называется также *локальной односвязностью в слабом смысле*, а локальной односвязностью в сильном смысле называется следующее свойство: всякая окрестность U любой точки содержит такую её окрестность V , что любая петля, лежащая в V , гомотопна постоянной петле в V .

39.9х. Постройте микроодносвязное пространство, которое не является локально односвязным в сильном смысле.

11.4.6х. Существование накрытий

39. Сх. Всякое пространство, обладающее универсальным накрывающим, микроодносвязно.

Пусть $X \rightarrow B$ - универсальное накрытие, U - правильно накрытая окрестность точки $a \in B$, V - один из листов над U . Представим включение $i : U \rightarrow B$ как композицию $p \circ j \circ (p|_V)^{-1}$, где j - это включение $V \rightarrow X$. Поскольку группа $\pi_1(X)$ тривиальна, то и гомоморфизм включения $i_* : \pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(B, a)$ тривиален.

39. Dx Существование накрытия с данной группой. Если пространство B линейно связно, локально линейно связно и микроодносвязно, то для всякой его точки b_0 и всякой подгруппы π группы $\pi_1(B, b_0)$ существует такое накрытие $p : X \rightarrow B$ и такая точка $x_0 \in X$, что $p(x_0) = b_0$ и $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \pi$.

39.Dx.1. Пусть в условиях теоремы 39.Dx накрытие $p : X \rightarrow B$, удовлетворяющее требованиям этой теоремы, существует. Опишите для каждого $x \in X$ класс всех путей в B , представимых как образы при p путей, соединяющих в X точку x_0 с x .

Пусть пути u_1, u_2 соединяют точку b_0 с b . Накрывающие их пути, начинающиеся в x_0 , заканчиваются в одной и той же точке x , тогда класс петли $u_1 u_2^{-1}$ лежит в подгруппе π .

39.Dx.2- Определяет ли решение задачи 39.Dx.1 такое отношение эквивалентности в множестве всех путей в B , начинающихся в точке b_0 , которое определяет биекцию между множеством X и множеством классов эквивалентных путей?

Да, определяет. Рассмотрим множество всех путей в B , начинающихся в точке b_0 и введем в нем отношение эквивалентности: $u_1 \sim u_2$, если $[u_1 u_2^{-1}] \in \pi$. Обозначим через \tilde{X} фактормножество по введенному отношению. Естественная биекция между X и \tilde{X} строится следующим образом. Для всякой точки $x \in X$ рассмотрим путь u , соединяющий отмеченную точку x_0 с точкой x . Класс пути $p \circ u$ в \tilde{X} и является образом точки x . Описанное соответствие, очевидно, является биекцией $f : X \rightarrow \tilde{X}$. Обратное f отображение $g : \tilde{X} \rightarrow X$ устроено так. Пусть $u : I \rightarrow B$ представитель класса $y \in \tilde{X}$. Рассмотрим путь $v : I \rightarrow X$, накрывающий u и начинающийся в точке x_0 . Тогда $g(y) = v(1)$.

39.Dx.3. Опишите такую топологию в множестве классов эквивалентных путей из 39.Dx.2, чтобы естественная биекция между X и этим множеством оказалась гомеоморфизмом.

Определим базу топологии в \tilde{X} . Для всякой пары (U, x) , где U - открытое в B множество, а $x \in \tilde{X}$, множество U_x состоит из классов всевозможных путей uv , где u путь из класса x , а v - это путь в U , начинающийся в точке $u(1)$. Нетрудно доказать, что для всякой точки $y \in U_x$ справедливо тождество $U_y = U_x$, откуда следует, что совокупность множеств вида U_x образует базу некоторой топологии в \tilde{X} . Чтобы доказать, что f и g - гомеоморфизмы, достаточно проверить, что каждый из них переводит множество из базы топологии в открытое множество. Для выбора базы рассмотрите набор правильно накрытых окрестностей $U \subset B$, каждая из которых, во-первых, линейно связна, во-вторых, любая петля в которых гомотопна нулю в B .

39.Dx.4- Докажите, что построение пространства X и отображения $p : X \rightarrow B$, содержащееся в задачах 39.Dx.1- 39.Dx.4, в предположениях теоремы 39.Dx определяет искомое накрытие.

По существу, из утверждений *S9.Dx.1 - 39.Dx.3* следует единственность накрытия с данной группой. Точнее, верно следующее утверждение.

Пространство \tilde{X} определено в *39.Dx.2*. Проекция $p : \tilde{X} \rightarrow B$ определяется следующим образом: $p(y) = u(1)$, где u - путь, входящий в класс $y \in \tilde{X}$. Непрерывность p имеет место безо всяких предположений о свойствах пространства B . Докажите, что если множество U в B открыто, линейно связно, и каждая петля в нем гомотопна нулю в B , то U будет правильно накрытой окрестностью.

39.Ex Единственность накрытия с данной группой. *Предположим, что пространство B линейно связно, локально линейно связно и микроодносвязно. Пусть $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow B$ накрытия, причем $p_*(\pi_1(X, x_0)) = q_*(\pi_1(Y, y_0))$. Тогда накрытия p и q эквивалентны, т. е. существует такой гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$, что $f(x_0) = y_0$ и $p \circ f = q$.*

39.Fx Классификация накрытий с "хорошей" базой. *Имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных накрытий (в узком смысле) над линейно связным локально линейно связным и микроодносвязным пространством B с отмеченной точкой b_0 и классами сопряженных подгрупп группы $\pi_1(B, b_0)$. Это соответствие переводит иерархию накрытий (с порядком - подчинением) в иерархию подгрупп (с порядком - теоретико-множественным включением).*

Тривиальной подгруппе при соответствии теоремы *39. Fx* отвечает накрытие с односвязным накрывающим. Поскольку этому накрытию подчинены все остальные накрытия с той же базой, его и называют **универсальным**.

Рассмотрим подгруппы $\pi \subset \pi_0 \subset \pi_1(B, b_0)$. Пусть $p : \tilde{Y} \rightarrow B$ - накрытие, построенное по подгруппе π , $q : \tilde{Y} \rightarrow B$ - накрытие, построенное по π_0 . Из конструкции этих накрытий следует, что существует отображение $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$. Покажите, что оно и является подчинением.

39.10x. Опишите все накрытия следующих пространств с точностью до эквивалентности и укажите, какие из них подчинены друг другу:

- (1) окружность S^1 ;
- (2) проколота плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
- (3) лента Мёбиуса;
- (4) четырёхточечная цифровая окружность (пространство, составленное из четырёх точек, скажем, a, b, c, d с топологией, порождённой базой, состоящей из множеств $\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}$ и $\{c, d, a\}$);
- (5) тор $S^1 \times S^1$;

11.4.7х. Действие фундаментальной группы на слое

39. Gx Действие группы π_1 в слое накрытия. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, $b_0 \in B$. Постройте естественное правое действие группы $\pi_1(B, b_0)$ в $p^{-1}(b_0)$.

Говорят, что группа G действует справа в множестве F , если каждому элементу $\alpha \in G$ сопоставлено отображение $\varphi_\alpha : F \rightarrow F$, причем при этом: 1) $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$; 2) если e - единица группы G , то $\varphi_e = \text{id}_F$.

Положим $F = p^{-1}(b_0)$. Для любого элемента $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ определим отображение $\varphi_\alpha : F \rightarrow F$ следующим образом. Пусть $x \in F$. Рассмотрим петлю u в точке b_0 , такую что $[u] = \alpha$. Пусть путь \tilde{u} накрывает петлю u и начинается в точке x . Положим $\varphi_\alpha(x) = \tilde{u}(1)$. Из теоремы о накрывающей гомотетии следует, что отображение φ_α зависит только от гомотопического класса петли u , значит, определение корректно. Если $[u] = \epsilon$, т. е. петля u гомотопна нулю, то путь \tilde{u} также является петлей, следовательно, $\tilde{u}(1) = x$, таким образом, $\varphi_\epsilon = \text{id}_F$.

Проверьте, что выполнено и первое свойство из определения действия группы на множестве.

39.Hx. При каких условиях действие из 39. Gx транзитивно?

См. 39.Px

11.4.8х. Автоморфизмы накрытия

Гомеоморфизм $\varphi : X \rightarrow X$ называется *автоморфизмом* накрытия $p : X \rightarrow B$, если $p \circ \varphi = p$.

39.Ix. Автоморфизмы накрытия составляют группу.

Групповой операцией в множестве всех автоморфизмов является их композиция.

39.Ix. Автоморфизм $\varphi : X \rightarrow X$ накрытия $p : X \rightarrow B$ в узком смысле определяется образом любой точки $x_0 \in X$.

Следует из 39. J.

39.Kx. Любое двулистное накрытие обладает нетривиальным автоморфизмом.

Покажите, что отображение, меняющее местами две точки из прообраза любой точки базы, есть гомеоморфизм.

39.IIx. Найдите трёхлистное накрытие, не имеющее нетождественных автоморфизмов.

Пусть G - группа и H - её подгруппа. Напомним, что *нормализатором* $\text{Nr}(H)$ подгруппы H называется часть группы G , составленная из таких $g \in G$, для которых $g^{-1}Hg = H$. Это - наибольшая подгруппа группы G , содержащая H в качестве своей нормальной подгруппы, так что $\text{Nr}(H)/H$ есть группа.

39.Lx. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, $x_0 \in X$ и $b_0 = p(x_0)$. Построй-те отображение $\pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$, которое индуцировало бы биекцию множества правых смежных классов $p_*(\pi_1(X, x_0)) \setminus \pi_1(B, b_0)$ на $p^{-1}(b_0)$.

Это в точности утверждение 39.H.

39.Mx. Покажите, что множество образов точки x_0 при всевозможных автоморфизмах накрытия $p : X \rightarrow B$ соответствует при биекции $p_*(\pi_1(X, x_0)) \setminus \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$, построенной в 39.H, группе $\text{Nr}(p_*(\pi_1(X, x_0))) / p_*(\pi_1(X, x_0))$.

39.Nx. Для всякого накрытия $p : X \rightarrow B$ в узком смысле имеется естественный антигомоморфизм группы $\text{Aut}(p)$ в группу $\text{Nr}(p_*(\pi_1(X, x_0))) / p_*(\pi_1(X, x_0))$.

(Напомним, что отображение $\varphi : G \rightarrow H$ группы G в группу H называется *антигомоморфизмом*, если $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$ для любых $a, b \in G$.)

39. Ox. Если база B локально линейно связна, то в предположениях теоремы 39.Nx антигомоморфизм $\text{Aut}(p) \rightarrow \text{Nr}(p_*(\pi_1(X, x_0))) / p_*(\pi_1(X, x_0))$ биективен.

11.4.9x. Регулярные накрытия

39.Px Регулярность накрытия. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие в узком смысле, $b_0 \in B$, $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $p_*(\pi_1(X, x_0))$ есть нормальный делитель группы $\pi_1(B, b_0)$;
- (2) $p_*(\pi_1(X, x))$ - нормальный делитель группы $\pi_1(B, p(x))$ для всякого $x \in X$;
- (3) все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b)$ совпадают;
- (4) для любой петли $s : I \rightarrow B$ либо каждый путь в X , покрывающий петлю s , является петлей (независимо от его начальной точки), либо ни один из этих путей не есть петля;
- (5) группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

Накрытие, удовлетворяющее любому из эквивалентных условий теоремы 39.Px, называется *регулярным*.

39.12x. Накрытия $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ и $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^n$ с целыми $n > 0$ регулярны.

39. Qx. Для любой точки $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ группа автоморфизмов регулярного накрытия $p : X \rightarrow B$ естественно антиизоморфна факторгруппе $\pi_1(B, b_0) / p_* \pi_1(X, x_0)$ группы $\pi_1(B, b_0)$ по группе этого накрытия.

Следует из 39.Nx и 39.Px.

39.13x. Любое двулистное накрытие регулярно.

39.14x. Какие накрытия, рассмотренные в задачах параграфа 33, регулярны? Вообще, имеются ли среди них нерегулярные накрытия?

39.15x. Постройте трёхлистное нерегулярное накрытие букета двух окружностей.

39.16x. Пусть $p : X \rightarrow B$ - регулярное накрытие, $Y \subset X$, $C \subset B$ и $q : Y \rightarrow C$ - подотображение проекции p . Докажите, что если q является накрытием, то это накрытие регулярно.

11.4.10x. Подъём и накрытие отображения

39.Rx. Пусть $p : X \rightarrow B$ и $f : Y \rightarrow B$ - непрерывные отображения. Пусть $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ - такие точки, что $p(x_0) = f(y_0)$. Сформулируйте в терминах гомоморфизмов $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, p(x_0))$ и $f_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(B, f(y_0))$ необходимое условие существования такого поднятия $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ отображения f , что $\tilde{f}(y_0) = x_0$. Постройте пример, в котором это условие не было бы достаточным. При каких дополнительных предположениях оно является достаточным?

39.Sx Теорема о поднятии отображения. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие в узком смысле и $f : Y \rightarrow B$ - непрерывное отображение. Пусть $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ - такие точки, что $p(x_0) = f(y_0)$. Если Y - локально линейно связное пространство и $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$, то существует единственное непрерывное отображение $\tilde{f} : Y \rightarrow X$,

такое что $p \circ \tilde{f} = f$ и $\tilde{f}(y_0) = x_0$.

39. Tx. Пусть $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow C$ - накрытия в узком смысле и $f : B \rightarrow C$ - непрерывное отображение. Пусть

$x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ - такие точки, что $f(p(x_0)) = q(y_0)$. Если существует такое непрерывное отображение $F : X \rightarrow Y$, что $f \circ p = q \circ F$ и $F(x_0) = y_0$, то

$f_*(p_*(\pi_1(X, x_0))) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$.

39. Ux Теорема о накрытии отображения. Пусть $p : X \rightarrow B$ и $q : Y \rightarrow C$ - накрытия в узком смысле, пусть $f : B \rightarrow C$ - непрерывное отображение и пусть $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ - такие точки, что $f p(x_0) = q(y_0)$. Если пространство Y локально линейно связно и $f_*(p_*(\pi_1(X, x_0))) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$, то существует единственное непрерывное отображение $F : X \rightarrow Y$, такое что $f \circ p = q \circ F$ и $F(x_0) = y_0$.

11.4.11x. Индуцированные накрытия

39. Vx. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, а $f : A \rightarrow B$ произвольное непрерывное отображение. Через W обозначим подпространство произведения $A \times X$, состоящее из всех точек (a, x) , таких что $f(a) = p(x)$. Пусть $q : W \rightarrow A$ - сужение проекции $A \times X \rightarrow A$. Тогда $q : W \rightarrow A$ является накрытием с таким же числом листов, что и накрытие p .

Накрытие $q : W \rightarrow A$, существование которого утверждается в теореме 39. Vx, называется **накрытием, индуцированным** $p : X \rightarrow B$ **посредством** $f : A \rightarrow B$.

39. I7x. Представьте накрытия, описанные в задачах 33. D и 33. F в виде накрытий, индуцированных из накрытия $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$.

39. I8x. Какие из рассмотренных ранее накрытий индуцируются из накрытия задачи 35.7?

11.4.12x. Высшие гомотопические группы накрывающих пространств

39. Wx. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие. Для всякого непрерывного отображения $s : I^n \rightarrow B$ и всякого непрерывного отображения $u : I^{n-1} \rightarrow X$, накрывающего его сужение $s|_{I^{n-1}}$, существует единственное накрывающее непрерывное отображение для s , которое является продолжением отображения u .

39. Xx. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие, а точки $x_0 \in X$ и $b_0 \in B$ таковы, что $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого натурального числа $r > 1$ гомотопические группы $\pi_r(X, x_0)$ и $\pi_r(B, b_0)$ канонически изоморфны.

39. Yx. Докажите, что высшие гомотопические группы окружности, тора, ленты Мёбиуса и бутылки Клейна тривиальны.

12. Клеточная техника

12.1. Клеточные пространства

12.1.1. Определение клеточного пространства

В этом параграфе мы познакомимся с классом топологических пространств, который играет в алгебраической топологии особую важную роль. Для пространств этого класса мы научимся вычислять фундаментальную группу.

Клеточные пространства были введены Дж. Г. К. Уайтхедом, который назвал их *CW-комплексами*. Это имя сохранилось за ними и до настоящего времени, хотя оно не удобно по многим естественным причинам. За очень редкими исключениями (одно из них - это CW-комплекс, другое — симплициальный комплекс), слово *комплекс* в математике обозначает в наше время различные алгебраические, а не топологические объекты. Следуя В. А. Рохлину и Д. Б. Фуксу, мы будем использовать термин *клеточные пространства*.

Нульмерным клеточным пространством называется дискретное топологическое пространство. Его точки называются также *нульмерными клетками*, просто *0-клетками* или *вершинами*.

Одномерное клеточное пространство это пространство, полученное при помощи следующей конструкции. Рассмотрим 0-мерное клеточное пространство X_0 и семейство отображений $\varphi_\alpha : S^0 \rightarrow X_0$, $\alpha \in J$. Приклеим к X_0 при помощи отображений φ_α дизъюнктную сумму экземпляров отрезка D^1 (занумерованных тем же семейством индексов, что и отображения φ_α): $X_0 \cup_{\varphi_\alpha} (\bigsqcup_\alpha D_\alpha^1)$. Образы внутренних частей экземпляров отрезка D^1 называются *открытыми одномерными клетками*, просто *1-клетками* или *ребрами*. Если отрезок приклеен к данной вершине хотя бы одним из своих концов, то говорят, что соответствующее ребро и вершина *инцидентны* друг другу. Множества, полученные из каждого отрезка D^1 , называются *замкнутыми клетками*. Открытые одномерные и нульмерные клетки составляют разбиение одномерного клеточного пространства. Подчеркнем, что это разбиение входит в структуру клеточного пространства, т. е. одномерное клеточное пространство - это топологическое пространство, снабжённое разбиением специального типа.

Одномерные клеточные пространства часто называют *графами*. Впрочем, говоря о графах, нередко подразумевают другой класс объектов. Например, так называют одномерные клеточные пространства, в которых приклеивающим отображениям разных одномерных клеток запрещается совпадать, т. е. двум одномерным клеткам запрещается иметь одну и ту же границу. Или границе одномерной клетки запрещается состоять из одной точки. Когда же запрещённые одномерные клеточные пространства всё же приходится рассматривать, их называют мультиграфами или псевдографами. Более того, иногда в понятие графа включается какая-нибудь дополнительная структура. Скажем, выбор ориентации на каждом ребре. Конечно, всё это противоречит общематематической тенденции наиболее просто называть достойные внимания объекты наиболее общей природы, усложняя название по мере добавления условий и структур. Однако, в этой конкретной ситуации навести какой бы то ни было порядок в терминологии уже не представляется возможным, и мы будем просто избегать термина "граф" в важных формулировках, используя его (так же как и другие перегруженные слова, такие как *кривая* и *поверхность*) в качестве короткого неформального синонима более формального термина *одномерное клеточное пространство*.

Двумерное клеточное пространство определяется аналогичным образом. Именно, к клеточному пространству X_1 размерности, не превосходящей единицы, посредством семейства непрерывных отображений $\varphi_\alpha : S^1 \rightarrow X_1$ приклеивается дизъюнктивная сумма экземпляров круга D^2 :

$$X_2 = X_1 \cup_{\varphi_\alpha} (\bigsqcup_\alpha D_\alpha^2).$$

Выше, в определении одномерного клеточного пространства, непрерывность приклеивающих отображений φ_α тоже имеет место, но не включается в формулировку, поскольку любое отображение нульмерной сферы S^0 в любое пространство непрерывно.

Образы внутренностей экземпляров круга D^2 называются *открытыми двумерными клетками* или *2-клетками*. Клетки пространства X_1 рассматриваются также и как клетки пространства X_2 . Открытые клетки обоих типов образуют разбиение двумерного клеточного пространства. Это разбиение включается в определение клеточного пространства. Таким образом, двумерное клеточное пространство - это топологическое пространство, на котором задано разбиение на открытые нульмерные, одномерные и двумерные клетки. Образы экземпляров круга D^2 называются *замкнутыми 2-клетками*.

В общем случае n -мерное клеточное пространство - это топологическое пространство, на котором фиксировано разбиение на открытые клетки, определяемое по индукции следующим образом. Возьмём клеточное пространство X_{n-1} размерности, не превосходящей $n - 1$, и приклеим к нему дизъюнктивную сумму экземпляров шара D^n посредством семейства непрерывных отображений граничной сферы:

$$X_{n-1} \cup_{\varphi_\alpha} \left(\bigsqcup_{\alpha} D^n_{\alpha} \right).$$

Как и выше, образы внутренностей шаров называются *открытыми n -мерными клетками e (n -клетками)*, а образы самих этих n -мерных шаров - *замкнутыми n -клетками \bar{e}* . Клетки пространства X_{n-1} также считаются клетками полученного n -мерного клеточного пространства. Отображения φ_α называются *приклеивающими отображениями*, а сужения отображения факторизации на шары D^n называются *характеристическими отображениями*.

Клеточное пространство - это пространство, получаемое в результате объединения последовательности вложенных друг в друга клеточных пространств $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ каждое из которых получено из предыдущего при помощи описанной выше конструкции. Эта последовательность может быть конечной или бесконечной. В последнем случае необходимо ввести на X топологическую структуру, для чего достаточно потребовать, чтобы его покрытие множествами X_n было фундаментальным, т. е. чтобы множество $U \subset X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ являлось открытым, тогда для каждого n пересечение $U \cap X_n$ открыто в X_n .

Разбиение клеточного пространства на открытые клетки называют его *клеточным разбиением*. Объединение всех клеток клеточного пространства X , размерность которых не превосходит n , т. е. клеточное пространство X_n , называется его *n -мерным остовом*. Следует иметь в виду, что в n -мерном остове X_n не обязаны присутствовать n -мерные клетки, поскольку он может совпадать с $(n - 1)$ -мерным остовом того же пространства. Поэтому лучше (и короче) говорить об *n -м остове* или *n -остове*.

40.1. В клеточном пространстве остовы замкнуты.

Клеточное пространство называется: *конечным*, если оно содержит конечное число клеток; *счетным*, если число клеток счетно. Оно называется *локально конечным*, если любая его точка обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток. Подмножество A клеточного пространства X называется его *клеточным подпространством*, если оно есть объединение открытых клеток, которое вместе с каждой своей клеткой содержит соответствующую замкнутую клетку. Возможны переформулировки этого определения. К

примеру, можно сказать, что клеточное подпространство - это подмножество, представимое в виде объединения как замкнутых, так и открытых клеток клеточного пространства, или же, что это множество вместе с каждой своей точкой $x \in \epsilon$ содержит замкнутую клетку $\bar{\epsilon}$. Конечно, A наделено разбиением, индуцированным имеющимся в X разбиением на открытые клетки. Ясно, что k -остов клеточного пространства является его клеточным подпространством.

40.2. Докажите, что объединение и пересечение любой совокупности клеточных подпространств являются клеточными подпространствами.

40.A. Клеточное подпространство клеточного пространства само является клеточным пространством. (Скорее всего для доказательства этого факта вам потребуется утверждение 40.Gx.)

Пусть A - клеточное подпространство клеточного пространства X . Для $n = 0, 1, \dots$ мы видим, что $A \cap X_{n+1}$ получается из $A \cap X_n$ приклеиванием $(n + 1)$ -клеток, содержащихся в A . Поэтому в случае, когда A содержится в некотором остове, оно конечно есть клеточное пространство, а пересечения $A_n = A \cap X_n$, $n = 0, 1, \dots$, являются его остовами. В общем случае необходимо проверить, что покрытие множества A множествами A_n фундаментально, что следует из пункта 3 следующей леммы, задачи 40.I и утверждения 40.Gx.

40.A.I. Пусть X - топологическое пространство, $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ - возрастающая последовательность его подмножеств, образующих его фундаментальное покрытие. Пусть $A \subset X$ подпространство, положим $A_i = A \cap X_i$. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1) X_i открыты в X ;
- 2) A_i открыты в X ;
- 3) A_i замкнуты в X .

Тогда набор $\{A_i\}$ - фундаментальное покрытие пространства A .

Докажем только утверждение 3, поскольку именно оно требуется для доказательства теоремы. Пусть множество $F \subset A$ и пересекается с каждым из множеств A_i по замкнутому в A_i множеству. Так как $F \cap X_i = F \cap A_i$ замкнуто в A_i , то оно замкнуто в X_i , поэтому F замкнуто в X в силу фундаментальности покрытия $\{X_i\}$. Следовательно, F замкнуто и в A , что и доказывает фундаментальность покрытия $\{A_i\}$.

12.1.2. Примеры

40.B. Клеточное пространство, состоящее из одной нульмерной клетки и одной n -мерпой, гомеоморфно S^n .

Это так, поскольку приклеив шар D^n к точке по его граничной сфере, мы получим факторпространство $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

40. С. Представьте D^n с $n > 0$ как клеточное пространство, состоящее из трех клеток.

Этими (открытыми) клетками являются: точка, $(n-1)$ -мерная сфера без одной точки и ограниченный ею открытый n -мерный шар:

$$e^0 = x \in S^{n-1} \subset D^n, e^{n-1} = S^{n-1} \setminus x, e^n = B^n.$$

40. D. Клеточное пространство, состоящее из одной нульмерной клетки и q одномерных клеток, есть букет q окружностей.

Действительно, профакторизовав дизъюнктивное объединение отрезков по множеству всех их концов, мы получим букет окружностей.

40. E. Представьте тор как клеточное пространство, состоящее из четырех клеток: одной нульмерной, двух одномерных и одной двумерной.

Представим произведение $I \times I$ как клеточное пространство, состоящее из 9 клеток: четырех нульмерных - вершин квадрата, четырех одномерных - его сторон и одной двумерной - внутренности этого квадрата. В результате стандартной факторизации, при которой из квадрата получается тор, из четырех нульмерных клеток мы получим одну, а из четырех одномерных - две.

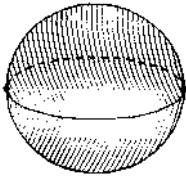
40. F. Как можно получить клеточное разбиение тора $S^1 \times S^1$, состоящее из четырех клеток, из клеточного разбиения окружности S^1 , состоящего из двух клеток?

Каждая открытая клетка произведения является произведением открытых клеток множителей, см. задачу 40.3.

40.3. Если X и Y - локально конечные клеточные пространства, то топологическое пространство $Z = X \times Y$ может быть естественным образом наделено структурой клеточного пространства.

40.4*. Останется ли верным утверждение предыдущей задачи, если не требовать конечности клеточных пространств X и Y ?

40. G. Представьте сферу S^n как клеточное пространство таким образом, чтобы для всякого целого неотрицательного k его k -остовом была стандартная сфера $S^k \subset S^n$.



Пусть $S^k = S^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$, где

$$\mathbb{R}^{k+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Если представить S^n в виде объединения построенных сфер меньших размерностей: $S^n = \bigcup_{k=0}^n S^k$, то для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$ разность $S^k \setminus S^{k-1}$ состоит ровно из двух k -клеток - открытых полусфер.

40.Н. Представьте $\mathbb{R}P^n$ как клеточное пространство, состоящее из $n+1$ клеток. Опишите приклеивающие отображения этих клеток.

Рассмотрим клеточное разбиение сферы S^n , описанное в решении предыдущей задачи. Тогда при факторизации $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ в каждой размерности обе клетки склеиваются в одну. Каждое из приклеивающих отображений является проекцией $D^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$, при которой граничная сфера S^{k-1} отображается на $\mathbb{R}P^{k-1}$.

40.5. Представьте $\mathbb{C}P^n$ как клеточное пространство из $n+1$ клеток. Опишите приклеивающие отображения этих клеток.

40.6. Представьте следующие топологические пространства в виде клеточных пространств:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|----------------------|
| (a) ручка; | (b) лента Мёбиуса; | (c) $S^1 \times I$, |
| (d) сфера с p ручками; | (e) сфера с p пленками. | |

40.7. Какое наименьшее число клеток необходимо для представления в виде клеточного пространства следующих пространств:

- | | | |
|--------------------|--------------------------|---------------------------|
| (a) ленты Мёбиуса; | (b) сферы с p ручками; | (c) сферы с q пленками? |
|--------------------|--------------------------|---------------------------|

40.8. Приведите пример клеточного пространства, в котором замыкание некоторой клетки не есть объединение открытых клеток. Какое наименьшее число клеток нужно для построения такого пространства?

40.9. Рассмотрим счетный набор дизъюнктивных экземпляров отрезка I и склеим всех их по точке 0 . Покажите, что полученное пространство является клеточным, но не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

40.И. Представьте \mathbf{R}^1 как клеточное пространство.

Нульмерными клетками являются все целые точки, одномерными – интервалы $(k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

40.10. Для любых двух клеточных пространств, гомеоморфных \mathbf{R}^1 , существует гомеоморфизм между ними, отображающий каждую клетку одного из них гомеоморфно на некоторую клетку другого.

40. J. Представьте \mathbf{R}^n как клеточное пространство.

Обозначим через \mathbb{R}^∞ объединение последовательности евклидовых пространств $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots$, канонически вложенных друг в друга: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0)\} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Топологию в \mathbb{R}^∞ определим посредством требования, состоящего в том, что множества \mathbf{R}^n составляют его фундаментальное покрытие.

Так как $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n сомножителей), то его клеточная

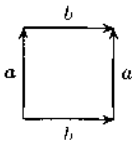
структура может быть определена клеточными структурами сомножителей (см. 40.3). Таким образом, нульмерные клетки - это точки, координаты которых суть целые числа. Одномерными клетками являются открытые отрезки с концами в точках $(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)$ и $(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_n)$, т. е. отрезки, параллельные осям координат, двумерными - квадраты, параллельные двумерным координатным плоскостям, и т. д.

40.К. Представьте \mathbb{R}^∞ как клеточное пространство.

40.11. Докажите, что пространство \mathbb{R}^∞ не метризуемо.

12.1.3. Примеры в размерности два

Рассмотрим класс двумерных клеточных пространств, допускающих простое комбинаторное описание. Каждое такое пространство является факторпространством конечного семейства выпуклых многоугольников по склеиванию пар их сторон при помощи аффинных гомеоморфизмов. При этом склеивание вершин обусловлено склеиванием сторон. Соответствующее факторпространство имеет естественное разбиение: на нульмерные клетки - образы вершин многоугольников, одномерные клетки - образы их сторон и двумерные клетки - образы внутренностей этих многоугольников. Для того, чтобы описать такое пространство, вначале надо указать, какие стороны отождествляются друг с другом. Обычно это делают, отмечая стороны буквами, причем отождествляемые стороны обозначаются одной и той же буквой. Поскольку между двумя отрезками существуют только два различных аффинных гомеоморфизма, то достаточно указать ориентации отрезков, которые отождествляются гомеоморфизмом, для чего на сторонах рисуют стрелки. На следующем рисунке дано представление тора как факторпространства квадрата.



При желании можно обойтись и без рисунка. Для этого надо пометить буквами все стороны многоугольника, обойти вдоль него (обычно - против часовой стрелки) и выписать буквы, отмеченные на его сторонах. При этом, если ориентация стороны (используемая для описания отождествления сторон) противоположна направлению обхода, то соответствующая буква выписывается со степенью -1 . Получившийся в

результате набор слов однозначно определяет факторпространство семейства многоугольников. К примеру, слово $ab^{-1}a^{-1}b$ описывает факторпространство полученное в результате склеивания квадрата так, как это изображено выше.

40.L. Докажите, что клеточное пространство, заданное словом

- (1) $a^{-1}a$ гомеоморфно S^2 ;
- (2) aa и $abab$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^2$;
- (3) $aba^{-1}b^{-1}c$ гомеоморфно ручке;
- (4) $abcb^{-1}$ гомеоморфно цилиндру $S^1 \times I$;
- (5) aab и $abac$ гомеоморфно ленте Мебиуса;
- (6) $aabb$ и $ab^{-1}ab$ гомеоморфно бутылке Клейна,
- (7) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_pb_p a_p^{-1}b_p^{-1}$ гомеоморфно сфере с p ручками,
- (8) $a_1a_1a_2a_2 \dots a_qa_q$ гомеоморфно сфере с q пленками.

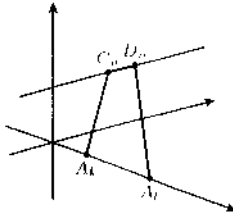
12.1.4. Вложения в евклидовы пространства

40.M. Всякое счетное нульмерное клеточное пространство вкладывается в прямую.

Очевидно: всякое счетное нульмерное пространство гомеоморфно $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

40.N. Всякое счетное локально конечное одномерное клеточное пространство X вкладывается в \mathbb{R}^3 .

Отобразим нульмерные клетки в целые точки $A_k(k, 0, 0)$ на оси абсцисс. Вложения одномерных клеток будут кусочно-линейными и производятся следующим образом. Сопоставим n -й одномерной клетке пространства X пару точек с координатами $C_n(0, 2n - 1, 1)$ и $D_n(0, 2n, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Если концы этой 1-клетки отображаются в точки A_k и A_l , то ее образом является трехзвенная ломаная $A_k C_n D_n A_l$ (возможно, замкнутая). Легко видеть, что образы различных открытых клеток не пересекаются (поскольку их крайние трети лежат на скрещивающихся прямых). Тем самым, мы построили инъекцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, которая очевидно непрерывна. Непрерывность обратного отображения следует из того, что оно непрерывно на каждой из построенных ломаных, которые к тому же образуют замкнутое и локально конечное, следовательно (9.U) фундаментальное, покрытие множества $f(X)$.



40.12. Приведите пример конечного одномерного клеточного пространства, не вложимого в \mathbf{R}^2 .

40.0. Любое счетное локально конечное конечномерное клеточное пространство вложимо в евклидово пространство достаточно большой размерности.

Проведите индукцию по остовам, используя 40.0.2. Рассуждение существенно упрощается в случае, если клеточное пространство является конечным.

40.0.1. Пусть топологическое пространство X вложено в \mathbf{R}^p , а пространство Y - в \mathbf{R}^q , причем оба вложения являются собственными отображениями (см. 18'3x; в частности, их образы замкнуты, соответственно, в \mathbf{R}^p и \mathbf{R}^q). Пусть A - замкнутое подмножество в Y . Предположим, что у A имеется в пространстве Y такая окрестность U , для которой существует гомеоморфизм $h : \text{Cl}U \rightarrow A \times I$, отображающий A на $A \times 0$. Тогда для произвольного собственного отображения $\varphi : A \rightarrow X$ существует вложение $X \cup_{\varphi} Y$ в \mathbf{R}^{p+q+1} , продолжающее исходное вложение $X \rightarrow \mathbf{R}^p$.

Будем считать, что $X \subset \mathbf{R}^p \subset \mathbf{R}^{p+q+1}$, где \mathbf{R}^p -координатное пространство первых p координатных прямых в \mathbf{R}^{p+q+1} , а $Y \subset \mathbf{R}^q \subset \mathbf{R}^{p+q+1}$, где \mathbf{R}^q - координатное пространство последних q координатных прямых в \mathbf{R}^{p+q+1} . Теперь определим отображение $f : X \sqcup Y \rightarrow \mathbf{R}^{p+q+1}$.

Положим $f(x) = x$, если $x \in X$, и $f(y) = (0, \dots, 0, 1, y)$, если $y \notin V = h^{-1}(A \times [0; \frac{1}{2}))$. Наконец, если $y \in U$, $h(y) = (a, t)$ и $t \in [0; \frac{1}{2}]$, то положим

$$f(y) = ((1 - 2t)\varphi(a), 2t, 2ty).$$

Нетрудно видеть, что отображение f собственное. Его факторотображение $\hat{f} : X \cup_{\varphi} Y \rightarrow \mathbf{R}^{p+q+1}$ является собственной инъекцией, значит в силу 18.0x (см. также 18.Px) оно - вложение.

40.О.2. Пусть X - счетное локально конечное k -мерное клеточное пространство и A - его $(k - 1)$ -остов. Если A может быть вложено в \mathbb{R}^p , то существует вложение пространства X в \mathbb{R}^{p+k+1} , продолжающее исходное вложение $X \rightarrow \mathbb{R}^p$.

По определению клеточного пространства, X получается приклеиванием объединения k -мерных замкнутых шаров к его $(k - 1)$ -остову. Пусть Y - это (не более чем) счетное объединение k -мерных шаров, а A - объединение граничных сфер этих шаров (очевидно, что условие леммы 40.О.1 выполнено: в качестве окрестности U можно взять объединение дополнений шаров вдвое меньшего диаметра). Таким образом, лемма 40.О.2 следует из 40.О.1.

40.Р. Всякое счетное локально конечное клеточное пространство вложимо в \mathbb{R}^∞ .

Следует из 40.О.2 в силу определения клеточной топологии.

40. Q. Всякое конечное клеточное пространство метризуемо.

Следует из 40.Р и 40.О.

40. R. Всякое конечное клеточное пространство нормально.

Следует из 40. Q.

40. S. Всякое счетное клеточное пространство вложимо в \mathbb{R}^∞ .

Попробуйте доказать это утверждение хотя бы для одномерных пространств.

40. T. Всякое клеточное пространство нормально.

Данное утверждение можно доказать, несколько усложнив рассуждение, приведенное в доказательстве 40.Вх.

40. U. Всякое локально конечное клеточное пространство метризуемо.

12.1.5х. Симплициальные пространства

Напомним, что в 23'3х был определен класс топологических пространств - симплициальные пространства. Каждое такое пространство снабжено разбиением на подмножества, называемые открытыми симплексами и которые, действительно, гомеоморфны открытым симплексам евклидова пространства.

40.Ах. Докажите, что всякое конечное симплициальное пространство обладает клеточной структурой, в которой разбиение на открытые клетки совпадает с исходным разбиением на открытые симплексы. Легко видеть, что замыкание любого открытого симплекса канонически гомеоморфно n -мерному замкнутому симплексу, и, поскольку симплициальное пространство хаусдорфово, оно гомеоморфно факторпространству, полученному из дизъюнктного объединения нескольких замкнутых симплексов в результате склеивания вдоль

целых граней по аффинным гомеоморфизмам. Так как каждый симплекс является клеточным пространством, а его грани - клеточными подпространствами, то осталось воспользоваться задачей 40.Hx.

12.1.6x. Топологические свойства клеточных пространств

В данном разделе представлены утверждения различного характера. Например, изучаются критерии, при выполнении которых клеточное пространство является компактным (40.Kx) или сепарабельным (40.Ox). Доказывается, что клеточное пространство связно, когда оно линейно связно (40.Sx), когда линейно связан его 1-остов (40-Vx). С другой стороны, изучается собственно клеточная топологическая структура. К примеру, любое клеточное пространство хаусдорфово (40-Bx). Далее, из определения клеточного пространства совсем не очевидно, что замкнутая клетка является замыканием соответствующей открытой клетки (или что она вообще замкнута). В связи с этим в этот раздел включены утверждения технического характера. Мы не формулируем их в виде лемм, так как зачастую они являются леммами для нескольких утверждений. Например, такой факт, как фундаментальность покрытия клеточного пространства его замкнутыми клетками (40-Dx).

Заметим, что в ряде работ клеточным пространством называлось хаусдорфово топологическое пространство, наделенное клеточным разбиением с двумя свойствами: (С) замкнутые клетки пересекаются лишь с конечным числом (открытых) клеток; (W) замкнутые клетки составляют фундаментальное покрытие этого пространства. Из результатов утверждений 40-Bx, 40-Cx и 40-Fx следует, что клеточные пространства (в смысле данного выше определения) являются клеточными пространствами в смысле Рохлина-Фукса, для которых доказана возможность их индуктивного построения. Таким образом, оба определения клеточного пространства являются равносильными. Совет читателю: попробуйте сначала доказывать сформулированные утверждения для конечных клеточных пространств.

40.Vx. Любое клеточное пространство является хаусдорфовым топологическим пространством.

Пусть X — клеточное пространство, $x, y \in X$. Пусть n - наименьшее число, такое что $x, y \in X_n$. Построим их непересекающиеся окрестности U_n и V_n в X_n . Пусть, например, $x \in e$, где e — открытая n -клетка. Тогда в качестве U_n можно взять

маленький шарик с центром в точке x , а в качестве V_n - дополнение (в X_n) его замыкания. Пусть теперь a - центр некоторой $(n + 1)$ -мерной клетки, $\varphi : S^n \rightarrow X_n$ - ее приклеивающее отображение. Рассмотрим открытые конуса над $\varphi^{-1}(U_n)$ и $\varphi^{-1}(V_n)$ с вершиной в точке a . Пусть U_{n+1} и V_{n+1} - объединения образов подобных конусов по всем $(n + 1)$ -мерным клеткам пространства. Ясно, что это - дизъюнктные окрестности точек x и y в X_{n+1} . Множества $U = \cup_{k=n}^{\infty} U_k$ и $V = \cup_{k=n}^{\infty} V_k$ - дизъюнктные окрестности точек x и y в пространстве X .

40. Сх. В клеточном пространстве замыкание каждой клетки e совпадает с замкнутой клеткой \bar{e} .

Пусть X - клеточное пространство, $e \subset X$ - его клетка, $\psi : D^n \rightarrow X$ - её характеристическое отображение, $B \subset D^n$ - открытый единичный шар. Так как отображение ψ непрерывно, то $\bar{e} = \psi(D^n) = \psi(\text{Cl } B) \subset \text{Cl}(\psi(B)) = \text{Cl}(e)$. С другой стороны, $\psi(D^n)$ - компактное множество, следовательно в силу 40.Вх оно замкнуто, поэтому $\bar{e} = \psi(D^n) \supset \text{Cl}(e)$.

40. Dx. Покрытие клеточного пространства его замкнутыми клетками является фундаментальным.

Из определения фактортопологии нетрудно видеть, что покрытие n -остова клеточного пространства его $(n - 1)$ -остовом и замкнутыми n -мерными клетками является фундаментальным. Начиная с $n = 0$ и рассуждая по индукции, получаем, что покрытие каждого остова клеточного пространства его замкнутыми клетками является фундаментальным. А поскольку по определению клеточной топологии покрытие клеточного пространства его остовами является фундаментальным, то и покрытие самого этого пространства его замкнутыми клетками является фундаментальным (см. 9.31).

40. Ex. Любое покрытие клеточного пространства его клеточными подпространствами фундаментально.

Следует из утверждения 40. Dx, того, что, в силу определения клеточного подпространства, каждая замкнутая клетка содержится в одном из элементов покрытия, и утверждения 9.31.

40. Fx. В клеточном пространстве любая замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

Пусть X - клеточное пространство, X_k - его k -остов. Докажем вначале, что всякое компактное множество $K \subset X_k$ пересекается лишь с

конечным числом открытых клеток остова X_k . Доказательство проведем индукцией по размерности остова. Поскольку топология в нульмерном остове дискретна, то всякое компактное множество может содержать лишь конечное множество 0-клеток данного клеточного пространства. Проведем индукционный переход. Рассмотрим компактное множество $K \subset X_n$. Для всякой n -клетки e_α , пересекающейся с множеством K , выберем открытый шар $U_\alpha \subset e_\alpha$, такой что $K \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Рассмотрим покрытие

$\Gamma = \{e_\alpha, X_n \setminus \cup Cl(U_\alpha)\}$. Ясно, что Γ - открытое покрытие множества K . В силу его компактности из покрытия Γ можно выбрать конечное подпокрытие. Значит n -клеток, пересекающихся с K - конечное число. Пересечение множества K с $(n - 1)$ -остовом замкнуто, значит компактно. По индукционному предположению это множество $(K \cap X_{n-1})$ пересекается с конечным числом открытых клеток, поэтому и множество K пересекается с конечным числом открытых клеток.

Пусть теперь $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ - приклеивающее отображение для n -мерной клетки, $F = \varphi(S^{n-1}) \subset X_{n-1}$. Поскольку F компактно, то оно может пересекаться только с конечным числом открытых клеток. Таким образом получаем, что всякая замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

40. Gx. Клеточное подпространство A клеточного пространства X замкнуто в X .

В силу 40.Dx достаточно проверить замкнутость пересечений $A \cap \bar{e}$ для всех замкнутых клеток пространства X . Так как клеточное подпространство является объединением своих, как открытых, так и замкнутых клеток, т. е. $A = \cup e_\alpha = \cup \bar{e}_i$, то в силу 40.Fx

$$A \cap \bar{e} = (\cup e_\alpha) \cap \bar{e} = (\cup_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \cap \bar{e} \subset (\cup_{i=1}^n \bar{e}_{\alpha_i}) \cap \bar{e} \subset A \cap \bar{e}$$

и, следовательно, включения в этой цепочке являются равенствами.

Следовательно, в силу 40.Cx множество $A \cap \bar{e} = \cup_{i=1}^n (\bar{e}_{\alpha_i} \cap \bar{e})$

замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств.

40.Hx. Пространство, полученное в результате склеивания двух клеточных подпространств по их общему подпространству, является клеточным.

40.Ix. Если подмножество A клеточного пространства X пересекается с каждой открытой клеткой по конечному множеству, то оно замкнуто. Кроме того, индуцированная топология на нем - дискретная.

Поскольку, в силу 40.Fx, всякая замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом открытых клеток, то пересечение всякой замкнутой клетки \bar{e} с множеством A является конечным и следовательно (в силу хаусдорфовости клеточного пространства) замкнутым - и в X , и, тем

более, в \bar{E} . Так как, в силу 40-Dx, замкнутые клетки образуют фундаментальное покрытие, то и тем самым само множество A замкнуто. Точно так же и всякое его подмножество замкнуто и в X , и, тем более, в A . Таким образом, действительно, индуцированная топология в A дискретна.

40. Jx. Любое компактное множество в клеточном пространстве пересекается лишь с конечным числом (открытых) клеток.

Пусть $K \subset X$ - компактное подмножество. В каждой из клеток e_α , пересекающихся с K , выберем по точке $x_\alpha \in e_\alpha \cap K$ и рассмотрим множество $A = \{x_\alpha\}$. В силу 40.Ix множество A замкнуто, и топология в нем - дискретная. Поскольку A компактно, как замкнутое подмножество компактного множества, значит, оно конечно. Следовательно, K пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

40. Kx. Клеточное пространство компактно, тогда оно конечно.

Следует из 40. Jx. Конечное клеточное пространство компактно как объединение конечного числа компактных множеств - замкнутых клеток.

40. Lx. Всякая клетка клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве этого пространства.

Проведите индукцию по размерностям клеток, воспользовавшись тем, что замыкание каждой клетки пересекается лишь с конечным числом клеток меньшей размерности. Обратите внимание, что само замыкание клетки может не быть клеточным подпространством.

40. Mx. Всякое компактное подмножество клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве этого пространства.

Следует из 40. Jx, 40. Lx и 40.2.

40. Nx. Подмножество клеточного пространства является компактным, тогда оно замкнуто и пересекается лишь с конечным числом, его открытых клеток.

Если K - компактное подмножество клеточного пространства, то оно замкнуто, поскольку всякое клеточное пространство хаусдорфово, а из утверждения 40. Jx следует, что оно пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

Если множество K пересекается только с конечным числом открытых клеток, то в силу 40. Lx оно лежит в некотором конечном клеточном подпространстве данного пространства. Осталось воспользоваться тем, что конечное клеточное пространство компактно 40. Kx, а K - его замкнутое подмножество.

40. Ox. Клеточное пространство сепарабельно, тогда оно состоит из счетного числа клеток.

Пусть X - клеточное пространство. Если множество клеток в нем счетно, то, взяв в каждой клетке счетное всюду плотное множество и объединив их, мы получим счетное множество, плотное во всем X . Таким образом, X сепарабельно. Проведем рассуждение "от противного". Пусть в X имеется несчетное множество n -мерных клеток ϵ_α^n . Положим $U_\alpha^n = \epsilon_\alpha^n$. Каждое из множеств U_α^n открыто в n -остове X_n пространства X . Построим теперь несчетный дизъюнктивный набор открытых в X множеств. Пусть a - центр некоторой $(n + 1)$ -мерной клетки, $\varphi : S^n \rightarrow X_n$ - ее приклеивающее отображение. Построим конус над $\varphi^{-1}(U_\alpha^n)$ с вершиной в точке a и обозначим через U_α^{n+1} объединение таких конусов по всем $(n + 1)$ -мерным клеткам пространства X . Ясно, что $\{U_\alpha^{n+1}\}$ несчетный дизъюнктивный набор множеств, открытых в X_{n+1} . Тогда множества $U_\alpha = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_\alpha^k$ образуют несчетный дизъюнктивный набор множеств, открытых во всем пространстве X , которое, таким образом, не имеет счетной базы, и, в частности, не сепарабельно.

40.Px. Компонента линейной связности клеточного пространства является его клеточным подпространством.

Действительно, компонента линейной связности клеточного пространства вместе с любой своей точкой x целиком содержит каждую замкнутую клетку, содержащую x и, в частности, замыкание открытой клетки, содержащей x .

40.Qx. Клеточное пространство локально линейно связно.

Ср. рассуждение, использованное при решении задачи *40. Ox*.

40.Rx. Компоненты линейной связности клеточного пространства открыты и замкнуты в этом пространстве и, следовательно, совпадают с его компонентами связности.

Это так, в силу локальной линейной связности клеточного пространства (см. *40.Qx*).

40.Sx. Клеточное пространство связно, тогда оно линейно связно.

Следует из *40.Rx*.

40.Tx. Локально-конечное клеточное пространство счётно, тогда счётен его 0 -остов.

Ясно, что доказывать нужно лишь то, что из счетности 0 -остова следует счетность всего пространства. Покажем по индукции, что число клеток каждой размерности (по более чем) счетно. Для этого достаточно доказать, что каждая клетка пересекается с конечным числом замкнутых клеток. Будет удобнее доказывать более сильное утверждение: всякая замкнутая клетка \bar{e} пересекается с конечным числом замкнутых клеток. Ясно, что всякая окрестность, пересекающаяся с замкнутой клеткой, пересекается и с самой клеткой. Рассмотрим

покрытие замкнутой клетки \bar{e} окрестностями, каждая из которых пересекает лишь конечное число замкнутых клеток. Осталось воспользоваться компактностью \bar{e} .

40. Ух. Локально конечное связное клеточное пространство X счётно. В силу предыдущей задачи 1-остов пространства X связан. Из результата задачи *40.Тх* следует, что достаточно доказать счетность числа его нульмерных клеток. Фиксируем некоторую нульмерную клетку x_0 . Обозначим через A_1 объединение всех замкнутых одномерных клеток, содержащих точку x_0 . Теперь рассмотрим множество A_2 - объединение всех замкнутых одномерных клеток, пересекающихся с A_1 . В силу локальной конечности пространства X множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа клеток. Продолжая построение аналогичным образом, мы получим возрастающую последовательность одномерных клеточных подпространств $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, каждое из которых конечно. Положим $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Множество A состоит из (не более чем) счетного числа клеток. Из определения клеточной топологии следует, что множество A и открыто, и замкнуто в X_1 . Поскольку X_1 связно, то $A = X_1$.

40. Vx. Клеточное пространство линейно связно, тогда линейно связан его 1-остов.

Если 1-остов клеточного пространства связан, то само это пространство очевидно связно. Предположим, что 1-остов не является связным. Тогда он представляется как объединение двух замкнутых множеств, $X_1 = X'_1 \cup X''_1$. Каждая двумерная клетка приклеивается к одному из этих множеств, значит, $X_2 = X'_2 \cup X''_2$. Аналогичное рассуждение показывает, что для каждого натурального n имеет место представление n -остова как объединения его замкнутых подмножеств. Положим $X' = \bigcup_{n=0}^{\infty} X'_n$ и $X'' = \bigcup_{n=0}^{\infty} X''_n$. По определению клеточной топологии множества X' и X'' являются замкнутыми, следовательно, пространство X несвязно.

12.2. Клеточные конструкции

12.2.1. Эйлерова характеристика

Пусть X - конечное клеточное пространство. Через $c_i(X)$ обозначим число его i -мерных клеток. *Эйлеровой характеристикой* пространства X называется альтернированная сумма чисел $c_i(X)$:

$$\chi(X) = c_0(X) - c_1(X) + c_2(X) - \dots + (-1)^i c_i(X) + \dots$$

41-А. Эйлерова характеристика аддитивна в следующем смысле. Если A и B - это клеточные подпространства клеточного пространства X , то

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Утверждение непосредственно следует из очевидного равенства

$$c_i(A \cup B) = c_i(A) + c_i(B) - c_i(A \cap B).$$

41-В. Эйлерова характеристика мультипликативна в следующем смысле. Если X и Y — конечные клеточные пространства, то

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Воспользуемся следующим искусственным приемом. Введем многочлен $\chi_A(t) = c_0(A) + c_1(A)t + \dots + c_i(A)t^i + \dots$. Он называется *многочленом Пуанкаре*, и его важнейшее для нас свойство состоит в том, что $\chi(X) = \chi_X(-1)$. Так как

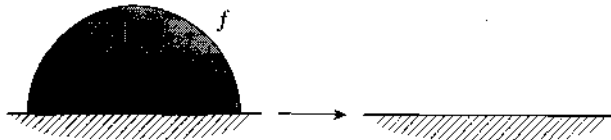
$$c_k(X \times Y) = \sum_{i=0}^k c_i(X)c_{k-i}(Y), \text{ то } \chi_{X \times Y}(t) = \chi_X(t) \cdot \chi_Y(t).$$

Значит, $\chi(X \times Y) = \chi_{X \times Y}(-1) = \chi_X(-1) \cdot \chi_Y(-1) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.

12.2.2. Комбинаторное стягивание и его обобщение

Пусть X - конечное клеточное пространство, e и f - его открытые клетки размерностей n и $n - 1$, соответственно. Пусть:

- приклеивающее отображение $\varphi_i : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ клетки e определяет гомеоморфизм открытой верхней полусферы S_+^{n-1} на f ,
- клетка f не пересекается с образами приклеивающих отображений клеток, отличных от e ,
- клетка e не пересекается с образами приклеивающих отображений никаких клеток.



41-С. $X \setminus (e \cup f)$ является клеточным подпространством пространства X .

Из определения следует, что объединение всех открытых клеток пространства $X \setminus (e \cup f)$ совпадает с объединением всех его замкнутых клеток, следовательно, оно является клеточным подпространством пространства X .

41-D. $X \setminus (e \cup f)$ является деформационным ретрактом пространства X .

Говорят, что $X' = X \setminus (e \cup f)$ получается из X в результате **элементарного комбинаторного стягивания** и пишут $X \searrow X'$.

Если клеточное подпространство A клеточного пространства X получается из X в результате выполнения последовательности элементарных комбинаторных стягиваний, то говорят, что X **комбинаторно стягивается** на A и тоже пишут $X \searrow A$.

Деформационная ретракция шара D^n на его нижнюю замкнутую полусферу S^{n-1} определяет деформационную ретракцию $X \rightarrow X \setminus (e \cup f)$.

41.E. При комбинаторном стягивании эйлерова характеристика сохраняется: если X - конечное клеточное пространство и $X \searrow A$, то $\chi(X) = \chi(A)$.

Утверждение очевидно, поскольку при каждом элементарном комбинаторном стягивании число клеток в двух соседних размерностях уменьшается на единицу.

Пусть, как и выше, X - клеточное пространство, e и f - его открытые клетки размерностей n и $n - 1$, соответственно, и приклеивающее отображение $\varphi_e : S^n \rightarrow X_{n-1}$ клетки e определяет гомеоморфизм S_+^{n-1} на f . Сейчас мы не предполагаем ни того, что f не пересекается с образами приклеивающих отображений клеток, отличных от e , ни того, что e не пересекается с образами приклеивающих отображений каких бы то ни было клеток. Пусть $\chi_e : D^n \rightarrow X$ - характеристическое клетки e . Рассмотрим также деформационную ретракцию $\psi : D^n \rightarrow S^{n-1} \setminus \varphi_e^{-1}(f) = S^{n-1} \setminus S_+^{n-1}$.

41. F. При этих условиях факторпространство $X' = X / [\chi_e(x) \sim \varphi_e(\psi(x))]$ пространства X является клеточным

пространством, клетками которого служат образы при естественной проекции всех клеток пространства X , кроме клеток e и f .

Пусть $p : X \rightarrow X'$ - отображение факторизации. Пространство X' разбивается на те же открытые клетки, что и X , за исключением клеток e и f . Приклеивающим отображением для каждой из них является композиция исходного приклеивающего отображения и p .

Говорят, что клеточное пространство $X' = X / [\chi_e(x) \sim \varphi_e(\psi(x))]$ получается из клеточного пространства X в результате **взаимного сокращения клеток e и f** .

41-G. Естественная проекция $X \rightarrow X'$ является гомотопической эквивалентностью.

4I-G.1. Найдите клеточное подпространство Y пространства X , для которого проекция $Y \rightarrow Y/[\chi_e(x) \sim \varphi_e(\psi(x))] = Y'$ была бы гомотопической эквивалентностью (в силу теоремы 4I-D). Можно взять $Y = X_{n-1} \cup_{\varphi_e} D^n$. Ясно, что $Y' \cong Y \setminus (e \cup f)$, будем отождествлять эти пространства. Тогда проекция $p' : Y \rightarrow Y'$ является гомотопической эквивалентностью в силу утверждения 4I.D.

4I.G.2. Продолжите отображение $Y \rightarrow Y \setminus (e \cup f)$ до отображения $X \rightarrow X'$, являющегося гомотопической эквивалентностью в силу 4I.6x. Пусть $\{e_\alpha\}$ - набор n -клеток пространства X , отличных от клетки e ; φ_α - соответствующие приклеивающие отображения. Рассмотрим отображение $p' : Y \rightarrow Y'$. Так как

$$X_n = Y \cup_{\sqcup \varphi_\alpha} \left(\bigsqcup D_\alpha^n \right), \text{ то } X'_n = Y' \cup_{\sqcup p' \circ \varphi_\alpha} \left(\bigsqcup D_\alpha^n \right).$$

Поскольку отображение p' в силу 4I.G.1 является гомотопической эквивалентностью, то из результата утверждения 4I.6x следует, что ее можно продолжить до гомотопической эквивалентности $p_n : X_n \rightarrow X'_n$. Продолжая индукцию по остовам, получим требуемое.

12.2.3x. Гомотопические эквивалентности клеточных пространств

4I.1x. Пусть $X = A \cup_\varphi D^n$ - пространство, полученное в результате приклеивания n -мерного шара к топологическому пространству A посредством непрерывного отображения $\varphi : S^{n-1} \rightarrow A$. Докажите, что дополнение $X \setminus x$ всякой точки $x \in X \setminus A$ (строго) деформационно ретрагируется на A .

4I-2x. Пусть X - n -мерное клеточное пространство, а K - множество, пересекающееся по одной точке с каждой из открытых n -мерных клеток этого пространства. Докажите, что $(n-1)$ -остов X_{n-1} пространства X является деформационным ретрактом дополнения $X \setminus K$.

4I.3x. Докажите, что дополнение $\mathbb{E}P^n \setminus \text{point}$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}P^{n-1}$; дополнение $\mathbb{C}P^n \setminus \text{point}$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{C}P^{n-1}$.

4I-4x- Докажите, что дополнение $D^2 \times S^1 \setminus \text{point}$ произвольной внутренней точки полнотория гомотопически эквивалентно тору, к которому приклеен круг вдоль меридиана $S^1 \times 1$.

4I.5x. Пусть Y - топологическое пространство, $\varphi : S^n \rightarrow Y$ и $\psi : S^n \rightarrow Y$ - непрерывные отображения и пусть $X_\varphi = Y \cup_\varphi D^{n+1}$ и $X_\psi = Y \cup_\psi D^{n+1}$.

Докажите, что если отображения φ и ψ гомотопны, то пространства X_φ и X_ψ гомотопически эквивалентны: $\varphi \sim \psi \Rightarrow X_\varphi \simeq X_\psi$.

В дальнейшем нам потребуется более общее утверждение.

41-6х. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - гомотопическая эквивалентность, $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ и $\varphi' : S^{n-1} \rightarrow Y$ - непрерывные отображения. Докажите, что если $f \circ \varphi \sim \varphi'$, то $X \cup_\varphi D^n \simeq Y \cup_{\varphi'} D^n$.

41-7х. Пусть X - пространство, получающееся из окружности в результате приклеивания к ней двух экземпляров круга посредством отображений $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^2$ и $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^3$, соответственно. Найдите клеточное пространство с возможно меньшим числом клеток, гомотопически эквивалентное пространству X .

41.8х. Обобщите предыдущую задачу.

41.9х. Докажите, что если к тору $S^1 \times S^l$ вдоль его параллели $S^l \times 1$ приклеить круг, то полученное пространство K гомотопически эквивалентно букету

$$S^2 \vee S^l.$$

41.10х. Докажите, что если к тору $S^1 \times S^l$ вдоль его параллели $S^l \times 1$ и меридиана $1 \times S^l$ приклеить два круга, то получится пространство, гомотопически эквивалентное сфере S^2 .

41.11х. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 три окружности:

$$S_1 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}, S_2 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 1\} \text{ и } S_3 = \{z^2 + (y-1)^2 = 1, x = 0\}.$$

Поскольку $\mathbb{R}^3 \cong S^3 \setminus \text{point}$, то можно считать, что S_1, S_2 и S_3 лежат в S^3 .

Докажите, что пространство $X = S^3 \setminus (S_1 \cup S_2)$ не гомотопически эквивалентно пространству

$$Y = S^3 \setminus (S_1 \cup S_3).$$

41.Ах. Пусть X - клеточное пространство, A - его клеточное подпространство. Тогда объединение $(X \times 0) \cup (A \times I)$ является ретрактом цилиндра $X \times I$.

Проведем доказательство индукцией по размерности. Ясно, что следует рассматривать только те клетки, которые не лежат в подпространстве A . Если имеется ретракция

$$\rho_{n-1} : (X_{n-1} \cup A) \times I \rightarrow (X_{n-1} \times 0) \cup (A \times I),$$

то, если мы построим ретракцию

$$\tilde{\rho}_n : (X_n \cup A) \times I \rightarrow (X_n \times 0) \cup ((X_{n-1} \cup A) \times I),$$

то очевидно, как с помощью их "композиции" получить ретракцию

$$\rho_n : (X_n \cup A) \times I \rightarrow (X_n \times 0) \cup (A \times I).$$

Нам потребуется стандартная ретракция

$\rho : D^n \times I \rightarrow (D^n \times 0) \cup (S^{n-1} \times I)$. (Проще всего определить ρ геометрически. Расположим цилиндр стандартным образом в

пространстве \mathbb{R}^{n+1} и рассмотрим какую-либо точку p , лежащую над центром его верхнего основания. Для $z \in D^n \times I$ положим $\rho(z)$ равным точке пересечения луча, исходящего из p и проходящего через z , с объединением основания $D^n \times 0$ и боковой стенки $S^{n-1} \times I$ цилиндра.) Фактором отображения ρ является отображение $\bar{\varepsilon} \times I \rightarrow (X_n \times 0) \cup (X_{n-1} \times I)$, продолжив которое тождественным образом на $X_{n-1} \times I$, мы получим отображение $\rho_e : (\bar{\varepsilon} \times I) \cup (X_{n-1} \times I) \rightarrow (X_n \times 0) \cup (X_{n-1} \times I)$.

Поскольку замкнутые клетки образуют фундаментальное покрытие клеточного пространства, то тем самым определена ретракция $\tilde{\rho}_n$. 4I-Bx. Пусть X - клеточное пространство, A - его клеточное подпространство. Предположим, что задано отображение $F : X \rightarrow Y$ и гомотопия $h : A \times I \rightarrow Y$ его сужения $f = F|_A$. Тогда гомотопию h можно продолжить до гомотопии $H : X \times I \rightarrow Y$ отображения F . Формулы $\tilde{H}(x, 0) = F(x)$ при $x \in X$ и $\tilde{H}(x, t) = h(x, t)$ при $(x, t) \in A \times I$ определяют некоторое отображение $\tilde{H} : (X \times 0) \cup (A \times I) \rightarrow Y$. В силу 4I-Ax существует ретракция $\rho : X \times I \rightarrow (X \times 0) \cup (A \times I)$.

Композиция $H = \tilde{H} \circ \rho$ и будет искомой гомотопией.

4I-Cx. Пусть X - клеточное пространство, A - его стягиваемое клеточное подпространство. Тогда проекция $\text{pr} : X \rightarrow X/A$ является гомотопической эквивалентностью.

Обозначим через $h : A \times I \rightarrow A$ гомотопию между тождественным отображением подпространства A и постоянным отображением $A \rightarrow A : a \mapsto x_0$. Рассмотрим гомотопию $\tilde{h} = i \circ h : A \times I \rightarrow X$. В силу теоремы 4I-Bx её можно продолжить до гомотопии $H : X \times I \rightarrow X$ тождественного отображения всего пространства X . Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow X$, $f(x) = H(x, 1)$. По построению гомотопии \tilde{h} , $f(A) = \{x_0\}$, следовательно, фактором f является непрерывное отображение $g : X/A \rightarrow X$.

Докажем, что pr и g являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. Для этого необходимо проверить, что

$g \circ \text{pr} \sim \text{id}_X$ и $\text{pr} \circ g \sim \text{id}_{X/A}$.

1) Заметим, что $H(x, 1) = g(\text{pr}(x))$ по определению отображения g . Поскольку $H(x, 0) = x$ при всех $x \in X$, то H является гомотопией между id_X и композицией $g \circ \text{pr}$.

2) Если профакторизовать каждый слой $X \times t$ по $A \times t$, то, поскольку $H(x, t) \in A$ при всех $x \in A$, $t \in I$, из гомотопии H мы получим гомотопию $\tilde{H} : X/A \rightarrow X/A$ между $\text{id}_{X/A}$ и композицией $p \circ g$.

Следствиями из 41.Сх являются следующие утверждения.

41.Дх. Клеточное пространство X , содержащее одномерную замкнутую клетку e , гомеоморфную I , гомотопически эквивалентно клеточному пространству X/e , получающемуся в результате стягивания этой клетки в точку.

41.Ех. Всякое связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству, нульмерный остов которого состоит из единственной точки.

41.Фх. Односвязное двумерное конечное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству, одномерный остов которого состоит из одной точки.

В силу 41.Ех мы вправе считать, что в данном пространстве имеется одна нульмерная клетка, таким образом, его одномерным остовом является букет окружностей. Рассмотрим характеристическое отображение $\psi : I \rightarrow X_1$ некоторой 1-клетки. Нам будет удобнее

вместо петли ψ рассмотреть круговую петлю $S^1 \rightarrow X_1$, которую мы обозначим той же буквой. Поскольку пространство односвязно, петлю ψ можно продолжить до отображения круга $f : D^2 \rightarrow X$.

Рассмотрим теперь шар D^3 и будем для простоты обозначений считать, что f определено на нижней полусфере S_-^2 его границы. Положим $Y = X \cup_f D^3 \simeq X$. Пространство Y является клеточным и

получается добавлением к клеточному разбиению пространства X двух клеток - двумерной и трехмерной. Новая двумерная клетка e - образ верхней полусферы в D^3 - является стягиваемым клеточным пространством. Значит, факторпространство $Y/e \simeq Y$ и содержит на одну одномерную клетку меньше, чем исходное пространство X .

Продолжая рассуждение, мы и получим пространство, двумерный остов которого состоит из одной точки. Обратите внимание, что наше построение привело к трехмерному клеточному пространству. В действительности можно доказать, что в наших условиях пространство будет гомотопически эквивалентно: точке, 2-сфере, или букету 2-сфер, однако доказательство этого использует более сложную (гомологическую) технику.

41.12х. Решите задачу 41.9х, воспользовавшись теоремой 41.Сх.

41.13х. Докажите, что факторпространство

$$X = \mathbb{C}P^2 / \{(z_0 : z_1 : z_2) \sim (\bar{z}_0 : \bar{z}_1 : \bar{z}_2)\}$$

комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ гомотопически эквивалентно сфере S^1 .

Информация. $\mathbb{C}P^2 / \{z \sim \tau(z)\} \cong S^4$.

41. Gx. Пусть X - клеточное пространство, а A его клеточное подпространство, такое что включение $i : A \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью. Тогда A есть деформационный ретракт X . Пусть отображение $f : X \rightarrow A$ является гомотопически обратным к включению i . По условию сужение f на подпространство A , т. е. композиция $f \circ i$, гомотопно тождественному отображению id_A . В силу теоремы 41. Вх эту гомотопию можно продолжить до гомотопии $H : X \times I \rightarrow A$ отображения f . Положим $\rho(x) = H(x, 1)$, при этом $\rho(x, 1) = x$ при всех $x \in A$. Следовательно, ρ - ретракция. Осталось заметить, что, поскольку ρ гомотопно f , то $i \circ \rho$ гомотопно композиции $i \circ f$, которая гомотопна id_X , так как по предположению f и i являются гомотопически обратными.

12.3. Одномерные клеточные пространства

12.3.1. Гомотопическая классификация

42. А. Всякое связное конечное одномерное клеточное пространство гомотопически эквивалентно букету окружностей.

Доказывается по индукции при помощи леммы 42. А1.

42. А. 1. **Лемма.** Пусть X - произвольное одномерное клеточное пространство, e его замкнутая одномерная клетка, приклеенная при помощи инъекции, $S^0 \rightarrow X_0$ (т. е. предполагается, что ребро e имеет различные концы). Тогда естественная проекция $X \rightarrow X/e$ является гомотопической эквивалентностью. Дайте явное описание гомотопически обратного к ней отображения.

Конечно, то, что проекция является гомотопической эквивалентностью, есть частный случай утверждений 41-Dx и 41-G. Однако здесь мы приводим независимое рассуждение, которое в одномерном случае является более наглядным. Все гомотопии будут связаны вне окрестности одномерной клетки e исходного клеточного пространства X и вне окрестности нульмерной клетки x_0 - образа клетки e в факторпространстве $Y = X/e$. В этой связи мы будем рассматривать только замыкания таких окрестностей. При этом, для простоты обозначений будем считать, что рассматриваемые пространства совпадают с этими окрестностями. В таком случае пространство X - это одномерная клетка e , к левому концу которой приклеены отрезки I_1, I_2, \dots, I_k , к правому - отрезки J_1, J_2, \dots, J_n . Пространство Y есть просто букет,

составленный из всех этих отрезков с общей точкой x_0 . Отображение $f : X \rightarrow Y$ устроено следующим образом: оно отображает каждый из отрезков I_i и J_j на себя тождественным образом, а клетку e отображает в точку x_0 . Отображение $g : Y \rightarrow X$ переводит точку x_0 в середину клетки e , половину каждого из отрезков I_s и J_t - в, соответственно, левую и правую половину этой клетки. Наконец, оставшаяся половина каждого из этих отрезков отображается (с растяжением в два раза) на целый отрезок. Докажем, что описанные отображения являются гомотопически обратными. При этом важно, чтобы гомотопии были связанными на свободных концах отрезков I_s и J_t . Композиция $f \circ g : Y \rightarrow Y$ устроена следующим образом. Приведение $f \circ g$ на каждый из отрезков букета - это, собственно говоря, произведение тождественного пути и постоянного пути, которое, как известно, гомотопно тождественному пути. При этом гомотопия связана как на свободных концах отрезков, так и в точке x_0 . Композиция $g \circ f$ отображает всю клетку e в её середину, смежные клетке e половины каждого из отрезков I_s и J_t отображаются в половину этой клетки, а оставшиеся их части растягиваются в два раза и отображаются на весь соответствующий отрезок. Рассматриваемое отображение гомотопно тождественному.

42.В. Всякое связное одномерное конечное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно букету из $1 - \chi(X)$ окружностей и, следовательно, его фундаментальной группой является свободная группа ранга $1 - \chi(X)$.

В силу 42-А.1, всякое связное одномерное конечное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно пространству X' , число нульмерных и одномерных клеток в котором на единицу меньше, чем в пространстве X , следовательно, $\chi(X) = \chi(X')$. Рассуждая по индукции, мы в результате получим пространство с одной нульмерной клеткой, эйлерова характеристика которого равна $\chi(X)$ (ср. 41-Е). Пусть k - число одномерных клеток этого пространства. Тогда $\chi(X) = 1 - k$, значит, $k = 1 - \chi(X)$. Осталось заметить, что число k - это и есть ранг группы $\pi_1(X)$.

42.С Следствие. Эйлерова характеристика связного конечного одномерного клеточного пространства является инвариантом относительно гомотопических эквивалентностей. Она не превосходит единицы. Она равна единице, когда пространство стягиваемо.

Следует из 42.В в силу того, что фундаментальная группа пространства является инвариантом относительно гомотопических эквивалентностей.

42.D Следствие. Эйлерова характеристика конечного одномерного клеточного пространства не превосходит числа его компонент связности. Она равна этому числу, когда каждая компонента стягиваема.

Следует из 42. С.

42.E Гомотопическая классификация конечных одномерных клеточных пространств. Конечные связные одномерные клеточные пространства гомотопически эквивалентны, когда их фундаментальные группы изоморфны, когда их эйлеровы характеристики равны.

В силу 42.B, если фундаментальные группы двух конечных связных одномерных клеточных пространств изоморфны (или же совпадают эйлеровы характеристики этих пространств), то каждое из них гомотопически эквивалентно букету, состоящему из одного и того же числа окружностей, значит, сами пространства гомотопически эквивалентны. Если пространства гомотопически эквивалентны, то их фундаментальные группы изоморфны, а в силу 42.C, совпадают и их эйлеровы характеристики.

42.1. Фундаментальная группа двумерной сферы с удаленными n точками есть свободная группа ранга $n - 1$.

42.2. Докажите, что эйлерова характеристика любого клеточного пространства, гомеоморфного сфере S^2 , равна 2.

42.3 Теорема Эйлера. Для всякого выпуклого многогранника в \mathbf{R}^3 общее число его вершин и граней на 2 больше числа его ребер.

42-4- Докажите теорему Эйлера, не используя фундаментальных групп.

42.5. Докажите, что эйлерова характеристика любого клеточного пространства, гомеоморфного тору, равна 0.

Эйлерова характеристика является гомотопическим инвариантом, но обычное доказательство этого факта использует аппарат теории сингулярных гомологии, что далеко выходит за рамки нашей книги.

12.3.2. Максимальные деревья

Клеточное пространство называется *деревом*, если оно связно, а дополнение любой его открытой клетки не связно. Клеточное подпространство A связного клеточного пространства X называется *максимальным деревом* пространства X , если A - дерево, не содержащееся ни в каком отличном от него дереве, являющимся клеточным подпространством X .

42.F. Всякое связное конечное одномерное клеточное пространство содержит максимальное дерево.

42.G. Пусть A - дерево, вложенное, как клеточное подпространство, в связное клеточное пространство X . Докажите, что A является максимальным деревом, тогда оно содержит все вершины пространства X . Теорема 42. G проясняет смысл термина - *максимальное дерево*.

42.H. Клеточное подпространство A связного клеточного пространства X является максимальным деревом, тогда оно есть дерево, а факторпространство X/A - букет окружностей.

42.I. Если X - одномерное клеточное пространство и A - его клеточное подпространство, которое является деревом, то естественная проекция X на факторпространство X/A является гомотопической эквивалентностью.

Решив задачи 42.F, 42.I и 42.H вы получите ещё одно доказательство теоремы 42-A.

12.3.3х. Разбивающие клетки

42. Ах. Дополнение открытой одномерной клетки в связном одномерном клеточном пространстве состоит не более чем из двух компонент связности, каждая из которых пересекается с замыканием этой клетки.

Пусть e - открытая клетка. Если образ $\varphi_e(S^0)$ ее приклеивающего отображения состоит из одной точки, то очевидно, что дополнение $X \setminus e$ связно. Предположим, что $\varphi_e(S^0) = \{x_0, x_1\}$. Докажите, что каждая из компонент связности дополнения $X \setminus e$ содержит хотя бы одну из точек x_0 и x_1 .

Важной характеристикой положения вершины в одномерном клеточном пространстве является её *степень*. Так называется суммарное число точек в прообразах этой вершины при приклеивающих отображениях всех одномерных клеток рассматриваемого пространства. Более традиционно, степенью вершины называется количество инцидентных ей ребер, при этом ребра, инцидентные только этой вершине, учитываются с весом 2.

42. Вх. 1) Каждая компонента связности дополнения вершины в связном одномерном клеточном пространстве содержит ребро, в замыкание которого входит эта вершина.

2) Дополнение вершины кратности t состоит не более, чем из t компонент связности.

1) Если компонента связности дополнения $X \setminus x$ некоторой вершины x связного одномерного клеточного пространства X не содержит ребра, замыканию которого принадлежит вершина x , то в силу ло-

кальной связности клеточных пространств, эта компонента и открыта и замкнута во всем пространстве X , что противоречит его связности.

2) Следует из того, что вершина степени m входит в замыкание не более чем m различных ребер.

12.3.4х. Деревья и леса

Связное одномерное клеточное пространство называется *деревом*, если дополнение всякой его открытой одномерной клетки не является связным. Одномерное клеточное пространство называется *лесом*, если каждая его компонента является деревом. Таким образом, дерево - это связный лес.

42.Сх. Клеточное подпространство леса - лес. В частности, всякое связное клеточное подпространство дерева - дерево.

42.Дх. Дополнение любого (открытого) ребра дерева состоит из двух компонент связности.

4 2. Ех. Дополнение любой вершины кратности m дерева состоит из m компонент связности.

42.Фх. Во всяком конечном дереве существует вершина кратности один.

42.Гх. Любое конечное дерево комбинаторно стягивается в точку и имеет эйлерову характеристику один.

42.Нх. Любая точка дерева является его деформационным ретрактом.

42.Их. Любое конечное одномерное клеточное пространство, комбинаторно стягивающееся в точку, является деревом.

42.Жх. В любом конечном одномерном клеточном пространстве сумма кратностей всех вершин равна удвоенному числу ребер.

42.Кх. В любом конечном связном одномерном клеточном пространстве с эйлеровой характеристикой один есть вершина кратности единица.

42.Лх. Любое связное одномерное конечное клеточное пространство с эйлеровой характеристикой один комбинаторно стягивается в точку.

12.3.5х. Простые пути

Пусть X - одномерное клеточное пространство. *Простым путём длины n* в X назовем конечную последовательность вида

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_{n+1}),$$

составленную из попарно различных вершин v_i и ребер e_i пространства X , в которой граница каждого ребра e_i состоит из предшествующей вершины v_i и последующей - v_{i+1} . Вершина v_i называется *началом*

этого простого пути, а вершина v_{n+1} - его концом. Мы говорим, что простой путь *соединяет* эти вершины. Начало и конец простого пути соединяются путём $I \rightarrow X$, являющимся топологическим вложением, образ которого содержится в объединении всех клеток, входящих в простой путь. Объединение всех клеток, входящих в простой путь, является клеточным подпространством пространства X . Оно называется *простой незамкнутой ломаной*.

42.Мх. В связном одномерном клеточном пространстве любые две вершины соединяются простым путём.

42.Nx Следствие. В связном одномерном клеточном пространстве X любые две точки соединяются путём, $I \rightarrow X$, который является топологическим вложением.

42.1х. Найдите пример такого линейно связного пространства, в котором существуют различные точки, не соединимые вложенным путём.

42.2х. Найдите такой пример среди хаусдорфовых линейно связных пространств.

42.Ох. Связное одномерное клеточное пространство X является деревом, тогда не существует вложения $S^1 \rightarrow X$.

42.Рх. В одномерном клеточном пространстве X существует петля $S^1 \rightarrow X$, не гомотопная постоянной, тогда существует топологическое вложение $S^1 \rightarrow X$.

42.Ох. Одномерное клеточное пространство является деревом, тогда любые две его вершины соединяются единственным простым путём.

42.3х. Всякое конечное дерево обладает свойством неподвижной точки.

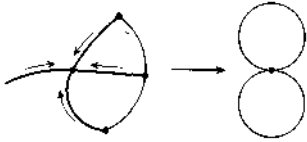
Ср. 37.12, 37.13 и 37.14.

42.4х. Верно ли это для произвольного дерева: произвольного конечного связного одномерного клеточного пространства?

12.4. Фундаментальная группа клеточного пространства

12.4.1. Одномерные клеточные пространства

43. А. Фундаментальная группа, связного конечного одномерного клеточного пространства X есть свободная группа ранга $1 - \chi(X)$.



См. 42.В.

43.В. Пусть X - конечное связное одномерное клеточное пространство, T - максимальное дерево в X и $x_0 \in T$. Для каждой одномерной клетки $e \subset X \setminus T$ выберем петлю s_e , начинающуюся в x_0 , проходящую по T до e , затем вдоль клетки e и возвращающуюся (вновь по T) в исходную точку x_0 . Тогда гомотопические классы петель s_e являются свободными образующими группы $\pi_1(X, x_0)$.

Следствие 42.1 (или 41.Сх) в силу 35.Л.

12.4.2. Образующие

43.С. Пусть A - топологическое пространство, $x_0 \in A$, $\varphi : S^{k-1} \rightarrow A$ - непрерывное отображение и $X = A \cup_{\varphi} D^k$. Если $k > 1$, то гомоморфизм $\pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, индуцированный включением $A \rightarrow X$, сюръективен. (Ср. 43-Г.4, 31.Г.4).

Достаточно доказать, что всякая петля $u : I \rightarrow X$ гомотопна петле v с $v(I) \subset A$. Обозначим через U лежащий в D^k открытый шар радиуса $\frac{2}{3}$, а через V - дополнение в X замкнутого шара радиуса $\frac{1}{3}$. В силу леммы Лебега, существует такое разбиение отрезка I на отрезки I_1, \dots, I_N , что образ каждого из элементов разбиения целиком содержится в одном из множеств U или V . Предположим, что $u(I_i) \subset U$. Поскольку в D^k любые пути с одинаковым началом и концом гомотопны, сужение $u|_{I_i}$ гомотопно пути, не задевающему центр $a \in D^k$. Значит, петля u гомотопна петле u' , образ которой не содержит точку a . Осталось заметить, что пространство A является деформационным ретрактом дополнения $X \setminus a$, значит, u' гомотопна петле u с лежащим в A образом.

43.Д. Пусть X - клеточное пространство, x_0 - его нульмерная клетка и X_1 - его одномерный остов. Тогда гомоморфизм включения $\pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, сюръективен.

Пусть s - петля в точке x_0 . Так как множество $s(I)$ компактно, то оно содержится в некотором конечном клеточном подпространстве Y пространства X . Осталось воспользоваться утверждением 43.С и провести индукцию по числу клеток в Y .

43.E. Пусть X - конечное связное клеточное пространство, T - максимальное дерево в его одномерном остове X_1 , $x_0 \in T$. Выберем для каждой клетки $c \in X_1 \setminus T$ петлю s_c , начинающуюся в x_0 , проходящую по T до e и затем вдоль клетки e и возвращающуюся (вновь по T) в исходную точку x_0 . Докажите, что гомотопические классы петель s_e являются образующими группы $\pi_1(X, x_0)$.

Следствие 43.D и 43.B.

43.1. Выведите теорему 31. G из теоремы 43.D.

43.2. Вычислите $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$.

12.4.3. Соотношения

Пусть X - связное клеточное пространство, x_0 - его нульмерная клетка. Напомним, что двумерный остов X_2 пространства X получается из его одномерного остова X_1 посредством приклеивания нескольких экземпляров круга D^2 при помощи непрерывных отображений $\varphi_\alpha : S^1 \rightarrow X_1$. Приклеивающие отображения являются круговыми петлями в X_1 . Выберем для каждого α путь $s_\alpha : I \rightarrow X_1$, соединяющий точку $\varphi_\alpha(1)$ с x_0 . Пусть $[\varphi_\alpha] \in \pi_1(X, \varphi_\alpha(1))$ - соответствующие гомотопические классы. Обозначим через N нормальную подгруппу группы $\pi_1(X, x_0)$, порожденную (как нормальная подгруппа) элементами

$$T_{s_\alpha}[\varphi_\alpha] \in \pi_1(X_1, x_0).$$

Напомним, что подгруппа называется *нормальной*, если она совпадает со всеми подгруппами, с нею сопряжёнными. Нормальная подгруппа, нормально порождённая множеством A , есть наименьшая нормальная подгруппа, содержащая A . Как подгруппа, она порождается элементами множества A и элементами, сопряжёнными с ними. Это значит, что каждый элемент этой нормальной подгруппы является произведением элементов, сопряжённых с элементами множества A .

43. F. Нормальная подгруппа N не зависит от выбора путей s_α . Если мы возьмем другой набор путей s'_α , то элементы $T_{s_\alpha}[\varphi_\alpha]$ и $T_{s'_\alpha}[\varphi_\alpha]$ будут сопряжены в $\pi_1(X_1, x_0)$, а поскольку подгруппа N - нормальна, то она содержит набор элементов $\{T_{s_\alpha}[\varphi_\alpha]\}$, тогда в ней содержится набор $\{T_{s'_\alpha}[\varphi_\alpha]\}$.

43. G. Нормальная подгруппа N совпадает с ядром гомоморфизма включения $\text{in}_* : \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Мы вправе считать, что нульмерный остов пространства X состоит из единственной точки x_0 , так что его одномерным остовом X_1 является

букет окружностей. Рассмотрим накрытие $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$ с данной группой N . Его существование следует из общей теоремы 39.Dx о существовании накрытия с данной группой. В рассматриваемом случае тотальное пространство накрытия будет одномерным клеточным пространством. Теперь доказательство теоремы происходит в несколько шагов, каждый из которых представляет собой доказательство одной из следующих семи лемм. Нам будет также удобно считать, что $\varphi_\alpha(1) = x_0$, так что $T_{s_\alpha}[\varphi_\alpha] = [\varphi_\alpha]$.

Теорему 43-G можно доказать различными способами, например ее можно вывести из теоремы Зейферта-ван Кампена (см. 43.4x). В данном разделе мы докажем ее, построив 'правильное' накрывающее пространство. Включение $N \subset \text{Ker in}_*$ достаточно очевидно (см. 43.G.1). Доказательство обратного включения основано на существовании накрытия $p : Y \rightarrow X$, приведение которого над одномерным остовом пространства X является накрытием $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$ с группой N , и том факте, что Ker in_* содержится в группе любого накрытия над X_1 , продолжающегося до накрытия над всем X . Предлагаемую в леммах 1-7 схему рассуждения также можно модифицировать. Дело в том, что включение $X_2 \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп этих пространств. Доказать это не так уж сложно, однако применяемая при этом техника, хотя и является вполне общей и естественной, все же выходит за рамки нашей книги. Здесь мы просто хотим подчеркнуть, что этот результат заменяет собой леммы 4 и 5.

43.G.1 Лемма 1. $N \subset \text{Ker in}_*$, ср. 31.J (2).

Так как ясно, что $\text{in}_*([\varphi_\alpha]) = 1$ в группе $\pi_1(X, x_0)$, то $\text{in}_*([\varphi_\alpha]) = 1$ в группе $\pi_1(X, x_0)$, значит, каждый из элементов $[\varphi_\alpha] \in \text{Ker } i_*$. Поскольку подгруппа $\text{Ker } i_*$ является нормальной, то она содержит N - минимальную подгруппу, порожденную этими элементами.

43.G.2 Лемма 2. Пусть $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$ - накрытие с группой N (т. е. $N = (p_1)_*(\pi_1(Y_1, y_0))$). Для каждого α и для всякой точки $y \in p_1^{-1}(x_0)$ существует такое поднятие $\tilde{\varphi}_\alpha : S^1 \rightarrow Y_1$ отображения φ_α , что $\tilde{\varphi}_\alpha(1) = y$.

Следует из 39.Px.

43.G.3 Лемма 3. Пусть Y_2 - клеточное пространство, полученное в результате приклеивания нескольких экземпляров круга D^2 к Y_1 посредством всевозможных поднятий приклеивающих отображений φ_α . Тогда существует отображение $p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$, которое продолжает p_1 и является накрытием.

Пусть $F = p_1^{-1}(x_0)$ - слой над точкой x_0 . Отображение p_1

является фактором отображения

$$Y_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha} \bigsqcup_{y \in F_{\alpha}} D_{\alpha, y}^2 \right) \rightarrow X_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^2 \right),$$

приведение которого $Y_1 \rightarrow X_1$ - это отображение p_1 , а отображения $\bigsqcup_{y \in F_{\alpha}} D_{\alpha}^2 \rightarrow D_{\alpha}^2$ тождественны на каждом из кругов D_{α}^2 . Ясно, что у каждой точки $x \in \text{Int } D_{\alpha}^2 \subset X_2$ ее правильно накрытой окрестностью является вся внутренность этого круга. Пусть теперь для точки $x \in X_1$ множество U_1 является ее правильно накрытой окрестностью по отношению к накрытию p_1 . Положим $U = U_1 \cup \bigcup_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(B_{\alpha'})$, где $B_{\alpha'}$ - это открытый конус с вершиной в центре шара $D_{\alpha'}^2$, над множеством $\varphi_{\alpha'}^{-1}(U)$. Множество U будет правильно накрытой по отношению к отображению p_2 окрестностью точки x .

4.3. G.4 Лемма 4- При $n \geq 3$ приклеивающие отображения n -мерных клеток могут быть подняты в любое накрывающее пространство. Ср. 39. Wx, 39. Xx.

Приведем доказательство данного утверждения вначале для $n = 3$.

Итак, пусть $p : X \rightarrow B$ - произвольное накрытие, $\varphi : S^2 \rightarrow B$ - произвольное отображение. Рассмотрим подмножество $A = (S^1 \times 0) \cup (1 \times I) \cup (S^1 \times 1)$ цилиндра $S^1 \times I$, пусть $q : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I/A$ - то отображение факторизации. Нетрудно видеть, что $S^1 \times I/A \cong S^2$, поэтому будем считать, что $q : S^1 \times I \rightarrow S^2$. Композиция $h = \varphi \circ q : S^1 \times I \rightarrow B$ является гомотетией между одной и той же постоянной петлей в базе накрытия. По теореме о накрывающей гомотетии 34-C гомотопия h накрывается отображением \tilde{h} , которое также является гомотопией между двумя постоянными путями, значит, его фактором будет отображение $\tilde{\varphi} : S^2 \rightarrow X$, накрывающее φ . При $n > 3$ в рассуждении можно использовать 39. Xx.

43.G.5 Лемма 5. Накрытие $p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$ можно распространить до накрытия всего X .

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

43.G.6 Лемма б. Всякая петля $s : I \rightarrow X_1$, реализующая элемент ядра Ker in_* (т. е. гомотопная постоянной петле в X), накрывается петлей пространства Y , причем эта накрывающая петля лежит в Y_1 .

Поскольку петля $\text{in}_* \circ s : I \rightarrow X$ гомотопна постоянной петле, то она и накрывается петлей, образ которой будет автоматически лежать в Y_1 .

43.G-7 Лемма 7. Подгруппа $N = \text{Ker in}_*$.

Пусть s - петля в X_1 , такая что $[s] \in \text{Ker}(i_1)_*$. Из леммы 6 следует, что она накрывается петлей $\tilde{s} : I \rightarrow Y_1$, значит $[s] = (p_1)_*([\tilde{s}]) \in \mathcal{N}$. Тем самым $\text{Ker in}_* \subset \mathcal{N}$, поэтому в силу леммы 1 $\mathcal{N} = \text{Ker in}_*$.

43.H. Включение $\text{in}_2 : X_2 \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп клеточного пространства и его 2-остова.

43.3. Проверьте, что накрытие над клеточным пространством X , построенное в доказательстве теоремы 43-G, является универсальным.

12.4.4. Выписывание образующих и соотношений

Теоремы 43.E и 43.G дают следующий способ выписывания образующих и соотношений фундаментальной группы конечного клеточного пространства.

Пусть X - конечное клеточное пространство и x_0 - его нульмерная клетка. Пусть T - максимальное дерево одномерного остова пространства X . Для каждой одномерной клетки $e \subset X$, не лежащей в T , выберем петлю s_e , начинающуюся в x_0 , идущую по T до клетки e , проходящую по этой клетке и возвращающуюся в x_0 опять по T . Обозначим через g_1, \dots, g_m гомотопические классы этих петель. В силу 43-E это образующие группы $\pi_1(X, x_0)$. Далее, пусть

$\varphi_1, \dots, \varphi_n : S^1 \rightarrow X_1$ - приклеивающие отображения для всех двумерных клеток пространства X . Для каждого φ_i выберем путь s_i , соединяющий точку $\varphi_i(1)$ с точкой x_0 в одномерном остове пространства X . Выразим гомотопический класс $T_{s_i}[\varphi_i]$ как произведение степеней образующих g_j . Пусть r_i

- соответствующее слово в алфавите g_1, \dots, g_m . Фундаментальная группа пространства X порождается классами g_1, \dots, g_m , которые связаны соотношениями $r_1 = \dots = r_n = 1$.

43.I. Проверьте, что этот рецепт дает правильный результат для фундаментальных групп пространств $\mathbb{R}P^n$ и $S^1 \times S^1$ при различных их представлениях в виде клеточного пространства (см. 40.H и 40.E).

В условии доказанного ранее утверждения 41.Fx предполагалось, что клеточное пространство является двумерным. Дело в том, что в том момент нам еще не было известно, что включение $X_2 \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

К примеру, $\mathbb{R}P^2$ получается при приклеивании D^2 к S^1 посредством отображения $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$, где $\varphi(z) = z^2$. Класс петли φ в $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ представляет из себя удвоенную образующую, следовательно, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$, как и следовало ожидать. Тор

$S^1 \times S^1$ получается в результате приклеивания круга D^2 к букету $S^1 \vee S^1$ посредством отображения φ , классом которого является коммутатор образующих фундаментальной группы букета. Поэтому, как и следовало ожидать, фундаментальной группой тора является \mathbb{Z}^2 .

43. J. Всякое конечное односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству, одномерный остов которого состоит из одной точки.

12.4.5. Фундаментальные группы основных поверхностей

43.K. Фундаментальная группа сферы с g ручками допускает следующее задание

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

См. 40.L (h).

43.L. Фундаментальная группа сферы с g плёнками допускает следующее задание

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle.$$

43.L См. 40-L (i).

43.M Так как их прокоммутированные группы являются свободными абелевыми группами с разным числом образующих, значит, они не изоморфны.

Фундаментальные группы сфер с различным числом ручек не изоморфны.

Когда требуется доказать неизоморфность двух групп, заданных посредством конечных наборов образующих и соотношений, прежде всего стоит прокоммутировать эти группы. Напомним, что прокоммутировать группу G - это значит профакторизовать её по её коммутанту. Коммутант группы G обозначается через $[G, G]$ и представляет собой нормальную подгруппу, порожденную коммутаторами $a^{-1}b^{-1}ab$ для всех $a, b \in G$. На языке образующих и соотношений коммутирование означает добавление к имеющимся соотношениям соотношений $ab = ba$, $a, b \in G$.

Конечнопорожденные абелевы группы хорошо известны. Любая такая группа изоморфна произведению конечного числа циклических (конечных и бесконечных) групп. Ясно, что если прокоммутированные группы не изоморфны, то и сами исходные группы не изоморфны.

43.М.1. Прокоммутированная фундаментальная группа сферы с g ручками изоморфна свободной абелевой группе ранга $2g$ (т. е. \mathbb{Z}^{2g}). Так как единственное соотношение в фундаментальной группе сферы с g ручками означает, что произведение g коммутантов образующих a_i и b_i равно 1.

43.Н. Фундаментальные группы сфер с различным числом плёнок не изоморфны.

Следствие 43.Н.1.

43.Н.1. Прокоммутированная фундаментальная группа сферы с g плёнками изоморфна $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$.

Взяв в прокоммутированной группе в качестве образующих элементы a_i , $i = 1, 2, \dots, g - 1$, и $b_n = a_1 a_2 \dots a_g$, мы получим абелеву группу с единственным соотношением $b_n^2 = 1$.

43.О. Сферы с различным числом ручек не являются гомотопически эквивалентными.

Следствие 43.М.

43.Р. Сферы с различным числом, плёнок не являются гомотопически эквивалентными.

Следствие 43.Н.

43. Q. Сфера с ручками гомотопически не эквивалентна сфере с плёнками. Если X - линейно связное пространство, то его прокоммутированная фундаментальная группа называется *одномерной* (или *первой*) *группой гомологии* пространства X и обозначается через $H_1(X)$. Если X не является линейно связным, то $H_1(X)$ определяется как прямая сумма одномерных групп гомологии всех компонент линейной связности этого пространства. В этих обозначениях теорема 43.М1 выглядит следующим образом: Пусть F_g - сфера с g ручками, тогда $H_1(F_g) = \mathbb{Z}^{2g}$.

Следствие 43.М. 1 и 43.Н.1

12.4.6х. Теорема Зейферта—ван Кампена

Для того, чтобы найти фундаментальную группу клеточного пространства, вместо того, чтобы использовать его клеточное разбиение, бывает проще применить теорему Зейферта—ван Кампена.

43.Ах Теорема Зейферта-ван Кампена. Пусть X - линейно связное топологическое пространство, A и B - его открытые линейно связные подмножества, покрывающие X . Предположим, что множество

$C = A \cap B$ также линейно связно, $x_0 \in C$. Тогда группа $\pi_1(X, x_0)$ является свободным произведением групп $\pi_1(A, x_0)$ и $\pi_1(B, x_0)$ с объединенной подгруппой $\pi_1(C, x_0)$. Другими словами, если

$$\begin{aligned} \pi_1(A, x_0) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \rho_1 = \dots = \rho_r = 1 \rangle, \\ \pi_1(B, x_0) &= \langle \beta_1, \dots, \beta_q \mid \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1 \rangle, \\ \pi_1(C, x_0) &\text{ порождена элементами } \gamma_1, \dots, \gamma_t, a \\ \text{in}_A : C &\rightarrow A, \text{in}_B : C \rightarrow B - \text{стандартные включения, то группа} \\ \pi_1(X, x_0) &\text{ имеет задание} \\ &\langle \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \mid \\ &\rho_1 = \dots = \rho_r = \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1, \\ &\text{in}_{A^*}(\gamma_1) = \text{in}_{B^*}(\gamma_1), \dots, \text{in}_{A^*}(\gamma_t) = \text{in}_{B^*}(\gamma_t) \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда пространство X и его подмножества A и B являются клеточными.

43. Вх. Предположим, что X - связное конечное клеточное пространство, а A и B — его клеточные подпространства, покрывающие X . Положим $C = A \cap B$. Как фундаментальные группы пространств X, A, B и C связаны между собой?

43. Сх Теорема Зейферта-ван Кампеиа. Пусть X - связное конечное клеточное пространство, A и B - покрывающие его связные клеточные подпространства, $C = A \cap B$. Предположим, что C также связно. Пусть $x_0 \in C$ - некоторая нульмерная клетка,

$$\begin{aligned} \pi_1(A, x_0) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \rho_1 = \dots = \rho_r = 1 \rangle, \\ \pi_1(B, x_0) &= \langle \beta_1, \dots, \beta_q \mid \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1 \rangle, \end{aligned}$$

и пусть группа $\pi_1(C, x_0)$ порождается своими элементами $\gamma_1, \dots, \gamma_t$.

Обозначим через $\xi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ и $\eta_i(\beta_1, \dots, \beta_q)$ образы элементов γ_i (точнее, их выражение посредством образующих) при гомоморфизмах включения

$$\pi_1(C, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0) \text{ и, соответственно, } \pi_1(C, x_0) \rightarrow \pi_1(B, x_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \mid \\ &\rho_1 = \dots = \rho_r = \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1, \\ &\xi_1 = \eta_1, \dots, \xi_t = \eta_t \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку группа, заданная вышеуказанным образом, в действительности с точностью до канонического изоморфизма не зависит от выбора образующих и соотношений в группах

$\pi_1(A, x_0)$ и $\pi_1(B, x_0)$ и выбора образующих в группе $\pi_1(C, x_0)$, мы можем воспользоваться наиболее удобным заданием. Выведем данную теорему из теорем 43.D и 43.G. Прежде всего будет удобно заменить пространства X, A, B, C на гомотопические эквивалентные им пространства, нульмерный остов которых состоит из одной точки. Мы сделаем это при помощи следующей конструкции. Рассмотрим лежащее в одномерном остове C максимальное дерево; обозначим его T_C . Дополним его до максимального дерева $T_A \supset T_C$ в A , а также дополним T_C до максимального дерева $T_B \supset T_C$. Объединение $T = T_A \cup T_B$ является максимальным деревом в X . Осталось заменить каждое из рассматриваемых пространств его фактором по лежащему в нем максимальному дереву. Таким образом, одномерный остов каждого из пространств X, A, B, C или совпадает с нульмерной клеткой x_0 , или является букетом окружностей. Каждой из окружностей букетов соответствует образующая фундаментальной группы соответствующего пространства. Образом элемента $\gamma_i \in \pi_1(C, x_0)$ при гомоморфизме включения является одна из образующих, пусть α_i (β_i) в группе $\pi_1(A, x_0)$ (соответственно, в $\pi_1(B, x_0)$). Таким образом, $\xi_i = \alpha_i$ и $\eta_i = \beta_i$. Соотношения $\xi_i = \eta_i$, а в данном случае $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \dots, t$ возникают в силу того, что каждая из лежащих в C окружностей определяет одну образующую группы $\pi_1(X, x_0)$. Все остальные соотношения, как следует из утверждения 43. G, определяются приклеивающими отображениями двумерных клеток пространства X , каждая из которых лежит по крайней мере в одном из множеств A или B , значит является соотношением между образующими фундаментальных групп этих пространств.

Нарисуйте коммутативную диаграмму, в которой участвуют гомоморфизмы, индуцированные всеми существующими в этой ситуации включениями.

43.1x. Пусть X, A, B и C - такие как выше. Предположим, что A и B односвязны, а C состоит из двух компонент связности. Докажите, что группа $\pi_1(X)$ изоморфна \mathbf{Z} .

43.2x. Является ли теорема 43.Cx частным случаем теоремы 43.Ax?

43.3x. Можно ли опустить предположение об открытости множеств A и B в условиях теоремы 43.Ax.

43.4x. Выведите теорему 43.G из теоремы Зейферта-ван Кампена 43.Ax.

43.5x. Вычислите фундаментальную группу так называемого линзового пространства, получающегося при склеивании двух полноторий по гомеоморфизму $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (u, v) \mapsto (u^k v^l, u^m v^n)$, где $kn - lm = 1$.

43.6х. Определите гомотопический и топологический тип линзового пространства для $m = 0, 1$.

43.7х. Опишите задание фундаментальной группы дополнения в \mathbf{R}^3 торического узла K типа (p, q) , где p и q взаимно простые натуральные числа. Этот узел лежит на торе, образованном при вращении окружности; формулы

$$\begin{cases} x = (2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, \\ y = (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \\ z = \sin 2\pi u \end{cases}$$

задают его параметрическое представление. Узел K задается в T уравнением $pu = qv$. Найдите также прокоммутированную фундаментальную группу (т. е. группу гомологии) дополнения узла K .

43.8х. Пусть (X, x_0) и (Y, y_0) — односвязные топологические пространства с отмеченными точками, $Z = X \vee Y$ — их букет.

(1) Докажите, что если X и Y — клеточные пространства, то пространство Z односвязно.

(2) Докажите, что если у точек x_0 и y_0 существует окрестности $U_{x_0} \subset X$ и $V_{y_0} \subset Y$, строго деформационно ретрагирующиеся, соответственно, на x_0 и y_0 , то пространство Z односвязно.

(3) Постройте односвязные топологические пространства X и Y с неодносвязным букетом.

12.4.7х. Теоретико-групповое отступление: свободное произведение с объединенной подгруппой

На первый взгляд описание фундаментальной группы пространства X , данное в теореме Зейферта-ваи Камнепа, далеко от того, чтобы быть инвариантным, поскольку в нем используются задания групп при помощи образующих и соотношений. Однако существует и категорное теоретико-групповое описание группы $\pi_1(X)$.

43.Dх. Рассмотрим задания групп A и B ,

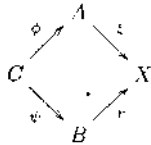
$$A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \rho_1 = \dots = \rho_r = 1 \rangle,$$

$$B = \langle \beta_1, \dots, \beta_q \mid \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1 \rangle,$$

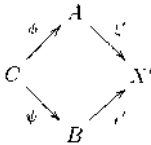
пусть группа C порождена элементами $\gamma_1, \dots, \gamma_t$. Рассмотрим также произвольные гомоморфизмы $\xi : C \rightarrow A$ и $\eta : C \rightarrow B$. Тогда

$$X = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \mid \rho_1 = \dots = \rho_r = \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1, \xi(\gamma_1) = \eta(\gamma_1), \dots, \xi(\gamma_t) = \eta(\gamma_t) \rangle.$$

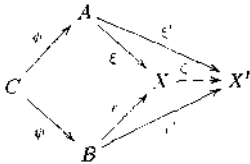
$\varphi : A \rightarrow X : \alpha_i \mapsto \alpha_i, i = 1, \dots, p$ и $\psi : B \rightarrow X : \beta_j \mapsto \beta_j, j = 1, \dots, q$.



При этом для любой группы X' и гомоморфизмов $\varphi' : A \rightarrow X'$ и $\psi' : B \rightarrow X'$, для которых $\xi \circ \varphi' = \eta \circ \psi'$, т. е. в том случае, когда диаграмма



коммукативна, существует единственный гомоморфизм $\zeta : X \rightarrow X'$, такой что $\tau' = \zeta \circ \varphi$ и $\psi' = \zeta \circ \psi$, т. е. такой что коммукативна диаграмма



Данное свойство группы X характеризует ее единственным образом с точностью до изоморфизма.

Группа X , описанная в формулировке утверждения 43. Dx , называется *свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой C* и обозначается $A *_C B$.

Если C - тривиальная группа, то $A *_C B$ есть просто $A * B$ - так называемое *свободное произведение A и B* .

Пусть \mathbf{F} - свободная группа с образующими $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$. По определению группа X является ее факторгруппой по нормальной оболочке N элементов

$$\{\rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s, \xi(\gamma_1)\eta(\gamma_1)^{-1}, \dots, \xi(\gamma_t)\eta(\gamma_t)^{-1}\}.$$

Из условия коммутативности первой диаграммы следует, что подгруппа N лежит в ядре гомоморфизма

$F \rightarrow X' : \alpha_i \mapsto \varphi'(\alpha_i), \beta_i \mapsto \psi'(\alpha_i)$, следовательно, существует гомоморфизм $\zeta : X \rightarrow X'$. Его единственность

очевидна. Последнее утверждение теоремы докажите самостоятельно.

43.9x. Является ли свободная группа ранга n свободным произведением n экземпляров группы \mathbf{Z} ?

43.10x. Используя подходящее разбиение бутылки Клейна, представьте ее фундаментальную группу в виде $\mathbf{Z} *_{\pm} \mathbf{Z}$.

43.11x. Найдите определение свободного произведения групп как множества классов эквивалентности слов алфавита, буквами которого являются элементы групп - сомножителей данного произведения.

43.12x. Исследуйте алгебраические свойства операции свободного произведения групп. Будет ли оно ассоциативным, коммутативным, и в каком смысле. Определяют ли гомоморфизмы из сомножителей гомоморфизм из их произведения?

43.13x*. Найдите представление модулярной группы

$$Mod = SL(2, \mathbb{Z}) / \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в виде свободного произведения $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

12.4.8x. Дополнение к теореме Зейферта-ван Кампена

Теорема Зейферта-ван Кампена появилась и использовалась главным образом как средство вычисления фундаментальных групп. Однако она применима не во всех ситуациях, к примеру, в условиях следующей теоремы.

43.Ех. Пусть X - топологическое пространство, A и B - открытые множества, образующие его покрытие, $C = A \cap B$. Предположим, что A и B односвязны, а множество C состоит из двух связных компонент. Тогда $\pi_1(X) \cong \mathbf{Z}$.

Постройте универсальное накрытие пространства X .

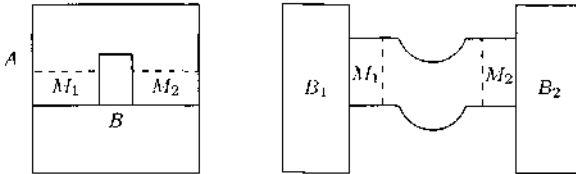
Теорема 43.Ех верна и в том случае, когда предполагается, что пространство C состоит из двух линейно связных компонент. Казалось бы, что отличие несущественно, однако доказательство становится несравнимо более техническим.

В действительности, Зейферт и ван Кампен получили использовавшиеся ими для вычисления фундаментальных групп гораздо более общие результаты, чем теорема 43.Ах. Эта теорема - единственная, которая перешла из их работ в учебники. Теорема 43.1х является другим частным случаем доказанных ими утверждений. Формулировка наибо-

лее общего из них слишком тяжеловесна, чтобы здесь можно было её привести. В этой связи приведем еще один частный случай, используя который совместно с теоремой 43.Ах, можно получить все, что дает общая теорема Зейферта—ван Кампепа.

Прежде всего опишем общую ситуацию. Пусть A - топологическое пространство, B - его замкнутое подмножество и U - окрестность множества B в A , такая что $U \setminus B$ есть объединение двух непересекающихся открытых в A множеств M_1 и M_2 , положим $N_i = B \cup M_i$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим топологическое пространство C , полученное в результате приклеивания к $A \setminus U$ множеств N_1 и N_2 по тождественным отображениям множеств M_1 и M_2 . Предположим, что множества $(A \setminus U) \cup N_1$ и $(A \setminus U) \cup N_2$ (с индуцированной из A топологией) образуют фундаментальное покрытие C . В пространстве C имеются, так сказать, два экземпляра пространства B , которые лежат, соответственно, в N_1 и N_2 . Пространство A можно отождествить с факторпространством C , полученным в результате отождествления двух экземпляров B друг с другом при помощи тождественного гомеоморфизма. Тем не менее наше построение начиналось с пространства A , чью фундаментальную группу мы и намерены подсчитать, тогда как пространство B является вспомогательным (рисунок).



В клеточной ситуации предполагается, что A - клеточное пространство, B - его клеточное подпространство. При этих предположениях пространство C также оказывается клеточным, также как и естественное отображение $C \rightarrow A$. Последнее утверждение означает, что для каждого целого неотрицательного числа n это отображение переводит n -остов пространства C в n -остов пространства A .

43.Фх. Предположим, что в описанной выше конструкции пространство C линейно связно и $x_0 \in C \setminus (B_1 \cup B_2)$. Предположим, что группа $\pi_1(C, x_0)$ задана своими образующими $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и соотношениями $\psi_1 = 1, \dots, \psi_m = 1$. Предположим, что отображение $C \rightarrow A$ переводит точки $y_i \in B_i$ в одну и ту же точку y . Обозначим через σ_i гомотопические классы путей, соединяющих x_0 с y_i в C . Пусть β_1, \dots, β_r - образующие группы $\pi_1(B, y)$. $a^i \beta_{1i}, \dots, \beta_{ri}$ - соответствующие элементы в $\pi_1(B_i, y_i)$.

Обозначим, через φ_i слово, представляющее элемент $\sigma_i \beta_i \sigma_i^{-1}$ в алфавите $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Тогда группа $\pi_1(A, x_0)$ имеет следующее задание:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma \mid \psi_1 = \dots = \psi_m = 1, \gamma \varphi_{11} = \varphi_{12} \gamma, \dots, \gamma \varphi_{p1} = \varphi_{p2} \gamma \rangle.$$

43.14x. Вычислите фундаментальные группы тора и бутылки Клейна при помощи теоремы 43-Fx.

43.15x. Вычислите фундаментальные группы основных поверхностей при помощи теоремы 43-Fx.

43.16x. Выведите теорему 43.1x из теорем 43-Ax и 43-Fx.

43.17x. Постройте алгебраическую теорию, основанную на теоретико-групповой конструкции, идея которой содержится в теореме 43-Fx.

13. Топологический солитон

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ СОЛИТОН - солитон с нетривиальной топологической характеристикой (типа степени отображения, инварианта Хопфа и т.д.) - *топологическим зарядом*. В расширенном смысле (опуская присущее "истинным" солитонам свойство сохранения формы после столкновений) термин "Т.с." принято использовать как для обозначения топологически нетривиальных решений с конечными динамическими характеристиками в теории поля (кинков, монополей, инстантонов, скирмионов и т. д.), так и для модельного описания устойчивых неоднородных состояний (локализованных структур) в конденсированных средах: вихрей, дислокаций, дисклинаций, доменных стенок, точечных дефектов и т. п.

Простейшие (1 + 1)-мерные (пространственная координата+время) Т.е. - кинки [от англ. kink - изгиб, петля, узел; термин предложен Д. Финкельштейном (D. Finkelstein) в 1966] описываются решениями вида

$$\varphi_x(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\frac{\pm(x - x_0 - vt)}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (1)$$

синус-Гордона уравнения (здесь и далее $c = \hbar = 1$)

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = \sin \varphi(x, t), \quad (2)$$

где $\varphi(x, t)$ - вещественная скалярная функция, знак "+" в (1) соответствует к и н к у (знак "-" - а н т и к и н к у), находящемуся в момент времени $t = 0$ в точке x_0 и движущемуся со скоростью u в направлении $+x$ (соответственно $-x$ для антикинка). Решения (1)

удовлетворяют граничным условиям $\varphi(-\infty) = 0, \varphi(\infty) = 2\pi$ (рис. 1) и характеризуются топологическим зарядом

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \frac{1}{2\pi} [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)],$$

равным ± 1 соответственно для кинка и антикинка. Энергия кинка (антикинка) \mathcal{E} ограничена снизу величиной топологического заряда $\mathcal{E} > c|Q|$, где c - константа, что обеспечивает его устойчивость в отношении распада на состояния с меньшей энергией (см. Устойчивость солитонов).

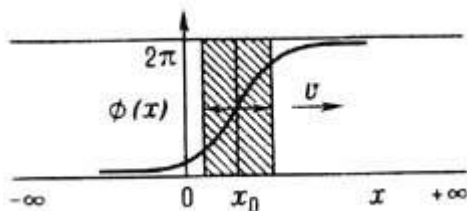


Рис. 1. Кинк уравнения синус Гордона, локализованный в точке $x = x_0$, движущийся со скоростью u в направлении $+x$. Заштрихована область изгиба функции φ , где сосредоточена основная часть энергии кинка.

Для наглядной иллюстрации кинка синус-Гордона уравнения рассмотрим упругую полосу, уложенную вдоль оси x и

характеризуемую в каждой точке оси углом закручивания (отклонения от равновесного положения края полоски) $j(x)$ (рис. 2, а).

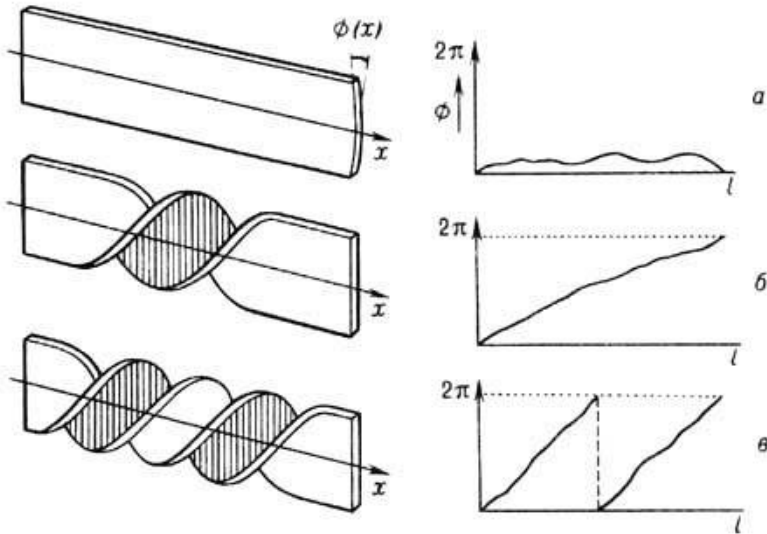


Рис. 2. Состояния полоски и отвечающие им изменения функции $f(x)$: **а**-топологически тривиальная полоска с малыми отклонениями от равновесного положения; **б**- полоска, содержащая 2φ -"скрутку"-кинк; **в** - полоска, содержащая 4φ -"скрутку" -2-кинк.

Функцию $j(x)$ можно задать непрерывным образом в случае полоски конечной длины $0 \leq x \leq l$, если наложить периодические граничные условия $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi_0 \pmod{2\pi}$, т. е. отождествить концы полоски с точностью до 2φ -кратного поворота. В результате получаем замкнутую полоску. Если до отождествления концов полоски повернуть один из них на угол 2φ относительно оси x (к примеру по часовой стрелке), то после замыкания полоска будет содержать "скрутку" - кинк, который не может быть устранён без разрыва полоски, т. е. будет сохраняться на протяжении всей последующей эволюции полоски (рис. 2, б). Для создания в полоске 2-кинкового состояния следует повернуть один из её концов (до отождествления) на угол 4φ (рис. 2, в) и т.д. Антикнк будет соответствовать закручиванию на 2φ против часовой стрелки; понятно, что он будет

"аннигилировать" с кинком, если их создать на одной и той же полоске.

Синус-Гордона уравнение (2), в частности, применяется для описания распространения *дислокаций* в кристаллах, движения *Блоха стенок* в магнитоупорядоченных средах и *доменных стенок* в *сегнетоэлектриках*, распространения квантов магнитного потока (флаконов) в длинных джозефсоновских контактах (см. *Джозефсона эффект*) и т. д.

Другим примером (1 + 1)-мерных Т.с. являются кинки так называемой j^4 -модели с уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = m^2 \varphi - \lambda \varphi^3, \quad (3)$$

где параметры $t, m^2 \geq 0$. Модель простейшим образом иллюстрирует явление *спонтанного нарушения симметрии*. Действительно,

уравнение (3) допускает два решения-константы $\varphi = \pm m / \sqrt{\lambda}$, отвечающих нулевому уровню энергии $\mathcal{E} = 0$, которые переводятся друг в друга (неинвариантны) при преобразованиях отражения $\varphi \rightarrow -\varphi$, в то время как уравнение (3) и соответствующий лагранжиан инвариантны при таких отражениях. В квантовом варианте указанным постоянным решениям отвечают два вырожденных вакуумных состояния $|0\rangle, |0'\rangle$ (см. *Вырождение вакуума*). Выбор любого из этих вакуумов приводит к теории со спонтанно нарушенной отражательной симметрией.

Помимо постоянных решений уравнение (3) допускает кинковое (антикинковое) статическое решение (рис. 3)

$$\varphi_{\pm}(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} \left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}} \right], \quad (4)$$

с энергией $\mathcal{E} = (2\sqrt{2}/3) m^3 / \lambda$, локализованной в малой окрестности точки x_0 . При $x = \pm \infty$ решение (4) переходит в постоянные решения, а в точке обращения в нуль параметра нелинейности 1 решение (4) становится сингулярным, что свидетельствует о его непертурбативном характере [т.е. решение (4) не может быть получено методами теории возмущений].-

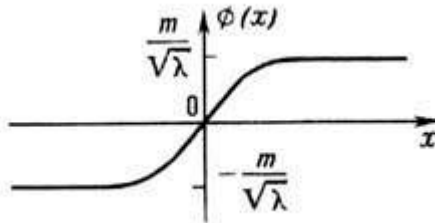


Рис. 3. Кинк f^4 -модели, локализованный в точке $x = 0$.

Топологический заряд j^4 -теории записывается в виде

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)],$$

при этом $Q=+1$ для кинка (4) и $Q=0$ для постоянных решений. В классической теории это означает, что кинк не может быть непрерывным образом деформирован ни к одному из тривиальных решений (требуется бесконечная энергия для преодоления бесконечно высокого потенциала барьера). На квантовом уровне закон сохранения топологического заряда запрещает кинку распасться либо посредством туннельного эффекта переходить в одно из вакуумных состояний. Все это позволяет интерпретировать кинки как устойчивые частицеподобные состояния.

Следующим важным свойством j^4 -модели является наличие в ней вырожденных состояний с пространством вырождения (см. ниже)

$D = S^0$ (нульмерная сфера, состоящая, как известно, из двух точек, в данном случае $\pm m/\sqrt{\lambda}$). Это обстоятельство позволяет распространить как методы исследования, так и выводы j^4 -модели на широкий круг объектов в физике конденсированных сред, таких, как твёрдые и жидкие *кристаллы, ферромагнетики и антиферромагнетики, сверхпроводники* и сверхтекучие жидкости He^4 и He^3 и т. д. Возможность применения топологии, методов классификации *дефектов* (нарушений локального равновесия) в конденсированных средах замечена Г. Е. Воловиком и В. П. Минеевым (1977) и основана на том, что во многих физически интересных ситуациях (примеры приведены ниже) можно говорить об установлении т. н. *локального термодинамического равновесия*. При этом можно говорить о температуре образца T как о функции, зависящей от точки, а если состояния термодинамического равновесия оказываются вырожденными при температурах ниже некоторого критического значения $T < T_c$, то и другие характеристики конденсированных сред будут зависеть от точки. Естественное предположение о непрерывности таких зависимостей позволяет описывать состояния конденсированных сред в терминах полевых переменных и соответственно использовать методы алгебраической *топологии* (теорию гомотопий, теорию гомологии и когомологий, теорию *расслоений* и др.) для классификации состояний, установления закономерностей глобального характера, доказательства теорем существования солитонных решений и т. д.

Дефекты в конденсированных средах как Т. с.

Топологический анализ дефектов не претендует на полноту описания физической картины, в частности, он практически не даёт количественных ответов, которые по сути слабо зависят от реализуемой топологии. Тем не менее такой анализ позволяет простыми средствами выявлять те качественные особенности рассматриваемых явлений, которые должны быть приняты во внимание при более детальном описании. Например, легко можно понять причину отсутствия топологически устойчивых образований в обычной жидкости. Как известно, вихри могут быть устойчивы лишь в идеальной жидкости (теорема Кельвина - Гельмгольца), а под влиянием вязкости такие вихри рассасываются. С точки зрения топологии причина состоит в том, что обычная жидкость не вырождена. В то же время *квантованные вихри* в сверхтекучем He^4

топологически устойчивы именно в силу вырожденности основных состояний. В результате никакое вязкое трение не может изменить кванта циркуляции сверхтекучей скорости He^4 ; с другой стороны, рассасывание вихря означало бы расширение области дефекта (нарушения сверхтекучести), что энергетически невыгодно.

Во многих случаях для предсказания существования того или иного типа дефекта в образце конденсированной среды достаточно исследовать связность пространства в вырождения D - множества всех равновесных состояний образца при фиксированной температуре T . Согласно теории Ландау *фазовых переходов* 2-го рода, равновесное состояние образца определяется минимизацией функционала свободной энергии по множеству состояний, характеризуемых конечным числом параметров, называемых *параметрами порядка* теории. Рассматривая параметры порядка $j(x)$ как непрерывные отображения, определённые в области $M \subset R^3$, занимаемой образцом, и принимающие значения в пространстве вырождения D

$$\varphi(x) : M \rightarrow D, \tag{5}$$

приходим к стандартной задаче теории гомотопий по классификации отображений (5). Математически M определяется как компактное связное *многообразие* с границей ∂M , а дефекты отождествляются с особыми (сингулярными) или неособыми точками, линиями и плоскостями, где параметры порядка $j(x)$ не определены. Если тем или иным образом удастся доопределить отображение $j(x)$ так, что оно будет регулярным во всей области M , то такие дефекты называются *устраняемыми*. Наличие неустранимых особенностей в поле параметра порядка ведёт к пересмотру его области определения, т. е. вместо (5) рассматривают отображения вида

$$\varphi(x) : M \setminus \Sigma \rightarrow D, \tag{5a}$$

здесь S -область дефекта (подмногообразие M), где параметры $j(x)$ не определены регулярным образом.

В том случае, когда среда обладает *точечными дефектами*, S будет 0-мерным подмногообразием, состоящим из одной или нескольких особых точек внутри M . Такие дефекты принято называть "ежами" по виду конфигурации параметра $j(x)$ в окрестности особой точки. С топологической точки зрения $M \setminus \Sigma = M \setminus \{0\} \simeq S^2$, иными словами, всегда возможно охватить область S сферой S^2 (рис. 4, *a*), и вместо отображений (5а) рассматривать в качестве параметров порядка

$$\varphi|_{S^2}: S^2 \rightarrow D. \quad (6)$$

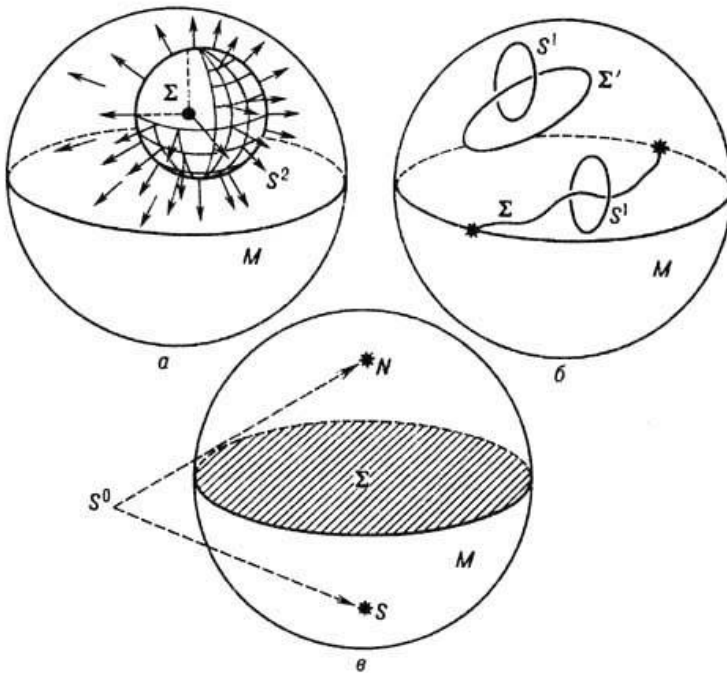


Рис. 4. Типы дефектов в конденсированных средах и соответствующие им подмногообразия дефектов S : *a*-точечный дефект; *б*-линейный дефект; *в*-планарный дефект.

Дальнейшая топологическая классификация дефектов проводится по стандартной схеме. Множество отображений (6) разбивается на

гомотопичные классы $[S^2, D]_i$, $i \in \mathbb{Z}$, каждый из которых объединяет лишь те отображения из (6), которые переводимы друг в друга непрерывной деформацией (гомотопны между собой). Далее, на

множестве гомотопичных классов $\{[S^2, D]_i\}$ задаётся закон композиции, по отношению к которому классы $[S^2, D]_i$ будут элементами 2-й гомотопической группы $\pi_2(D)$. Результат анализа сводится к утверждению, что топологически стабильные точечные дефекты в конденсированных средах возможны в случае,

когда $\pi_2(D) = \mathbb{Z}$, т. е. когда каждому гомотопическому классу можно поставить в соответствие некоторое число N из бесконечной

группы целых чисел \mathbb{Z} или одной из её конечных подгрупп. В применении к конденсированным средам вместо термина "гомотопический класс" употребляется термин "топологический тип дефекта", а число N называется топологическим индексом (или зарядом) дефекта. Другим следствием изоморфизма

$\pi_2(D) = \mathbb{Z}$ является "арифметика дефектов" при их слияниях и распадах: индекс "составного" дефекта N должен быть равен сумме (точнее, одному из значений суммы, в силу возможной многозначности операции сложения) индексов N_1 и N_2 слагаемых дефектов при слиянии и образовавшихся дефектов при распаде.

Одномерные подмногообразия дефектов S состоят из одной или нескольких особых линий, которые либо замкнуты в \mathcal{M} , либо начинаются и заканчиваются на границе $\partial\mathcal{M}$ (рис. 4, б). Такие линейные дефекты называются "вихрями" или "струнами", а область S в любой точке можно охватить окружностью S^1 . В этом случае параметры порядка суть отображения

$$\varphi|_{S^1}: S^1 \rightarrow D,$$

гомотопические классы $[S^1, D]_i$ будут элементами 1-й гомотопической (фундаментальной) группы $\pi_1(D)$. Для существования топологически стабильных линейных дефектов требуется наличие

изоморфизма $\pi_1(D) = \mathbb{Z}$. Наконец, когда $\dim S=2$ мы приходим к параметрам порядка типа

$$\varphi|_{S^0}: S^2 \rightarrow D,$$

характерных для среды с планарными дефектами типа "доменных стенок" (рис. 4, в). Классификация проводится на основе так называемой 0-й гомотопической группы $\rho_0(D)$ и критерий существования стабильных планарных дефектов

$\pi_0(D) = \mathbb{Z}$. Т.о., дефекты в конденсированных средах возникают

как локализованные в пространстве структуры с нетривиальными топологическими характеристиками - индексам N , а их стабильность обеспечивается топологией пространства вырождения. Это и является основанием для рассмотрения перечисленных дефектов как Т.с. (в расширенном смысле). Следует отметить, что Т.с. в теории поля, как правило, обладают регулярным поведением во всей области определения. На языке топологии получает естественное объяснение и наиболее известный линейный дефект в кристаллах - краевая дислокация, возникающая при образовании лишней кристаллической полуплоскости в решётке (рис. 5).

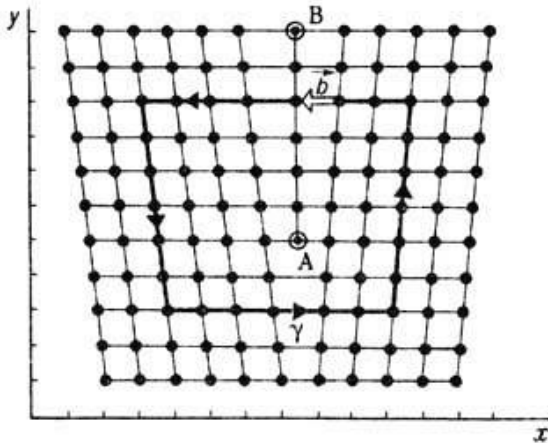


Рис. 5. Краевая дислокация в кубическом кристалле с осями вдоль x , y и z .

Линия дислокации, которая перпендикулярна плоскости рисунка и изображена точкой А, является краем лишней полуплоскости.

Замкнутый контур g отвечает обходу линии дислокации в положительном направлении. Дислокация характеризуется топологическими индексами $N_x=1, N_y=N_z=0$ и вектором Бюргерса $b = a_x e_x$, перпендикулярным линии дислокации.

Предполагается, что на расстояниях в несколько постоянных решётки от линии АВ кристаллический порядок восстанавливается. Поскольку пространство вырождения не зависит от вида кристалла, то достаточно рассмотреть простейший кубический кристалл и смещения лишь вдоль одной из осей, x , с периодом решётки a_x . Состояния кристалла вырождены относительно сдвигов на a_x , т. к. такой сдвиг приводит к совмещению кристалла с самим собой. Иными словами, концы отрезка $[0, a_x]$ отвечают одному и тому же состоянию, что позволяет их отождествить. Для смещений x , лежащих вне отрезка $[0, a_x]$, всегда найдётся эквивалентное смещение внутри того же отрезка. В результате приходим к пространству вырождения кристалла по оси x в виде отрезка $[0, a_x]$ с отождествлёнными концами, что топологически эквивалентно окружности S^1 . Аналогичное вырождение состояний наблюдается и вдоль осей y и z , т. е. пространством вырождения кристалла в целом будет $D = S^1 \otimes S^1 \otimes S^1 \equiv T^3$ - многообразии трёхмерного тора.

Топологический тип параметров порядка кристалла (в соответствии с приведённой выше схемой) будет характеризоваться группой $\pi_1(T^3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, т. е. топологически устойчивые *дисклинации* в кристаллах обладают тремя целочисленными топологическими индексами N_x, N_y и N_z , каждый из которых сохраняется при распадах и слияниях дислокаций. Отметим, что закон сохранения трёх индексов $N_i, i = x, y, z$, эквивалентен закону сохранения вектора Бюргерса

$$\mathbf{b} = a_x N_x \mathbf{e}_x + a_y N_y \mathbf{e}_y + a_z N_z \mathbf{e}_z,$$

где e_i - орт в направлении i - той оси. Поскольку топологический тип линии дислокации не изменяется при непрерывных деформациях, то приведённый результат полностью переносится и на винтовые дислокации, которые топологически эквивалентны краевым. В изотропном ферромагнетике пространством вырождения является двумерная сфера $D = S^2$. Действительно, при $T < T_C$ (точка Кюри) в

ферромагнетике возникает спонтанная намагниченность с вектором намагниченности \mathbf{M} , длина которого фиксируется температурой образца: $|\mathbf{M}|=M(T)$. Энергия ферромагнетика может зависеть как от величины \mathbf{M} (собственно магнитная энергия), так и от направления вектора \mathbf{M} (т. н. энергия *магнитной анизотропии*). Поскольку энергия магнитной анизотропии, как правило, пренебрежимо мала по сравнению с чисто магнитной энергией, то для одного и того же энергетического состояния ферромагнетика вектор \mathbf{M} при заданной T может принимать все возможные направления. Каждому направлению нормированного на единицу вектора $\mathbf{n}=\mathbf{M}(T)/M(T)$ (параметр порядка ферромагнетика) можно взаимно однозначно сопоставить точку на сфере S^2 (последняя возникает как геометрическое место точек - концов вектора \mathbf{n}). Следовательно, в изотропных магнетиках с $D = S^2$ могут существовать стабильные точечные дефекты ("ежи"), т. к.

$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. В то же время линейные и планарные дефекты в таком магнетике будут неустойчивы. При наложении однородных граничных условий на бесконечности ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$) возникает эффективная компактификация пространства R^3 т. е.

$R^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$. В результате вместо (5) имеем о т б р а ж е н и я
Х о п ф а (Н. Норф):

$$\mathbf{n}: S^3 \rightarrow S^2,$$

классифицирующиеся по группе $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

Простейшей нетривиальной конфигурацией поля в таком случае будет неособый кольцевой вихрь с инвариантом Хопфа $Q_H=1$. Правда, для стабилизации такого вихря к лагранжиану обычной *сигма-модели* требуется добавить члены 4-го порядка по производным \mathbf{n} .

Для анизотропного ферромагнетика типа "лёгкая плоскость" вектор \mathbf{n} лежит в некоторой плоскости, и пространством вырождения в этом случае будет $D = S^1$ (окружность). В таких образцах могут возникать устойчивые линейные дефекты - "вихри", т. к. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. В полярных координатах (r, j) на плоскости вне области дефекта S параметр порядка можно представить в виде

$$\mathbf{n} = A(r, \varphi) \exp \{i\alpha(r, \varphi)\},$$

где $a(r, j)$ -непрерывно меняющаяся фаза (угол между направлением \mathbf{M} и некоторым фиксированным направлением в "лёгкой плоскости").

"Вихрем" будет такая особая линия, при обходе которой фаза

$$\text{меняется на } \alpha(r, 2\pi) - \alpha(r, 0) = 2\pi N,$$

где N -топологический инвариант "вихря" - целое

число, показывающее, сколько полных оборотов при этом делает

вектор \mathbf{n} . На рис. 6, а изображён вихрь с $N = 1$, на рис. 6, б-с $N = -1$, 6,

в - с $N = 0$.

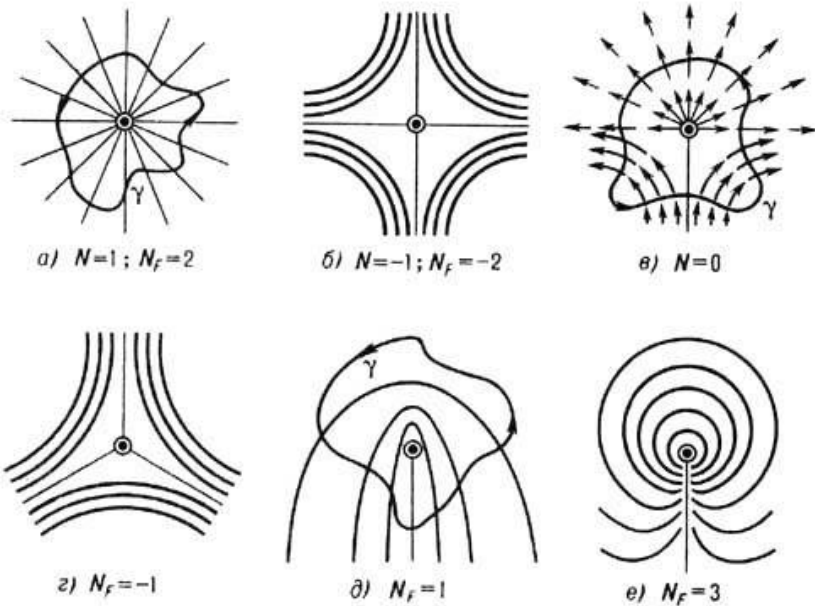


Рис. 6. Вихревые дефекты в ферромагнетиках и дисклинации в нематиках (во всех случаях особые линии перпендикулярны плоскости рисунков).

Наконец, в ферромагнетиках типа "лёгкая ось" равновесными при каждом значении T будут лишь два состояния $\mathbf{M} = \pm M\mathbf{u}$ (где \mathbf{u} -единичный вектор в направлении "лёгкой оси" намагничивания), т. е. $D = S^0$. В силу того, что $\rho_0(S^0) = Z$, можно говорить о допустимости

т. е. типа "доменных стенок" в магнетиках типа "лёгкая ось". Динамика простейших "доменных стенок" описывается синус-Гордона уравнением, Шрёдингера уравнением нелинейным и т. д.

Параметром порядка в нематических жидких кристаллах (или нематиках) служит директор \mathbf{d} , указывающий преимущественное направление длинных осей вытянутых молекул нематика при некоторой $T < T_C$ (в отличие от вектора \mathbf{n} , для директора направления \mathbf{d} и $-\mathbf{d}$ физически неразличимы). [Название "нематик" предложено Ш. Фриделем (Ch. Friedel).] Областью вырождения D (областью значений директора \mathbf{d}) в трёхмерном нематике является вещественное проективное пространство \mathbf{RP}^2 (получаемое из сферы S^2 отождествлением диаметрально противоположных точек).

Соответственно допустимы стабильные точечные особенности ("ежи"), которые классифицируются группой $\pi_2(\mathbf{RP}^2) = \mathbb{Z}$, а их конфигурации и "арифметика" те же, что и для точечных дефектов в изотропном магнетике. Линейные дефекты - дисклинации в трёхмерном нематике - характеризуются группой

$\pi_1(\mathbf{RP}^2) = \mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ - подгруппа \mathbb{Z} , задающая "двоичную арифметику" топологических инвариантов дисклинации: $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 0$. В связи с этим устойчивыми будут лишь дисклинации с нечётным топологическим инвариантом - индексом Франка N_F (рис. б, г, д, е), а дисклинации с чётным индексом N_F (рис. б, а, б) будут неустойчивы, т. к. они имеют возможность "вытекать в третье измерение". Индекс Франка определяется по аналогии с другими топологическими инвариантами как целое число N_F , связанное с изменением фазы α вектора \mathbf{d} при обходе по замкнутому контуру вокруг линии дисклинации соотношением $\alpha = \rho N_F$. Заметим, что дисклинации, изображённые на рис. б (г, д, е), невозможны в ферромагнетиках, т. к. при этом поле \mathbf{n} имело бы разрыв вдоль поверхности, опирающейся на особую линию. В нематиках они существуют лишь в силу неразличимости взаимно противоположных направлений директора \mathbf{d} .

В двумерных нематиках $D = \mathbf{RP}^1 \simeq S^1$ и отсутствуют устойчивые точечные дефекты в силу $\pi_2(\mathbf{RP}^2) = 0$. В то же время в них реализуются как устойчивые структуры все типы дисклинации, изображённые на рис. б, т. к. $\pi_1(\mathbf{RP}^1) = \mathbb{Z}$.

Топологический анализ дефектов в антиферромагнетиках проводится по аналогии с нематиками.

Для сверхтекучей компоненты He^4 (см. Гелий жидкий, Квантовая жидкость) областью вырождения D состояний, описываемых волновой функцией $y=|y|\exp(ij)$ будет область возможных значений волновой функции при фиксированном её модуле $|y|$. Физически это связано с т. н. Базе - Эйнштейна конденсацией бесспиновых атомов изотопа He^4 в состоянии с наименьшей энергией жидкости при температуре $T < T_C$, т. е. с накоплением в одном и том же состоянии большого числа частиц квантовой жидкости. Если пренебречь слабым взаимодействием между атомами жидкости, то при $T=0^\circ K$ в состоянии с минимальной энергией будут находиться все без исключения частицы, что и позволяет описывать их одной и той же (не зависящей от координат частиц) волновой функцией $y=|y|\exp(ij)$. Нормированная волновая функция $\Phi(x)=(y/|y|)\exp[ij(x)]$ в этом случае играет роль параметра порядка, т. е. на комплексной плоскости, область вырождения представляет собой окружность $D = S^1$, вдоль которой меняется фаза j (вырождение состояний по фазе). На основании того, что $\pi_2(S^1)=0$, $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$, заключаем, что точечных дефектов в He^4 нет; в то же время линейные дефекты - вихри в He^4 - будут устойчивыми особенностями с целочисленными топологическими инвариантами.

Действительно, скорость течения сверхтекучей компоненты He^4 выражается через градиент фазы $v_s = (\hbar/m) \nabla\phi$, где m - масса атома He^4 . Циркуляция скорости выражается через изменение фазы dj при обходе линии вихря по произвольному замкнутому контуру g и равна $(2\pi\hbar/m)\delta\phi$. Однозначной волновая функция F будет лишь при условии, что изменение фазы $\delta\phi = 2\pi N$, где $N \in \mathbb{Z}$, т. е. имеет место квантование циркуляции скорости при обходе вокруг линии вихря. Поскольку $dj=2\pi N$ при обходе по любому сколь угодно малому контуру g , это означает, что сама фаза не может быть однозначно определена на линии вихря, т. е. это действительно особая линия. Именно в силу квантования циркуляции интенсивность вихря лишена возможности уменьшаться непрерывным образом под действием вязкости. С другой стороны, запрещено возникновение вихрей с произвольной циркуляцией. Всё это и обеспечивает незатухающий характер сверхтекучего движения в He^4 . Значению $N = 0$ соответствуют безвихревые, или потенциальные, течения He^4 . Топологические свойства сверхпроводников совпадают со свойствами сверхтекучего He^4 .

Ситуация с топологически стабильными дефектами в He^3 более сложная, т. к. параметром порядка в этом случае является комплексный тензор 2-го ранга A_{ik} , $i, k = 1, 2, 3$. Это, в частности, есть отражение того факта, что в отличие от бозе-жидкости He^4 , He^3 является ферми-жидкостью, допускающей существование анизотропных сверхтекучих фаз. Для В-фазы He^3 пространство

вырождения D топологически эквивалентно $SO(3) \otimes U(1)$.

Вычисления гомотопических групп $p_2(D)=0$

$\pi_1(D) = \pi_1[SO(3)] + \pi_1[U(1)] = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ указывают на

то, что в В-фазе He^3 отсутствуют топологически стабильные точечные дефекты, а линейные дефекты - вихри - характеризуются набором из двух топологических чисел.

Для А-фазы He^3 пространство $D = S^2 \otimes SO(3) / \mathbb{Z}_2$. Это

означает, что пространство $S^2 \otimes SO(3)$ - двулистное накрытие

D , а, следовательно, односвязное пространство $S^2 \otimes SU(2)$ -

четырёхлистное накрытие D . В итоге для гомотопических групп

пространства вырождения параметра порядка А-фазы имеем $\pi_2(D) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(D) = \mathbb{Z}_4$, т. е. в А-фазе He^3 точечные дефекты

характеризуются целочисленным топологическим инвариантом, а для вихрей топологический инвариант будет вычетом по модулю 4.

Подобная структура фаз и топология дефектов предполагается и в нейтронных звёздах.

Динамика многомерных Т. с.

Топологический анализ дефектов даёт лишь качественные ответы и необходимые критерии существования стабильных Т. с. типа наличия изоморфизмов $p_k(D) = \mathbb{Z}$ для пространств вырождения параметров порядка. При этом в роли параметров порядка могут фигурировать скалярные, комплексные, векторные и в общем случае тензорные поля. Количественное описание Т. с. основывается на построении, как правило, нелинейных динамических моделей, обладающих следующими свойствами:

(а) уравнения Эйлера - Лагранжа модели допускают регулярные локализованные решения с конечными динамическими

характеристиками (энергией, импульсом, моментом импульса и т. д.);
 (б) состояния наделяются нетривиальными топологическими характеристиками Q (зарядами, индексами и т. д.);
 (в) функционал энергии модели оценивается снизу через топологический инвариант $Q: \mathcal{E} > cf(Q), c = const$, что обеспечивает динамическую устойчивость $T. c$.

В и х р и Н и л ь с е н а - О л е с е н а (H. V. Nielsen, P. Olesen, 1973).
 Динамическое описание линейных дефектов типа вихря возможно, например, в рамках т. н. абелевой калибровочной модели Хиггса (P. W. Higgs, 1964; см. Хиггса механизм) с калибровочной группой $U(1)$ и лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (D_\mu \varphi)^* D_\mu \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi - a_0^2)^2, \quad (7)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2$; $*$ означает комплексное сопряжение,
 $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ - тензор напряжённости электро-магнитного поля,
 $D_\mu \varphi(x) = (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi(x)$ - ковариантная производная, $a_0 = const$.
 Комплексное хиггсовское поле $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ можно рассматривать, например, как параметр порядка сверхпроводящей среды, а пространство вырождения в этом случае совпадает с многообразием классических вакуумов $|j|^2 = a_0^2$, т. е. $D = S^1$. На этом основании можно предположить наличие стабильных $T. c$ типа вихрей, т. к. $\pi_1(D) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.
 Уравнения Эйлера - Лагранжа для (7)

$$\begin{aligned} \partial^\nu F_{\mu\nu} &= \frac{ie}{2} (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) + e^2 A_\mu \varphi^* \varphi, \\ (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi &= -\lambda\varphi(\varphi\varphi^* - a_0^2) \end{aligned} \quad (8)$$

действительно допускают вихревые решения, т. н. вихри Нильсена - Олесена, на статических цилиндрически-симметричных полевых конфигурациях

$$A_0 = A_3 = 0, \quad A_i(x_1, x_2) = \varepsilon_{ij} \frac{B(\rho)}{\rho}, \quad i, j = 1, 2, \quad (9)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = f(\rho) \exp \{i\chi(\theta)\}.$$

где $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $q = \text{arctg}(x_2/x_1)$. Естественное условие отсутствия токов на бесконечности $\partial^\mu F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ влечёт в силу (8) и (9) $A_i \rightarrow -(1/e) \partial_i \chi(\theta)$. В результате магнитный поток F через плоскость (x_1, x_2) запишется как

$$\Phi = \int d^2x F_{12} = \oint_{\gamma} dx^i A_i(x) = -\frac{1}{e} \oint_{\gamma} dx^i \partial_i \chi.$$

Требование однозначной определённости поля Хиггса j выполнено тогда (и только тогда), когда при обходе линии вихря по любому замкнутому контуру γ фаза χ изменяется на $2\pi N$, следовательно,

$$\Phi = \frac{1}{e} [\chi(2\pi) - \chi(0)] = \frac{2\pi N}{e}; \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В результате магнитный поток оказывается квантованным (без привлечения какого-либо постулата о квантовании) с квантом потока $2\pi/e$. Аналогичное свойство присуще вихрям магнитного потока в сверхпроводниках 2-го рода (см. Решётка вихрей Абрикосова) (с заменой $e \rightarrow 2e$ в силу Купера эффекта), т. к. в статическом пределе абелева модель Хиггса сводится к Гинзбурга-Ландау теории сверхпроводимости.

Вихри с N квантами магнитного потока описываются решениями вида (9) уравнений (8), которые при $s=Nq$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} f(\rho) \right] - \left[\left(\frac{N}{\rho} - eB \right)^2 + \lambda (f^2 - a_0^2) \right] f = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho B) \right] - \left(e^2 B - \frac{eN}{\rho} \right) f^2 = 0.$$

Из требования конечности энергии, приходящейся на единицу длины вихря, выводится асимптотическое поведение функций $f(r)$ и $B(r)$ на пространственной бесконечности:

$$f(\rho) \rightarrow a - \mu \exp(-\rho/\xi); \quad B(\rho) \rightarrow (N/e\rho) + \eta \exp(-\rho/\delta),$$

где m, h - константы, $\xi \equiv 1/(a_0 \sqrt{\lambda})$ - длина когерентности, задающая масштаб изменений скалярного поля, $\delta \equiv ea_0$ - глубина проникновения (характерный масштаб для магнитного поля). Т. о., вне линии вихря $f(r)$ и $B(r)$ экспоненциально убывают с увеличением расстояния. Помимо точного (чисто калибровочного) решения $f(r)=a_0$,

$B(r)=(N/e\rho)$ известны лишь численные решения уравнений (10). По величине безразмерного параметра Гинзбурга - Ландау

$$k = \delta/\xi = \sqrt{\lambda}$$

сверхпроводники можно разбить на два класса:

условием $k < 1/\sqrt{2}$ выделяются сверхпроводники первого рода; при

$k > 1/\sqrt{2}$ имеем сверхпроводники второго рода. Устойчивые вихри характерны лишь для сверхпроводников 2-го рода, т. к. при

$k < 1/\sqrt{2}$ между вихрями возникают силы притяжения, под

действием которых они коллапсируют. Напротив, при $k > 1/\sqrt{2}$ между вихрями возникают силы отталкивания, приводящие к образованию треугольных решёток с единичными (несущими один квант магнитного потока) вихрями в узлах. Поскольку при

$k > 1/\sqrt{2}$ энергия (на единицу длины) N -вихревой конфигурации $\mathcal{E}_N > N\mathcal{E}_1$, $N > 1$, где \mathcal{E}_1 - энергия (на единицу длины) единичного вихря, то такая конфигурация оказывается неустойчивой и распадается на N отдельных единичных вихрей, что и подтверждается экспериментом. (В сверхтекучих жидкостях, по аналогичным причинам, устойчивыми и наблюдаемыми являются лишь

вихри с единичным топологическим числом.) В случае $k = 1/\sqrt{2}$ уравнения (10) редуцируются к системе 1-го порядка:

$$\frac{df}{d\rho} = \left(\frac{N}{\rho} - eB \right) f, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho B) = -\frac{e}{2} (f^2 - a_0^2).$$

Из (11) для энергии N -вихря, т.е. вихря, несущего N квантов магнитного потока, выводится следующее выражение через энергию единичного вихря: $\mathcal{E}_N = N\mathcal{E}_1$, что свидетельствует об отсутствии взаимодействия между вихрями при $k = 1/\sqrt{2}$.

В и х р и Б е л а в и н а - П о л я к о в а (А. А. Белавин, А. М. Поляков, 1975) - Т. с., обнаруженные в т. н. нелинейной $O(3)$ -модели \mathbf{n} -поля $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \{n^a(\mathbf{x}, t), a=1, 2, 3; \mathbf{x} \in R^2\}$, где n^a - действительные скалярные поля, подчинённые условию

$$n_a n^a = \sum_{a=1}^3 n_a^2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad (12)$$

т.е. со значениями на сфере S^2 . Динамика модели задаётся лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n}, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (13)$$

и уравнением связи (12). Уравнения Эйлера - Лагранжа находятся как условие экстремума действия для (13), где связь (12) учтена введением множителя Лагранжа, в итоге для статических полей имеем

$$\nabla^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{n}) \mathbf{n} = 0.$$

Состояния с нулевой статической энергией $\mathcal{E} = 0$ ("классические вакуумы"), где

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^2 x \partial_i \mathbf{n} \cdot \partial_i \mathbf{n}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

получаются из условия $\delta \mathcal{L} = 0$ т.е. для всех $\mathbf{x} \in R^2$ поле $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_0$ где \mathbf{n}_0 - некоторый фиксированный единичный вектор с произвольной ориентацией. Иными словами, модель содержит вырожденное непрерывное семейство "классических вакуумов", переводимых друг в друга преобразованиями (вращениями) из группы $O(3)$, т.е. пространство вырождения $D = S^2$. Солитонные решения с ненулевой, но конечной энергией (14) - Т. с. - должны удовлетворять граничным условиям

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{n}_0 \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

в силу которых пространство R^2 пополняется бесконечно удалёнными точками и эффективно компактифицируется $R^2 \cup \{\infty\} \simeq S^2$, т. е. Т. с. следует искать среди отображений $\mathbf{n}(\mathbf{x}): S^2 \rightarrow S^2$. Такие отображения классифицируются группой $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ с определённым значением топологического заряда

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \varepsilon_{ik} \mathbf{n} \cdot [\partial_i \mathbf{n} \partial_k \mathbf{n}], \quad i, k = 1, 2, \quad (15)$$

где скалярное и векторное произведения относятся к векторам \mathbf{n} , ε_{ik} - Леви-Чивиты символ. Из тождества

$$\int d^2x \{ (\partial_i \mathbf{n} \pm \varepsilon_{ik} [\mathbf{n} \partial_k \mathbf{n}]) \cdot (\partial_i \mathbf{n} \pm \varepsilon_{ij} [\mathbf{n} \partial_j \mathbf{n}]) \} \geq 0$$

с учётом (14), (15) находится оценка для энергии T . с.:

$$\mathcal{E} \geq 4\pi |Q|, \quad (16)$$

обеспечивающая его устойчивость в каждом гомотопическом классе. В случае равенства в (16) минимум энергии (14) реализуется на решениях т.н. уравнений Богомольного (Е. Б. Богомольный, 1976)

$$\partial_i \mathbf{n} = \pm \varepsilon_{ik} [\mathbf{n} \partial_k \mathbf{n}], \quad (17)$$

которые в координатах стереографической проекции

$$\omega_1 = \frac{2n_1}{1-n_3}, \quad \omega_2 = \frac{2n_2}{1-n_3}$$

представляют собой условия Коши - Римана:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \mp \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}.$$

Т. о., любая аналитическая функция $w(z)$ или $w(z^*)$ где

$\omega = \omega_1 + i\omega_2$, $z = x_1 + ix_2$, записанная в переменных n^a и x , удовлетворяет уравнениям (17). Например,

$$\omega(z) = [(z - z_0)/\lambda]^N \quad (18)$$

описывает Т. с. нелинейной $O(3)$ -модели с топологии, зарядом $Q=N$ т.н. N -вихри Белавина - Полякова. Здесь l -любое действительное число, n - любое положительное целое число, z_0 - произвольное комплексное число. Считая поле \mathbf{n} спиновой переменной, нелинейную $O(3)$ -модель можно рассматривать как вариант Гейзенберга модели планарного магнетика. Статические решения (18) в $(2+1)$ -измерениях переносятся и на случай $O(3)$ -модели в $(1+1)$ -измерениях, где они реализуются как инстантоны. В $(3+1)$ измерениях для возможных Т.с.- неособых кольцевых вихрей с единичным индексом Хопфа - при выборе функционала энергии \mathcal{E} в виде (14) не имеет места оценка (16) и $\mathcal{E} \sim R$, где R - радиус кольца. Следовательно, минимум энергии достигается при $R \rightarrow 0$, что свидетельствует о нестабильности кольцевого вихря. Ситуация исправляется, напр., добавлением в (13) членов более высокого порядка по градиентам \mathbf{n} -поля.

Г о р о н ы Р ы б а к о в а (Ю. П. Рыбаков, 1981) - Т. с. в виде замкнутых "закрученных" струн с нетривиальным индексом Хопфа-реализуются в т.н. модели Фаддеева (Л. Д. Фаддеев, 1973) для \mathbf{n} -поля в $(3+1)$ -измерениях, где $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ -поле определено на $R^3 \otimes R^1$ и подчинено условиям

$$|\mathbf{n}| = 1, \quad n^a(\infty, t) = \delta_3^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad \text{в силу которых его}$$

можно представить как отображение $\mathbf{n}: S^3 \rightarrow S^2$. Соответственно \mathbf{n} -полевые конфигурации классифицируются элементами группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Лагранжиан модели

$$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon^2}{4} f_{\mu\nu}^2 + \lambda^2 (\partial_\mu n^a)^2 - m^2 (1 - n_3), \quad (19)$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

где ε, λ, m - постоянные параметры,

$$f_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{abc} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b n^c \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu.$$

Массовый член $m^2 (1 - n_3)$ добавляется в (19) для обеспечения требуемого асимптотич. поведения полей на бесконечности. Топологич. инвариант модели - индекс Хопфа Q_H вычисляется по ф-ле

$$Q_H = -\frac{1}{(8\pi)^2} \int (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) d^3 x, \quad \mathcal{B} = \text{rot } \mathcal{A}, \quad (20)$$

и для энергии имеет место оценка

$$\mathcal{E} > \varepsilon \lambda (4\pi)^2 \sqrt{2} 3^{3/8} |Q_H|^{3/4},$$

обеспечивающая стабильность неособых вихрей в рамках модели Фаддеева (19). Минимум энергии реализуется на аксиально-симметричной конфигурации (тороне), k -ую удобно записывать в угловых переменных b, g на S^2 : $b=b(r, z)$, $g=la+u(r, z)$, где l - целое число, r, a, z - цилиндрич. координаты, $u(r, z)$ - нек-рая новая переменная, и для регулярных решений $\beta \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Это свидетельствует о тороидальной структуре $T. c.$ в модели Фаддеева, представляющих собой замкнутые "закрученные" струны (или неособые кольцевые вихри). Математическое существование таких $T. c.$ доказано, однако не известно ни одного точного решения ур-ний поля модели. Подобные локализованные структуры возникают в изотропных маг-нетиках, в физике элементарных частиц (модель тяжёлых мезонов), в астрофизике и т. д. [8].

Монополи Хоофта - Полякова (G. 't Hooft, А. М. Поляков, 1974) возникают как Т. с. в $(3+1)$ измерениях при обобщении калибровочной модели Хиггса (7) на случай неабелевой калибровочной группы, напр. группы $SU(2)$ (см. Магнитный монополи, Калибровочные поля). Лагранжиан выбирается в виде (7) со след. изменениями:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c; \quad D_\mu \varphi \rightarrow D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a +$$

$+ e\varepsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c$; вместо комплексного рассматривается изовекторное хиггсовское поле $f^a(x)$, $a = 1, 2, 3$. Т.с. реализуются как сферически-симметричные статические конфигурации вида

$$A_0 = 0, \quad A_i^a = \varepsilon_{aij} x_j \frac{1-g(r)}{er^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (21)$$

$$\varphi^a = -x^a \frac{h(r)}{er^2}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},$$

где функции $g(r)$, $h(r)$ находятся как решения системы:

$$r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} = g(g^2 - 1) + gh^2, \quad (22)$$

$$r^2 \frac{d^2 h}{dr^2} = 2hg^2 + \frac{\lambda}{e^2} (h^3 - e^2 a_0^2 r^2),$$

отвечающие следующему поведению калибровочного A^a_i и изовекторного f^a полей на границе R^3 :

$$A_i^a \rightarrow \varepsilon_{aib} \frac{r^b}{er^2}; \quad B_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \rightarrow \frac{r_i}{er^3}; \quad (23)$$

$$\varphi^a \rightarrow a_0 \frac{r^a}{r}; \quad D_\mu \varphi^a \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Выбор нетривиальных условий (23), с одной стороны, обеспечивает конечность энергии δ , с другой - позволяет полям $j^a(x)$ принимать различные направления (во внутреннем изотопическом пространстве, см. Изотопическая инвариантность) в бесконечно удалённых точках, т. к. $\varphi_a \varphi^a \rightarrow a_0^2$. Поскольку граница пространства R^3 может быть отождествлена с "пространственной" сферой S^2 , а поля $\varphi^a(\infty)$ принимают значения на "полевой" сфере S^2 , то естественно рассматривать их как регулярные отображения, классифицируемые группой $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Топологический инвариант модели в этом случае связан с магнитным зарядом монополя, что подтверждается с помощью калибровочно инвариантного тензора электро-магнитного поля t' Хоффа

$$F_{\mu\nu} = n^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e} \varepsilon^{abc} n^a D_\mu n^b D_\nu n^c; \quad n^a = \frac{\varphi^a}{|\varphi|}, \quad (24)$$

который на конфигурации (21) равен $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} x_k / er^3$, а магнитное поле $B_k = x_k / er^3$ в точности совпадает с полем точечного монополя с магнитным зарядом $q_m = 1/e$. В отличие от электродинамики Максвелла тензор (24) имеет дуальный тензор с ненулевой дивергенцией и, как следствие,

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{1}{2e} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial^\nu n^a \partial^\rho n^b \partial^\sigma n^c = \frac{4\pi}{e} J_\mu. \quad (25)$$

Видно, что $(1/e)J_m$ имеет смысл магнитного тока, в то время как J_m - топологический ток. Действительно, из (25) следует, что магнитное поле B подчиняется уравнению $\nabla B = 4\pi J_0 / e$, откуда по теореме Гаусса - Остроградского получаем соотношение между топологическим инвариантом Q [для отображений из $S^2 \rightarrow S^2$ он называется и н д е к с о м К р о н е к е р а (L. Kronecker)] и магнитным монопольным зарядом $q_m: q_m = Q/e$. Т. о., магнитный заряд

монополя имеет топологическую природу, а его квантование возникает как чисто классический эффект.

Точные решения системы (22) известны лишь для одиночного монополя в пределе $\lambda \rightarrow 0$ - т.н. пределе Прасада-Соммерфилда (М. К. Prasad, С. Н. Sommerfield, 1975), при фиксированных e , a_0 , и равны:

$$g(r) = \frac{ear}{\text{sh}(ear)}; \quad h(r) = \frac{ear}{\text{th}(ear)} - 1.$$

В этом пределе для энергии модели справедлива оценка и равенство в (26) достигается на решениях уравнений Богомольного

$$F_{ij}^a = \varepsilon_{ijk} D_k \varphi^a,$$

описывающих конфигурации с минимальной энергией при любом значении Q . Из (26) следует, что монополи

должны обладать массой $M_m = 4\pi a_0 / e$, которая растёт с уменьшением константы взаимодействия e и по оценкам должна

быть порядка 10^{16} ГэВ. При $\lambda \neq 0$ возможность существования T , с

подтверждена лишь прямыми вариационными методами (Ю. С. Тюпкин, В. А. Фатеев, А. С. Шварц, 1976) и численными расчётами.

Помимо монопольных решений модель допускает т. н. д и о н ы Джулия - Зи (В. Julia, А. Zee, 1975), т.е. объекты с электрическим и магнитным зарядами. Физически монополи предсказываются теорией Великого объединения и могут выступать в роли катализатора распада протона - эффект Каллана - Рубакова (В. А. Рубаков, 1981; С. G. Callan, 1982), но до сих пор не обнаружены экспериментально.

$$\mathcal{E} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} (F_{ij}^a - \varepsilon_{ijk} D_k \varphi^a)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{ij}^a D_k \varphi^a \right\} \geq \frac{4\pi a_0}{e} |Q|, \quad (26)$$

Другими известными примерами *T. c.* в $(3 + 1)$ измерениях являются инстантоны и скирмионы. И н с т а н т о н ы обнаружены (А. А. Белавин, А. М. Поляков, Тюпкин, Шварц, 1975) как частицеподобные решения в евклидовом, чисто калибровочном варианте лагранжиана предыдущей модели, т.е. когда в отсутствие полей Хиггса, Янга - Миллса поля A_m рассматриваются в мнимом времени. Пространство-время Минковского при замене $t \rightarrow iX_0$, где x_0 - вещественная переменная, эквивалентно евклидову 4-мерному пространству. Термин "инстантон" (от англ. instant - мгновенный, немедленный; момент) предложен т-Хоофтом для обозначения *T. c.*, которые, в отличие от вышеописанных солитонов, локализованы не только в пространстве, но и во времени. В силу своих особых свойств инстантоны могут осуществлять мгновенные переходы между полями с разной топологией, что имеет существенное значение в процессах перестройки вакуумов в квантовой хромодинамике и других калибровочных теориях.

С к и р м и о н ы - *T. c.* нелинейной сигма-модели со спонтанно нарушенной киральной симметрией, предложенной Т. Х. Р. Скирмом (Т. Н. R. Skyrme, 1961; см. Скирма модель). Изначально скирмионы предназначались для описания барионов как протяжённых локализованных структур с нетривиальным топологическим зарядом

Q (типа степени отображения $S^3 \rightarrow S^3$), который интерпретировался как барионное число. При этом модель Скирма оказалась достаточно удачным и простым прообразом эффективной мезонной теории (пока неизвестной и труднодоступной), к которой должна сводиться теория сильных взаимодействий (квантовая хромодинамика) в низкоэнергетическом секторе. В рамках этой достаточно простой модели удаётся удовлетворительным образом описывать как спектроскопию основных состояний адронов, так и их взаимодействия. Позже выяснилось, что на основе модели Скирма и её модификаций, таких, как модель Скирма - Мантона (N. S. Manton, 1987), можно получать разумные ответы как в высокоэнергетической физике адронов, так и при описании плотной ядерной материи. В частности, можно получить оценку для плотности энергии ядерной материи

$$\rho \geq \frac{1}{2\lambda^2} (2\pi^2 n)^{2/3} + \varepsilon^2 (2\pi^2 n)^{4/3},$$

где $\rho_g = \mathcal{E} / V$, $n = |N| / V$ - плотность числа частиц, V - объём, занимаемый материей, l , e -параметры модели.

Оценка хорошо согласуется с выводами теории кварк-глюонной плазмы. Другим предсказанием модели является то, что по мере уплотнения системы изолированных скирмионов они вначале образуют гранецентрир. кубическую решётку с некоторой постоянной a' , затем скирмионы начинают расширяться, теряют свою индивидуальность, и при дальнейшем уплотнении происходит фазовый переход системы в конденсированное состояние. При этом имеет место эффект уменьшения энергии (массы), приходящейся на один скирмион, достигающий предельного значения при некотором $a'=a'_0$.

Одной из наиболее привлекательных особенностей модели Скимма является реализованный в её рамках механизм построения фермионных состояний (нуклонов) из бозонных полей (мезонов), т.н. явление *Ферми - Бозетрансмутац ии*. В связи с этим термин "скирмион" (предложен В. И. Санюком, 1981) приобрёл расширенный смысл - так называются теперь любые $T. c.$, возникающие как частицеподобные решения в чисто бозонных теориях поля, но подчиняющиеся статистике Ферми - Дирака после квантования, т. е. характеризующиеся полуцелым спином. Более того, развитие этой идеи показало, что возможны $T. c.$ с произвольным дробным значением спина, подчиняющиеся т. н. промежуточным статистикам (см. Парастатистика). Такие $T. c.$ известны также под назв. *ан и оны* (от англ. any - всякий, любой). Термин предложен Ф. Вилчеком (F. Wilczek, 1982) и отражает факт допустимости практически любого дробнозначного спина у таких частиц, которые используются в моделях высокотемпературной сверхпроводимости (см. Оксидные высокотемпературные сверхпроводники). В теории квантового Холла эффекта также рассматриваются $T. c.$ с дробным спином под названием "холлоны", в гравитации - "геоны" и т. д.

T. c. с дробным спином.

Проиллюстрируем появление $T. e.$ с дробным спином на примере $(2+1)$ -мерной нелинейной s -модели, обсуждавшейся ранее в связи с вихрями Белавина - Полякова [уравнения (12), (13)] Топологический

заряд модели (15) можно представить как $Q = \int d^2x J^0$, где J^0 - временная компонента сохраняющегося независимо от динамики модели топологического тока

$$J^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \varepsilon_{abc} n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c. \quad (27)$$

Закон сохранения $\partial_\mu J^\mu = 0$ позволяет переписать ток (27) в виде ротора от некоторого вспомогательного калибровочного поля A_m :

$$J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda. \quad (28)$$

Далее, вместо (13) можно записать лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\lambda} (\partial_a n^a)^2 - \frac{m}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda + g A_\mu J^\mu$$

(g -некоторая константа взаимодействия), из которого соотношение (28) получается как уравнение Эйлера - Лагранжа в отношении A_m , если считать данное поле независимым. В подходящей калибровке (например, $\partial_i A_i = 0$) интегрирование по вспомогательному (не динамическому) полю A_m приводит к эффективному действию

$$S = \frac{1}{2\lambda} \int d^3x \{ (\partial_a n^a)^2 - \Theta A_\mu J^\mu \}, \quad (29)$$

где $d^3x \equiv d^2x dt$; $\Theta = g^2/2m$ - вещественный параметр, возникающий в (29) как коэффициент при топологическом члене, в котором легко узнать индекс Хопфа (20), переписанный в виде

$Q_H = - \int d^3x A_\mu J^\mu$. Действия вида (29) известны в калибровочных теориях (в частности, в квантовой хромодинамике)

под названием "*Q*-действие". Его происхождение связано с локальной калибровочной инвариантностью гамильтонианов в таких теориях, вследствие чего собственные функции для заданного значения энергии определяются с точностью до постоянного сдвига фазы.

Соответственно гильбертово пространство теории разбивается на секторы, нумеруемые непрерывным параметром *Q*, и в каждом из них есть своё вакуумное состояние ("*Q*-вакуум") и построенные над ним "*Q*-миры". Эти "*Q*-миры" не сообщаются друг с другом в силу суперотбора правил, однако связь между ними возможна за счёт инстантонного туннелирования.

Формально топология, член в (29) аналогичен члену Черна (Чжэня)-Саймонса (*S. S. Chern, J. Simons, 1971*) в топологических квантовых теориях поля, и именно его присутствие обеспечивает наличие дробноязычного полного утл. момента (и, соответственно, спина) в моделях такого рода. При нечётном числе измерений пространства-времени *d* можно задать т. н. д е й с т в и е Ч е р н а - С а й м о н с а S_{CS} как интеграл от *d*-формы по *d*-мерному пространственно-

$$M_d: S_{CS} = \int_{M_d} \omega_d,$$

временному многообразию M_d так что S_{CS} не зависит от пространственно-временной метрики и является инвариантом в отношении диффеоморфизмов многообразия M_d . В простейшем нетривиальном случае $d=3 = 2+1$ и 3-форма ω_3 (см. Дифференциальная форма) выражается через 1-формы связности $A = A_\mu(x) dx^\mu$ в виде

$$\omega_3 = \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A^3 \right),$$

что даёт для действия Черна - Саймонса выражение (с подходящим нормировочным коэффициентом)

$$S_{CS} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{M_d} d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{Tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{3} A_\mu [A_\nu, A_\lambda] \right). \quad (30)$$

В силу соотношений (27) и (28) ясно, что (30) можно переписать через компоненты \mathbf{n} -поля в некоей фиксированной калибровке и понимать индекс Хопфа в действии (29) как член, описывающий эффектдално действие между фундаментальными \mathbf{n} -полями. Используя действие Черна- Саймонса типа (29), удаётся получить описание аномалий в калибровочных теориях, в частности в квантовой хромодинамике. Рассматривая стандартное действие для полей Янга - Миллса с добавленным членом Черна - Саймонса, описывают массивные векторные бозоны - "топологические массивные калибровочные теории" с "топологической массой", индуцируемой S_{CS} . Если действие для полевой теории выбирается просто в виде действия Черна - Саймонса типа (30), то такие свободные от метрики теории, получившие название "топологические теории поля", оказываются точно решаемыми, обладают более широкими группами симметрии и по этой причине активно используются в современной. теориях струн (см. Струн теория), суперструн, супергравитации, в конформных теориях поля, в теории узлов и т. д.

Вернёмся к идее экзотических спинов и статистик, где определяющую роль играет наличие в действии (29) члена Черна - Саймонса (30). Будем адиабатически поворачивать T . с. на угол 2π за период времени T . В результате такого поворота волновая функция приобретает множитель $\exp(iS)$, где S -соответствующее классическое действие. Полный угловой момент T . с. J определяется соотношением $\exp(iS) = \exp(2\pi iJ)$, и для стандартного действия s -модели

[первый член в формуле (29), имеющий порядок $1/T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$] получаем $J = 0$. Простые выкладки показывают, что для действия $(2+1)$ -мерного T . с. в виде (29) полный угловой момент

$$J = N + \frac{\Theta}{2\pi} Q_H^2,$$

где Q_H -индекс Хопфа, $N \in \mathbb{Z}$ - целочисленное значение стандартного орбитального углового момента, в то время как второй член свидетельствует о том, что спин T . с. принимает дробные значения. Значение Q определяется, как правило, из феноменологических соображений, индекс Хопфа принимает только целочисленные

значения, поэтому при $Q/\pi=2N$ спин T с. будет целым, при $Q/\pi=2N+1$ -полуцелым, во всех др. случаях - дробнозначным.

14. Топологические группы

Введение

Теория топологических групп в самом широком понимании включает в себя в известном смысле всю теорию абстрактных групп (под видом групп/дискретных), теорию групп Ли, теорию представлений групп. Это весьма обширные, самостоятельные разделы, имеющие тесные связи с другими областями математики и требующие самостоятельного обозрения. По этой причине они не включаются в настоящий обзор. Из теории топологических абелевых групп мы включили сюда лишь отдельные факты, представляющие интерес в связи с необходимостью освещения тех или иных ситуаций в общей теории топологических групп. Таким образом, и теория абелевых групп здесь не представлена отдельным разделом, хотя это было бы крайне желательным. Теория, абелевых групп, включая теорию топологических абелевых групп, заслуживает самостоятельного обзора.

Здесь мы охватываем следующие темы: общая теория топологических групп, строение локально компактных групп, теория обобщенных нильпотентных и обобщенных разрешимых топологических групп, теоремы типа Силова, теория групп с условиями конечности. Этот план обусловлен самим развитием теорий топологических групп. Значительные достижения в теории топологических групп, приведшие к положительному решению знаменитой пятой проблемы Гильберта, дали средства для детального изучения топологической и алгебраической структуры локально компактных групп. К этому же времени было накоплено большое число фактов по теории абстрактных нильпотентных групп, разрешимых групп и их обобщений с различными дополнительными условиями, например, типа условий конечности (к ним ОТНОСЯТСЯ условия обрыва цепей подгрупп, конечность ранга, конечность класса сопряженных элементов и др.). Как сами результаты, так и методы этой ветви общей теории групп не могли не отразиться и на развитии теории топологических групп. Они доставили новые, оказавшиеся достаточно сильными, средства, которые ПОЗВОЛИЛИ глубже проникнуть в природу тех или иных классов топологических групп. Различные условия, являющиеся разумными аналогами соответствующих условий конечности абстрактных групп, естественным образом стали накладываться на

топологические разрешимые, нильпотентные и другие группы, что позволяло часто получать весьма ценные сведения о свойствах и строении их.

Мы будем придерживаться терминологии, принятой Н. Бурбаки. Вместо распространенного в русской математической литературе термина «бикомпактность», введенного П. С. Александровым и П. С. Урысоном, будем пользоваться словом «компактность». Это не может привести к недоразумениям, так как всегда, за весьма редким исключением, компактность понимается именно в этом смысле.

Примем также следующие соглашения:

1. Пусть Π —некоторое множество простых чисел. Элемент g топологической группы G называется Π -элементом, если для любой окрестности U единицы группы G найдется конечный набор $\Pi(U) = \langle p_1, p_2, \dots, p_s \rangle$ простых чисел из Π , зависящий, вообще говоря, от U , со следующим свойством: Пусть $M = \{m\}$ — совокупность всех целых чисел, представимых в виде $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$, где a_i — положительные целые числа $p_i \in \Pi(U)$, $i = 1, 2, \dots, s$. Тогда ПОЧТИ все элементы g^m , $m \in M$, принадлежат окрестности U . В частности, если Π состоит из одного простого числа p , то элемент g называется p -элементом. Если каждый элемент из G является Π -элементом, то G называется Π -группой (соответственно p -группой, если Π состоит из одного простого числа p).
2. Пусть G и Γ — две топологические группы и каждый элемент γ из Γ — автоморфизм группы G . Тогда Γ называется группой автоморфизмов G , если отображение $(\gamma, g) \rightarrow \gamma(g)$, $\gamma \in \Gamma, g \in G$, пространства $\Gamma \times G$ на G непрерывно.
3. Топологическая группа G называется проективно-лиевой, если в любой окрестности её единицы найдется замкнутый нормальный делитель, факторгруппы по которой — группа Ли.
4. Через G_0 будем обозначать связную компоненту топологической группы G .

14. 1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

14.1.1. Обобщенные топологические группы

Для всякой топологической группы G функция $\Phi(x, y) = x^{-1} \cdot y$ является непрерывным отображением пространства $G \times G$ на G (x и y пробегают G). При этом пространство G вполне регулярно. Ослабление

требования непрерывности отображения $\varphi(x, y)$ по обоим аргументам одновременно существенно сказывается на топологии пространства G . Если, например, требовать непрерывности функции на G

$$\psi(x) = \varphi(x, a) = x^{-1} \cdot a$$

при каждом $a \in G$, то обстоятельства заметно изменяются.

А именно, существуют топологические группы в новом, обобщенном смысле, пространства которых удовлетворяют первой аксиоме отделимости, но не являются хаусдорфовыми пространствами. Такие обобщенные топологические группы все же имеют много общих черт с обычными. Для таких групп изучаются свойства компонент связности, связность коммутанта при условии связности самой группы, рассматриваются упорядоченные локально компактные группы и др.

Представляется интересным выяснение тех условий топологического характера, которые обеспечивают непрерывность функции $\varphi(x, y)$, если она непрерывна по каждому аргументу. Подходом к решению этой задачи является известная работа, в которой показано, что если G — регулярное пространство со счетной базой и второй категории и G — группа, в которой умножение непрерывно по каждому сомножителю, то G — топологическая группа.

14.1.2. Гомоморфизмы топологических групп

Под гомоморфным отображением топологической группы G в топологическую группу H мы будем понимать алгебраически гомоморфное непрерывное отображение (непрерывное представление).

Отметим некоторые результаты, относящиеся к свойствам гомоморфизмов. Ван Эст рассматривал проблему продолжения гомоморфизмов. Пусть U — локальная топологическая группа, V — локальная подгруппа топологической группы H и $\varphi: U \rightarrow V$ — гомоморфное отображение U в V . При каких условиях можно вложить локальную группу U в топологическую группу G так, чтобы гомоморфизм φ мог быть продолжен до гомоморфизма Φ группы G в H ? При этом накладываются требования: а) G и H порождаются с помощью U и V соответственно; б) $\ker \varphi = \ker \Phi = N$; в) φ — эпиморфизм. Проблема, вообще имеет отрицательное решение.

С помощью построенной теории когомологий для локальных групп показывается, что группа G с гомоморфизмом Φ всегда найдется для некоторой симметричной окрестности W единицы, $W \subset V$, и ее прообраза $\varphi^{-1} W$, если группа H 1) связна и локально стягиваема или же 2) компактна, связна и центр $Z(N)$ группы N имеет ограниченное кручение, и, кроме того, если группы $H^i(H; Z(N)) = 0$, $i = 1, 2$

(здесь имеются в виду сингулярные когомологии в случае 1) и когомологии Александра — Спаньера в случае 2)).

Варапулос указывает на одно достаточное условие непрерывности алгебраического гомоморфизма. Пусть φ — отображение топологической группы G в топологическую группу H . Оно называется непрерывным по последовательности (sequentially continuous), если из $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty, x_n, x_0 \in G$, следует $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0)$.

Если φ — алгебраический гомоморфизм G в H , непрерывный по последовательностям, G и H — локально компактны и кардинальное число $|G|$ борнологично, то φ — гомоморфизм.

Дадли указал на условия, при которых всякий алгебраический гомоморфизм будет непрерывным. Пусть на группе H , рассматриваемой алгебраически, можно ввести такую неотрицательную целочисленную функцию $p(x), x \in H$, что 1) $p(xy) \leq p(x) + p(y)$, 2) $p(x^{-1}) = p(x)$, 3) $p(1) = 0$, 4) $p(x_n) \geq \max\{n, p(x)\}$ для всех $x, y \neq 1$ из H . Группа H в этом случае называется нормируемой, а функция $p(x)$ нормой. Например, всякая свободная группа нормируема.

Оказывается, что если G — полная метрическая группа или же локально компактная группа, а топологическая группа H нормируема, то любой алгебраический гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ будет непрерывным.

Отсюда следует, что ни компактные, ни связные полные метрические, ни связные локально компактные группы не могут иметь нетривиальных гомоморфизмов ни в какую нормируемую группу.

Ввиду этого любая свободная, и даже любая нормируемая группа не может иметь локально компактную или же полную метрическую топологию, отличную от дискретной. Этот вывод, по-видимому, допускает другие, более краткие доказательства.

14.1.3. Теоремы вложения

Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — два класса топологических групп, класс \mathfrak{B} определяется свойством, с какой-либо точки зрения достаточно выпукло характеризующим строение групп этого класса (например, таким свойством как связность, или полнота и т. д.). Важно знание условий, при которых каждая группа класса \mathfrak{A} вложима в качестве подгруппы в некоторую группу класса \mathfrak{B} определенным, заранее предписанным способом.

Если класс \mathfrak{B} определяется свойством «компактность»,

то часто говорят о вложимости данной группы G в группу из \mathfrak{B} в таком точном смысле:

Существует пара (ρ, \hat{G}) , состоящая из компактной группы \hat{G} и гомоморфизма ρ группы G на всюду плотную подгруппу из \hat{G} . Причем, для всякого гомоморфизма ζ группы G на всюду плотную подгруппу некоторой компактной группы H найдется, и притом единственный, гомоморфизм η группы \hat{G} на H , что $\zeta = \eta \circ \rho$.

Такое вложение в компактную группу реализуется пополнением группы G относительно такой равномерной структуры \mathfrak{U} , которая предкомпактна и совместима с групповой структурой G .

Ясно, что вопрос о возможности определения на данной абстрактной, группе G нетривиальной топологии тесно связан с вложимостью её в те или иные классы топологических групп.

Можно показать (Комфорт и Росс), что любая бесконечная абелева группа G алгебраически изоморфна со всюду плотной недискретной подгруппой метризуемой локально-компактной группы. Отсюда вытекает ранее полученный результат о возможности недискретной топологизации произвольной бесконечной абелевой группы.

Несколько иначе ставят вопрос о вложимости и решают его Гартман и Мыцельский. Они показали, что всякая топологическая группа изоморфна замкнутой подгруппе некоторой линейно связной и локально линейно-связной группы.

Г. И. Кац обобщил одну теорему М. И. Граева о вложимости, показав, что имеет место теорема: Для того чтобы топологическая группа могла быть топологически изоморфно вложена в топологическое прямое произведение некоторой системы групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, необходимо и достаточно, чтобы она обладала квазиинвариантным базисом.

При этом топологическая группа называется группой с квазиинвариантным базисом, если для любой окрестности V её единицы можно найти не более, чем счетную систему окрестностей единицы $V_n \subset V, n = 1, 2, \dots$, что для любого $g \in G$ найдется такой номер n , что $g^{-1}V_n g \subset V$.

Ввиду того, что связные локально компактные группы оказываются обладающими квазиинвариантным базисом, отсюда вытекает такой факт о вложимости: Каждая связная локально компактная группа является замкнутой подгруппой прямого произведения связных локально компактных групп с первой аксиомой счетности.

Лунстра указал на одно необходимое и достаточное условие для того, чтобы компактная топологическая группа G определенным образом

была вложима в прямое произведение ΠG_α топологических групп G_α , точнее — являлась так называемым F — подпрямым произведением заданного семейства топологических групп $G_\alpha, \alpha \in A$. Здесь F — топологическая группа, а F — подпрямое произведение G определяется так:

Пусть для любого $\alpha \in A$ задан открытый гомоморфизм φ_α группы G_α на F . Подгруппа G из ΠG_α СОСТОИТ ИЗ всех таких элементов $g \in \Pi G_\alpha$, что $\varphi_\alpha(g_\alpha)$ совпадают при всех α .

14.1.4. Стрoение некоторых специальных классов групп

Чжу выделяет класс групп G (автор называет их связанными), определяемых свойством: Для всякой нетривиальной циклической подгруппы N из G найдется такое компактное подмножество B , что $G = BN = NB$. Всякая топологическая группа с этим свойством принадлежит к одному из следующих четырех типов: 1) компактная группа; 2) аддитивная группа целых чисел; 3) аддитивная группа вещественных чисел; 4) не локально компактная группа, всякая открытая подполугруппа которой содержит единицу. Группы, последнего типа изучены мало.

Сходный результат, исключая случаи 1) и 4) и характеризующий группы типа 2) и 3) получил Чжу.

Пусть G — локально компактная группа, не содержащая ни одной нетривиальной компактной подгруппы. Если в G существуют такая циклическая подгруппа N и такое компактное подмножество B , что $G = NB$, то G изоморфна либо аддитивной группе целых чисел, либо аддитивной группе действительных чисел. Здесь обе группы понимаются в их естественной топологии. Группа N целых чисел, помимо этой естественной дискретной топологии, допускает много различных недискретных топологий. Укажем на один способ недискретной топологизации ее. Пусть T — одномерная торовидная группа и t — произвольный элемент бесконечного порядка из T . Отображение

$$\varphi_t: n \rightarrow nt, n \in N,$$

— алгебраический изоморфизм N на подгруппу из T . Пусть R_t — топология группы N , при которой φ_t — топологический изоморфизм. Она недискретна. Топология R_t слабее топологии R_s в том и только том случае, когда найдется такое целое число m , что $t = ms$. Топологии R_t и R_s совпадают только при $t = s$ или $t = -s$.

14.2. ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

14.2.1. Интеграл и среднее значение на топологических группах и их применение

Теории интеграла и меры на локально компактных группах посвящено большое число работ различных авторов (Хьюитт, Макбет, Мюллер, Цудзи и др.). В них изучаются оценки и соотношения между мерами различных подмножеств группы. Босек рассматривает соотношение между квазиинвариантными мерами и мерой Хаара.

Бек показывает, что всякая подполугруппа компактной группы G открыта и замкнута, если она содержит подмножество положительной меры (относительно меры Хаара). Если же еще группа G коммутативна, то всякая её максимальная подполугруппа, не являющаяся группой, не измерима. Гельмберг на множестве всех замкнутых подгрупп компактной группы G вводит компактную топологию, используя пространство всех мер на G в их слабой топологии.

Вводится понятие интеграла на вполне несвязных группах со значениями в поле p -адических чисел.

Большое значение имеет понятие обобщенного интеграла и среднего на топологических группах, особенно в связи с вопросами расщепляемости расширений групп.

Теории расширений локально компактных групп и расщепляемости этих расширений посвящена работа Серра. Здесь мы осветим некоторые результаты, напомнив сначала необходимые определения и факты.

Пусть топологическая группа G обладает замкнутым нормальным делителем A . В некоторых случаях в группе G имеется такая подгруппа H , что $G = AH$ и отображение $(a, h) \rightarrow ah$, $a \in A$, $h \in H$, пространства $A \times H$ на G является гомеоморфизмом. Тогда говорят, что группа G , или, — это одно и то же, — расширение A с помощью G/A , расщепляется над A . Подгруппа H называется дополнением A . Весьма важно знать, при каких обстоятельствах данное расширение группы расщепляемо, а также при каких условиях все дополнения сопряжены.

В теории групп известна расщепляемость расширений в следующих случаях:

1. Пусть G — коичная группа, A — инвариантная подгруппа её, причем порядки A и G/A взаимно просты. Если A разрешима, то G расщепляема и все дополнения подгруппы A сопряжены (теорема Шура — Цассенхауза).

2. Пусть в топологической группе G существует инвариантная конечномерная векторная подгруппа A , факторгруппа G/A по которой компактна. Тогда G расщепляется над A и все дополнения подгруппы A сопряжены (теорема Ивасава).

Общей причиной расщепляемости в обоих этих случаях, а также в других известных случаях, является наличие среднего значения M на семействе Δ всех непрерывных функций, определенных на G/A со значениями в A .

Следуя мемуару Гофмана и Мостерта, охватывающему многие факты о расщепляемости расширений, мы приведем определение среднего значения в следующем общем виде:

Пусть G — топологическая группа, A — её замкнутая инвариантная подгруппа, $\Delta = \Delta(G, A)$ — семейство отображений факторгруппы G/A в A , обладающее топологией равномерной сходимости на компактных множествах (почти для всех рассматриваемых случаев достаточно считать Δ состоящим из непрерывных отображений с компактными носителями).

Пара (G, A) называется допускающей среднее на Δ , если найдется отображение M семейства Δ в A , действие которого будем обозначать через $M(f)$ или через $M_x(f(x))$, где $f \in \Delta$,

которое обладает следующими свойствами:

1) M непрерывно.

$$2) M_x(f(x) \cdot g(x)) = M_x(f(x)) \cdot M_x(g(x)).$$

3) M перестановочен с автоморфизмами группы A , т. е.

$$M_x(\alpha f(x)) = \alpha M_x(f(x)) \text{ для любого автоморфизма } \alpha \text{ группы } A.$$

4) $M_x(f(yx)) = M_x(f(x))$ для любого y из G/A (инвариантность).

5) $M_x(f(x)) = a$, если $f(x) = a$ для всех $x \in G/A$, т. е. если f — отображение в точку (нормируемость).

Если среднее M удовлетворяет только условиям 1) — 4), то оно называется интегралом.

Можно доказать ряд общих теорем о расщепляемости группы при наличии среднего. Такова, например, теорема:

Пусть G — топологическая группа и A — замкнутая инвариантная подгруппа её, факторгруппа G/A по которой компактна. ЕСЛИ пара (G, A) допускает среднее и имеется непрерывное сечение $G/A \rightarrow G$, то G расщепляется над A .

С их помощью выводится расщепляемость расширений при

различных конкретных ситуациях. В частности, получается расщепляемость в случаях Шура и Ивасава. Ряд предложений о расщепляемости получил Гофман, используя новую, весьма общую формулировку понятия среднего.

Прежде, чем привести их, коснемся некоторых фактов об абелевых группах.

Пусть A — абелева топологическая группа и Π — некоторое множество простых чисел. Группа A называется строго Π -делимой, если существует такой базис \mathfrak{u} окрестностей нуля группы A , что для любого $p \in \Pi$ верно включение

$$\underbrace{U + U + \dots + U}_p \subseteq pU = \{pu \mid u \in U\}$$

для каждой окрестности U из \mathfrak{u} .

К строго Π -делимым группам относятся, например, топологические абелевы группы, являющиеся полными группами без кручения и локально изоморфные локально выпуклым топологическим векторным пространствам.

МОЖНО показать, что

1) Вполне несвязная компактная абелева группа тогда и только тогда строго Π -делима, когда группа её характеров не имеет p -элементов для любого простого числа p из Π .

2) Всякая локально компактная абелева строго p -делимая (здесь Π состоит из одного простого числа p) группа изоморфна прямому произведению векторной группы и вполне несвязной строго p -делимой группы.

Теперь сформулируем следующую теорему, охватывающую теорему Шура — Цассенхауза (для случая абелевого нормального делителя) и теорему Ивасава:

Пусть топологическая группа G обладает замкнутой локально компактной инвариантной подгруппой A , факторгруппа G/A по которой компактна. Допустим, что выполнены следующие условия: 1. $(G/A)/(G/A)_0$ — Π -группа для некоторого множества простых чисел Π (Π может быть и пустым множеством); 2. A — строго Π -делимая абелева группа, если Π не пусто, и A — векторная группа, если Π — пустое множество. 3. Существует непрерывное сечение $(G/A_0)/(A/A_0) \rightarrow G/A_0$. Тогда группа G расщепляется над A и все дополнения сопряжены.

Некоторое ослабление условий дает следующую теорему о расщепляемости. Пусть топологическая группа G обладает замкнутой локально компактной инвариантной абелевой подгруппой A с компактной факторгруппой G/A . Если для некоторого множества

простых чисел Π подгруппа A строго Π -делима, а G/A — вполне несвязная Π -группа, то G расщепляется над A .

Отметим еще два предложения:

1. Пусть G — локально компактная группа с абелевым радикалом, A — замкнутая инвариантная абелева подгруппа, факторгруппа G/A по которой односвязна. Пусть Γ — компактная группа автоморфизмов группы G , относительно которой A инвариантна: $\Gamma A = A$. Тогда группа G расщепляется над A с дополнением H , инвариантным относительно Γ : $\Gamma H = H$.

2. Пусть G — локально компактная группа и A — связная замкнутая инвариантная подгруппа с односвязной факторгруппой G/A , которая либо полупроста, либо изоморфна одномерной векторной группе. Пусть Γ — компактная группа автоморфизмов G и $\Gamma A = A$. Тогда группа G расщепляется над A с дополнением, инвариантным относительно Γ .

Здесь радикалом группы называется наибольшая связная разрешимая инвариантная подгруппа. Если радикал тривиален, группа называется полупростой.

Расщепляемость расширений топологических групп во многом зависит от наличия непрерывных сечений для замкнутых инвариантных подгрупп.

Глисон, Мостерт, а затем Карубе и Нагами рассматривали вопрос о наличии локальных сечений для замкнутых подгрупп локально компактных групп. Нагами получил положительное решение его для произвольных замкнутых подгрупп локально компактной группы,

14.2.2. Строение локально компактных групп

Для топологических пространств наиболее известными являются следующие три определения размерности:

1. Размерностью по покрытиям $\dim R$ топологического пространства R называется наименьшее из таких натуральных чисел n , что во всякое открытое покрытие R можно вписать замкнутое покрытие кратности $\leq n+1$.

2. Малая индуктивная размерность. То же пространство имеет размерность $\text{ind } R \leq n$, если для любой точки $x \in R$ и любой ее окрестности O_x найдется такая ее окрестность $V_x \subset O_x$, что $\text{ind } F, V_x \leq n-1$; для пустого множества Λ принимается $\text{ind } \Lambda = -1$.

3. Большая индуктивная размерность. Пространство R имеет размерность $\text{Ind } R \leq n$, если для любого замкнутого подмножества N из R и любой его окрестности OH существует такая окрестность

$VH \subset OH$, что $\text{Ind } F, VH \leq n - 1$; $\text{Ind } \Lambda = -1$

В случаях 2 и 3 в качестве $\text{ind } R$ и $\text{Ind } R$ берутся также наименьшие натуральные числа с соответствующими свойствами. Размерность во всех случаях считается бесконечной, если таких натуральных чисел нет. Для топологических пространств, вообще говоря, эти три размерности не совпадают.

Если же R — факторпространство G/H локально компактной группы G по ее замкнутой подгруппе, то, как установил Б. А. Пасынков, имеет место совпадение всех трех размерностей: $\dim R = \text{ind } R = \text{Ind } R$. Одновременно с ним А. В. Архангельский также доказал совпадение $\dim G$ и $\text{ind } G$ для любой локально компактной группы G . Эти размерности совпадают с ЧИСЛОМ $D(G)$, равным наибольшей размерности куба, который можно вложить в пространство G . Несколько позже тот же результат иным способом получил А. В. Зарелуа.

Б. А. Пасынкову и Карубе принадлежит теорема: Пусть G — локально компактная группа и H и F — такие её замкнутые подгруппы, что $H \supset F$. Тогда $\dim G/F = \dim G/H + \dim H/F$.

К вопросу о размерности локально компактных групп относится также работа Нагами. В ней он повторяет некоторые ранее полученные результаты Б. А. Пасынкова.

Для метрических пространств размерности n известно, что они могут быть топологически вложены в евклидов куб размерности $2n+1$. Кажется вероятным, что пространство локально компактных групп со счетным базисом может быть вложено в евклидово пространство, размерность которого меньше $2n+1$. Для абелевых групп ЭТО действительно так. Всякую n -мерную локально компактную абелеву топологическую группу со счетным базисом можно вложить в $n + 2$ -мерное евклидово пространство в качестве подпространства. Еще раньше (1940 г.) Кодайра и Абе показали, что компактную связанную абелеву группу со счетным базисом можно вложить в $n + 1$ -мерное евклидово пространство тогда и только тогда, когда она совпадает с n -мерной торовидной группой. Таким образом, число $n+2$ в теореме М Богнара не может быть снижено.

Бесконечномерным группам и однородным пространствам посвящена заметка Е. Г. Скляренко, ОСНОВНОЙ теоремой которой является: Пусть G — бесконечномерная локально компактная группа, H — её замкнутая подгруппа, факторпространство по которой $R = G/H$ бесконечномерно. Тогда R сильно бесконечномерно. Более того, пространство R содержит гильбертов параллелепипед.

При этом, по определению П. С. Александрова, пространство называется СИЛЬНО бесконечномерным, если в нем существует такая

счетная система пар $A_i, B_i, i = 1, 2, \dots$, замкнутых множеств, $A_i \cap B_i = \Lambda$, что для любой системы замкнутых множеств C_i разделяющих A_i и B_i имеет место $\bigcap C_i \neq \Lambda$.

П. С. Александровым был поставлен вопрос об изучении диадических бикомпактов, т. е. таких пространств, которые являются непрерывными образами обобщенного канторова дисконтинуума $D^{\mathfrak{c}}$.

Сказалось, что пространство всякой компактной группы — непрерывный образ некоторого обобщенного канторова дисконтинуума. Этот результат получен независимо Л. Н. Ивановским и В. И. Кузьминым. Далее Л. Н. Ивановский распространил этот результат на компактные факторпространства локально компактных групп. Несколько раньше диадичность пространства компактной абелевой группы показал Н. Я. Виленкин.

Как показал В. И. Кузьмин, пространство бесконечной вполне несвязной компактной группы гомеоморфно $D^{\mathfrak{c}}$.

Отметим здесь же, что пространство вполне несвязной локально компактной группы гомеоморфно прямому произведению дискретного пространства и пространства $D^{\mathfrak{c}}$. Это вытекает из теоремы В. И. Кузьмина вследствие того факта, что во всякой вполне несвязной локально компактной группе имеется открытая подгруппа.

Топологическое строение нульмерных факторпространств такое же : Нульмерное факторпространство локально компактной группы гомеоморфно прямому произведению дискретного пространства и некоторого пространства $D^{\mathfrak{c}}$.

Подробному изучению топологического строения локально компактных групп и их факторпространств посвящена статья Е. Г. Складярево, в которой главное внимание уделяется конечномерному случаю. Основное значение в ней имеет следующая теорема, объединяющая и представляющая в нужном свете разные факты:

Пусть G — проективнолиева локально компактная группа, θ — наименьшее порядковое число, для которого в группе G существует фундаментальная система окрестностей единицы мощности θ .

Существует такая последовательность $\{G_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$ локально компактных групп G_α занумерованных всеми порядковыми числами $1 \leq \alpha \leq \theta$, и

гомоморфизмов $\pi_\beta^\alpha : G_\alpha \rightarrow G_\beta, \beta < \alpha$, что

1) π_β^α является открытым гомоморфизмом, причем если

$$\gamma < \beta < \alpha, \text{ то } \pi_\gamma^\alpha = \pi_\gamma^\beta \cdot \pi_\beta^\alpha.$$

2) G_1 — группа Ли; $G_\theta = G$; ядро гомоморфизма π_1^θ компактно.

3) Для всякого $\alpha < \theta$ ядро

$N_{\alpha+1}$

гомоморфизма $\pi_{\alpha}^{\alpha+1}$ является компактной группой Ли.

4) Для каждого предельного порядкового числа $\alpha \leq \theta$ имеем

$$G_{\alpha} = \varprojlim_{\gamma} \{G_{\beta}, \pi_{\gamma}^{\beta} : \gamma < \beta < \alpha\}.$$

Такую последовательность групп будем, следуя Л. С. Понтрягину, называть рядом Ли группы G .

Пусть H — замкнутая подгруппа группы G и $B = G/H$. Полагаем $H_{\alpha} = \pi_{\alpha}^{\theta} H$, $B_{\alpha} = G_{\alpha}/H_{\alpha}$. Для всякого α подгруппа H_{α} является замкнутой подгруппой в G_{α} ; гомоморфизмы π_{β}^{α} индуцируют отображения $\varphi_{\beta}^{\alpha} : B_{\alpha} \rightarrow B_{\beta}$.

Последовательность пространств B_{α} вместе с φ_{β}^{α} удовлетворяют условиям:

1') φ_{β}^{α} — открыто замкнутое собственное отображение (отображение называют собственным, если прообраз всякого компактного множества компактен) B_{α} на B_{β} , причем если

$$\gamma < \beta < \alpha, \text{ то } \varphi_{\gamma}^{\alpha} = \varphi_{\gamma}^{\beta} \cdot \varphi_{\beta}^{\alpha}$$

2') B_{θ} — многообразие; $B_{\theta} = B$.

3') Для всякого $\alpha < \theta$ отображение $\varphi_{\alpha}^{\alpha+1}$ является локально тривиальным расслоением, слоем которого является компактное многообразие $M_{\alpha+1}$.

4') Для всякого предельного $\alpha \leq \theta$ имеем

$$B_{\alpha} = \varprojlim_{\gamma} \{B_{\beta}, \varphi_{\gamma}^{\beta} : \gamma < \beta < \alpha\}.$$

Если факторпространство B конечномерно в каком-либо смысле, то ряд Ли $\{G_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}\}$ группы G можно выбрать так, чтобы во всех расслоениях $\varphi_{\alpha}^{\alpha+1}$ СЛОИ $M_{\alpha+1}$ были нульмерны (т. е. состояли из конечного числа точек). Это можно выразить так: если B конечномерно, то в G имеется компактный нормальный делитель Y такой, что G/Y — группа Ли и множество YH/H нульмерно.

Используя это, Е. Г. Складенко получает новые доказательства приведенных выше теорем Б. А. Пасыкова, В. И. Кузьмина и др.

Так, например, результат Л. Н. Ивановского следующим образом обобщается на локально компактные факторпространства:

Факторпространство локально компактной группы является замкнутым образом прямого произведения дискретного пространства на некоторое пространство D^{τ} .

Из известной теоремы Мостерта вытекает, что пространство всякой локально компактной группы распадается в топологическое произведение нульмерной группы на компоненту единицы. Аналогичное утверждение имеет место для факторпространств: Всякое факторпространство B локально компактной группы гомеоморфно топологическому произведению $N \times D^r \times B_0$, где N — дискретное множество, D^r — обобщенный канторов дисконтинуум, B_0 — связное факторпространство некоторой проективнолиевой группы. Если же B совпадает с локально компактной группой G , то $G = N \times D^r \times E^n \times G_0$, где E^n — евклидово пространство размерности n ; G_0 — произвольная „максимальная компактная связная подгруппа в G (как известно, любые две такие подгруппы сопряжены).

Показано, что если R — связное конечномерное факторпространство локально компактной группы, то вес R не превосходит мощности континуума. Вместе с тем, всякая связная конечномерная локально компактная группа имеет счетный вес.

На пути к решению пятой проблемы Гильберта было получено много результатов, глубоко вскрывающих строение (главным образом локальное) локально компактных групп. На основании исследований Глисона, Ямабе и др. доказывается следующая теорема, теорема А): Для любой локально компактной группы G и любой окрестности её единицы U найдется такая открытая окрестность V единицы, которая содержится в U и распадается в прямое произведение связной локальной группы Ли L и компактной группы B . При этом если группа G не является вполне несвязной, то V можно выбрать так, что при любом разложении указанного вида локальная группа Ли L имеет положительную размерность. ..

Это компактно-лиево (локальное) разложение группы G .

Одна и та же локально компактная группа обладает, вообще говоря, многими неизоморфными компактно-лиевыми разложениями. В связи с этим В. М. Глушков вводит следующее определение:

Компактно-лиево разложение $B \times L$ группы G называется минимальным, если не существует такого компактно-лиевого разложения $D \times M$ этой группы, что $B \subset D$, а M — собственная локальная подгруппа локальной группы L . Для таких минимальных локально-лиевых разложений имеет место однозначность в следующем смысле (В. М. Глушков):

У любых двух минимальных компактно-лиевых разложений одной и той же локально компактной группы G как компактные, так и лиевые компоненты локально изоморфны.

С помощью этих фактов выясняется алгебраическое строение связных локально компактных групп. Оказывается, что любая связная локально компактная группа изоморфна факторгруппе по центральной вполне несвязной подгруппе прямого произведения связной полупростой компактной группы и связной локально компактной группы, все компактные нормальные делители которой содержатся в центре. Поскольку связные локально компактные группы — проективные пределы связных групп Ли, то отсюда вытекает наличие максимально компактного нормального делителя для всякой связной локально компактной группы.

Используя связь локально компактных групп с алгебрами Ли, В. М. Глушков показал, что любая локально компактная связная группа изоморфна факторгруппе по центральной вполне несвязной подгруппе топологического прямого произведения некоторого множества связных некоммутативных простых компактных групп Ли, некоторого множества соленидов, некоторой связной односвязной группы Ли и, наконец, аддитивных групп целых p -адических чисел, взятых в конечном числе экземпляров для каждого простого числа p . Ясно, что компонента центральной вполне несвязной подгруппы в произведении вполне несвязных множителей должна быть всюду плотной.

Если ограничиться рассмотрением связных локально связных локально компактных групп, то эта теорема допускает дальнейшее уточнение:

Всякая связная локально связная локально компактная группа изоморфна факторгруппе по центральной вполне несвязной подгруппе Z группы H , разлагающейся в топологическое прямое произведение связной односвязной группы Ли, некоторого множества связных односвязных некоммутативных компактных простых групп Ли и некоторого множества одномерных векторных групп.

Во всякой локально связной локально компактной группе имеется окрестность единицы, каждый элемент которой содержится в однопараметрической подгруппе. Отсюда получается, что любая связная локально связная локально компактная группа линейно связна. Верно и обратное. Так что связная локально компактная группа тогда и только тогда линейно связна, когда она локально связна.

В центре любой связной локально компактной группы имеется хотя бы одна вполне несвязная компактная подгруппа, факторгруппа по которой линейно связна.

Для теории связных групп имеют несомненный интерес следующие факты, принадлежащие другим авторам:

А. Максимальные абелевы подгруппы связной компактной топологической группы связны и сопряжены между собой (Мыцельский).

Б. Элемент a компактной группы G принадлежит связной компоненте G_0 единицы в том и только том случае, когда уравнение $x^n = a$ разрешимо в G для всякого натурального числа n . Следовательно, компактная группа G тогда и только тогда связна, когда её абстрактная группа полная.

В. Если топологическая группа связна и её центр вполне несвязен, то компактная топология её определяется единственным образом. В заключение раздела изложим содержание двух заметок Гладиша, где вводится понятие выпуклости множеств в группах, которое является естественным аналогом понятия выпуклости в линейных топологических пространствах, и изучаются локально компактные группы с выпуклой топологией.

Пусть в группе G задана некоторая подполугруппа H . Она называется максимальной, если для любого элемента $x \in G$, не содержащегося в H , полугруппа, порожденная с помощью x и H , совпадает со всей группой G .

Допустим теперь, что G — топологическая группа и \mathfrak{H} — наименьшее семейство подмножеств, определяемое следующими свойствами:

1. \mathfrak{H} содержит все замкнутые максимальные инвариантные подполугруппы из группы G ;
2. Если $K \in \mathfrak{H}$, $x \in G$, то $xKx \in \mathfrak{H}$;
3. Если $K_\alpha \in \mathfrak{H}$ для всех α из некоторого множества A , то $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \in \mathfrak{H}$.

Множества из семейства \mathfrak{H} называются выпуклыми. Оказывается, что в действительном линейном локально выпуклом пространстве выпуклыми в этом новом смысле будут в точности линейно выпуклые замкнутые подмножества.

Доказательство этого предложения опирается на теорему, имеющую и самостоятельный интерес: в локально компактной группе борелевская инвариантная максимальная подполугруппа всегда замкнута. Заметим, что единственным выпуклым множеством в компактной связной группе является сама группа.

Определение. Топология группы G выпукла, если в любой окрестности U её единицы найдется другая окрестность V единицы с выпуклым замыканием \bar{V} .

Доказаны две теоремы:

Теорема 1. Всякая топологическая группа с выпуклой топологией коммутативна.

Теорема 2. Локально компактная связная топологическая группа обладает выпуклой топологией тогда и только тогда, когда она изоморфна конечномерной векторной группе.

Было бы интересно попытаться ослабить некоторые условия теоремы 2.

14.2.3. Локально ограниченные группы

Подмножество A топологической группы G называется ограниченным, если для любой окрестности V единицы группы найдется конечное подмножество K из G такое, что

$$A \subset \cup_{x \in K} V$$

Группа G называется локально ограниченной, если найдется ограниченная окрестность U единицы группы.

Если сама группа G является множеством ограниченным, то G называется ограниченной.

Локально ограниченные (ограниченные) группы родственны локально компактным (компактным) группам. Очевидно, что всякая подгруппа локально компактной (компактной) группы — локально ограниченная (ограниченная) группа. Известно также, что всякая локально ограниченная группа вложена в качестве всюду плотной подгруппы в некоторую локально компактную группу, а всякая ограниченная — в компактную группу (А. Вейль).

Показано, что всякая ограниченная топология счетной абелевой группы нульмерна.

Кистер изучал локально ограниченные группы G с таким дополнительным свойством:

(UC) всякая непрерывная функция с действительными значениями на G равномерно непрерывна.

Из его исследований, в частности, вытекает, что всякая локально компактная группа со свойством (UC) либо дискретна, либо компактна.

14. 3. ОБОБЩЕННЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

Пусть G — топологическая группа. Выберем в ней произвольное подмножество элементов $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$. Будем через $\{x_1, x_2, \dots, x_s, \dots\}$ обозначать минимальную замкнутую подгруппу X , содержащую все эти элементы $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$. X называют подгруппой, порожденной с помощью элементов $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$, а сами эти элементы образующими X . Подгруппа X совпадает с замыканием подгруппы, алгебраически порожденной с ПОМОЩЬЮ $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$.

Аналогично говорят, что подгруппа X порождается системой подгрупп $X_1, X_2, \dots, X_s, \dots$, если X порождается множест-

вом всех элементов, принадлежащих $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_s \cup \dots$

Определение 1. Топологическая группа G называется нильпотентной, если её нижний центральный ряд обрывается единичной группой на некотором натуральном номере, т. е. если она нильпотентна в абстрактном смысле. Топологическая группа G называется локально нильпотентной, если она локально нильпотентна в абстрактном смысле.

Определение 2. Топологическая группа G называется разрешимой, если ряд её коммутантов обрывается единичной группой на некотором натуральном номере, т. е. если она разрешима в абстрактном смысле. Топологическая группа G называется локально разрешимой, если она локально разрешима в; абстрактном смысле.

Эти определения приведены в соответствии с установившейся традицией в общей теории групп, хотя даже и в ней встречаются иные способы определения как нильпотентности, так и разрешимости.

В 40-х и 50-х годах XX в. значительное развитие получила теория абстрактных обобщенных нильпотентных и обобщенных разрешимых групп, в том числе и теория локально нильпотентных групп.

Представлялась естественной всякая попытка использовать накопившийся к тому времени материал из этой теории для развития соответствующих разделов теории топологических групп. Одна из наиболее удачных попыток принадлежит В. М. Глушкову, развившему теорию локально компактных локально нильпотентных групп.

Как, известно, максимальная периодическая часть B всякой локально нильпотентной абстрактной группы G —инвариантная подгруппа в ней и факторгруппа G/B не имеет элементов конечного порядка.

Соответственно этому для локально компактных групп имеет место теорема:

Совокупность B всех компактных элементов локально компактной локально нильпотентной группы G составляют инвариантную замкнутую подгруппу, факторгруппа G/B по которой является чистой локально нильпотентной группой.

При этом элемент g группы G называется компактным, если он порождает компактную подгруппу $\{g\}$. Группа называется чистой, если в ней не содержится нетривиальных компактных элементов. Если же все элементы группы компактны, она называется периодической.

Если G — чистая локально компактная локально нильпотентная группа, K —связная компонента её единицы, то K содержится в гиперцентре группы G , имеющем некоторый натуральный номер.

Подгруппа K является связной ОДНОСВЯЗНОЙ нильпотентной группой Ли. Факторгруппа G/K — дискретная локально нильпотентная группа без кручения.

Известной теореме А. И. Мальцева о нильпотентности дискретной группы, обладающей возрастающим центральным рядом и с конечным числом образующих, соответствует такое предложение:

Локально компактная компактно порождаемая (т. е. алгебраически порождаемая с помощью элементов некоторого компактного подмножества) группа, обладающая возрастающим центральным рядом, нильпотентна.

Изучение произвольных периодических локально компактных локально нильпотентных групп в значительной мере сводится к нульмерному случаю, так как связная компонента единицы в каждой такой группе компактна и принадлежит центру её.

Всякая периодическая локально компактная локально нильпотентная группа содержит открытую компактную подгруппу.

В. П. Платонову и В. И. Ушакову удалось распространить основные результаты В. М. Глушкова на более широкий класс топологических групп, а именно на класс локально компактных локально проективно нильпотентных групп. Последние определяются так:

Определение 3. Топологическая группа G называется проективно нильпотентной (или иначе — нильпотентной в топологическом смысле), если для любой окрестности V её единицы найдется такая инвариантная подгруппа H , содержащаяся в V , что факторгруппа G/H нильпотентна. Группа G называется локально проективно нильпотентной, если любое конечное подмножество её элементов порождает проективно нильпотентную подгруппу.

Точно таким же образом определяются проективно разрешимые и локально проективно разрешимые топологические группы. Для этого нужно только в приведенном выше определении всюду вместо слова «нильпотентный» поставить слово «разрешимый». Локально проективно нильпотентные группы составляют более широкий класс, чем группы локально нильпотентные. Заметим, что всякая локально проективно нильпотентная; группа Ли является локально нильпотентной группой.

Локально нильпотентные дискретные группы весьма близки к группам с нормализаторным условием. В связи с этим естественный интерес представляют топологические группы, удовлетворяющие нормализаторному условию для замкнутых подгрупп. Ради простоты такие группы будем называть N -группами.

Первая работа в этом направлении принадлежит В. И. Ушакову. В ней он показал, что в отличие от групп дискретных топологические N -группы могут быть и не локально нильпотентными. Приведем его пример. Пусть $G_n (n = 1, 2, \dots)$ — бесконечная последовательность конечных групп с двумя образующими:

$$G_n = \{a_n, b_n\}, a_n^{2^{n-1}} = 1, a_n^{2^{n-2}} = b_n^2, b_n^{-1} a_n b_n = a_n^{-1}.$$

Это обобщенные группы кватернионов. Образует полное прямое произведение $G = \prod^* G_n$, и введем в G тихоновскую топологию. Можно проверить, что группа G является N -группой и, вместе с тем, не локально нильпотентна.

В. И. Ушаков доказал, что локально компактная связная группа будет N -группой тогда и только тогда, когда она нильпотентна.

Ряд результатов о топологических N -группах опубликовал В. П.

Платонов. Им построен пример компактной N -группы Ли с ненильпотентными конечными подгруппами. Значит, не всякая замкнутая подгруппа топологической N -группы будет N -группой.

Однако оказывается, что всякая замкнутая инвариантная подгруппа, а также всякая открытая подгруппа топологической N -группы будет N -группой. Очевидно, что всякая факторгруппа топологической N -группы также будет N -группой. Им доказаны следующие более глубокие теоремы:

1. N -группа Ли тогда и только тогда локально нильпотентна, когда ее дискретная подгруппа локально нильпотентна.
2. N -группа Ли тогда и только тогда является N -группой в абстрактном смысле, когда она локально нильпотентна.
3. В локально компактной N -группе G множество компактных элементов образует замкнутую инвариантную подгруппу B , факторгруппа G/B по которой — чистая локально нильпотентная N -группа Ли.

Теория топологических локально разрешимых групп разрабатывалась мало. Ниже мы к этому классу возвратимся в связи с условиями конечности. Если на локально компактную локально разрешимую группу G наложить условие связности, то такая группа G оказывается разрешимой (В. И. Ушаков). В самом деле. Пусть сначала G — компактная локально разрешимая связная группа. Она является проективным пределом групп Ли. Легко видеть, что всякая связная локально разрешимая группа Ли — разрешима, а поэтому коммутативна. Поэтому и группа G коммутативна.

Пусть теперь G — локально компактная локально разрешимая связная группа. В G найдется компактная инвариантная подгруппа N , факторгруппа G/N по которой — группа Ли. Значит, факторгруппа G/N разрешима. Если K — связная компонента единицы в N , то ввиду сказанного выше K — коммутативная группа. Известно, что в таком случае K входит в центр группы G . Вполне несвязный нормальный делитель N/K в G/K также централен. Поэтому группа G разрешима.

Аналогичный ВЫВОД можно сделать и для связной локально компактной локально проктивно разрешимой группы.

Один своеобразный класс обобщенных разрешимых топологических групп рассматривал Шёенборн в 1955 г. Из соображений полноты информации приведем некоторые сведения, взятые из его работы.

Пусть топологическая группа G обладает полной системой $\mathfrak{u} = \{U_\alpha\}$ окрестностей единицы, состоящей из инвариантных подгрупп U_α .

Допустим, что все факторгруппы $G_\alpha = G/U_\alpha$ локально конечны и локально разрешимы. ПОНЯТНО, что G будет локально проктивно разрешимой группой.

Пусть, кроме того, группа G обладает следующим свойством (это свойство автор называет линейной компактностью): Всякая центрированная система, состоящая из левых классов смежности по замкнутым подгруппам, имеет непустое пересечение.

Тогда

1. Группа G содержит абелев нормальный делитель N , факторгруппа G/N по которому компактна.
2. Если группа G , рассматриваемая абстрактно, является полной, то она коммутативна.

При доказательстве этих предложений автор использовал результаты С. Н. Черникова о дискретных локально разрешимых группах с условием минимальности для абелевых подгрупп.

14.4. ТЕОРЕМЫ ТИПА СИЛОВА

Пусть Π — некоторое множество простых чисел. Подгруппа H топологической группы G называется Π -подгруппой, если она является Π -группой в смысле, указанном во введении. Объединение возрастающей последовательности Π -подгрупп — снова Π -подгруппа. Поэтому во всякой топологической группе существуют максимальные Π -подгруппы, которые называются силовскими Π -подгруппами. Если множество Π состоит из одного простого числа p , то они называются силовскими p -подгруппами.

Далеко не всегда силовская Π -подгруппа замкнута.

Но если группа G обладает полной системой $\mathfrak{u} = \{U_\alpha\}$ окрестностей единицы, каждая из которых — инвариантная подгруппа в G , то всякая силовская Π -подгруппа замкнута в G .

Пусть H — силовская Π -подгруппа в G , \bar{H} — её замыкание и $g \in \bar{H}$. Если $U_\alpha \notin \mathfrak{u}$, то её образ H_α в $G_\alpha = G/U_\alpha$ является

Π -подгруппой. Так как G_α дискретна, то элементы из H_α имеют конечные порядки с простыми делителями из Π . Пусть g_α — образ элемента g в G_α . Так как пересечение $gU_\alpha \cap H$ не пусто, то $g_\alpha \in H_\alpha$. Значит для некоторого целого числа m с простыми делителями из Π имеем $g_\alpha^m = 1$. А поэтому g является Π -элементом, т. е. $\tilde{H} — \Pi$ -подгруппа. Следовательно, $H = \tilde{H}$, т. е. силовская Π -подгруппа замкнута.

Силовские Π -подгруппы не обязаны быть сопряженными даже для дискретных разрешимых групп.

И. Д. Иванюта рассматривал свойства силовских p -подгрупп группы всех подстановок некоторого бесконечного множества M . В этой группе S_M вводится конечная топология: базис открытых множеств в этой топологии образуют множества вида

$$\{g \in S_M : x_i g = x_i f, i = 1, 2, \dots, n\},$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — произвольно выбранное конечное подмножество из M и $f \in S_M$. Автор

построил некоторые силовские p -подгруппы топологической группы S_M и указал признак сопряженности двух таких силовских p -подгрупп.

В 1936 г. Ван Данциг доказал сопряженность силовских p -подгрупп для компактных нульмерных групп со второй аксиомой счетности. Эта теорема вытекает из следующей более общей теоремы А. Г. Куроша : Если топологическая группа G обладает полной системой окрестностей единицы, являющихся нормальными делителями, и если в G содержится компактный класс сопряженных СИЛОВСКИХ p -подгрупп, то все силовские p -подгруппы сопряжены между собой.

В. П. Платонов в сообщении указывает на новые классы групп, для которых имеет место сопряженность силовских подгрупп.

Введем теперь определение силовской базы: Множество подгрупп $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$ топологической группы G называется СИЛОВСКОЙ базой ее, если

1. P_i силовская p_i -подгруппа группы G , где p_i — попарно различные простые числа ($i = 1, 2, 3, \dots$);
2. Группа G порождается всеми подгруппами P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$);
3. Пусть Π — произвольное подмножество из множества простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$, $\Pi = [p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots]$.

Подгруппа, порожденная с помощью всех СИЛОВСКИХ подгрупп $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \dots$ соответствующих простым числам из Π , является Π -подгруппой.

Напомним, что порождаемость нами понимается в топологическом смысле,

Если G —компактная вполне несвязная локально нильпотентная группа, то всякая её силовская p -подгруппа замкнута и инвариантна, и группа G разлагается в топологическое прямое произведение всех своих силовских p -подгрупп. Значит, в этом случае группа G обладает силовской базой, притом только одной.

Болкер доказал аналог известной теоремы Холла о конечных разрешимых группах для групп топологических. А именно, он показал, что всякая компактная вполне несвязная проективно разрешимая группа G обладает силовскими базами. Всякие две такие базы сопряжены.

Силовскую базу в G можно построить так: Группа G — проективный предел множества конечных разрешимых групп G_α с частично упорядоченным множеством индексов α относительно гомоморфных отображений $\pi_{\alpha\beta}$ для $\alpha < \beta$. Гомоморфизмы $\pi_{\alpha\beta}$ подчинены условиям:

$$\pi_{\alpha\gamma} = \pi_{\alpha\beta} \pi_{\beta\gamma}, \alpha < \beta < \gamma.$$

Группа G состоит из элементов $x = [x_\alpha]$, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПОЛНЫМИ проекционными множествами.

Пусть p_1, p_2, \dots —множество всех простых чисел, перенумерованных в каком-либо порядке. По теореме Холла в группе G_β имеется силовская база

$$\mathfrak{P}_\beta : P_{1\beta}, P_{2\beta}, \dots, P_{i\beta}, \dots,$$

где $P_{i\beta}$ —силовская p_i -подгруппа (почти все $P_{i\beta}$ совпадают с 1).

Множество \sum_β таких баз конечно. Гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta$) переводит \mathfrak{P}_β в силовскую базу

$$\mathfrak{P}_\alpha : P_{1\alpha}, P_{2\alpha}, \dots, P_{i\alpha}, \dots$$

группы G_α . Таким образом, отображение $\pi_{\alpha\beta}$ индуцирует отображение $\pi_{\alpha\beta}$ конечного множества \sum_β в конечное множество \sum_α . Система

всех \sum_α и $\pi_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям леммы Куроша, Поэтому можно выделить полное проекционное множество $\mathfrak{X} = [\mathfrak{P}_\alpha]$

силовских баз, $\mathfrak{P}_\alpha = \pi_{\alpha\beta} \mathfrak{P}_\beta$ при $\alpha < \beta$. В \mathfrak{P}_α для произвольно выбранного простого числа p имеется силовская подгруппа P_α ,

которая, возможно, совпадает с 1. При этом $P_\alpha = \pi_{\alpha\beta} P_\beta$, если

$\alpha < \beta$. Система всех P и $\pi_{\alpha\beta}$ снова удовлетворяет условиям леммы Куроша. Значит для них существуют полные проекционные множества. Совокупность P их составляет замкнутую силовскую

p -подгруппу в G . Таким образом для простых чисел получается система

$$\mathfrak{P} : P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$$

силовских p_i — подгрупп, $i = 1, 2, 3, \dots$, которая и будет силовой базой группы G .

Укажем еще на следующее предложение, вытекающее из одной теоремы П. А. Гольберга: Если компактная нульмерная группа G имеет силовскую базу, обладающую конечным числом сопряженных, то все силовские базы этой группы сопряжены между собой.

14. 5. УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ В ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП, А ТАКЖЕ УСЛОВИЯ, БЛИЗКИЕ К УСЛОВИЯМ КОНЕЧНОСТИ

14.5.1. Группы с условием минимальности для подгрупп

Пусть Δ — некоторое свойство подгрупп (замкнутость, коммутативность, инвариантность, замкнутость и инвариантность и т. д.).

Мы будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для Δ -подгрупп, если любая убывающая цепочка

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_s \supset \dots$$

подгрупп, обладающих свойством Δ , обрывается на подгруппе с конечным номером.

Так, например, говорят о группе, удовлетворяющей условию минимальности для замкнутых подгрупп, или о группе, удовлетворяющей условию минимальности для замкнутых инвариантных подгрупп и т. д.

Группы дискретные (т. е. группы абстрактные) с такими условиями изучались разными авторами.

Известно, что в случае дискретных групп расширение G группы N посредством группы G/N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, если этому условию удовлетворяют N и G/N . Доказательство основывается на том, что если имеются две подгруппы

$$G_1 \neq G_2 \text{ и } G_1 \subset G_2, \text{ то либо } G_1 \cap N \neq G_2 \cap N, \text{ либо}$$

$$G_1 N \neq G_2 N. \text{ В случае топологических групп соответствующее}$$

доказательство не проходит, так как подгруппы $G_1 N$ и $G_2 N$ могут оказаться незамкнутыми. Однако, если N —компактная или же открытая подгруппа, то $G_1 N$ и $G_2 N$ замкнуты. Поэтому имеет место теорема: Если в топологической группе G инвариантная подгруппа N

компактна или открыта, то условие минимальности в N и G/N по замкнутым подгруппам влечет условие минимальности по замкнутым подгруппам в самой группе G ,

С помощью теории локально компактных абелевых групп, развитой Л. Г. Понтрягиным, легко показать, что строение локально компактной абелевой группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп таково: она разлагается в прямое произведение

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times B_1 \times B_2 \times \dots \times B_l \times C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m, \quad (\text{А})$$

где A_i — конечная циклическая группа ($i = 1, 2, \dots, k$), B_j — дискретная квазициклическая группа типа p_j^∞ , p_i — простое число ($j = 1, 2, \dots, l$), C_s — одномерная торовидная группа ($s = 1, 2, \dots, m$).

Начало широкому изучению топологических групп с условием минимальности для замкнутых подгрупп положил В. М. Глушков. Им установлен такой общий результат:

Всякая локально компактная группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп является расширением связной компактной группы Ли посредством дискретной группы, удовлетворяющей условию минимальности для подгрупп. Обратное, всякая группа такого строения локально компактна и удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.

Отсюда получается следующее обобщение известной теоремы С. Н. Черникова о дискретных локально разрешимых группах с условием минимальности для подгрупп:

Локально разрешимая локально компактная группа G с условием минимальности для замкнутых подгрупп обладает замкнутой абелевой подгруппой H конечного индекса, разложимая в прямое произведение

$$B_1 \times B_2 \times \dots \times B_l \times C_1 \times C_2 \times \dots \times C_s, \quad (\text{Б})$$

где B_j — дискретная группа типа p_j^∞ , p_i — простое число ($j = 1, 2, \dots, l$), C_s — одномерная торовидная группа ($s = 1, 2, \dots, m$).

Радикра ткости, следуя С. Н. Черникову, мы будем называть топологическую группу G экстремальной, если она обладает замкнутой инвариантной абелевой подгруппой H конечного индекса, разложимой в прямое произведение вида (Б). Тогда приведенная выше теорема может быть сформулирована так: Локально разрешимая локально компактная группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп — экстремальна.

В. С. Чарин доказал эту теорему другим методом, в котором не используется теория групп Ли. Для случая локально нильпотентных

групп В. М. Глушков получил более точный результат: Локально нильпотентная локально компактная группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп экстремальна и обладает возрастающим центральным рядом. При этом каждая ее торовидная подгруппа содержится в центре.

Для дискретных локально разрешимых групп С. Н. Черников доказал эквивалентность условия минимальности для абелевых подгрупп и условия минимальности для подгрупп.

Аналогичный результат получил В. М. Глушков для локально компактных локально нильпотентных групп, показав, что для них из условия минимальности для абелевых замкнутых подгрупп вытекает условие минимальности для замкнутых подгрупп.

Используя эти теоремы С. Н. Черникова и В. М. Глушкова, можно доказать следующую теорему :

Локально компактная локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.

Следовательно, она экстремальна.

В. П. Платонову принадлежит следующее общее утверждение:

Локально компактная группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, когда её связная компонента G_0 единицы — компактная группа Ли, а факторгруппа G/G_0 — дискретная группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп.

Известно, что для некоторых классов некоммутативных дискретных групп условие минимальности для подгрупп эквивалентно условию минимальности для инвариантных подгрупп. Это верно, например, для локально нильпотентных групп.

Остается невыясненным вопрос: будет ли всякая топологическая (и даже локально компактная) локально нильпотентная группа с условием минимальности для замкнутых инвариантных подгрупп

удовлетворять условию минимальности для замкнутых подгрупп?

Лишь для некоторых частных классов топологических локально нильпотентных групп известен положительный ответ на этот вопрос.

Например, оказалось, что всякая локально компактная группа, обладающая возрастающим центральным рядом и удовлетворяющая условию минимальности для замкнутых инвариантных подгрупп, экстремальна.

То же самое верно для локально нильпотентных компактных групп:

Пусть G — компактная локально нильпотентная группа с условием минимальности для замкнутых инвариантных подгрупп. Связная компонента G_0 её единицы содержится в центре группы G .

Факторгруппа G/G_0 разлагается в прямое произведение своих силовских p -подгрупп. Из условия минимальности для замкнутых инвариантных подгрупп сразу следует, что число множителей в этом произведении конечно, а каждый силовский множитель P удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп и, более того, конечен. Связная подгруппа G_0 является торовидной группой. Отсюда и следует справедливость утверждения.

14.5.2. Группы с условием максимальности для подгрупп

Пусть Δ — некоторое свойство подгрупп топологической группы. Мы будем говорить, что топологическая группа G удовлетворяет условию максимальности для Δ -подгрупп, если любая возрастающая последовательность подгрупп

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_s \subset \dots,$$

обладающих свойством Δ , обрывается на подгруппе с некоторым натуральным номером.

Изучение недискретных топологических групп с условиями максимальности началось, насколько нам известно, с работы В. М. Глушкова, в которой рассматривались локально компактные группы, удовлетворяющие условию максимальности для замкнутых подгрупп. В ней показано, что если в топологической группе G инвариантная подгруппа N компактна или открыта, то из условия максимальности для замкнутых подгрупп в N и в G/N следует условие максимальности для самой группы G . Всякая локально компактная группа с условием максимальности для замкнутых подгрупп — нульмерна. Строение локально компактной абелевой группы G с условием максимальности для замкнутых подгрупп таково: она разлагается в прямое произведение

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times B_1 \times B_2 \times \dots \times B_l \times C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m,$$

где A_i — конечная циклическая группа ($i = 1, 2, \dots, k$), B_j — аддитивная группа

$$I_{p_j}^+$$

кольца I_p целых p -адических чисел, p_j — простое число ($j = 1, 2, \dots, l$), C_s — дискретная бесконечная циклическая группа ($s = 1, 2, \dots, m$).

Всякая локально компактная локально разрешимая (локально нильпотентная) группа с условием максимальности для замкнутых подгрупп — разрешима (соответственно, нильпотентна).

Строение разрешимой локально компактной группы G с условием максимальности для замкнутых подгрупп в значительной мере определяется строением компактных групп с этим условием, так как в G существует открытая компактная инвариантная подгруппа H . Эта подгруппа обладает конечным нормальным рядом $1 = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n = H$, каждый фактор H_i/H_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, n$) которого либо конечен, либо изоморфен

$$I_p^+$$

аддитивной группе целых p -адических чисел по некоторому простому числу p , зависящему, вообще говоря, от номера i .

В упоминавшейся только что работе В. М. Глушкова показано также, что если локально компактная нильпотентная группа удовлетворяет условию максимальности для замкнутых инвариантных подгрупп, то она удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп. Очевидно, что это верно и для локально компактных групп, обладающих возрастающим центральным рядом.

В теории дискретных групп изучались некоторые классы групп, для которых из условия максимальности для абелевых подгрупп следовала выполнимость условия максимальности для подгрупп. Так, например, А. И. Мальцев доказал это для таких классов дискретных групп:

- 1) Локально нильпотентные группы.
- 2) Разрешимые группы.

Оказывается, что для периодических локально нильпотентных локально компактных, а также для периодических разрешимых локально компактных групп из условия максимальности для замкнутых абелевых подгрупп следует условие максимальности для замкнутых подгрупп.

Вместе с тем существуют локально компактные нильпотентные (и даже метабелевы) группы, удовлетворяющие условию максимальности для замкнутых абелевых подгрупп, но не удовлетворяющие условию максимальности для замкнутых подгрупп. Один из примеров групп такого рода строится так:

Сначала строится бесконечная последовательность квадратных неособенных матриц - порядка $2: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ с

коэффициентами из кольца I_p целых p -адических чисел со следующими свойствами: 1. Все они попарно неперестановочны, т. е. $a_i a_j \neq a_j a_i$, если $i \neq j$. 2. Не все элементы матрицы a_i принадлежат полю \sum_0 рациональных чисел; по крайней мере один элемент матрицы $a_i a_n - a_n a_i$ при любом $i = 1, 2, \dots, n-1$ не принадлежит полю \sum_{n-1} , полученному из \sum_0 присоединением всех элементов всех матриц a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Пусть X — аддитивная группа кольца всех матриц второго порядка над J_p . Обозначим через B подгруппу из X , алгебраически порожденную с помощью матриц $a_i (i = 1, 2, \dots)$. Пусть G — совокупность пар (b, x) , $b \in B$; $x \in X$. Определим на G операцию умножения по правилу:

$$(b, x) \cdot (b', x') = (b + b', bb' + x + x').$$

Легко видеть, что G становится группой с единицей $(0, 0)$.

Совокупность X_0 всех элементов вида $(0, x)$ составляет в ней подгруппу, изоморфную X . Если теперь систему окрестностей единицы из X_0 объявить системой окрестностей единицы в G , то получим топологическую группу с требуемым свойством.

Для того чтобы локально компактная локально нильпотентная группа G удовлетворяла условию максимальности для замкнутых подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы её главная инвариантная подгруппа Γ и факторгруппа G/Γ по ней удовлетворяли условию максимальности для замкнутых абелевых подгрупп.

При этом инвариантную подгруппу Γ топологической группы G мы называем главной, если она удовлетворяет следующим свойствам:

- а) подгруппа Γ открыта в G и G/Γ не имеет элементов конечного порядка,
- б) Γ — минимальная из подгрупп со свойством а).

14.5.3. Группы конечного специального ранга

Топологическая группа G называется группой конечного специального ранга, если найдется такое натуральное число r , что любое конечное множество её элементов g_1, g_2, \dots, g_n порождает подгруппу $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ с r образующими. Наименьшее число r с этим свойством называется рангом группы G . ЕСЛИ же такого натурального числа нет, то ранг считается бесконечным.

Ясно, что в случае дискретной группы G специальный ранг её совпадает со специальным рангом в смысле А. И. Мальцева. Ради краткости мы будем в дальнейшем опускать слово «специальный» и будем говорить просто о группах конечного ранга. Легко показать, что ранг n -мерной векторной группы равен $n+1$.

Если ранг топологической группы G конечен и равен r , то ранг ВСЯКОЙ её замкнутой подгруппы H , а также ранг всякой факторгруппы G/H (если H инвариантна в G) конечен и не превосходит r .

Пусть в топологической группе G имеется инвариантная замкнутая подгруппа H конечного ранга r , факторгруппа G/H по которой имеет

конечный ранг s . Будет ли ранг группы G конечным и не превосходящим $r+s$?

Ответ на этот вопрос положителен для следующих случаев :

1. Естественное гомоморфное отображение $\bar{G} \rightarrow G/H$ замкнуто. В частности, это имеет место тогда, когда H — компактная инвариантная подгруппа,

2, G — локально разрешимая периодическая группа. В общем случае вопрос остается открытым.

Для изучения строения локально компактных групп конечного ранга имеет некоторое значение теорема:

Локально компактная абелева группа имеет конечный ранг в том и только том случае, когда группа её характеров имеет конечный ранг. Пусть G — локально нильпотентная компактная группа. Она имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда связная компонента её единицы G_0 имеет конечную размерность, а всякая силовская p -подгруппа P факторгруппы G/G_0 нильпотентна и обладает инвариантным рядом

$$1 \subseteq P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_s = P,$$

длина которого $s+1$ ограничена в совокупности для всех простых чисел p , A — конечная p -подгруппа ранга, ограниченного одним для всех p числом, а P_{i+1}/P_i изоморфна аддитивной группе кольца целых p — адических чисел.

14.5.4. Топологические \overline{FC} -группы

В этом разделе мы изложим содержание работ В. Я. Ушакова . В них рассматривается топологические группы, являющиеся аналогами дискретных групп с конечными классами сопряженных элементов (так называемых FC -групп). Пусть G — топологическая группа и $g \in BG$. Элемент g называется FC -элементом, если класс S_g сопряженных с g элементов компактен. Группа G называется FC -группой, если любой её элемент является FC -элементом.

Элемент g называется \overline{FC} -элементом, если замыкание $\overline{S_g}$ класса S_g компактно. Группа называется \overline{FC} -группой, если все её элементы — \overline{FC} -элементы. Класс FC -групп содержится в классе \overline{FC} -групп и составляет её истинную часть. Строение локально компактных \overline{FC} -групп дается теоремой:

Пусть G — локально компактная \overline{FC} -группа. Тогда множество B всех её компактных элементов образует замкнутую инвариантную

подгруппу (периодическую часть G), факторгруппа G/B по которой является чистой абелевой группой.

В случае, когда G дискретна, из этого предложения сразу вытекает известный результат Б. Неймана об FC -группах. Для топологических групп имеет место аналог леммы Дицмана: Пусть G — локально компактная группа, K — её компактное инвариантное подмножество, состоящее из компактных элементов. Тогда подгруппа $\{K\}$, порожденная этим множеством, является компактной инвариантной подгруппой. Отсюда следует, что локально компактная группа тогда и только тогда будет периодической \overline{FC} -группой, когда она локально нормальна.

Поэтому из приведенной выше структурной теоремы вытекает, что замыкание коммутанта произвольной локально, компактной \overline{FC} -группы является локально нормальной группой.

Здесь под локально нормальной группой понимается такая топологическая группа, каждый элемент которой содержится в компактной инвариантной подгруппе. Введем еще одно определение: Топологическая группа G называется компактно порождаемой, если в G найдется компактное подмножество K , порождающее G , т. е. если $G = \langle K \rangle$. Для локально компактной группы G компактная порождаемость равносильна с компактной порождаемостью в алгебраическом смысле.

Локально компактная группа G тогда и только тогда будет компактно порождаемой \overline{FC} -группой, когда она является расширением компактной группы с помощью прямого произведения векторной группы и дискретной абелевой группы без кручения с конечным числом образующих. Отсюда можно вывести и такое свойство компактно порождаемой группы: Локально компактная компактно порождаемая группа тогда и только тогда будет \overline{FC} -группой, когда замыкание ее коммутанта компактно.

В. И. Ушаков рассматривает классы сопряженных подгрупп в топологических группах. Пусть G — топологическая группа, H — её замкнутая подгруппа, S_H — класс сопряженных с H подгрупп в G . S_H можно сделать топологическим пространством, если объявить окрестностями элемента $x^{-1}Hx$ из S_H множества U_H , состоящие из подгрупп $y^{-1}Hy$, где y пробегает всевозможные окрестности V элемента x . Доказаны теоремы:

1. Локально компактная группа G , все классы S_H сопряженных подгрупп которой компактны, является проективнолиевой \overline{FC} -группой.

2. В связной локально компактной группе G все классы сопряженных подгрупп компактны тогда и только тогда, когда факторгруппа G/Z по её центру Z компактна.
3. Всякая связная разрешимая локально компактная группа с компактными классами сопряженных подгрупп — абелева.
- Предложение 2 является аналогом теоремы Б. Неймана о дискретных группах: группа тогда и только тогда обладает конечными классами сопряженных подгрупп, когда ее фактор группа по центру конечна.
- В. И. Ушаков строит пример, показывающий, что предложение 2, вообще говоря, перестает быть верным, если отказаться от условия связности.

15. Узлы и косы

15.1. Введение

Узел галстука, узлы корабелов и альпинистов, гордиев узел, клубок змей, петля палача... Узлы — это и обиходные предметы, и символы сложности, а порой — метафоры зла. Математики их долго игнорировали. Попытка Вандермонда в конце XVIII в., наброски узлов юного Гаусса в начале XIX в. не в счёт. Только в XX в. математики всерьез взялись за дело. Но вплоть до середины 80-х гг. теория узлов оставалась всего-навсего одной из ветвей топологии: достаточно разработанная, конечно, но интересующая лишь узкий круг специалистов (в основном немецких и американских).

Сегодня это изменилось. Узлы — точнее, математическая теория узлов — интересует многих биологов, химиков, физиков. Узлы вошли в моду. На западных телеканалах о них вещают постмодернисты, со своейственными им самоуверенностью и некомпетентностью.

Выражения «квантовая группа» или «полином узла» употребляются, порой невпопад, в околонучных радио- и телепередачах. Что это?

Временная мода или яркое начало новой теории, сравнимой по значимости с квантовой физикой или геной инженерией?

Ниже приводится попытка ответить на последний вопрос. Однако в ней не будет ни однозначных оценок, ни общих выводов, а только описание конкретных фактов из красивого и загадочного мира теории узлов.

Чтобы понять приводимое ниже изложение математической теории узлов, не обязательно быть выпускником мехмата МГУ или МФТИ.

Единственные математические инструменты в этой книге — это элементарные действия с многочленами и преобразования простых диаграмм вида

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = 2 \cdot \text{Diagram 3} \quad \text{и} \quad \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} = \text{Diagram 6}.$$

При чтении книги понадобится также пространственное воображение, а если его не хватает, можно запастись шнуром и, глядя на картинки, завязывать и развязывать узлы.

Выборанный здесь путь — исключение слишком абстрактной или технически сложной математики — привел к тому, что вне рамок книги остался классический (и самый эффективный на начальной стадии) инструмент теории узлов — фундаментальная группа. Первые успехи теории, принадлежащие математикам немецкой школы Ван Кампену, Зейферту, Дену, датчанину Нильсену и американцу Александеру, были достигнуты благодаря разумному использованию этого инструмента.

Каждая глава начинается с какой-нибудь простой, но фундаментальной идеи, и далее, не вдаваясь в технические детали, показано дальнейшее развитие и значение этой идеи для современного состояния теории. Таким образом, главы расположены в некотором смысле в хронологическом порядке.

Перед обзором тем, затронутых в каждой главе, отметим, что узлы, прежде чем стать предметом математической теории, широко использовались в практической и художественной деятельности. Разумеется, это — не тема нашей книги, но небольшой разговор по этому поводу поможет проникнуться красотой реальных истоков теории.

Узел в математике — вложение окружности (одномерной сферы) в трёхмерное евклидово пространство, рассматриваемое с точностью до изотопии. Основной предмет изучения теории узлов. Два узла топологически эквивалентны, если один из них можно продеформировать в другой, причём в процессе деформации не должно возникать самопересечений.

Частным случаем является вопрос о распознавании тривиальности того или иного узла то есть о том, является ли заданный узел изотопным тривиальному узлу (можно ли его развязать).

Для определения того, является ли конкретный узел тривиальным, можно использовать различные инварианты узлов, например многочлен Александра или фундаментальную группу дополнения. Обычно их можно посчитать исходя из узловой диаграммы.

Узлы повсеместно использовались уже со времен античности. Это объясняется их важной технологической ролью, особенно в мореходстве и строительстве. Но появление веревок и узлов произошло раньше, в доисторические времена, и предшествовало изобретению топора, лука, колеса.

Сегодня мы применяем узлы, не задумываясь даже, что их возраст исчисляется тысячелетиями. Нам и в голову не приходит, что такие узлы, как выбленочный, прямой и беседочный (см. рис. 0.1), служили жителям Древнего Египта еще пять тысячелетий назад. (Например, выбленочный узел был обнаружен на двери третьего помещения гробницы фараона Тутанхамона.)

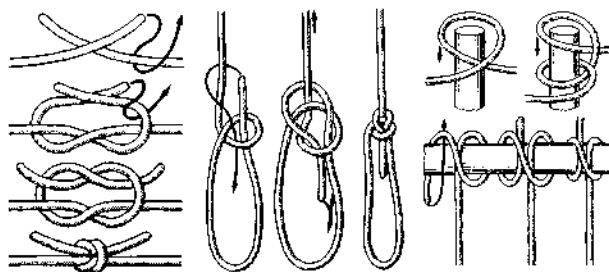


Рис. 0.1. Прямой, беседочный и выбленочный узлы

Прямой (или квадратный) узел, хорошо известный в Древнем Египте, был широко распространен в быту древних греков и римлян. Он украшал жезл древнеримского бога Меркурия — покровителя торговли — и назывался *nodus Hercules* — геркулесовым узлом, так как этот древний герой носил шкуру убитого льва, передние лапы которого связывал на груди именно так.

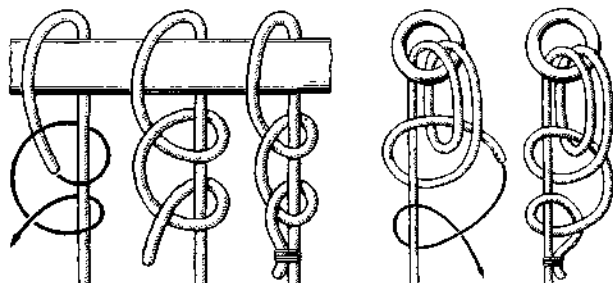


Рис. 0.2. Простой штык и рыбацкий штык

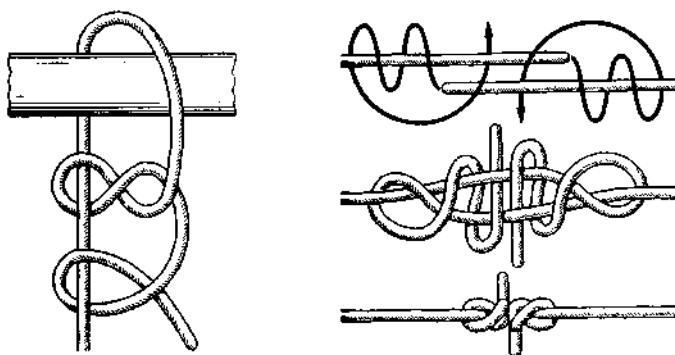


Рис. 0.3. Кочный штык и змеиный узел

Изобретателями самых хитроумных и надежных узлов оказались моряки. Ведь именно им, чаще, чем постоянным обитателям суши, приходилось иметь дело с веревками и канатами.

Лучшие из узлов пережили века, переходя от поколения к поколению (см. Adams, 1994, где приведены изображения более 700 различных узлов).

Здесь мы рассмотрим лишь несколько примеров узлов. Так, простой штык применяется для подъема грузов; рыбацкий штык (или якорный узел) признан моряками всех стран как самый надежный для прикрепления каната к якорю (рис. 0.2). Кочный штык применяется для крепления подвесных коек на судах; змеиным узлом можно накрепко связать две рыболовные снасти (рис. 0.3). На рис. 0.4 изображены два из многочисленных рыболовных узлов: акулий и лососевый.

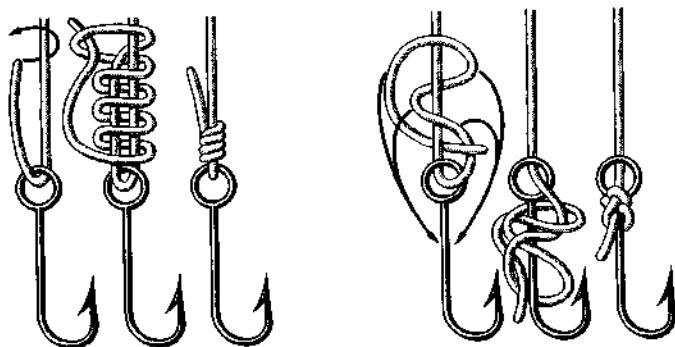


Рис. 0.4. Акулий и лососевый узлы

Одним из первых авторов сочинений про узлы был англичанин Джон Смит (John Smith), известный каждому американскому школьнику своими романтическими приключениями с прекрасной индейской принцессой Покахонтас, столь трагически для нее окончившимися. В 1627 г. он издал морской словарь, где описал некоторые узлы. Столетием позже узлы становятся объектом детальной статьи в «Энциклопедии» Дидро и Даламбера.

Много специальных узлов связано с одним из главных технологических изобретений древности — блоком. На рис. 0.5 изображен полиспаст, своего рода канатный рычаг Архимеда.

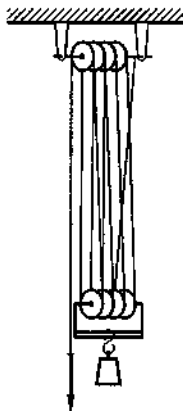


Рис.0.5 Полиспаст

Это устройство соединяет в себе два великих изобретения — колесо и канат — и применяется для подъема грузов.

Наряду с технологическими и практическими применениями, несомненно, нужно упомянуть также эстетический и магический аспекты. Скандинавские народы (возможно, в силу своей неразрывной связи с морем) особенно любили украшения в виде узлов (рис. 0.6). Их часто помещали на оружие, форштевни кораблей (рис. 0.7), применяли для создания узоров.



Рис. 0.6. Серебряная брошь



Рис. 0.7. Часть оснастки корабля 850

г. н. э.

Одно из наиболее ярких применений узлов можно увидеть в орнаментах болгарских, новгородских и московских летописей XII—XIV вв. (рис. 0.8).



Рис. 0.8. Инициалы из новгородских летописей

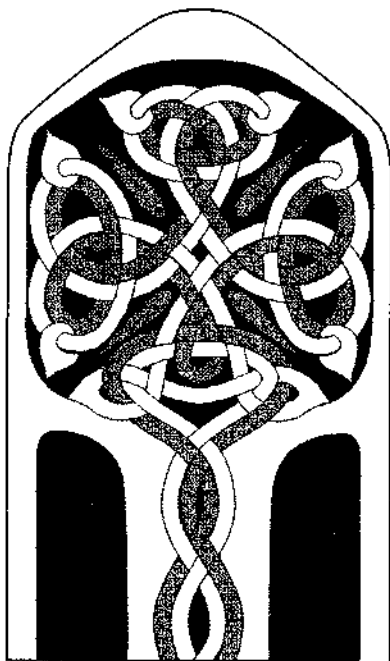


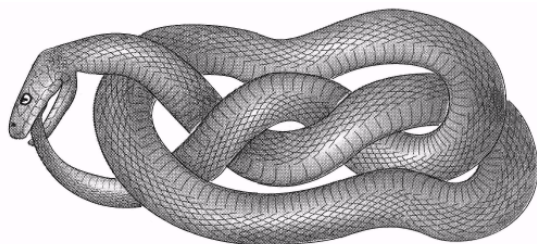
Рис. 0.9. Зацепленные ленты на менгире

Но еще раньше, в эпоху неолита, узлами украшали погребальные камни. Так, кельты изображали на своих знаменитых, дошедших до наших дней, менгирах (огромных вертикально стоящих камнях) цепочки переплетенных между собой узлов (см. рис. 0.9). Нам неизвестен культовый смысл этих узоров, однако их можно классифицировать в математическом смысле (см. Mercat, 1996).

Теория узлов остается живой и загадочной. Главные проблемы по-прежнему открыты: узлы продолжают ускользать от попыток их ясно классифицировать, и по-прежнему неизвестно, обладают ли они легко вычислимой полной системой инвариантов. И наконец, та фундаментальная роль, которую, как полагают, они играют в физике, еще до конца не определилась.

15.1. Атомы и узлы

В 1860 г. английский физик Уильям Томсон, которого мы знаем под именем лорда Кельвина, размышлял о фундаментальных проблемах, связанных со структурой материи. Его коллеги разделялись на два враждующих лагеря: одни поддерживали так называемую корпускулярную теорию, согласно которой материя состоит из атомов, мельчайших твердых *корпускул*, занимающих определенное положение в пространстве; другие представляли себе материю как наложение *волн*, пульсирующих в пространстве-времени. Каждая из этих теорий давала убедительные объяснения некоторых явлений, но была неприменима к другим. Томсон искал синтез этих теорий. И нашел его. По его мнению, материя, безусловно, состоит из атомов. Но эти атомы-вихри являются не точечными объектами, а... мельчайшими узлами (см. Thomson, 1867). Атом, таким образом, рассматривается как волна, — не расходящаяся по всем направлениям, а свернутая в узкий луч, сильно закрученный и возвращающийся к своему началу, подобно змее, кусающей себя за хвост. Эта змея может перекручиваться очень сложным образом, прежде чем себя укусит, образуя тем самым *узел*. И именно тип этого узла определяет физико-химические свойства атома.



Томсон предположил, что молекулы построены из многих атомов-вихрей, сплетенных между собой. Математическая модель такого объекта называется *зацеплением* и представляет собой конечный набор пространственных кривых, которые могут быть завязаны отдельно и/или переплетаясь друг с другом.

Эта теория покажется, без сомнения, довольно-таки фантастической читателю, изучавшему в школе планетарную модель атома (восходящую к Нильсу Бору). Но мы находимся в 1860 г., будущий нобелевский лауреат родится лишь двадцать пять лет спустя, а пока научное сообщество всерьез рассматривает революционную идею Томсона. Величайший физик того времени Джеймс Кларк Максвелл (чьи знаменитые уравнения являются фундаментом волновой теории) после некоторых сомнений все же поддержал эту идею. Он заявил, что

теория Томсона согласуется с экспериментальными данными лучше, чем любая другая.

Для дальнейшего развития теории было необходимо классифицировать узлы. Это дало бы возможность получить классификацию атомов, отождествив каждый тип узла с каким-то конкретным атомом. Три узла, представленных на рис. 1.1, — *трилистник*, *восьмерка* и *тривиальный узел* — могли бы быть моделями, скажем, атомов кислорода, углерода и водорода.

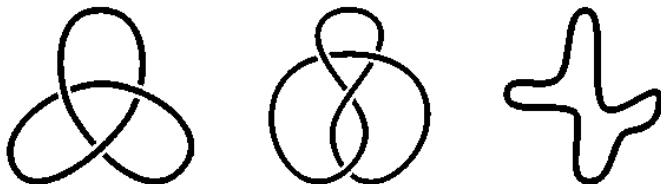


Рис. 1.1. Трилистник, восьмерка и тривиальный узел

Итак, на первый план выступила уже не физико-химическая, а математическая проблема — проблема *классификации узлов*. И шотландский физик и математик, соратник Томсона, Питер Тейт (Peter Tait) вынуждался разрешить ее.

Тейт, Киркман и первые таблицы узлов

Согласно Тейту, всякий узел, будучи замкнутой кривой в пространстве, может быть представлен плоской кривой — его ортогональной проекцией на горизонтальную плоскость. Эта проекция может иметь самопересечения (рис. 1.2) в тех точках, где одна часть узла располагается над другой.

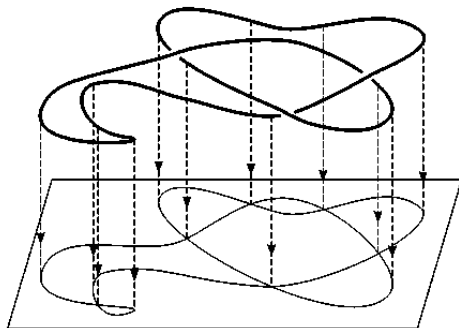


Рис. 1.2. Проекция узла на плоскость

В плоском изображении, чтобы ясно представить себе вид узла вблизи точки самопересечения, линию, которая изображает нижнюю ветвь узла, разрывают (см. рис. 1.1), так что получается *перекресток*. Мы и далее будем пользоваться таким естественным способом изображения узлов.

Чтобы корректно поставить проблему классификации узлов, нужно прежде всего уточнить, какие узлы принадлежат одному и тому же классу, и, следовательно, *дать точное определение эквивалентности узлов*. Однако мы отложим на время это определение (изотопии узлов), а пока ограничимся интуитивным описанием.

Узел можно представлять как тонкую запутанную веревку в пространстве, концы которой соединены. Эту веревку можно как угодно изгибать, сжимать или растягивать, но нельзя разрывать и склеивать. Всевозможные положения, которые может принимать при этом веревка, изображают один и тот же узел.

Итак, изменяя непрерывным образом положение замкнутой кривой (веревки) в пространстве (не разрывая и не склеивая ее), мы получаем всегда *один и тот же узел*, но его плоское изображение может при этом измениться до неузнаваемости. Например, может измениться количество перекрестков (см. рис. 1.3).

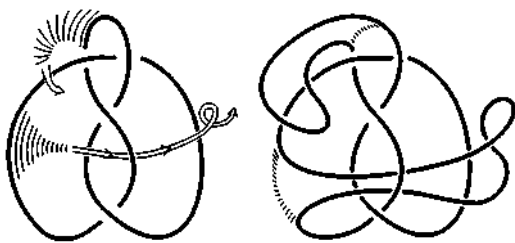


Рис. 1.3. Два представления одного узла

Тем не менее, естественный подход к классификации пространственных узлов состоит в том, чтобы составить сначала список всех плоских кривых с $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ перекрестками, а затем исключить *дубликаты*, т. е. кривые, которые изображают один и тот же узел в пространстве.

Для того чтобы эта задача была разрешима за время человеческой жизни, следует ограничить максимальное исследуемое число перекрестков. Питер Тейт остановился на десяти.

Вначале Тейту повезло: он обнаружил, что математик-любитель и проповедник Томас Киркман (Thomas Kirkman) уже классифицировал плоские кривые с небольшим числом перекрестков и остается только последовательно удалить дубликаты. Но эта задача была непростой. Действительно, для каждого перекрестка плоской кривой имеется две возможности для выбора одной ветви, проходящей над другой. Для кривой с 10 перекрестками, например, имеется априори 2^{10} , т. е. 1024, возможностей построить узел. Поэтому Тейт решил классифицировать только *альтернированные узлы*, т. е. узлы, у которых верхние и нижние ветви чередуются, если двигаться вдоль проекции (см. рис. 1.4).



Рис. 1.4. Альтернированный (слева) и неальтернированный (справа) узел

Таким образом, каждой плоской кривой соответствует в точности два альтернированных узла. Казалось бы, задача Тейта существенно упростилась. Тем не менее, она осталась весьма нелегкой — Тейт посвятил ей почти всю свою жизнь.

Неальтернированные узлы (с десятью и менее перекрестками) были классифицированы в 1899 г., после шести лет работы, американцем Литтлом, которому удалось избежать последовательного перебора 2^{10} вариантов пересечений, упомянутых выше.

К несчастью для Томсона, Киркмана, Литтла и Тейта, в то время когда Литтл и Тейт завершили свою работу, таблица узлов уже мало кого интересовала...

Как бы то ни было, к концу XIX в. большая часть работы по классификации узлов (с десятью и менее перекрестками) была завершена и появились таблицы узлов. Пример такой таблицы простых узлов с семью и менее перекрестками представлен на рис. 1.5.

Точное значение выражения «простой узел» (аналогично выражению «простое число», т. е. число, которое нельзя разложить на множители) будет объяснено в разделе, посвященном арифметике узлов.

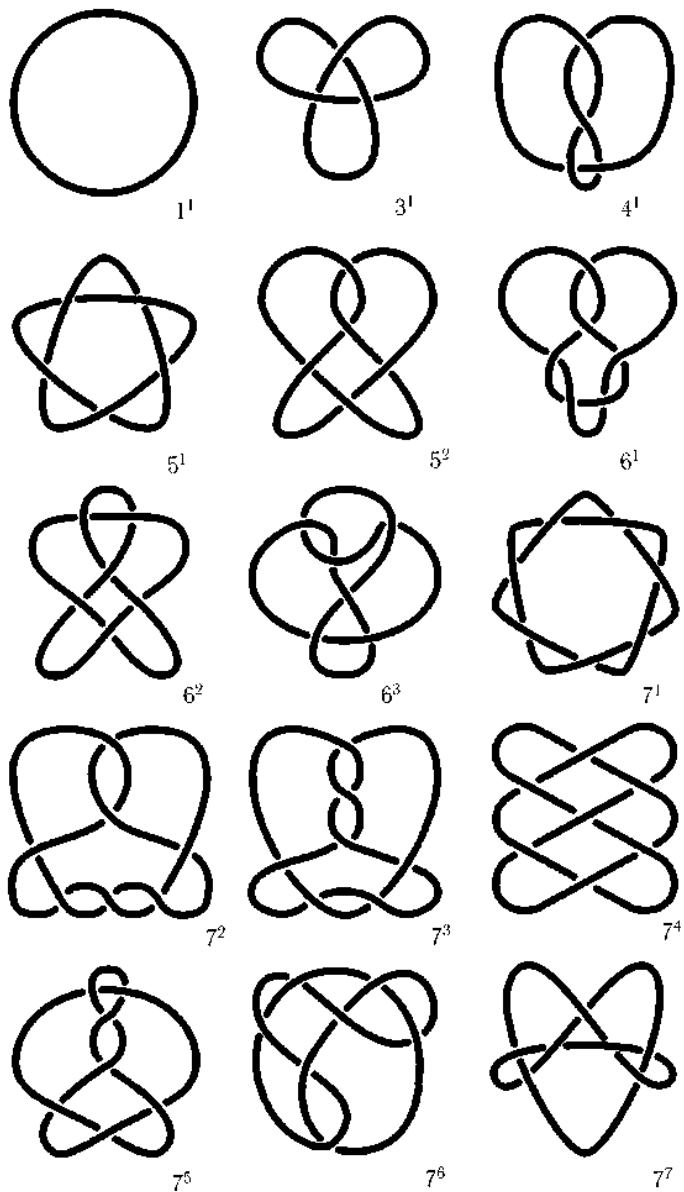


Рис. 1.5. Таблица простых узлов с семью или менее перекрестками

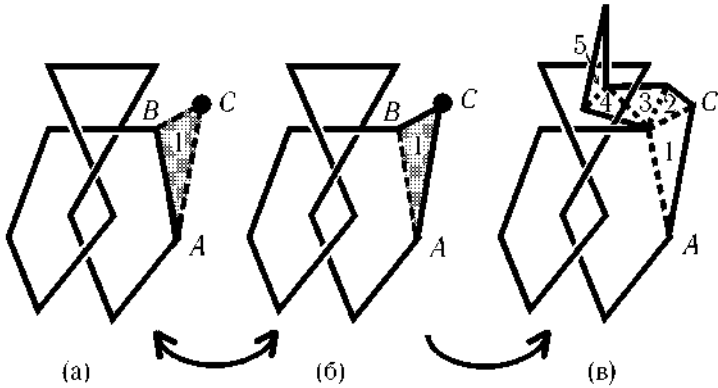


Рис. 1.6. Узел как ломаная и преобразования изотопии

Прежде чем продолжить сообщения о работах Кельвина и Тейта, приведем некоторые уточнения по поводу классификации узлов.

Классификация узлов с математической точки зрения

Сформулируем задачу классификации в точных терминах, достаточно строгих, чтобы удовлетворить . Прежде всего нужно дать математическое определение самого понятия узла. Мы определяем узел, или, более точно, *представление узла*, как замкнутую ломаную линию в пространстве (рис. 1.6 (a)). Собственно *узел* есть класс эквивалентности представлений узлов по отношению изотопии, которая определяется следующим образом. Осуществить *элементарную изотопию* — значит приложить треугольник (обозначенный ABC на рис. 1.6 (a)) к отрезку AB ломаной линии, заменив далее этот отрезок двумя другими сторонами ($AC \cup CB$, см. рис. 1.6 (b)), либо проделать обратную операцию; разумеется, треугольник не должен иметь общих точек с ломаной, кроме его сторон. *Изотопия* есть некоторая последовательность элементарных изотопий (рис. 1.6 (v)).

Понятно, что это определение в общем соответствует нашему интуитивному представлению об узле как о бечевке со склеенными концами, и изотопия позволяет деформировать узел в пространстве так, как мы бы это делали с реальной бечевкой (не разрывая ее). Правда, мы до сих пор рисовали узлы в виде плавных кривых, без углов, но это не противоречит данному выше формальному определению: плавные кривые можно считать ломаными с микроскопическими звеньями.

(В дифференциальной геометрии есть более красивое (но не такое элементарное) определение узлов как «гладких замкнутых кривых».)

Представление узла как ломаной линии мотивируется не только тем, что оно позволяет добавлять треугольники (это предполагает, что «линия» состоит из отрезков); фактически речь идет также об условии, необходимом, чтобы избежать «локальных патологий». Дело в том, что существуют *дикие узлы*, не являющиеся топологически эквивалентными ломаной линии (или гладкой кривой). Такие необычные узлы получаются в результате «бесконечного завязывания». Переплетения кривой при этом становятся все более и более мелкими и сходятся в итоге к предельной точке, *дикой точке* кривой (см. рис. 1.7).

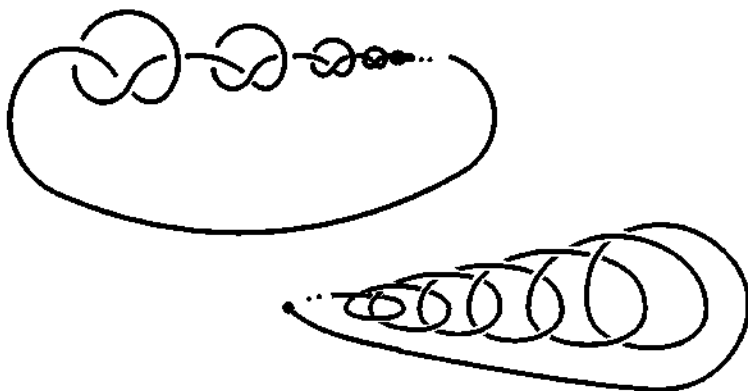


Рис. 1.7. Примеры «диких» узлов

Строгое определение узла (как ломаной линии или как гладкой кривой) позволяет избежать этих маленьких монстров и тем самым упростить теорию. Прежде чем продолжить наше первоначальное изучение «ручных» узлов, сделаем небольшое отступление и приведем несколько рисунков их «диких» сородичей.

Дикие узлы, пространственная интуиция и слепота

Примеры диких узлов на рис. 1.7 содержат лишь одну (изолированную) патологическую точку, к которой сходится последовательность уменьшающихся узлов. Легко построить дикий

узел с несколькими точками такого типа. Но можно пойти еще дальше: на рис. 1.8 показан дикий узел, который обладает бесконечным (и даже несчетным) множеством патологических точек.

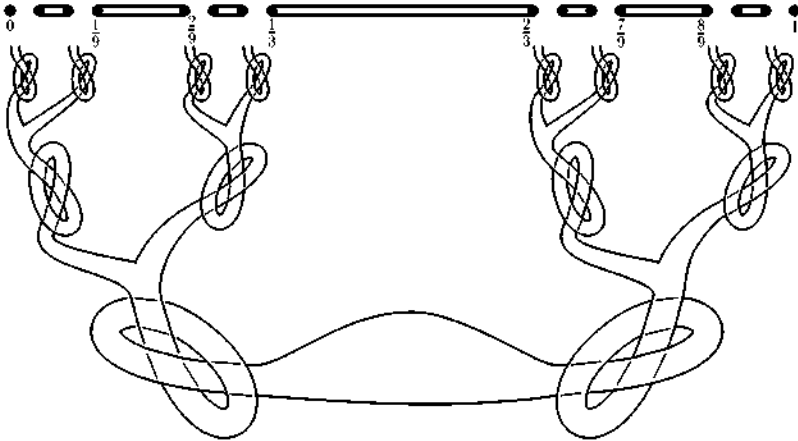


Рис. 1.8. Дикий узел, сходящийся к канторову множеству

Эти дикие точки образуют знаменитое *канторово множество*: множество точек отрезка $[0,1]$, которое остается, если удалить последовательно средний интервал $(1/3, 2/3)$; затем более мелкие средние интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ двух оставшихся отрезков; затем четыре средних интервала $(1/27, 2/27)$, $(7/27, 8/27)$, $(19/27, 20/27)$ и $(25/27, 26/27)$ из четырех отрезков, которые остаются после предыдущего шага; и так далее до бесконечности.

Можно получить и ещё более поразительный дикий узел, заставив кривую пройти через множество еще более сложное, чем канторов континуум, например через ожерелье Антуана. Речь идет об одной геометрической конструкции, предложенной французским математиком Луи Антуаном (Louis Antoine). Попробуем описать эту жемчужину математического воображения, представленную на рис. 1.9.

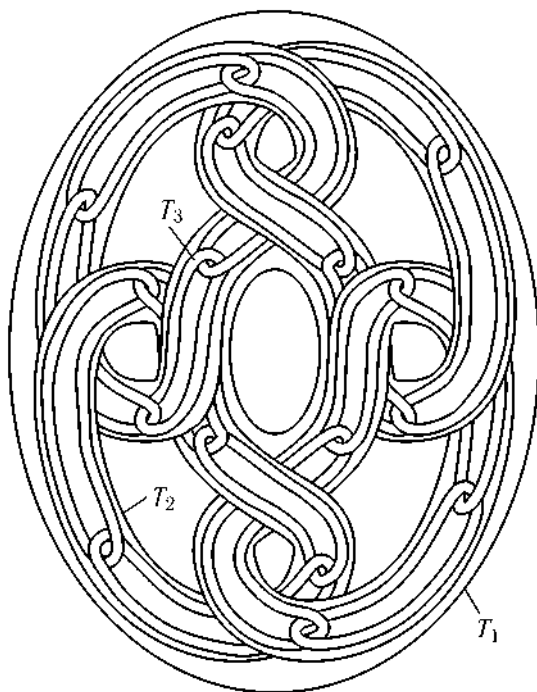


Рис. 1.9. Ожерелье Антуана

Начинаем с тела T_1 в форме тора (самого большого на рисунке), во внутренность которого помещаем четыре полных тора поменьше, сплетенных друг с другом таким образом, что они образуют замкнутую цепь (обозначенную T_2) с четырьмя звеньями. Затем в каждое из четырех звеньев цепи T_2 помещаем маленькую цепь, подобную предыдущей; множество, образованное этими четырьмя цепочками (и, следовательно, состоящее из 16 маленьких торов), обозначаем T_3 . Во внутренность каждого маленького тора помещаем... Читатель уже понял: процедура повторяется до бесконечности. Множество, полученное пересечением бесконечного набора торов T_i , и образует *ожерелье Антуана*:

$$A = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_n \cap \dots$$

Ожерелье Антуана обладает рядом замечательных свойств, на которых мы не собираемся останавливаться: оно нам послужит лишь для конструирования дикого узла, предложенного русским математиком Г.

Я. Зуевым. Этот узел выглядит так: сначала он проникает во внутренность большого тора, затем выпускает четыре языка, которые входят в четыре следующих тора, затем каждый язык выпускает четыре языка и т. д., стремясь приблизиться к ожерелью Антуана. Можно показать (но строгое доказательство достаточно тонкое), что в пределе действительно получается простая замкнутая кривая и что множество ее диких точек есть в точности ожерелье Антуана. Читатель может спросить себя, какую же силу пространственного воображения надо иметь для того, чтобы изобретать монстров вроде ожерелья Антуана или дикого узла Зуева. Он, наверное, будет удивлен, если узнает, что оба этих математика были слепыми. Но в сущности в этом нет ничего удивительного — как нет ничего удивительного в том, что почти все слепые математики являются (или являлись) геометрами. Интуиция пространства, которой обладаем мы, зрячие, основана на проекции мира на нашу сетчатку. Следовательно, **наш мозг анализирует двумерный (а не трехмерный) образ, т. е. сильно искаженную картину**. Интуиция пространства незрячих, напротив, происходит в основном из осязательного и двигательного опыта. Она гораздо глубже. Чтобы завершить это отступление, отметим, что сравнительно недавние биолого-математические исследования (основанные на изучении детей и взрослых, родившихся слепыми и ставших затем зрячими) показали, **что фундаментальные, первичные математические структуры — например топологические — являются врожденными, в то время как структуры более тонкие — такие, как линейные структуры — являются приобретенными** (Зиман, 1962). Так, слепые, ставшие зрячими, не отличают вначале квадрат от окружности, они замечают только, что топологически эти фигуры эквивалентны. Напротив, они сразу же видят, что тор и сфера — не одно и то же. Наша же тенденция абсолютизировать то, что мы видим, приводит к тому, что мы постигаем мир уж очень прямолинейно, плоско и поверхностно...

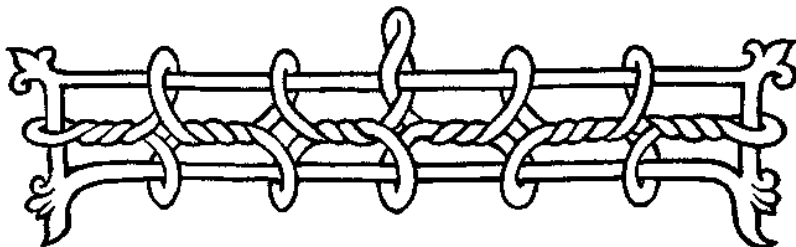
Крушение теории Томсона

В то время как европейские физики обсуждали достоинства теории Томсона, а Гейт заполнял свою таблицу узлов, в одной далекой стране малоизвестный ученый тоже обдумывал вопрос о строении материи. Он тоже пытался составить таблицу атомов, но, относясь с недоверием к геометрическому подходу, в основу таблицы положил арифметические соотношения между различными параметрами химических элементов.

Замечательное открытие нашего соотечественника Д. И. Менделеева состояло в том, что существуют соотношения периодичности — простые, но тем не менее оставшиеся до тех пор незамеченными — между этими параметрами. Сегодня эту таблицу называют *периодической системой элементов*. Понадобилось определенное время, прежде чем это открытие стало известно в Западной Европе. Тем самым с теорией Томсона было покончено. Не принесла ничего для химии, она была быстро вытеснена теорией Менделеева. Таблицы узлов оказались ненужными... Физики более чем на столетие забыли про узлы. Но математики были готовы принять у них вахту.

15.2. Узлы, сплетенные из кос

В этом разделе мы обсудим связь между двумя топологическими объектами: косами и узлами.



Что такое коса в математике?

Грубо говоря, это формальная модель того, что понимается под словом «коса» или «сплетение» в обычной жизни (девичья коса, плетеный брелок, собачий поводок, сплетенный из кожаных полос, классический канат из переплетенных жил и т. д.), т. е. множество нитей, запутанных некоторым определенным образом. Более точно, можно представлять *косу* из n нитей как n тонких бечевочек, подвешенных «вверху» (на гвозди, выстроенные в горизонтальную линию) и переплетающихся друг с другом в своем движении «вниз» (движение вверх не допускается); по прибытии вниз мы находим те же нити (также зафиксированные гвоздями), но не обязательно в том же порядке (см. рис. 2.1).

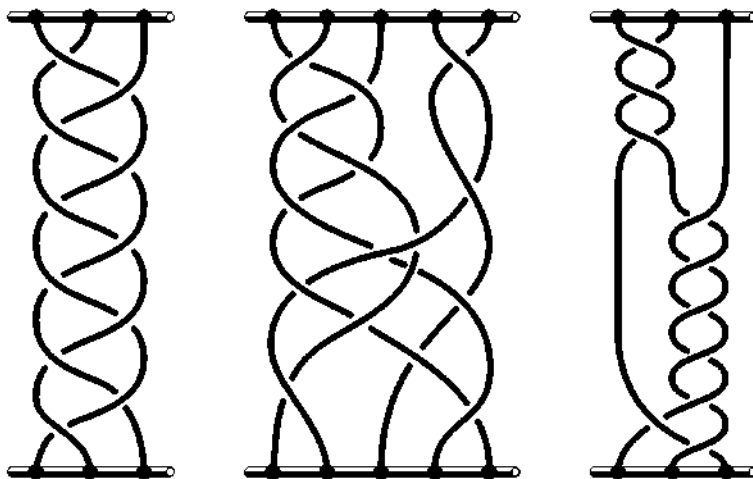


Рис. 2.1. Примеры кос

Для данной косы мы имеем право двигать ее нити, не отцепляя их вверху и внизу и, конечно, не разрезая их и не склеивая; при этом получается коса другого вида, *эквивалентная* (или *изотопная*) данной (рис. 2.2).

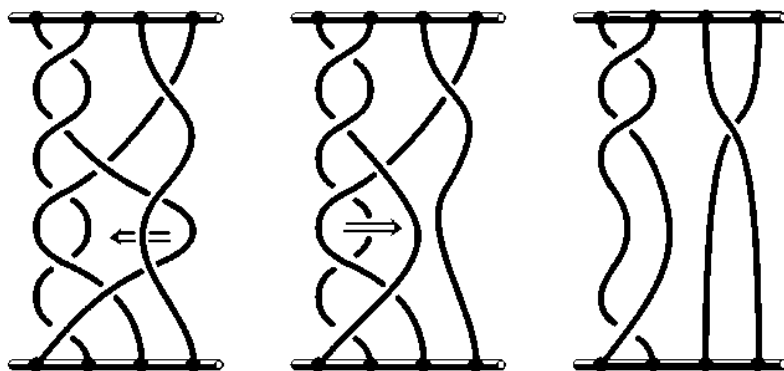
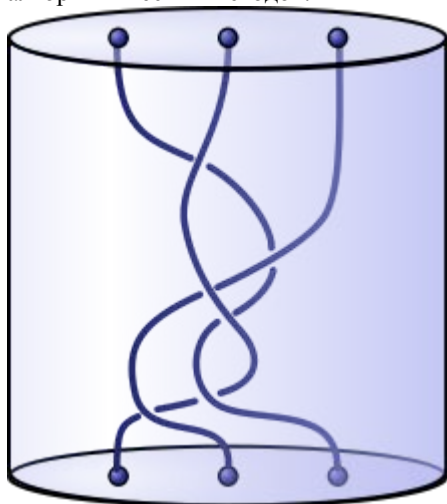


Рис. 2.2. Изотопия косы с четырьмя нитями

Как и в случае узлов, мы не различаем две изотопные косы: мы рассматриваем их как двух представителей одного и того же объекта (с

формальной точки зрения считается, что рассматриваемый объект — не конкретная коса, а класс эквивалентных кос).

Теория кос, основания которой были построены благодаря азарту и настойчивости немецкого алгебраиста Эмиля Артина в двадцатых годах прошлого столетия, является красивым синтезом геометрии, алгебры и алгоритмических методов.



Пример косы с тремя дугами.

Теория кос — раздел топологии и алгебры, изучающий косы и группы кос, составленные из их классов эквивалентности.

Определение косы

Коса из n итей — объект, состоящий из двух параллельных плоскостей P_0 и P_1 в трёхмерном пространстве \mathbf{R}^3 , содержащих упорядоченные множества точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in P_0$ и $b_1, b_2, \dots, b_n \in P_1$, и из непересекающихся между собой простых дуг l_1, l_2, \dots, l_n , пересекающих каждую параллельную плоскость P_i между P_0 и P_1 однократно и соединяющих точки $\{a_i\}$ с точками $\{b_i\}$.

Обычно считается, что точки a_1, a_2, \dots, a_n лежат на прямой l_0 в P_0 , а точки b_1, b_2, \dots, b_n на прямой l_1 в P_1 , параллельной l_0 , причем a_i расположены под для каждого b_i .

Косы изображаются в проекции на плоскость, проходящую через l_0 и l_1 , эта проекция может быть приведена в общее положение так, что имеется только конечное число двойных точек, попарно лежащих в разных уровнях, и пересечения трансверсальны.

Группа кос

Группа кос — группа, абстрактно описывающая плетение кос. Подобным образом теория узлов связана с узлами.

Группа кос на n нитях обычно обозначается B_n .

Группа кос была впервые явно описана Эмилем Артином в 1925 год.

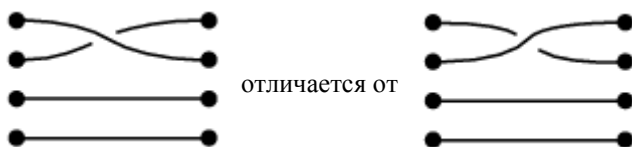
Интуитивное описание

Рассмотрим случай $n = 4$, из этого примера легко будет понять, что представляет собой произвольная группа кос. Рассмотрим две параллельные прямые (на рисунке они расположены вертикально), на каждой из которых лежит по четыре пронумерованные точки, так что точки с одинаковыми номерами находятся друг против друга.

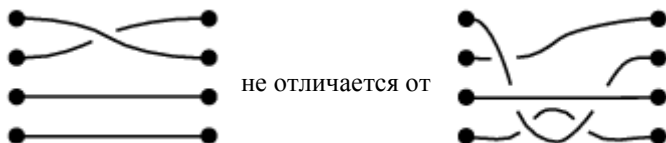


Разобьем точки на пары и с помощью нитей соединим их. Если изобразить получившуюся картинку в плоскости, некоторые нити могут проходить друг под другом (можно считать, что нити всегда

пересекаются трансверсально). При этом важно учитывать порядок следования нитей в точке пересечения:



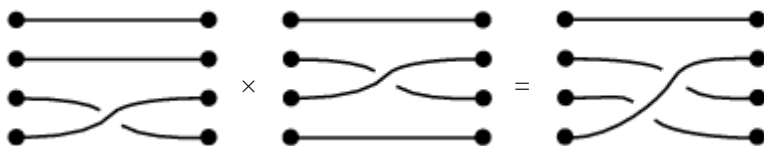
С другой стороны, две такие конфигурации, которые можно сделать одинаковыми перемещением нитей, не затрагивающим конечные точки, мы будем считать одинаковыми:



Все нити должны быть направлены слева направо, то есть каждая из нитей может пересекать вертикальную прямую (*параллельную прямым с пронумерованными точками*) не более чем в одной точке:



Для двух кос можно рассмотреть их композицию, нарисовав вторую рядом с первой, то есть склеив соответствующие четыре концевые точки:

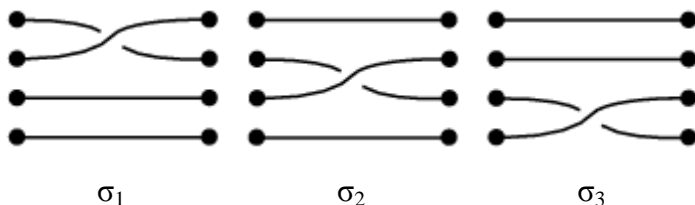


Группа B_4 — это фактор множества всех таких конфигураций на четырёх парах точек по отношению эквивалентности, заданному непрерывными преобразованиями плоскости, на котором указанным выше способом задана групповая операция. Данная операция удовлетворяет всем аксиомам группы; в частности, нейтральный элемент — класс эквивалентности четырёх параллельных нитей и для каждого элемента обратный к нему можно получить симметрией относительно вертикальной прямой.

Формальное определение

Строго формализовать данное выше описание можно несколькими способами:

- Геометрический способ использует понятие гомотопии, а именно, B_n определяется как фундаментальная группа n -й степени пространства \mathbf{R}^2 по фактору симметрической группы, то есть множества n точек на плоскости с соответствующей топологией.
- Также можно дать чисто алгебраическое описание, задав образующие и соотношения. Оказывается, что B_n порождается $(n - 1)$ элементом. Например, любой элемент B_4 можно записать как композицию следующих трёх элементов (и обратных к ним):



Чтобы понять, почему это интуитивно очевидно, «просканируем» картинку, перемещая вертикальную прямую слева направо. Всякий раз, когда i -я сверху (на данной прямой) нить проходит под $(i + 1)$ -й, будем писать σ_i , а если над $(i + 1)$ -й, то σ_i^{-1} .

Очевидно, что выполняется соотношение $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$, тогда как чуть более трудно увидеть, что $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ (убедиться в этом проще всего, нарисовав линии на листке бумаги).

Можно доказать, что все соотношения между элементами группы кос следуют из соотношений такого вида. А именно, группу кос можно задать следующим образом:

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ for } q \leq i \leq n-2 \text{ and } \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ for } |i-j| \geq 2 \rangle:$$

Во множестве всех кос с n нитями и с фиксированными $P_0, P_1, \{a_i\}, \{b_i\}$ вводится отношение эквивалентности. Оно определяется гомеоморфизмами $h: \Pi \rightarrow \Pi$, где Π — область между P_0 и P_1 , тождественными на $P_0 \cup P_1$. Косы α и β эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм h , что $h(\alpha) = \beta$.

Классы эквивалентности, далее также называемые косами, образуют **группу кос** $B(n)$. Единичная коса — класс эквивалентности, содержащий косу из n параллельных отрезков. Коса α^{-1} , обратная косе α , определяется отражением в плоскости $P_{1/2}$.

Нить косы соединяет a_i с b_j и определяет подстановку, элемент симметрической группы S_n . Если эта подстановка тождественна, то коса называется крашеной (или чистой) косой. Это отображение задаёт эпиморфизм $B(n)$ на группу S_n перестановок n элементов, ядром которого является подгруппа $K(n)$, соответствующая всем чистым косам, так что имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow K(n) \rightarrow B(n) \xrightarrow{S_n} 0.$$

Эта последовательность расщепляется, поэтому группа чистых кос изоморфна итерированному полупрямому произведению свободных групп.

Свойства

- Группа B_1 тривиальна, B_2 бесконечна (как и все последующие группы кос) и изоморфна \mathbf{Z} , B_3 изоморфна группе узла трилистника.
- Все элементы B_n , кроме нейтрального, имеют бесконечный порядок; то есть B_n не имеет кручения.
- Существует сюръективный гомоморфизм $B_n \rightarrow S_n$ из группы кос в группу перестановок. Действительно, каждому элементу группы B_n можно сопоставить перестановку множества n вершин, при которой левому концу каждой «нити» сопоставляется правый её конец.
 - Ядро этого гомоморфизма называется группой крашенных кос, она обычно обозначается P_n .
 - Для групп крашенных кос существует короткая точная последовательность

$$F_{n-1} \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1}$$

где F_{n-1} обозначает свободную группу с $n-1$ образующей.

Первоначально косы были предложены Артином в качестве математической модели для текстильной промышленности, но приложения этой теории оказались весьма разнообразными; теперь они занимают важное место в комплексном анализе, комбинаторике, квантовой механике и квантовой теории поля. Кроме того, теория кос помогла в решении задачи о представлении функций многих переменных функциями меньшего числа переменных.

Но мы вернемся к теории кос немного позже, так как наша непосредственная цель — увидеть связь между косами и узлами, упомянутую в начале главы.

Замыкание косы

Можно получить узел из косы с помощью операции *замыкания*, которая состоит в том, чтобы присоединить верхние концы прядей к нижним концам (рис. 2.3 (a)).

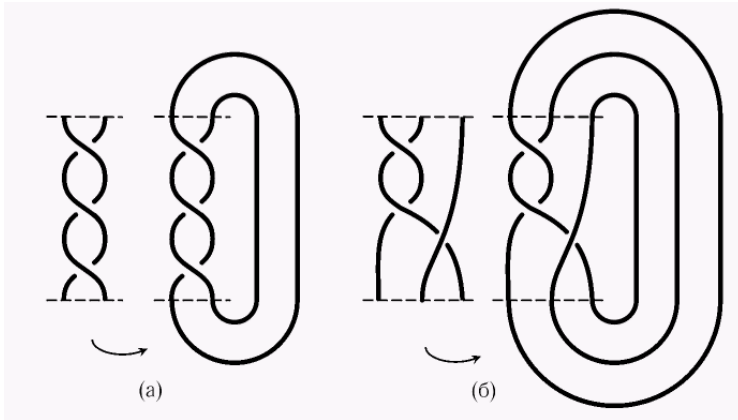


Рис. 2.3. Замыкание кос

Всегда ли таким образом получается узел? Рис. 2.3 (б) показывает, что не всегда: замыкание косы может также оказаться *зацеплением*, т. е. состоять из нескольких кусков (из нескольких кривых, в отличие от узла, по определению состоящего лишь из одной). Внимательный читатель предыдущей главы узнает — но, может быть, не сразу — узел-трилистник на рис. 2.3 (а).

Сразу же встает вопрос: какие узлы можно получить таким образом? Ответ, полученный американским математиком Александром в 1923 г., объясняет важность кос в теории узлов: можно получить любой узел! Итак, теорема Александра формулируется следующим образом: *каждый узел может быть получен как замыкание некоторой косы.*

(Фактически Александр показал, что это утверждение верно для зацеплений, частным случаем которых являются узлы.)

Вероятно, Александр надеялся, что его теорема послужит решающим шагом к классификации узлов. Действительно, как мы увидим ниже, косы являются значительно более простыми объектами, чем узлы; множество кос обладает весьма прозрачной алгебраической структурой, позволяющей их классифицировать. Следовательно, резонно попытаться классификацию узлов, основываясь на классификации кос.

Вернемся к теореме Александра: как ее доказать, как для данного узла найти косу, замыкание которой дает этот узел? Заметим вначале, что искомая коса моментально находится, если узел является *обмоткой*, т. е. если он закручивается в одном и том же направлении вокруг некоторой точки (как узел на рис. 2.4 (а) вокруг центра C).

Действительно, для этого достаточно разрезать узел вдоль полупрямой, исходящей из центра, и затем развернуть его в косу (см. рис. 2.4 (б)).

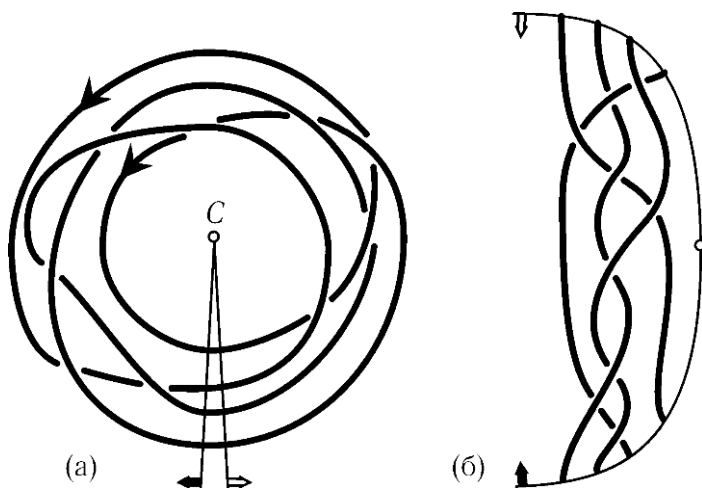


Рис. 2.4. Замыкание косы для узла-обмотки

Но что делать, если узел не является обмоткой, как, например, узел, представленный на рис. 2.5 (а)? (Этот узел, как известно, называется *восьмеркой*.) В этом частном случае достаточно заставить его «толстую» часть (показанную на рисунке более жирной линией), которая закручивается относительно точки *C* в «неправильном» направлении, пройти под точкой *C* с другой стороны кривой; тогда мы получим узел-обмотку (рис. 2.5 (б)), который можно развернуть далее в косу, как в предыдущем примере (рис. 2.5 (в)).

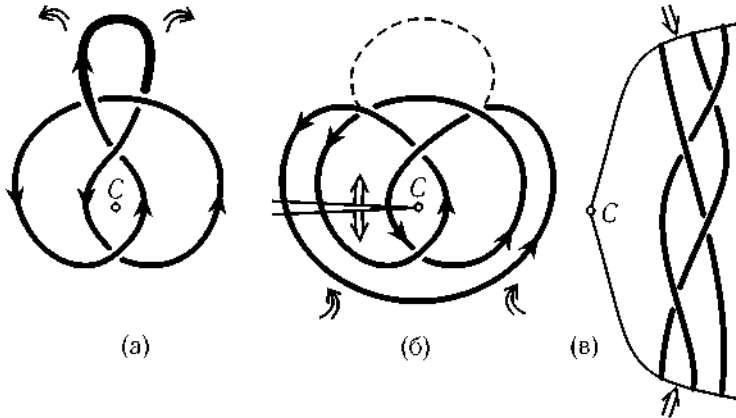


Рис. 2.5. Развертка и замыкание косы для узла «восьмерка»

Фактически этот прием (преобразование произвольного узла в узел-обмотку) является основным, и именно благодаря ему Александер сумел доказать свою теорему. К недостаткам этого метода можно отнести отсутствие эффективности с практической точки зрения; в частности, его трудно реализовать на компьютере. Поэтому мы описываем здесь другой метод расплетения узлов в косы, более эффективный и более легкий для программирования, принадлежащий французскому математику Пьеру Вожелю (Pierre Vogel).

Алгоритм Вожеля

Чтобы описать этот алгоритм, преобразующий произвольный узел в узел-обмотку, нам понадобится несколько определений, относящихся к плоским изображениям (*диаграммам*) узлов.

Узел называют *ориентированным*, если выбрано некоторое *направление* его обхода (обозначенное стрелками). Диаграмма узла задает что-то вроде географической карты на плоскости. *Страны* на ней — это области, ограниченные линией узла. На этой карте граница каждой страны состоит из многих *ребер* (ориентированных стрелками), соединяющих перекресток узла с соседним. Принимается во внимание также *бесконечная страна* — та, что расположена вне кривой.

Поскольку кривая узла ориентирована, пересечения снабжены стрелками, которые позволяют однозначно *разрешить* данный узел, т. е. заменить все перекрестки их *разрешениями* так, как показано на рис.

2.6 (а).

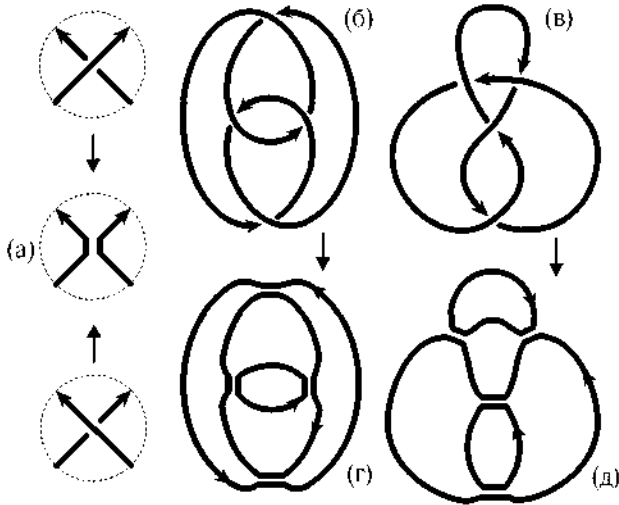


Рис. 2.6. Разрешение узлов окружностями Зейферта

Разрешение преобразует узел в одну или несколько замкнутых ориентированных кривых (без перекрестков), которые называются *окружностями Зейферта* диаграммы узла (рис. 2.6 (г), (д)).

Две окружности Зейферта называются *вложенными*, если одна из них лежит внутри области, ограниченной другой, и если ориентации этих окружностей совпадают. Отметим, что разрешение узла-обмотки всегда дает систему вложенных окружностей Зейферта (см. рис. 2.6 (б)).

С другой стороны, если у нас есть две окружности Зейферта, которые не являются вложенными (как на рис. 2.7 (б)), операция *замены бесконечности* делает их вложенными (рис. 2.7 (в)).

(Эта терминология объясняется тем, что здесь речь идет о преобразовании, напоминающем инверсию в геометрии (симметрия относительно малой окружности, центр которой находится в одной из стран, ограниченной одной из рассматриваемых окружностей Зейферта), и эта инверсия посылает центр данной окружности «в бесконечность» (и преобразует эту страну в бесконечную)).

Действительно, мы видим на этом рисунке, что окружности 1 и 2 вложены, а окружность 3, напротив, не вложена в них.

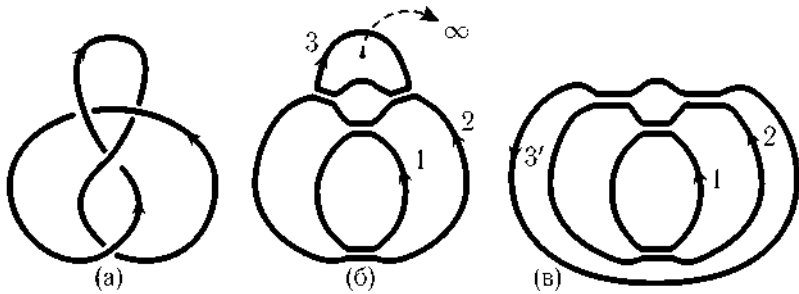


Рис. 2.7. Замена бесконечности

Однако, «вывернув плоскость наизнанку» относительно окружности 3, мы получим окружность 3', в которую уже вложены окружности 1 и 2. (В рассматриваемом случае замена бесконечности похожа на операцию, осуществленную на рис. 2.5 при переходе от (а) к (б), но не совпадает с ней.)

Рассмотрим теперь плоскую карту, определенную узлом N . Некоторая страна H этой карты называется *нестабильной*, если у нее есть два ребра, принадлежащие двум различным окружностям Зейферта, причем стрелки на этих ребрах задают обход вокруг страны H в одном и том же направлении. Так, в разрешении узла N на рис. 2.8 страна H нестабильна, в то время как страны P_1 и P_2 обе стабильны.

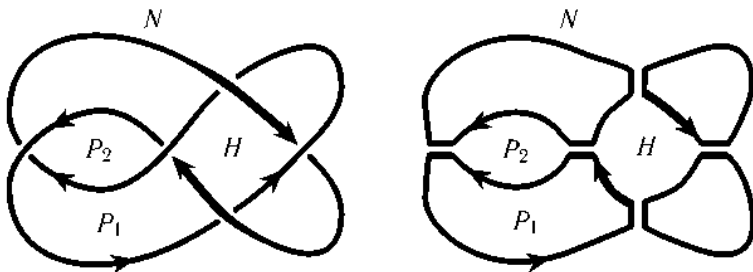


Рис. 2.8. Стабильные и нестабильные страны

В самом деле, жирные стрелки задают обход вокруг H в одном и том же направлении и принадлежат двум различным окружностям Зейферта, поэтому страна H нестабильна; страна P_1 стабильна, так как

все ее ребра принадлежат одной и той же окружности Зейферта; наконец, страна P_2 стабильна, так как ее ребра задают обходы вокруг P_2 в противоположных направлениях.

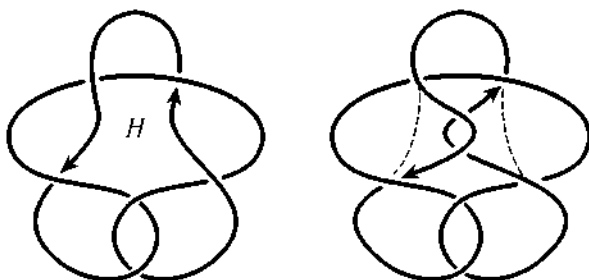


Рис. 2.9. Перестройка нестабильной страны

К каждой нестабильной стране можно применить операцию, которую мы называем *перестройкой* (см. рис. 2.9) и которая состоит в замене двух «неправильных» стрелок на два «языка», проходящих один над другим и образующих два новых пересечения.

В результате образуется центральная страна (которая не является нестабильной) и несколько новых стран: некоторые из них (две в рассматриваемом примере) могут «аннексировать» части нестабильной страны, — этим и объясняется термин «перестройка». Аналогия с геополитическими событиями (распад СССР) — чисто случайная... Алгоритм Вожеля теперь можно представить в форме «программы», записанной псевдо-Паскалем:

```

начало
сделать разрешение
пока: существует нестабильная страна
    сделать перестройку
    сделать разрешение
конец пока
пока: окружности Зейферта не являются вложенными
    сделать замену бесконечности
конец пока
конец
В этой программе условия
    существует нестабильная страна,
    окружности Зейферта не являются вложенными
    
```

и «макрокоманды»

сделать перестройку

сделать замену бесконечности

объяснены выше. Уточним, как функционирует макрокоманда —

сделать замену бесконечности

Для ее выполнения нужно взять одну из самых маленьких окружностей Зейферта, не являющуюся вложенной относительно других, и отправить в бесконечность какую-нибудь внутреннюю точку этой окружности.

Применим вначале алгоритм Вожеля к очень простому (на самом деле тривиальному) узлу, чтобы увидеть, как происходит замена бесконечности (см. рис. 2.10).

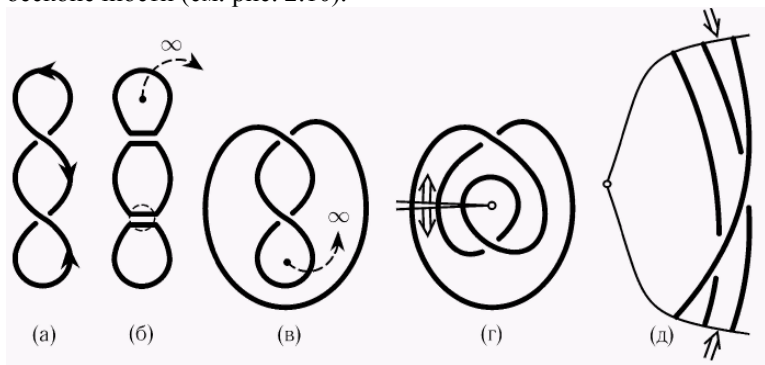


Рис. 2.10. Алгоритм Вожеля, примененный к тривиальному узлу

После первого разрешения видно, что нестабильных стран нет и что ни одна окружность Зейферта не является вложенной. Следовательно, можно перейти к команде «сделать замену бесконечности», которую нужно выполнить два раза (сначала рис. 2.10 (б) превращается в (в), потом (в) превращается в (г)), чтобы получить узел-обмотку (г), который разрезается в косу (д), как указано выше.

На рис. 2.11 показано, как алгоритм Вожеля закручивает (превращает в обмотку) узел с пятью перекрестками (этот узел имеет номер 5^2 в таблице узлов на рис. 1.5.) Видно, как, после начального разрешения, цикл (в программистском смысле) «пока» включает две перестройки (б) и (в); за ним следует замена бесконечности. Результатом (см. рис. 2.11 (г)) будет узел-обмотка, даже если он мало похож на обмотку.

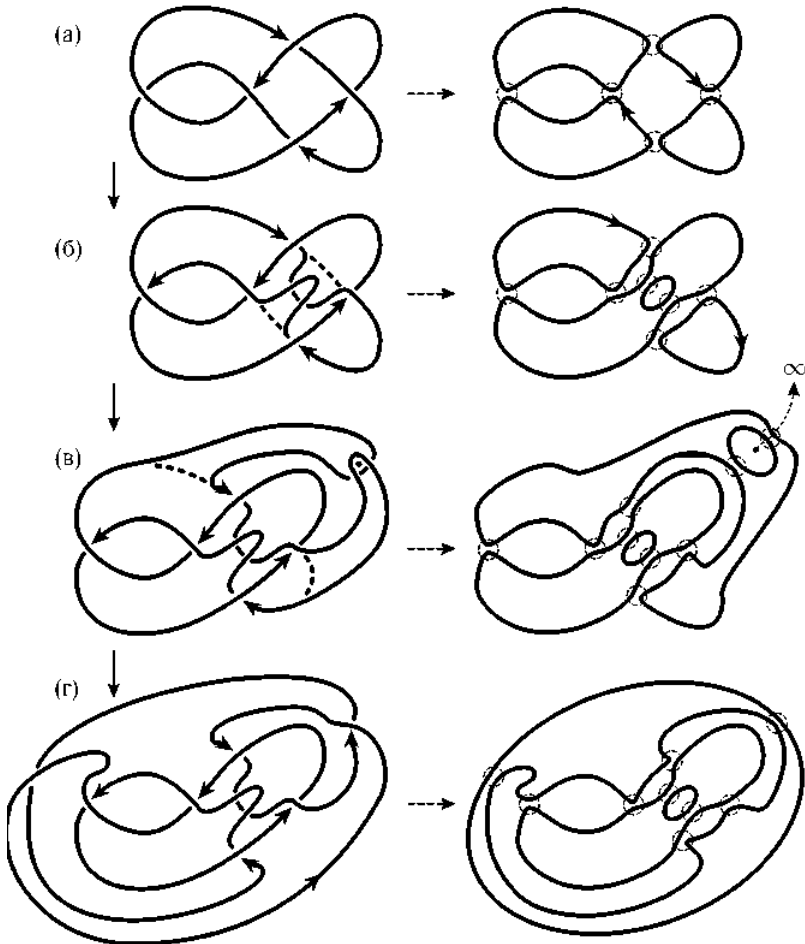


Рис. 2.11. Применение алгоритма Вожеля к узлу типа 5^2

Чтобы убедиться в том, что получена обмотка, мы перерисуем узел два раза (см. рис. 2.12); читателю не составит труда узнать узел-обмотку с рис. 2.5 (а) и затем снова полюбоваться на искомую косу (рис. 2.5 (б)).

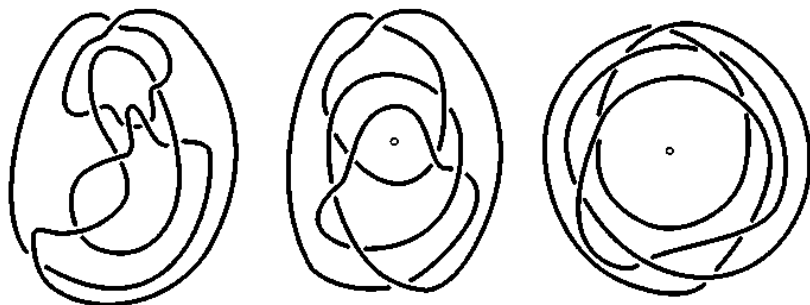


Рис. 2.12. Узел-обмотка, получившийся в результате действия алгоритма Вожеля

Заметим, что алгоритм Вожеля включает в себя два цикла «пока», априори опасных. В общем случае совсем не очевидно, что алгоритм завершит свою работу за конечное число шагов, однако в данном случае это так, и алгоритм работает очень быстро. Что касается второго цикла, то можно элементарно доказать, что он оканчивается всегда. Напротив, чтобы доказать это для первого цикла, Вожелю пришлось воспользоваться достаточно тонкими методами алгебраической топологии.

Чтобы из нашей «программы» сделать настоящую, надо уметь *кодировать* представления узлов в доступном для машины виде.

Компьютер без труда читает слова, но ему сложно объяснить взаимное расположение на плоскости перекрестков диаграммы узла. Однако диаграмму узла он понимает, если ее описать в виде слова: двигаясь вдоль кривой, нужно последовательно указывать тип встречаемого перекрестка. Мы поговорим подробнее о кодировании узлов позже.

Группа кос

Вернемся к изучению кос. Прежде всего мы определим операцию *произведения* на множестве кос B_n с одним и тем же количеством нитей n . Эта операция заключается просто-напросто в последовательном связывании кос (соединении верхних концов нитей второй косы с нижними концами нитей первой), как на рис. 2.13.

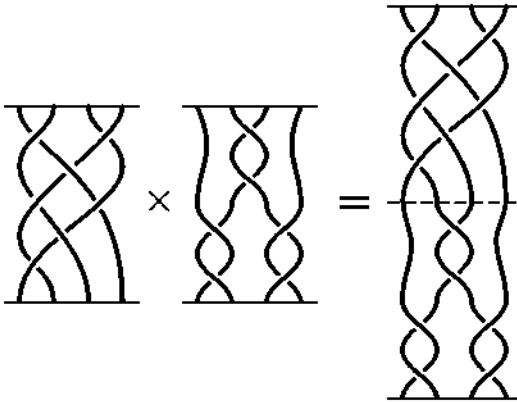


Рис. 2.13. Произведение двух кос

Сейчас мы убедимся, что произведение кос обладает многими свойствами обычного произведения чисел. Прежде всего, имеется единичная коса (обозначаемая e), т. е. коса, которая, как число 1, не изменяет то, что на нее умножается. Это *тривиальная* коса, нити которой спадают вертикально, не переплетаясь. Действительно, прикрепление снизу тривиальной косы к данной косе приводит лишь к удлинению ее нитей и не изменяет тип косы.

Во-вторых, для каждой косы b существует коса, называемая *обратной* и обозначаемая b^{-1} , такая, что ее произведение с b дает тривиальную косу, $b \cdot b^{-1} = e$ (так же как для каждого числа n его произведение с обратным числом $n^{-1} = 1/n$ равно единице, $n \cdot n^{-1} = 1$). Эта коса, как видно на рис. 2.14, получается, если взять отражение данной косы в горизонтальном зеркале; действительно, каждый перекресток уничтожается своим зеркальным изображением, таким образом, все перекрестки взаимно уничтожаются попарно шаг за шагом, начиная с середины косы-произведения.

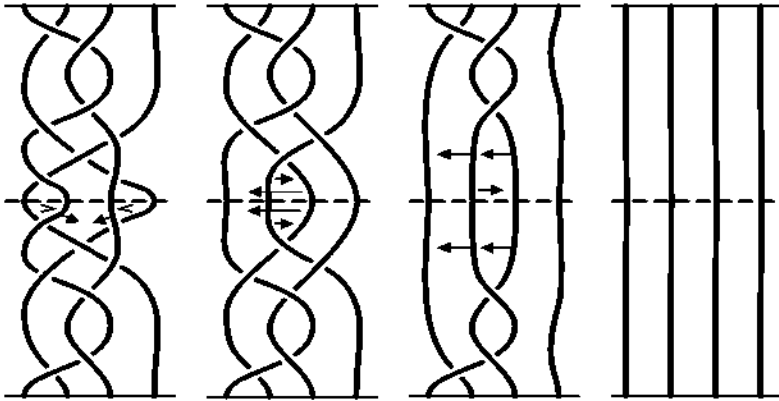


Рис. 2.14. Произведение косы и обратной к ней

Третье свойство, общее у кос и у чисел, — свойство ассоциативности произведения: всегда выполняется равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Всякий раз, когда некоторое множество снабжено операцией, обладающей тремя свойствами, о которых мы только что упоминали, математики говорят, что они имеют дело с *группой*. Итак, мы только что показали, что *множество кос с n нитями образует группу*. Эту группу мы будем обозначать через B_n .

Отметим сразу же, что группа кос B_n (для $n > 2$) — в отличие от чисел — не коммутативна: произведение двух кос зависит в общем случае от порядка множителей.

Существование произведения кос позволяет заменять рисунок, изображающий косу, некоторым словом — алгебраическим представлением этой косы. Действительно, двигаясь сверху вниз вдоль косы, мы видим, что наша коса — последовательное произведение кос с одним перекрестком в каждой (см. рис. 2.15); они называются *элементарными косами* и обозначаются (в случае кос с n нитями) b_1, b_2, \dots, b_{n-1} .

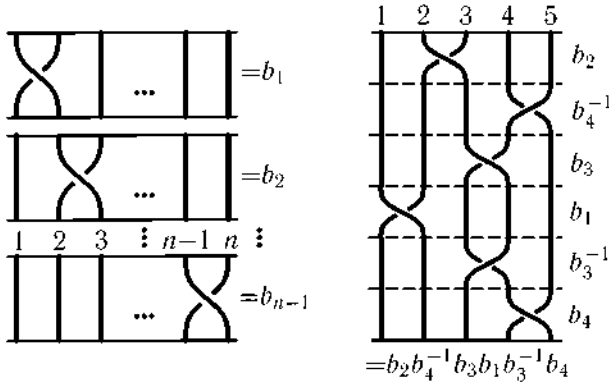


Рис. 2.15. Алгебраическое представление косы

Таким образом, мы заменили косы — геометрические объекты — словами, их алгебраическими кодами. Напомним, однако, что между геометрическими объектами — косами — существует отношение эквивалентности (изотопия). Что это означает на алгебраическом уровне? Ответ на этот вопрос был дан Артином, который обнаружил две серии алгебраических соотношений между косами-словами, достаточных, чтобы дать алгебраическое описание изотопии. Это соотношение коммутативности для отдаленных кос

$$b_i b_j = b_j b_i, \quad \text{если } |i - j| \geq 2, \quad i, j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

и соотношение Артина (или соотношение кос)

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

Геометрическая интерпретация этих соотношений показана на рис. 2.16.

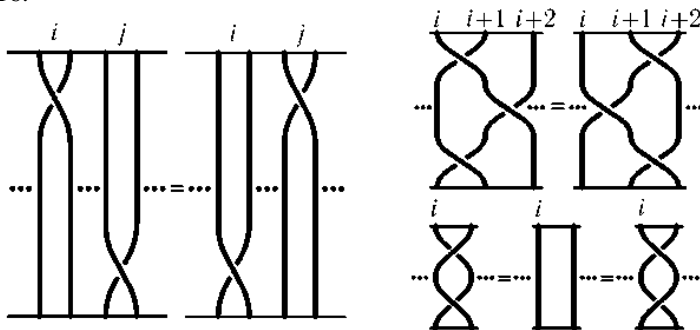


Рис. 2.16. Соотношения в группе кос

Немного пространственного воображения — и становится очевидным, что эти соотношения выполняются для кос, т. е. они отвечают изотопиям.

Менее очевидно — и это есть фундаментальный результат, принадлежащий Артину, — что этих двух соотношений, если добавить еще *тривиальные соотношения* (они называются так, поскольку выполняются в любой группе, а не только в группе кос B_n)

$$b_i b_i^{-1} = e = b_i^{-1} b_i,$$

также представленные на рис. 2.16, достаточно для того, чтобы заменить геометрические манипуляции, связанные с изотопией, на *допустимые алгебраические преобразования* с косами-словами. Каждое из этих допустимых преобразований состоит из замены подслова какого-нибудь слова, совпадающей с одной из частей (левой, правой) соотношений трех типов, указанных выше, другой частью (правой, левой) этого соотношения. Вот пример допустимых преобразований в группе кос с четырьмя нитями B_4 .

$$b_3^{-1}(b_2 b_3 b_2) b_3^{-1} = (b_3^{-1} b_3) b_2 (b_3 b_3^{-1}) = e b_2 e = b_2.$$

(Чтобы упростить понимание этой формулы, в скобки взяты подслова, которые последовательно заменяются в процессе преобразований.)

Более точно, теорема Артина утверждает, что *две косы изотопны тогда и только тогда, когда слово, представляющее одну из них, может быть преобразовано в слово, представляющее другую, с помощью последовательности допустимых преобразований*.

Важность этой теоремы объясняется тем, что она сводит геометрическое изучение кос к их алгебраическому изучению, заведомо более эффективному (а также доступному для компьютеров). Именно этот алгебраический подход к косам позволил Артину их классифицировать, т. е. отыскать *алгоритм сравнения*, который для каждой пары кос говорит нам «нет», если они не изотопны, и «да», если они изотопны (в последнем случае он дает к тому же последовательность допустимых преобразований, переводящую одну косу в другую).

Классификация кос

Мы не собираемся здесь описывать алгоритмы сравнения кос. Ни алгоритм Артина (который имеет английское название *combing* — расчесывание), ни другой, более простой и эффективный, найденный

недавно французским математиком Патриком Деорнуа (Patrick Dehornoy).

Читателя, желающего ознакомиться с их элементарным изложением, отсылаем к библиографии. Но чтобы убедить вас в эффективности алгебро-алгоритмических методов в геометрии, выбран один пример вычислений, выполненных компьютером — он содержит программу, исполняющую алгоритм Деорнуа. Эти преобразования, происходящие в группе кос B_4 и использующие обозначения (более читаемые) a, A, b, B, c, C для элементарных кос $b_1, b_1^{-1}, b_2, b_2^{-1}, b_3, b_3^{-1}$ соответственно, показывают, что некоторая коса с четырьмя прядями, имеющая априори достаточно запутанный вид, на самом деле тривиальна.

$$\begin{aligned}
 & ABBA AAAA [Ab b b b b b b c b a] Acc B C a a a a a a BB = \\
 & = ABBA AAAA [A b a] a a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = ABBA AAAA [A b a] B a a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = ABBA AA [A b a] B B a a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = ABBA [A b a] B B B B a a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = ABB [A b a] B B B B B a a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = [A B a] B B B B B B a a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b [A B B B B B B a] a a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A [A B a] a a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b [A B a] a a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b [A B a] a a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b [A B a] a a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b [A B a] a B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b b [A B a] B c b a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b b A B [B c b] a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b b A [B c b] C a B A c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b b A c b C C [a A] c c B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b b A c b [C C c] B C a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b b A [c b B C] a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A b b b b b b [A a] a a a a a a BB = \\
 & = b b A A A A A A [b b b b b b] a a a a a a BB = \\
 & = b b [A A A A A A a a a a a a] BB = [b b B B] = e.
 \end{aligned}$$

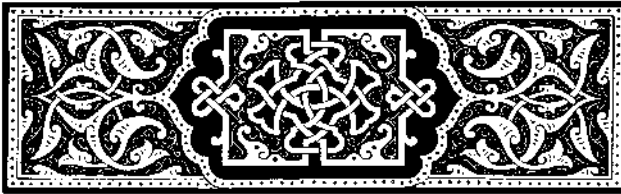
Для сравнения читатель может нарисовать предложенную косу и попробовать распутать ее геометрически. Это утвердит его в превосходстве компьютера, который потратил на выполнение задания менее десятой доли секунды.

Можно ли классифицировать узлы с помощью кос?

Теорема Александра утверждает, что каждый узел есть замыкание некоторой косы, а мы только что увидели, что косы можно

классифицировать. Можно ли получить классификацию узлов, основываясь на этих двух фактах? Многие крупные математики надеялись на это (некоторые надеются и до сих пор). История этих попыток, которая началась в тридцатых годах XX в. и, возможно, еще не закончилась, очень поучительна и полна неожиданных озарений.

15.3. Плоские диаграммы узлов



В двадцатых годах XX столетия начинал свои обстоятельные исследования немецкий математик Курт Рейдемейстер, будущий автор «Knottentheorie», первой монографии, посвященной узлам. Как классифицировать узлы? Проблема систематизации всевозможных положений кривой в пространстве представляется чрезвычайно трудной.

Аналитический подход (при котором узлы задаются уравнениями) ничего не дает; комбинаторный подход (при котором мы задаем узел как замкнутую ломаную линию, перечисляя последовательно координаты вершин) также безрезультатен. В этих двух случаях данные, задающие узел, не позволяют ни видеть его, ни манипулировать им. На практике, чтобы увидеть узел, его рисуют, т. е. проектируют на удобно выбранную плоскость, получая так называемую *диаграмму узла*. Когда манипулируют бечевкой, задающей положение узла в пространстве, его диаграмма претерпевает непрерывные изменения. Они позволяют отслеживать на плоскости эволюцию положений узла в пространстве. А можно ли обратить этот процесс? Можно ли осуществлять непрерывные модификации *проекции* таким образом, чтобы в результате получить все возможные положения бечевки в пространстве? Вот вопрос, который ставит Рейдемейстер.

И он на него отвечает. Для этого достаточно, говорит он, осуществлять над диаграммой конечное число операций, причем каждая из этих операций либо должна быть *тривиальным плоским преобразованием* (т. е. деформацией проекции, не меняющей перекрестки и их взаимное расположение), либо должна иметь вид одного из трех преобразований, изображенных на рис. 3.1.

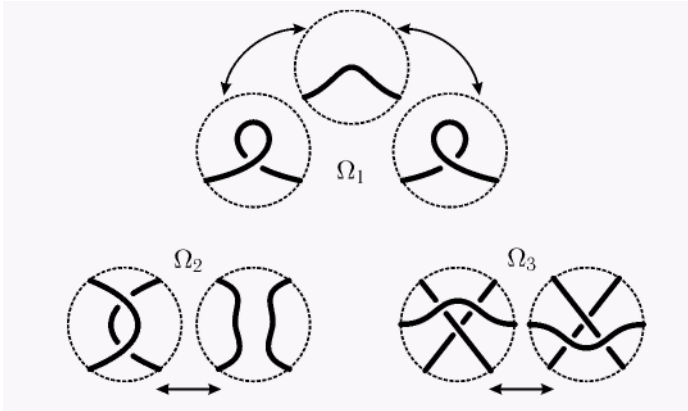


Рис. 3.1. Преобразования Рейдемейстера

Операции, изображенные на рис. 3.1, называются *преобразованиями Рейдемейстера* и обозначаются Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 . Эти преобразования соответствуют следующим ситуациям при манипуляциях с узлом:

- Ω_1 : появление (исчезновение) малой петли;
- Ω_2 : появление (исчезновение) парного перекрестка;
- Ω_3 : прохождение некоторой третьей ветви над перекрестком.

Следующий рисунок, представляющий процедуру развязывания, показывает, как преобразования Рейдемейстера могут участвовать в описании манипуляций с узлом.

Мы видим, что процедура начинается с исчезновения парного перекрестка на диаграмме (рис. 3.2 (а)), далее следует прохождение перекрестка (рис. 3.2 (б)), исчезновение парного перекрестка (рис. 3.2 (в)), исчезновение малой петли (рис. 3.2 (г)) и, наконец, исчезновение парного перекрестка (рис. 3.2 (д)).

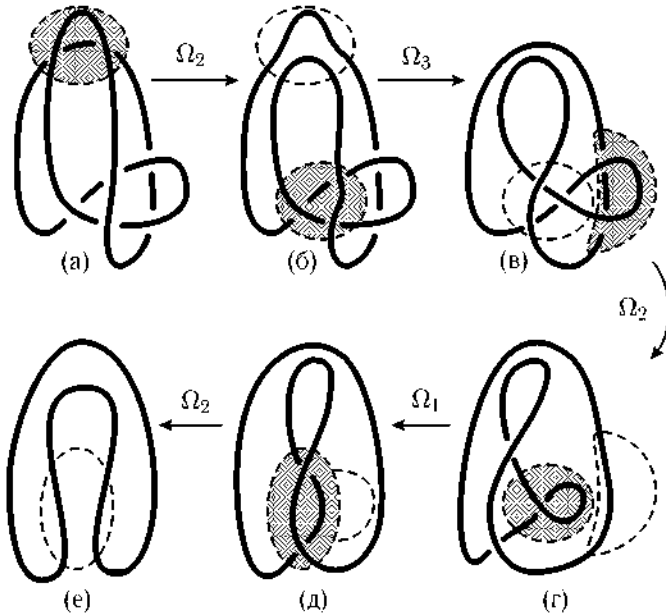


Рис. 3.2. Развязывание узла с использованием преобразований Рейдемейстера

Читатель заметил, что между моментами, когда осуществлялись преобразования Рейдемейстера, диаграмма узла претерпевала вспомогательные тривиальные плоские преобразования (которые не изменяют, напомним, ни количества, ни взаимного расположения перекрестков).

Чтобы понять, откуда берутся преобразования Рейдемейстера, нужно задержаться немного на проекциях узлов.

Проекции общего вида и катастрофические проекции

Диаграмму узла мы определяли как проекцию на плоскость, выбранную «подходящим образом». Что означает это выражение? Математик ответил бы, что плоскость должна быть выбрана таким образом, чтобы проекция была *в общем положении*. Но это уточнение совершенно бесполезно для тех, кто не знаком с этим термином, являющимся одним из основных математических понятий (особенно в

так называемой теории катастроф (теории особенностей), основы которой были заложены в работах американца Хасслера Уитни (Hassler Whitney) в период между мировыми войнами и которая впоследствии была развита французом Рене Томом (René Thom), россиянином Владимиром Арнольдом и их учениками), — интуитивно ясным, но трудным для формализации.

Проекция в общем положении — это проекция без катастроф, т. е. сингулярностей или устранимых *вырождений* (от которых можно избавиться, немного изменяя проектируемый объект). Уточним, что означают все эти синонимы (катастрофа, сингулярность, вырождение) в случае узла, представленного замкнутой ломаной линией. При определении проекции в общем положении узла мы предполагаем, что (1) две вершины (или более) не могут проектироваться в одну точку; (2) вершина или несколько вершин не могут при проектировании попасть на ребро, которому они не принадлежат; (3) три внутренние точки (или более) не могут проектироваться в одну.

Существование такой проекции для любого узла очевидно и доказывается очень просто (заметим для продвинутого читателя, что доказательство аналогичного утверждения для узлов, заданных гладкой кривой, значительно сложнее и требует определенной техники): избавиться от каждой из «запрещенных ситуаций» (катастроф) (1), (2), (3) можно, слегка подвинув одну из вершин узла, т. е. эти катастрофы легко устранить.

Отметим, что ситуации (1), (2), (3) существенно отличаются от катастрофы *пересечения*, которая происходит, когда две *внутренние* точки двух различных ребер проектируются в одну точку: такая катастрофа неустранима (в том смысле, что любое небольшое шевеление узла немного меняет положение перекрестка на диаграмме, но не устраняет его полностью).

Заметим, кроме того, что катастрофы (2) и (3) встречаются в некотором смысле чаще чем остальные: хотя во множестве проектирований катастрофы — исключительные события, все же, если можно так сказать, они являются наиболее обычными среди исключительных событий. Случаются более редкие катастрофы (они также запрещены, поскольку являются частными случаями катастроф (1), (2), (3)). Например, 17 точек, из которых 5 являются вершинами, могут проектироваться в единственную точку; 7 ребер (перпендикулярных плоскости проекции) могут вырождаться в единственную точку и т.д. Преобразования Рейдемейстера соответствуют как раз наименее редким катастрофам, что и показывает рис. 3.3.

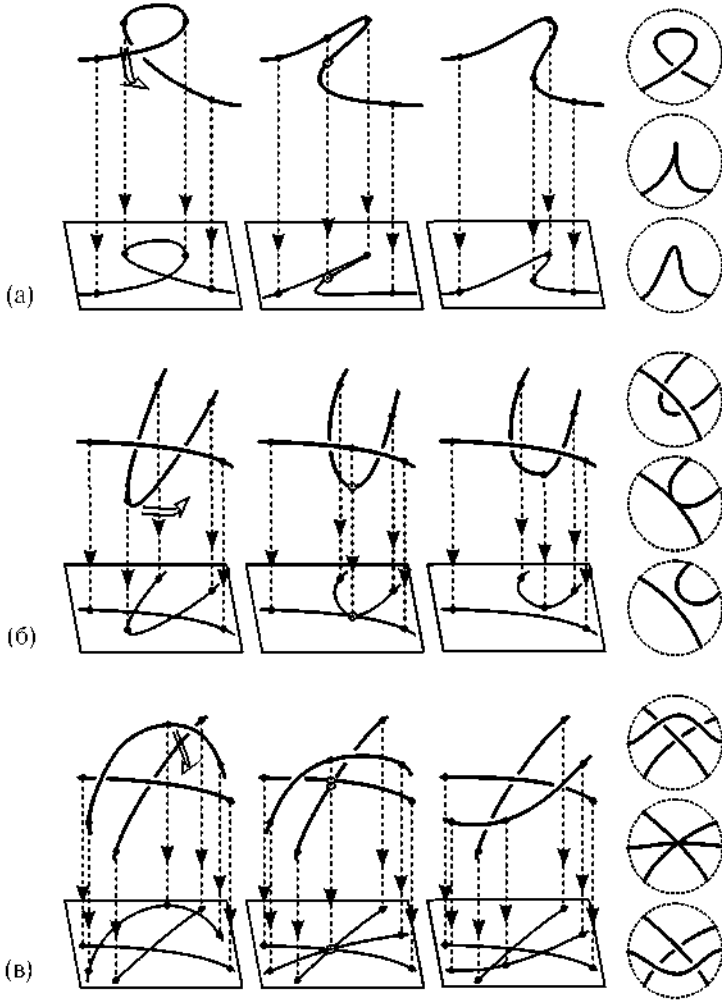


Рис. 3.3. Катастрофы и преобразования Рейдемейстера

Так, на рис. 3.3 (а) слева мы видим катастрофу типа (2). Первоначально малая петелька проецируется без особенностей, но в процессе ее разворачивания на мгновение две точки сливаются при проецировании в одну (образуя «клюв» на плоскости), а потом проецирование снова происходит без особенностей (а клюв исчезает); это отвечает преобразованию Рейдемейстера Ω_1 , показанному справа

на рис. 3.3 (а). Проницательный читатель, изучая далее случаи (б) и (в) на рис. 3.3, увидит, что катастрофа типа (2) порождает преобразование Ω_2 , а катастрофа типа (3) порождает преобразование типа Ω_3 .

Достаточность преобразований Рейдемейстера

Теперь, когда мы знаем, откуда происходят преобразования Рейдемейстера, мы в состоянии обсудить его главный результат, часто называемый *леммой Рейдемейстера*.

Некоторый узел можно преобразовать в другой узел непрерывной манипуляцией в пространстве тогда и только тогда, когда диаграмму первого узла можно превратить в диаграмму второго узла за конечное число преобразований Рейдемейстера и тривиальных преобразований.

Это утверждение означает, что можно изучить все пространственные манипуляции с узлами в пространстве, проводя тривиальные преобразования диаграмм на плоскости и применяя время от времени преобразования Рейдемейстера. Таким образом, Рейдемейстер свел задачу об эквивалентности узлов (трехмерную и достаточно абстрактную) к значительно более наглядной двумерной задаче преобразования диаграмм.

Прежде чем увидеть, что дает лемма Рейдемейстера для изучения (в частности, для классификации) узлов, скажем несколько слов о ее доказательстве. К сожалению (или к счастью — это зависит от точки зрения), известные доказательства не настолько просты, чтобы их можно было привести в этой книге. Для читателей, близких к математике, следует сказать, что достаточно детально проанализировать одно элементарное треугольное движение (см. начало гл. 16.1) и чуть изменить его, чтобы оно стало движением «общего положения», т. е. чтобы при нем могли происходить только катастрофы (2) и (3) («наименее редкие»), а они — это мы уже видели — соответствуют в точности преобразованиям Рейдемейстера.

Лемма Рейдемейстера: классифицирует ли она узлы?

Поставим себя на место Рейдемейстера, только что доказавшего свою лемму и пребывающего в эйфории. Первоначальной целью его работы была классификация узлов, т. е. разработка алгоритма, определяющего, эквивалентны ли два узла (заданные диаграммами) или нет. Попробуем составить такой алгоритм, используя достижения Рейдемейстера.

Берем первый узел и сравниваем его со вторым. Если количество перекрестков и их взаимное расположение одинаковы, то узлы эквивалентны и мы достигли цели. В противном случае применяем (наугад) какое-нибудь преобразование Рейдемейстера к первому узлу — и сравниваем результат со вторым узлом. Если они совпадают, то эквивалентность узлов вновь установлена. В противном случае нужно взять из памяти первый, исходный, узел и применить к нему другое преобразование Рейдемейстера, затем опять сравнить со вторым узлом и т. д. Если все преобразования, которые можно применить к первому узлу, не дают результата, нужно вернуться к модифицированному первому узлу, применить к нему еще одно преобразование, сравнить и т. д. Если два узла эквивалентны, то рано или поздно получится последовательность преобразований Рейдемейстера, переводящая первый узел во второй.

Алгоритм, описанный выше, легко реализуем на компьютере, даже самым маломощном. Так, небольшой ноутбук, на котором набирают этот текст, содержит, среди прочего, программу, которая может развязывать узлы (сравнивая их с тривиальным узлом так, как указано в предыдущем параграфе).

(Читатель может спросить — как же это компьютер «видит» узлы? На самом деле существует несколько методов «кодирования» узлов.

Например, тот, который используется в программе распутывания узлов, использует следующую кодировку трилистника:

1+-2-3+-1-2+-3-

Компьютер эту запись понимает. А вы?)

Разрешается ли таким образом проблема классификации узлов?

Разумеется, нет. Дело в том, что алгоритм, описанный выше, примененный к двум неэквивалентным узлам, не останавливается никогда: он продолжает работать бесконечно не давая ответа. Пользователь встает перед дилеммой: если программа не дает ответа после, к примеру, целых суток работы — следствие ли это того, что данный узел не тривиален, или компьютеру просто требуется еще время, чтобы найти последовательность операций, развязывающих узел?

Следует ли сразу ставить крест на идее Рейдемейстера? Нет, поскольку есть одно соображение, которое может спасти ситуацию. Это соображение, рано или поздно пришло в голову Рейдемейстеру, и оно вызвало у него, наверное, то особое чувство, которое испытывает иногда исследователь: чувство, что ты находишься на пороге открытия. (Заметим, что за этим чувством нас довольно часто ждет

разочарование, возникающее, когда мы видим, что идея, захватившая нас, не приводит к цели.)

Соображение это очень простое: преобразования $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ могут либо уменьшать число перекрестков (исчезновение малой петли, исчезновение парного перекрестка), либо его увеличивать (возникновение малой петли или парного перекрестка), либо, наконец, не изменять его (Ω_3 , проход над двойной точкой). Поскольку речь идет о развязывании, т. е. об упрощении узла, преобразования Ω_1 и Ω_2 следует использовать только в тех случаях, когда они уменьшают число перекрестков. При выполнении такой процедуры число перекрестков уменьшается и алгоритм, улучшенный таким образом, всегда завершает работу: либо перекрестков не останется вовсе (тогда данный узел тривиален), либо ни одно из допустимых преобразований не применимо (и узел не тривиален).

(Видимо, здесь следует заметить, что для данной проекции узла число различных применений операции Ω_3 конечно. Далее, нужно договориться, чтобы программа никогда не делала следующую глупость: после применения операции Ω_3 тут же применить эту операцию в обратную сторону. Иначе может возникнуть бессмысленный и бесполезный цикл (в компьютерном смысле) в программе. То же самое можно сказать и про операции Ω_1 и Ω_2 .)
Увы! Эта аргументация (с виду такая убедительная) является ошибочной. Дело в том, что в реальности не всегда можно развязать узел, упрощая его (уменьшая число перекрестков) на каждом этапе развязывания: иногда узел нужно усложнить, прежде чем упрощать его! Так часто приходится делать и в жизни: узел наших проблем следует еще больше запутать для того, чтобы он смог затем распутаться.

Пример тривиального узла, который не упрощается (его можно развязать, только увеличив сначала число перекрестков), представлен на рис. 3.4.

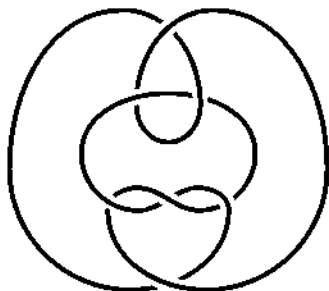


Рис. 3.4. Тривиальный неупрощаемый узел

Надежда получить простой и эффективный метод классификации узлов с помощью леммы Рейдемейстера оказалась, таким образом, слишком оптимистичной.

Нужно сказать, что в дальнейшем придумывание плохо распутываемых тривиальных узлов стало важной частью исследований алгоритмов распутывания. Особенно варварский пример узла такого типа (*очень* трудного для распутывания — попробуйте!) показан на рис. 3.5. Этот пример принадлежит немецкому математику Вольфгангу Хакену.

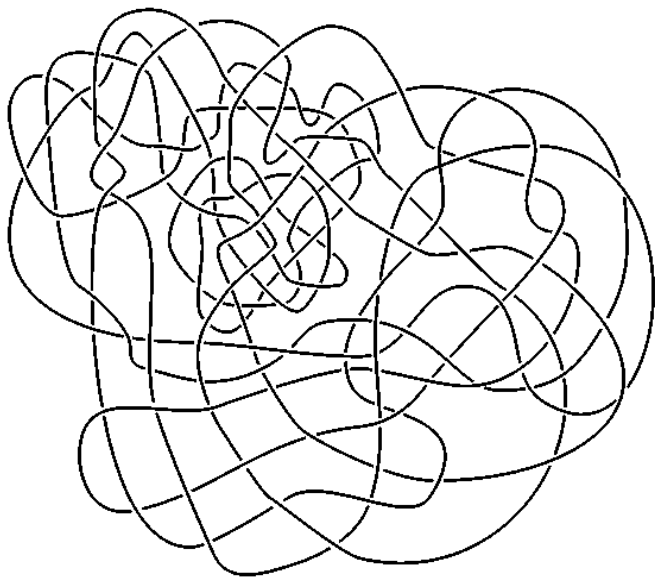


Рис. 3.5. «Гордиев узел» Вольфганга Хакена

Это он, кстати, в конце концов разрешил проблему развязывания узлов (Naken, 1961), но его алгоритм (слишком сложный для реализации на компьютере) основывается на идеях совсем другого порядка.

Что осталось от леммы Рейдемейстера?

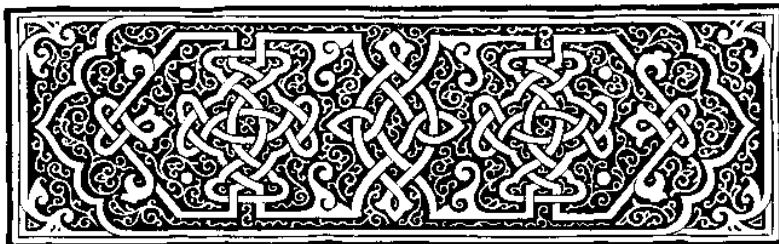
Крушение наших наивных надежд не означает, что роль леммы Рейдемейстера ограничивается составной частью неработающего алгоритма. В развиваемой далее теории эта лемма занимает существенное место, особенно в изучении инвариантов узлов, придуманных новозеландцем Воаном Джонсом, американцем Луисом Кауффманом (Louis Kauffman) и их последователями (гл. 16.6). Чтобы доказать, что некоторая функция диаграмм узлов, предлагаемая в качестве нового инварианта, действительно представляет собой инвариант, достаточно показать, что эта функция не меняется в течение всего процесса манипуляций с узлами; а для этого, по лемме Рейдемейстера, достаточно проверить, что она не меняется при преобразованиях Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 ; но эти преобразования очень просты, так что проверка обычно оказывается легкой.

Есть еще одно обстоятельство. Наша неудача с алгоритмом развязывания, описанным выше, относительна. С точки зрения теории, он не будет настоящим алгоритмом развязывания, если не будет доказано, что процесс полного перебора операций Рейдемейстера для развязывания обязательно приводит к цели за *ограниченное* число шагов. Именно это недавно доказали Дж. Хасс (Joel Hass) и Дж. Лагариас (Jeffrey Lagarias). Но увы, оценка числа шагов, полученная авторами, астрономическая, и нет надежд реализовать соответствующий алгоритм на компьютере.

Есть и другие подходы к этой задаче, позволяющие компьютеру (достаточно мощному) распутывать узлы, с которыми не удастся справиться «вручную». В частности, Иван Дынников придумал красивый способ развязывания: его компьютер справляется с гордиевым узлом Хакена за несколько микросекунд.

Если же действовать вручную, нам для развязывания гордиева узла Хакена остается лишь «алгоритм» Александра Македонского — разрубить этот узел!

15.4. Арифметика узлов



Арифметика... *узлов*? Именно так, поскольку не только натуральные числа $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ можно перемножать и раскладывать на простые множители. То же самое можно делать и с другими математическими объектами, в частности с узлами. При этом их арифметика очень похожа на арифметику натуральных чисел: она тоже обладает коммутативным умножением (которое называется композицией) и теоремой о единственности разложения на «простые узлы». Доказательство этого фундаментального принципа, который казался интуитивно ясным многим исследователям, оказалось трудным (как, кстати, и доказательство такого же принципа, относящегося к числам) и было получено лишь в 1949 г. немецким математиком Хорстом Шубергом.

Каждое положительное целое число раскладывается на простые множители единственным (с точностью до порядка сомножителей) образом: например,

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7;$$

точно так же и каждый узел является произведением (единственным с точностью до порядка сомножителей) простых узлов (например, узел на рис. 4.1 слева равен композиции двух узлов-трилистников и одного «турецкого тюрбана»).

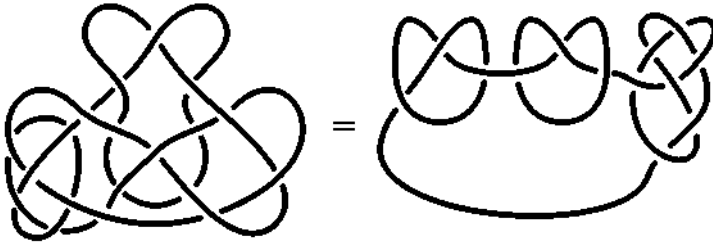


Рис. 4.1. Разложение узла на простые узлы

Читатель уже понял, что «произведение» узлов заключается, грубо говоря, в завязывании их один за другим (так же, как это делается для кос, заметит тот, кто прочел гл. 16.2). Чтобы уточнить эту операцию, мы поместим узлы (которые, напомним, были ранее определены как замкнутые кривые без самопересечений в трехмерном пространстве) в ящики: мы представляем, таким образом, каждый узел как завязанную бечевку внутри кубического ящика, при этом ее концы приклеены к ящику с двух противоположных сторон (рис. 4.2 (а)). (Мы оставляем на долю читателя, уже испорченного математическим образованием, позаботиться о превращении этого интуитивного описания в строгое математическое определение.) Легко видеть, что нужно сделать, чтобы превратить узел в ящике в узел, являющийся замкнутой кривой: достаточно соединить два конца бечевкой вне ящика, и наоборот.

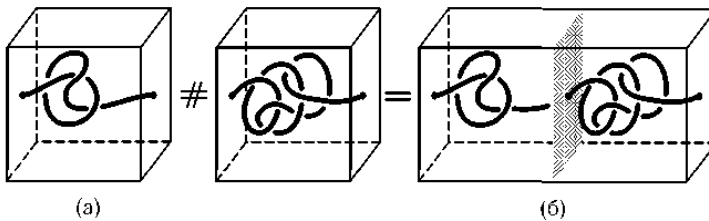


Рис. 4.2. Композиция узлов, расположенных в ящиках

Как только все узлы помещены в ящики, нет ничего более простого, чем определение их *композиции*, или *произведения* (операция композиции узлов часто называется (несправедливо!) «связной суммой»; мы избегаем этого неудачного термина) достаточно представить ящики один к другому и убрать двойную перегородку, которая их разделяет (педантичный читатель скажет, что полученный ящик

теперь не кубический, и, следовательно, узел-композиция не является узлом. Он прав. В отместку оставим за ним труд самому изменить определение так, чтобы нечего было возразить) (рис. 4.2 (б)).

Наша ближайшая цель — изучить основные свойства композиции узлов. Первым свойством является *ассоциативность*:

$$(a \# b) \# c = a \# (b \# c),$$

где символ $\#$ обозначает композицию узлов. Эта формула означает, что, перемножив сначала два узла a и b , а затем умножив полученный узел на третий узел c , мы получим тот же результат, как если бы перемножили сначала два узла b и c , а затем умножили узел a на полученный узел. Это утверждение очевидно, так как оно означает, что в обоих случаях мы составляем вместе три ящика и затем убираем две перегородки (в разном порядке, конечно, но результат один и тот же).

Следующее свойство — существование тривиального узла, обозначаемого 1 , не меняющего узла, с которым он перемножается (как и число 1 не изменяет числа, с которым оно перемножается):

$$a \# 1 = a = 1 \# a.$$

Разумеется, это узел, который «не завязан» и который можно представлять как прямолинейно натянутую бечевку в кубическом ящике. Приставление такого ящика к ящику какого-то узла, очевидно, не изменяет тип этого узла.

Следующее свойство более тонкое и заслуживает отдельного подзаголовка.

Коммутативность композиции узлов

Так же как и произведение чисел, композиция узлов *коммутативна* (результат не зависит от порядка множителей):

$$a \# b = b \# a.$$

Это соотношение совсем не очевидно, его доказательство, показанное схематически на рис. 4.3.

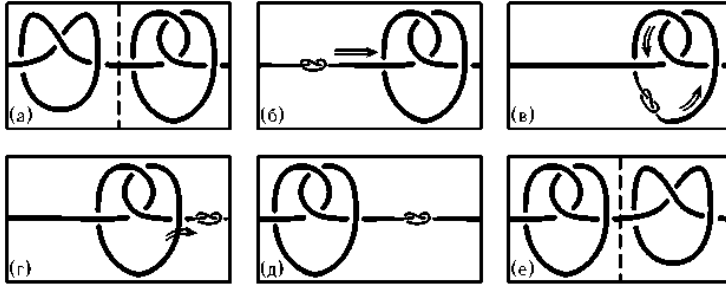


Рис. 4.3. Композиция узлов не зависит от порядка сомножителей

Что происходит на этом рисунке? Сначала, потянув за концы бечевки, образующей первый узел, получаем маленький затянутый узелок (рис. 4.3 (б)). Затем протаскиваем этот узелок вдоль бечевки и далее через весь второй узел (рис. 4.3 (в)). Малый узелок проходит (все время скользя вдоль бечевки) большой узел и оказывается справа от него (рис. 4.3 (г)). Наконец, переводим второй узел в первый ящик, затем расслабляем малый узелок. И задача решена (рис. 4.3 (д)).

Читателю, возможно, трудно представить, как узел может «скользить вдоль бечевки». Самое простое средство — взять подходящую бечевку (подойдет шнурок от ботинка) и проделать описанную процедуру. Эта же процедура, осуществляемая некоторыми организмами на самих себе, дает нам повод сделать еще одно отступление, на этот раз биологическое.

Отступление: живой узел

Странное морское существо, о котором пойдет речь, называется *миксина*. Она живет в морях средних широт, на большой глубине. У нее очень гибкий позвоночник, настолько гибкий, что она легко может завязаться узлом. Кроме того, в случае опасности миксина выделяет ядовитый слизистый секрет и покрывает им свое тело. Для этого она быстрым движением завязывает свой хвост узлом; этот узел скользит вдоль всего корпуса, нанося выделяемый в это время секрет по всей длине тела (рис. 4.4 (а)).

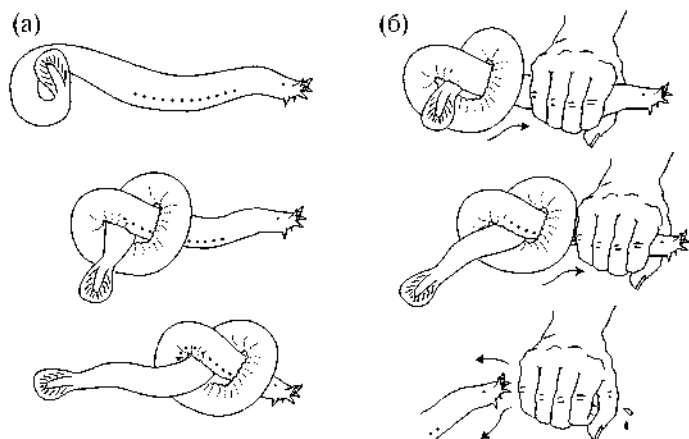


Рис. 4.4. Как миксина сдвигает свой узел

Если вы схватите миксину рукой, она ловко вывернется у вас из пальцев. И не только из-за слизи, но также благодаря узлу, который она перемещает вперед от хвоста к голове, упираясь с силой в кулак, в то время как голова вытягивается назад, — и она выскользывает из кулака (рис. 4.4 (б)). Это вытягивание с помощью узла позволяет миксине осуществлять другие жизненные функции, например, питание, которое она осуществляет высасыванием (эти животные — падальщики и не оставляют от своих жертв ничего, кроме кожи и скелета).

И, наконец, когда опасность прошла, миксина освобождается от своего слизистого покрытия (иначе она задохнется в своем липком коконе) таким же скользящим узлом от хвоста к голове. (По поводу других подробностей об этом своеобразном существе см. Jensen, 1966.)

Можно заметить, что узел миксины является трилистником (простым узлом), чаще всего левым трилистником. Миксина, видимо, не знает, как делаются другие узлы; но можно легко представить подобное существо, только более длинное и с еще более гибким позвоночником, которое способно завязываться в более сложные узлы.

Однако оставим в стороне биологические узлы и вернемся к их математическим моделям.

Может ли один узел аннулироваться другим?

Когда определена композиция узлов, естественно возникает вопрос: существуют ли *обратные* узлы, т. е. можно ли для данного узла найти

другой узел, такой, что его композиция с первым даст тривиальный узел? Более наглядно: если есть узел на одном конце бечевки, можно ли завязать на другом конце такой узел, чтобы эти два узла взаимно уничтожили друг друга, если потянуть за концы бечевки?

Ответ на аналогичный вопрос для целых чисел отрицателен: для натурального числа $n > 1$ нельзя найти такое натуральное число m , что $n \cdot m = 1$. (Конечно, можно взять $m = 1/n$, но m будет тогда дробью, а не натуральным числом.)

Мы сейчас увидим, что точно так же обстоит дело и с узлами: *никакой нетривиальный узел не обладает обратным узлом*. Это утверждение далеко не очевидно. На первый взгляд оно кажется даже неверным: почему нельзя сделать на другом конце бечевки «симметричный» узел, который аннулирует первый? Мы предлагаем читателю вначале поэкспериментировать с бечевкой, начиная с узла-трилистника. Последующая за этим неудача, возможно, заставит его задуматься. Мы же переходим к «доказательству» того, что никакого обратного узла не существует.

Рассуждаем от противного: предположим, что a и b — такие узлы (нетривиальные, т. е. $a \neq 1$, $b \neq 1$), что $a \# b = 1$. Рассмотрим бесконечную композицию

$$C = a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# a \# b \# \dots$$

Эта композиция равна, с одной стороны, тривиальному узлу, так как можно записать

$$C = (a \# b) \# (a \# b) \# (a \# b) \# \dots = 1 \# 1 \# 1 \# \dots = 1.$$

С другой стороны, расставив скобки иначе, получаем

$$\begin{aligned} C &= a \# (b \# a) \# (b \# a) \# \dots = a \# (a \# b) \# (a \# b) \# \dots = \\ &= a \# (1 \# 1 \# \dots) = a \# 1 = a. \end{aligned}$$

Получается, следовательно, что $a = 1$, что противоречит предположению $a \neq 1$. Это противоречие «доказывает», таким образом, что обратных узлов не существует.

Кавычки в предыдущей фразе дают знать, что в приведенном доказательстве есть сомнительные места. Действительно, возвращаясь к целым числам, можно так же «доказать», что $1 = 0$: достаточно рассмотреть бесконечную сумму $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ и расставить скобки двумя различными способами, точно так же, как выше. Ошибка в этих доказательствах одна и та же: **нельзя обращаться с бесконечными суммами или композициями (которые надо бы предварительно определить) так, как обращаются с конечными суммами (композициями).**

Однако в случае узлов небольшая модификация рассуждения превращает его во вполне строгое. Для этого копии узлов a и b ставятся, чередуя их друг с другом, в бесконечную последовательность ящиков, которые становятся все меньше и меньше и сходятся к одной точке (так и определяется, кстати, бесконечная композиция (рис. 4.5)).

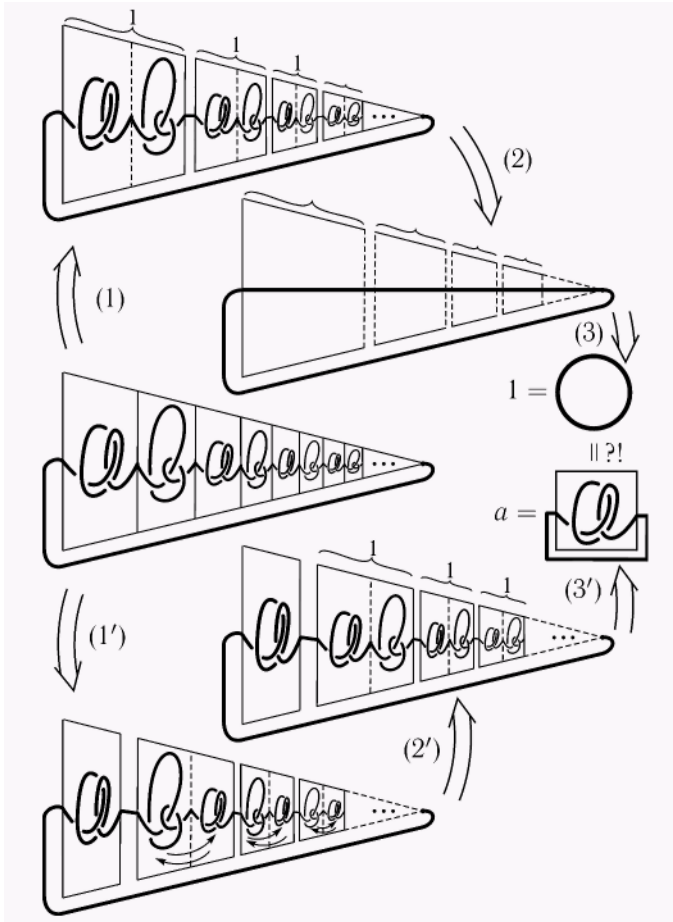


Рис. 4.5. Узел не может занулить другой узел

После этого остается заменить сомнительные алгебраические операции корректно определенными топологическими.

Мы опускаем описание технических деталей (для читателя, близкого к математике, заметим, что для применения аргументов, представленных на рис. 4.5, нужно, в частности, использовать другое определение эквивалентности узлов, основанное на понятии гомеоморфизма). Доказательство с помощью бесконечной композиции есть нечто большее, чем блестящий софизм (такой, как об Ахилле и черепахе), оно основано на строгом математическом построении.

Отметим в заключение этого раздела, что автор идеи не именно этого, но схожего построения — не специалист в теории узлов, а философ и немецкий политический деятель, один из гениальнейших математиков своего времени, создавший независимо от Ньютона дифференциальное и интегральное исчисление, — Вильгельм Лейбниц. Он использовал это математическое построение совершенно в другом контексте (теории узлов в то время не существовало). Оно ему понадобилось для строгого доказательства одной теоремы о классическом объекте дифференциального исчисления — условно сходящихся рядах.

Простые узлы

Мы только что видели, что не существует понятия обратного узла, так же как нет обратных натуральных чисел (что означает, в другой терминологии, что у числа 1 нет других делителей, кроме него самого). Читатель, наверное, помнит со школьных лет определение простых чисел: это числа, которые не имеют других делителей, кроме самого себя и 1. Это простое определение порождает загадочный ряд чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, ..., находящийся в центре внимания математиков с древнейших времен. А какова ситуация для узлов? Существуют ли *простые узлы*, т. е. узлы, которые нельзя представить в виде композиции двух других нетривиальных узлов? Ответ положительный: трилистник, восьмерка и вообще все узлы из таблицы на рис. 1.5 — простые, в то время как квадратный (он же прямой) узел, который скауты называют «двойным узлом» (рис. 4.6 (г)), и узел на рис. 4.6 (д) являются *составными узлами*.

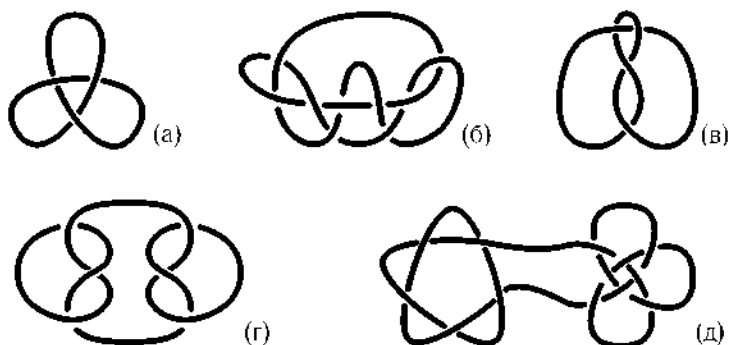


Рис. 4.6. Узлы простые (а, б, в) и составные (г, д)

Как установить, что простые узлы существуют? Как доказать, например, что трилистник — простой узел? Идея, которая сразу же приходит в голову, — использовать минимальное число перекрестков узлов: если бы трилистник (у которого три перекрестка) был составлен из двух других нетривиальных узлов, последние имели бы по меньшей мере три перекрестка каждый (так как все узлы с двумя или менее перекрестками тривиальны). Три плюс три равно шести, шесть больше трех — из полученного противоречия следует нужное нам утверждение. К сожалению, этой аргументации недостаточно, так как мы не доказали, что *минимальное число пересечений составного узла равно сумме минимальных чисел двух узлов-сомножителей*. Есть гипотеза, что это утверждение верно, однако оно до сих пор не доказано.

Итак, **каждый узел раскладывается в композицию простых узлов**. Для каждого натурального числа разложение на простые множители единственное. А верно ли это для узлов?

Единственность разложения на простые узлы

Здесь также имеется полная аналогия с натуральными числами: **каждый узел раскладывается на простые узлы единственным образом (с точностью до порядка)**. Получить доказательство этой замечательной теоремы было заветным желанием многих исследователей. Немец Хорст Шуберт решил эту проблему в 40-х годах XX столетия. Однако его доказательство, одновременно фундаментальное и технически сложное, остается за рамками нашей книги.

Теорема Шуберта, вместе с другими общими свойствами узлов и целых чисел, приводит нас к естественной идее занумеровать узлы так, чтобы нумерация отражала разложение на простые множители. Такая нумерация каждому простому узлу сопоставляла бы простое число, а каждому составному узлу — составное число таким образом, чтобы простые множители, на которые раскладывается число-номер, были бы номерами простых множителей узла. Увы! Хотя такая нумерация в принципе существует, нет естественного алгоритма, который бы ее строил.

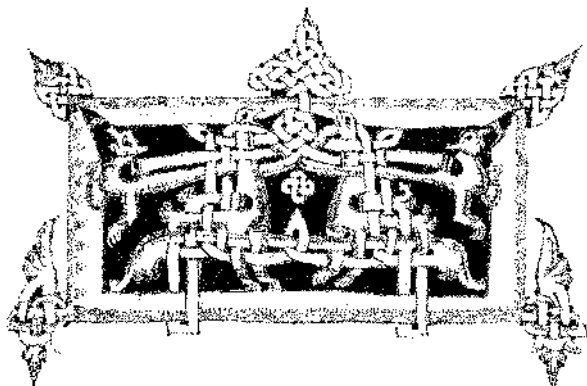
Основная причина такого положения вещей в том, что, в отличие от чисел, неизвестно, как складывать два узла; мы умеем только строить их композицию (перемножать). Каждое целое положительное число может быть получено сложением подходящего числа единиц (1 — «тривиальное» число относительно умножения), например, $5=1+1+1+1+1$. Но нельзя получить все узлы, «складывая экземпляры тривиального узла», такой операции сложения не существует.

Было бы точнее сказать, что неизвестно, существует ли подходящая операция сложения; известно только то, что те, кто ее искал, не добились успеха. Можно, по крайней мере, с уверенностью сказать, что если она существует, то геометрическое сложение узлов далеко не просто... в противном случае кто-нибудь уже нашел бы эту операцию.

Другая причина, по которой не существует естественной нумерации узлов, — это отсутствие порядка во множестве узлов. Натуральные числа обладают естественным полным порядком ($1, 2, 3, 4, 5, \dots$); какого-нибудь порядка, подобного этому, не существует (или он пока еще не открыт) для узлов. Конечно, обычно упорядочивают узлы числом минимальных перекрестков у их диаграмм, но этот порядок не является линейным: можно ли сказать, какой из двух узлов с пятью перекрестками (см. таблицу узлов на рис. 1.5) «меньше», а какой — «больше»?

Итак, арифметика узлов не привела нас к их классификации.

15.5. Хирургия и инварианты



В 1973 г. английский математик Джон Конвей ввел две маленькие и очень простые «хирургические операции», два способа изменения узла в окрестности перекрестка; этим операциям было суждено сыграть фундаментальную роль в теории узлов.

Первая операция, которую мы называем *переброской*, состоит в преобразовании выбранного перекрестка (на плоской диаграмме узла) в противоположный перекресток — верхняя ветвь становится нижней и наоборот (рис. 5.1); с бечевкой переброска может быть реализована разрезанием верхней ветви и склеиванием ее под второй ветвью.

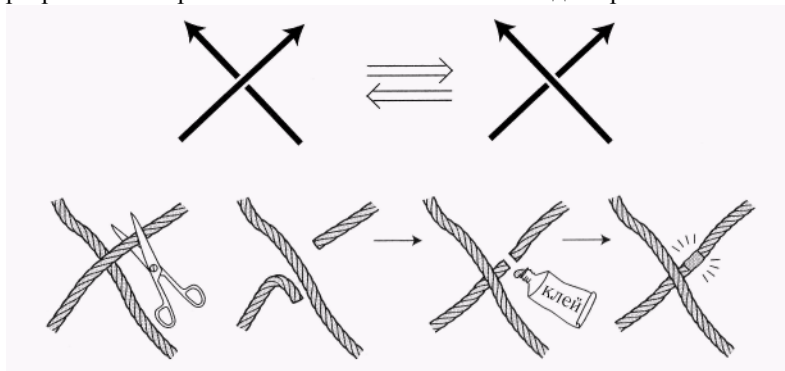


Рис. 5.1. Переброска: верхняя дуга становится нижней

Конечно, переброска может изменить тип узла; например, применив переброску к одному из перекрестков трилистника, мы получаем

тривиальный узел (трилистник развязывается — проверьте это, сделав рисунок).

Вторая малая хирургическая операция Конвея — *разрешение* — состоит в ликвидации пересечения путем взаимной замены ветвей (рис. 5.2 (а)); с бечевкой она реализуется разрезанием обеих ветвей в точке пересечения и последующим склеиванием их «наоборот» (рис. 5.2 (б)). Отметим, что, когда ветви не ориентированы, имеется два способа склеить попарно четыре конца (рис. 5.2 (б), (в)), однако ориентация узла определяет однозначный выбор концов для склейки (он диктуется стрелками, как на рис. 5.2 (а)).

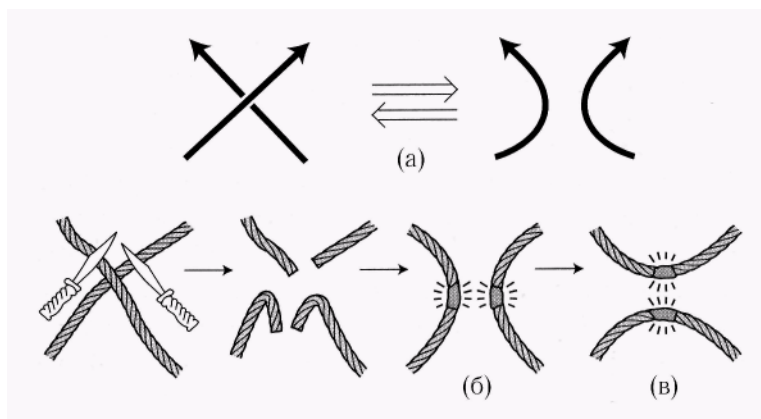


Рис. 5.2. Разрешение перекрестка: дуги разрезаются и переклеиваются «наоборот»

Переброска и разрешение были известны и часто использовались топологами и до Конвея. В частности, американец Александр использовал их для вычисления полиномов, носящих его имя (о них речь впереди). Вклад Конвея состоял в том, что он показал, что эти две операции можно использовать в качестве базы для *определения* инварианта узлов совершенно элементарным образом (полинома Конвея, который появится немного позже в этой главе).

На самом деле важность операций Конвея выходит далеко за рамки теории узлов. Эти операции играют существенную роль в жизни как таковой и постоянно используются природой в процессе размножения биологических существ. Для описания этой роли — достаточно необычной — стоит сделать небольшое отступление.

Отступление: молекулы-узлы, ДНК и топоизомеразы

Важность молекулы ДНК, открытой Уотсоном и Криком, — молекулы, несущей генетический код, — поставила перед биохимиками целую серию топологических проблем. Эта длинная закрученная двойная спираль может, как известно, воспроизводить свою копию, затем разделяясь в две одинаковые молекулы, которые — в отличие от двух нитей исходной молекулы — не зацеплены между собой и могут разойтись. Как это возможно топологически?

Достаточно тонкие исследования показали, что существуют ферменты, выполняющие эту задачу. Они называются **топоизомеразы**. Точнее, **топоизомеразы позволяют осуществлять три основных операции**, представленные на рис. 5.3.

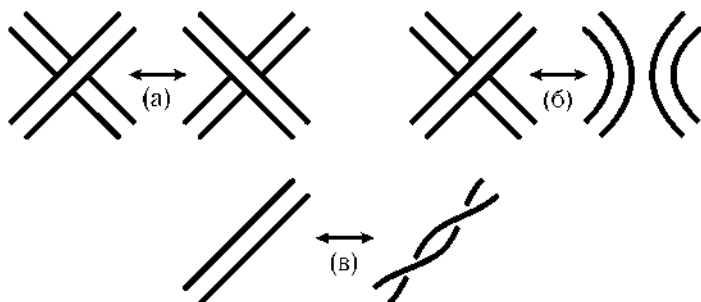


Рис. 5.3. Схемы операций, производимых топоизомеразы над ДНК

Читатель сразу же узнает операции (а) и (б): это, конечно, переброска и разрешение Конвея! Третья операция, которая называется *твист*, также известна в топологии; она имеет отношение к **математической теории лент**, весьма **полезной в современной теоретической физике**. Рассмотрим более детально, как действуют эти необычные ферменты на длинные молекулы, в частности на молекулы ДНК. Нужно сразу же подчеркнуть, что наблюдать визуально это действие, происходящее на молекулярном уровне, невозможно: даже самые мощные электронные микроскопы позволяют получить лишь косвенные сведения.

Напомним вначале, что **молекула ДНК представляет собой длинную двойную спираль**, каждая нить которой состоит из оснований А, Т, Г, Ц, порядок которых на нити кодирует генетические свойства индивидуума (это похоже на то, как порядок цифр 0,1,2,..., 9 в строке текста дает десятичный код числа). На рис. 5.4 схематично

представлена часть молекулы ДНК.

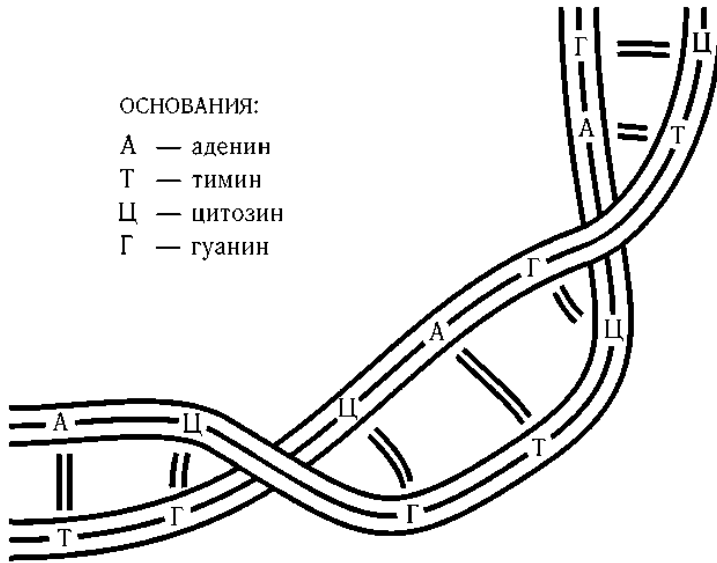


Рис. 5.4. Структура молекулы ДНК из двух нитей

Известно, что концы двух нитей ДНК обычно свободны. Существуют и молекулы из двух замкнутых нитей (две сплетенные змеи, кусающие свои хвосты), а также молекулы, состоящие из единственной нити, как замкнутой, так и со свободными концами. **Эти молекулы участвуют в трех классических генетических процедурах: репликации, транскрипции и рекомбинации;** кроме того, молекулы из двух нитей способны *свертываться* (превращаться из вытянутых в компактно упакованные объекты). **Топоизомеразы играют решающую роль во всех этих процессах, осуществляя операции разрезания, перекомпоновки и склейки.** Во-первых, они могут разрезать нить, переместить другую нить через полученное отверстие и затем заклеить разрез (это — переброска Конвея). Кроме того, осуществив два разреза и два склеивания, они соединяют две нити «наоборот» (разрешение Конвея).

Точный механизм операций разрезания, передвижения и склейки сегодня еще недостаточно изучен. Известно тем не менее, что существуют различные типы топоизомераз (они разные для ДНК из одной и двух нитей). В работе Джеймса Ванга (James Wang) описано,

как происходит свертывание (и обратная процедура) замкнутой молекулы ДНК.

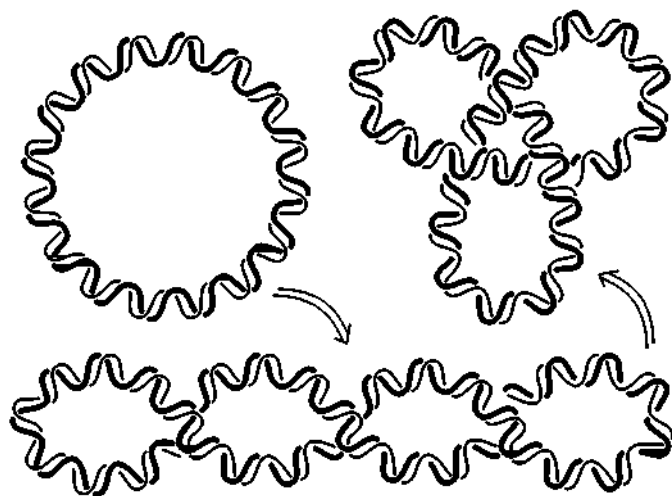


Рис. 5.5. Свертывание в клубок молекулы ДНК из двух нитей

Свертывание ДНК похоже на то, что часто происходит с телефонным шнуром в форме длинной спирали. Когда вы после разговора опускаете трубку на аппарат, подводящий шнур немного подкручивается, постепенно запутываясь все больше и больше, и становится бесформенным компактным клубком. Это, конечно, досадно, поскольку сокращается расстояние, на которое можно отойти от аппарата. Свертывание ДНК также преобразует длинную спираль в компактный клубок, но в данном случае это полезный результат: преобразование длинной молекулы (длина которой несколько сантиметров) в маленький клубок позволяет ей легко войти в ядро клетки, размеры которого измеряются в ангстремах (один ангстрем есть одна десятиллиардная доля метра).

В своем нормальном состоянии (не свернутом) спираль ДНК делает полный оборот на протяжении части нити, содержащей 10,5 последовательных оснований. Осуществляя твист большое число раз (посмотрите опять на рис. 5.3 (в)), соответствующие топоизомеразы преобразуют простую замкнутую кривую ДНК так, как это показано на рис. 5.5.

Отметим, что, с топологической точки зрения, одним из результатов твиста является изменение *индекса зацеплений* двух ветвей ДНК (этот

инвариант, восходящий к Гауссу, измеряет, сколько раз одна ветвь оборачивается вокруг другой). Существуют и другие топологические явления, которые играют существенную роль в биологии; однако детальное описание полученных здесь результатов не входит в наши намерения. Более полную информацию читатель может найти в статье Ванга (Wang, 1994).

Инварианты в теории узлов

Возвратимся к математической теории узлов, чтобы поговорить, наконец, об *инвариантах*. Что они собой представляют и для чего нужны? Чаще всего инварианты используются для обоснования отрицательного ответа на самый естественный вопрос, касающийся узлов. Этот вопрос мы назвали *проблемой сравнения*: как определить, глядя на две диаграммы, представляют ли они один и тот же узел или два разных узла? Так, диаграммы (а) и (д) на рис. 5.6 представляют один узел — трилистник; действительно, на этом же рисунке можно видеть, как представление (а) может быть переведено в представление (д). Напротив, все наши усилия преобразовать диаграмму (е) в какое-нибудь представление трилистника приведут к неудаче (попробуйте!) Но как это доказать? То, что мы не сумели перейти от одной схемы к другой, ни о чем не говорит: может быть, это удастся сделать кому-нибудь более находчивому или везучему.

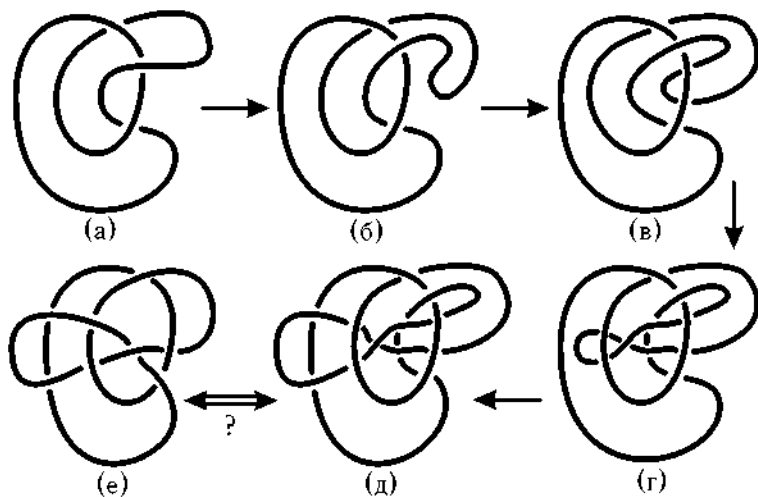


Рис. 5.6. Шесть представлений одного и того же узла?

Предположим теперь, что в нашем распоряжении есть инвариант узлов, т. е. способ, позволяющий связывать с каждой диаграммой узла соответствующий алгебраический объект (число, многочлен) таким образом, что этот объект *не изменяется*, когда мы преобразуем узел, как на рис. 5.6 (а)—(д). Возьмем две диаграммы (например, (е) и (д) на рис. 5.6), и вычислим значения инварианта. Если полученные значения различны, можно заключить, что *эти две диаграммы наверняка не могут определять один и тот же узел*.

Например, вычисление полиномов Конвея (что это такое — мы объясним далее) для диаграмм (а) и (е) на рис. 5.6 дает соответственно $x^2 + 1$ и $-x^4 + x - 1$; значит, эти две диаграммы представляют два разных узла.

Прежде чем перейти к изучению инварианта Конвея, попытаемся найти самостоятельно какой-нибудь численный инвариант узлов.

Первая идея, которая приходит в голову, — это ассоциировать с каждой диаграммой количество перекрестков. Увы! Это число не инвариант: когда мы манипулируем с узлом в пространстве, на плоской проекции одни перекрестки могут появляться, а другие исчезать (см., например, рис. 5.6). (Для тех, кто прочел гл. 16.3, заметим, что две операции Рейдемейстера изменяют количество перекрестков: первая добавляет к нему ± 1 , вторая ± 2 перекрестка.)

Однако, отталкиваясь от этой идеи, легко определить инвариант узлов: достаточно рассмотреть *минимум* $c(N)$ числа перекрестков на *всех* проекциях узла N . Это число (которое является целым неотрицательным) — инвариант по определению, поскольку оно не зависит от данной конкретной проекции, ведь его определение опирается на множество всех проекций. К сожалению, этот инвариант бесполезен для сравнения узлов: непонятно, как его вычислять, основываясь на конкретной проекции. Поскольку сегодня не известен никакой алгоритм для его вычисления в общем случае, мы переходим к более сложному, но вычислимому инварианту — инварианту Конвея.

Полином Конвея

Для каждой диаграммы N ориентированного узла Конвей строит многочлен $\nabla(N)$ от одной переменной x . Этот многочлен должен удовлетворять трем следующим условиям.

(I) *Инвариантность*. Две диаграммы одного и того же узла имеют один и тот же полином

$$N \sim N' \Rightarrow \nabla(N) = \nabla(N').$$

(II) *Нормализация.* Полином тривиального узла равен единице, рассматриваемой как «полином нулевой степени»:

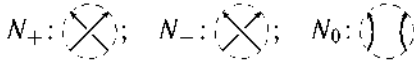
$$\nabla(\bigcirc) = 1.$$

(III) *Скейн-соотношения* (от англ. skein — клубок) *Конвея.*

Выполняется равенство

$$\nabla(N_+) - \nabla(N_-) = x\nabla(N_0),$$

где три диаграммы N_+ , N_- , N_0 совпадают вне окрестности некоторого пересечения, а внутри этой окрестности имеет место следующая ситуация:



(т.е. N_0 и N_- получаются из N_+ переброской и разрешением соответственно). Например, когда N_+ определяет узел-трилистник, соотношения Конвея дают следующие узлы:

$$-\nabla(\text{trefoil}) + \nabla(\text{trefoil}) = x\nabla(\text{trefoil}). \quad (*)$$

Внимательный читатель заметит, что в данном случае диаграмма N_0 не является диаграммой узла: она состоит из *двух* замкнутых кривых вместо одной — это диаграмма *зацепления* (набора кривых в пространстве, которые завязываются отдельно или переплетаясь друг с другом). Это нам не мешает — полином Конвея определяется как раз для зацеплений, частным случаем которых являются узлы.

В дальнейшем, мы будем записывать соотношения Конвея (и другие подобные соотношения) в следующей символической форме:

$$\nabla(\text{crossing}) - \nabla(\text{crossing}) = x\nabla(\text{two circles}).$$

Это означает, что речь идет о трех зацеплениях, совпадающих вне некоторой ограниченной пунктиром окрестности одного и того же перекрестка; при этом второе и третье зацепления получены из первого операциями переброски и разрешения, проведенными внутри этой окрестности.

Примеры вычисления полиномов

Одно из преимуществ инварианта Конвея — простота, с которой он вычисляется. Вот несколько примеров.

Рассмотрим зацепление, состоящее из двух не связанных окружностей.

Тогда $\nabla(\bigcirc \bigcirc) = 0$. Действительно, имеем

$$x \nabla(\bigcirc \bigcirc) \stackrel{(III)}{=} \nabla(\bigcirc \times \bigcirc) - \nabla(\bigcirc \infty \bigcirc) \stackrel{(II)}{=} \\ \stackrel{(II)}{=} \nabla(\bigcirc) - (\bigcirc) \stackrel{(I)}{=} 1 - 1 = 0.$$

Рассмотрим теперь зацепление, состоящее из двух связанных окружностей, скажем, так называемое, зацепление Хопфа

$$H = \bigcirc \bigcirc.$$

Из соотношений Конвея имеем

$$\nabla(\bigcirc \bigcirc) - \nabla(\bigcirc \times \bigcirc) \stackrel{(III)}{=} x \nabla(\bigcirc \infty \bigcirc)$$

и, поскольку

$$\nabla(\bigcirc \bigcirc) = 0, \quad \nabla(\bigcirc) \stackrel{(I)}{=} 1,$$

из этого следует, что $\nabla(H) = x$.

Вычислим, наконец, полином Конвея трилистника T . Для этого вернемся к соотношениям (*); второй член в левой части этой формулы в силу правила (I) равен $\nabla(\bigcirc)$ и, следовательно, в силу правила (II) равен

1; выражение в правой части по предыдущим вычислениям равно $x \cdot x = x^2$. Получаем, следовательно, $\nabla(T) = x^2 + 1$.

Итак, вычисление полинома Конвея узла (или зацепления) представляется своеобразной последовательностью геометрических операций (перебросок или разрешений) и классических алгебраических операций (суммы и произведения полиномов).

Обсуждение результатов

Что можно вывести из этих вычислений? Немало. Прежде всего, мы располагаем теперь формальным доказательством следующих фактов:

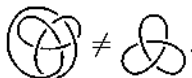
(1) нельзя разделить две кривые в зацеплении Хопфа:

$$\bigcirc \bigcirc \neq \bigcirc \bigcirc;$$

(2) нельзя развязать узел-трилистник:

$$\bigcirc \neq \bigcirc;$$

(3) узел, представленный на рис. 5.6 (е), не является трилистником:



Конечно, читатель может сказать, что он не видит смысла в формальном доказательстве таких вполне очевидных фактов, как (1), (2) или (3). Ему можно возразить, что мы имеем здесь *общий метод*, который работает так же хорошо и в более сложных ситуациях, когда интуиция не дает нам ответа. Например, интуиция не говорит абсолютно ничего об узлах, диаграммы которых представлены на рис. 5.7.

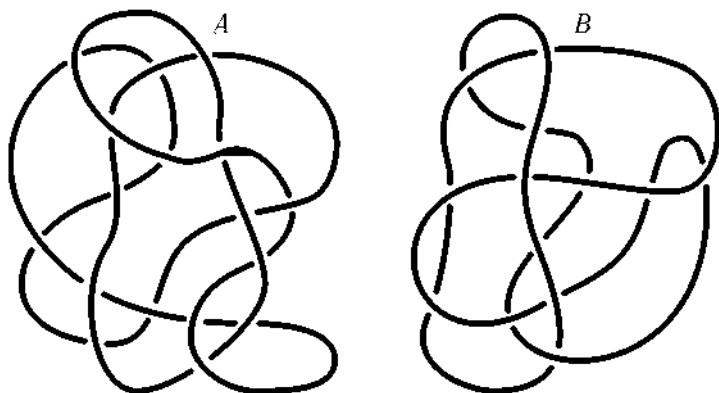


Рис. 5.7. Представляют ли эти диаграммы один и тот же узел?

Зато программа вычисляет полином Конвея за несколько секунд — и сообщает, что

$$\nabla(A) = 1 - x^2, \quad \text{а} \quad \nabla(B) = x^2 + 1.$$

Это доказывает, что узлы, представленные диаграммами A и B , различны. У нас есть, таким образом, мощный инвариант, который позволяет различать узлы. Делает ли он это всегда? Другими словами, если у двух диаграмм полиномы Конвея совпадают, значит ли это, что эти диаграммы представляют один и тот же узел? Всегда ли верно, что

$$\nabla(K_1) = \nabla(K_2) \implies K_1 = K_2?$$

К сожалению, ответ отрицательный: вычисления, подобные предыдущим, показывают, что полином Конвея для трилистника с рис. 1.1 совпадает с полиномом Конвея для его зеркального образа. Полином Конвея не отличает трилистник от его зеркального отражения; для этого он не является достаточно тонким инструментом.

Но откуда мы знаем, что трилистник и его зеркальное отражение не являются одним и тем же узлом? Хороший вопрос. Мы не в состоянии это доказать до тех пор, пока не будем иметь в распоряжении более тонкий инвариант, чем полином Конвея. Таковым является знаменитый полином Джонса (о котором мы будем говорить в следующей главе), а также полином Хомфли, разговором о котором мы закончим настоящую главу.

Полином Хомфли

«ХОМФЛИ» («HOMFLY») — это не фамилия изобретателя этого полинома: речь идет о сокращении, соответствующем фамилиям шести исследователей, которые открыли один и тот же полином и опубликовали свои результаты одновременно (в 1985 г.) в одном и том же журнале: H = Hoste, O = Ocneanu, M = Millet, F = Freyd, L = Lickorish и Y = Yetter.

Наиболее простой способ определить полином Хомфли $P(x, y)$ от двух переменных x и y — использовать условия Конвея (I), (II), (III) с P вместо ∇ и со следующей модификацией скейн-соотношения (аксиома (III')):

$$xP\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) - yP\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right). \quad (\text{III}')$$

Читатель, который понял, как проводятся несложные вычисления полинома Конвея, получит, вероятно, удовольствие от проведения тех же вычислений с новым скейн-соотношением (III') для тех же узлов и зацеплений. В частности, он увидит, что полиномы Хомфли трилистника и его зеркального отображения различны.

Таким образом, полином Хомфли более тонкий, чем полином Конвея. Но является ли он полным инвариантом, может ли он различить все неизотопные узлы? Увы! На рис. 5.8 показаны два различных узла, у которых полиномы Хомфли одинаковы.

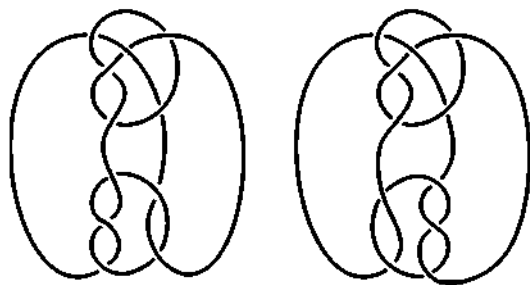
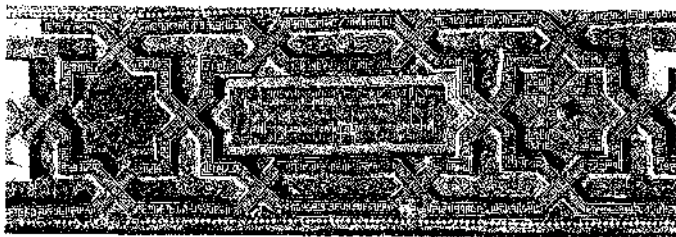


Рис. 5.8. Два узла с одинаковым полиномом Хомфли

Вот почему поиски полного инварианта продолжаются в последующих главах...

15.6. Полином Джонса и спиновые модели



Нет никакого сомнения, что открытие Воаном Джонсом, новозеландским математиком, работающим в Соединенных Штатах, полинома, который носит его имя, дало новый импульс изучению инвариантов узлов. Однако значение этого открытия выходит далеко за рамки одной только теории узлов; его популярность объясняется связями с другими областями математики (операторные алгебры, косы) и особенно с физикой (статистические модели, квантовые группы).

Было бы логично, следовательно, посвятить эту главу — центральную в нашей книге — теории Джонса. К сожалению, в той форме, в которой она была изложена вначале автором, эта теория далеко не элементарна (см. Stewart, 1989). Однако имеется другой подход к полиному Джонса, принадлежащий Луису Кауффману из Иллинойского университета в Чикаго, обладающий двумя преимуществами: он сравнительно простой и к тому же ясно раскрывает связь со *статистической физикой*.

Именно на этой области физики основано наше изложение, и начнем с нескольких относящихся к ней основных понятий.

Статистические модели

В течение тридцати лет (и особенно после публикации в 1982 г. книги Роджера Бакстера (R. Baxter), посвященной этой теме), *статистические модели* и, в частности, знаменитая *модель Изинга* интересуют как математиков, так и физиков. О чем идет речь? О теоретических моделях регулярных атомных структур; они могут находиться в различных состояниях, каждое из которых определяется

распределением *спинов атомов* (очень простой пример представлен на рис. 6.1).

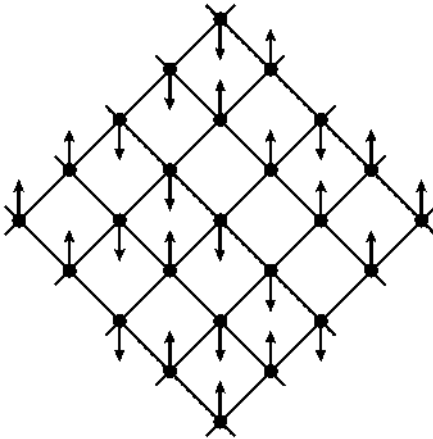


Рис. 6.1. Структура атомов со спинами

Каждый атом (изображенный на рисунке жирной точкой) в данный момент времени характеризуется его взаимодействием с соседними атомами (взаимодействие изображено соединением двух атомов-точек отрезком), а также его «внутренним состоянием» — тем, что физики называют его спином, параметром (речь идет о «внутреннем угловом моменте»), который может принимать конечное число значений (в данном случае — два). Два спина в нашей модели P называются *up* и *down*; мы изображаем их стрелочками, направленными вверх и вниз соответственно. Для того чтобы модель была полностью определена, нужно задать *статистическую сумму* (*статсумму*) модели. Это выражение вида

$$Z(P) = \sum_{s \in S} \exp \frac{-1}{kT} \sum_{(a_i, a_j) \in A} \mathcal{E}(s(a_i), s(a_j)), \quad (6.1)$$

где внешняя сумма вычисляется по множеству S всех состояний, а внутренняя сумма — по всем стрелкам (взаимодействиям). Здесь $\mathcal{E}(s(a_i), s(a_j))$ — энергия взаимодействия между атомами a_i и a_j (которая фактически зависит лишь от их спинов), T — температурная константа и k — коэффициент (зависящий от выбора единиц), который называется *постоянной Больцмана*.

Когда модель задана, можно вычислить (используя статсумму Z) ее полную энергию, вероятность ее нахождения в данном состоянии и, кроме того, изучить ее *фазовые переходы*, например, в случае *модели Поттса* замерзания воды — ее переход из жидкого состояния (вода) в твердое состояние (лед) и обратно.

(Речь идет здесь об исключительно теоретической модели — «двумерной воде». Существует, конечно, трехмерная модель, более реалистичная, но и более сложная. Мы рассматриваем «плоскую воду» не только для того, чтобы упростить изложение, но также потому, что — мы это сейчас увидим — именно она соответствует узлам.)

Нашей целью не является дальнейшее углубление в изучение статистических моделей. То немногое, что было о них только что сказано, будет достаточно для того, чтобы понять источник вдохновения Луиса Кауффмана, когда ему в голову пришла странная идея связать с каждым узлом... некоторую статистическую модель.

Модель Кауффмана

Рассмотрим некоторый узел (неориентированный), например, тот, который показан на рис. 6.2 (б).

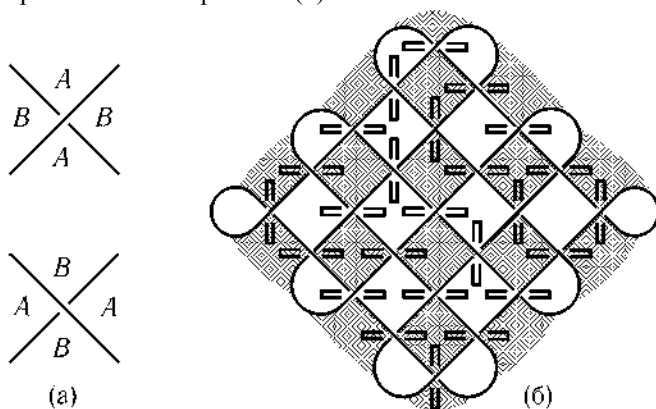


Рис. 6.2. Углы типа A и B и пример состояния узла

Рассмотрим более внимательно какой-нибудь перекресток этого узла; локально, каждый перекресток делит плоскость на два дополнительных угла, один из которых мы назовем типа A (или типа up) и другой —

типа B (или типа down). *Угол типа A* — это тот, который мы сначала видим справа, когда проходим перекресток по верхней ветви; *угол типа B* — тот, который мы сначала видим справа, когда проходим перекресток по нижней ветви. Направление, выбранное для прохода перекрестка, может быть любым из двух возможных; углы, определенные выше, не зависят от этого выбора — проверьте! На рис. 6.2 (б) мы затенили углы A и оставили белыми углы B .

Имея какой-нибудь узел, мы можем, следовательно, выбрать для каждого перекрестка то, что можно назвать *спином Кауффмана*, то есть ассоциировать с каждым перекрестком слово up или down (означающие, что выбран угол типа A или B , соответственно). Мы говорим, что выбор спинов для всех перекрестков определяет *состояние узла*. Узел с n перекрестками допускает, таким образом, 2^n возможных состояний. Чтобы представить узел в каком-то вполне определенном состоянии, нужно было бы написать up или down у каждого перекрестка, но мы предпочли нарисовать палочку внутри выбранного угла (посмотрите на рис. 6.2 (а) и 6.2 (б)).

Это обозначение удобно тем, что ясно указывает выбор одного из двух возможных способов разрешения перекрестка (неориентированного) узла, осуществляя замену ветвей вдоль направления, указанного палочкой (рис. 6.3 (б)). Этот выбор будет нам необходим сейчас же.

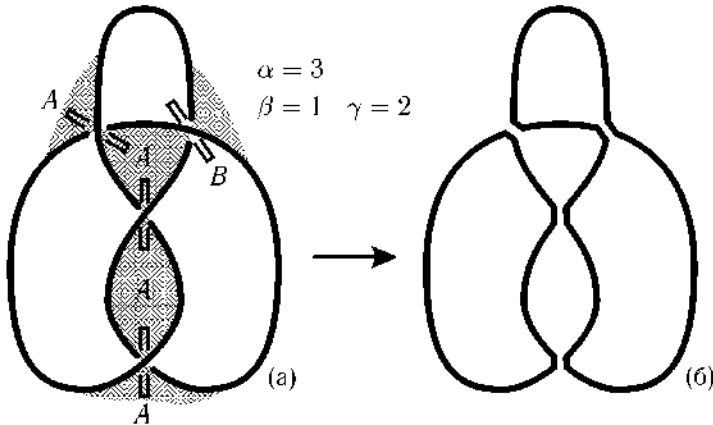


Рис. 6.3. Разрешение состояния узла восьмерка

Обозначим через $S(K)$ множество всех состояний данного узла K . Чтобы полностью определить модель Кауффмана, связанную с узлом K , достаточно определить соответствующую статсумму. Она будет

обозначаться $\langle K \rangle$, называться *скобкой Кауффмана* и определяться формулой:

$$\langle K \rangle = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}, \quad (6.2)$$

здесь суммирование происходит по всем возможным состояниям $s \in \mathcal{S}(K)$ узла K (их 2^n), $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ обозначают число выбранных (т. е. указанных палочкой) углов типа A и B соответственно, $\gamma(s)$ обозначает число замкнутых кривых, получаемых, когда разрешаются все перекрестки узла вдоль палочек состояния s . Можно спросить себя, где Кауффман взял эту странную формулу, которая очень мало напоминает свой прототип (6.1). Не вдаваясь в детали, можно сказать, что он ее получил методом проб и ошибок и рассуждений от противного, то есть отталкиваясь от того результата, который он хотел бы получить.

Применение этой формулы всегда очень просто (хотя и трудоемко, когда узел имеет много перекрестков). На рис. 6.3 видно одно из возможных состояний диаграммы восьмерки (6.3 (а)) и ее разрешение (6.3 (б)); в этом примере $\alpha(s) = 3$, $\beta(s) = 1$ и $\gamma(s) = 2$ (после разрешения всех перекрестков появляются две замкнутые кривые). Следовательно,

$$a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1} = a^{3-1} (-a^2 - a^{-2})^{2-1} = -a^4 - 1.$$

Чтобы получить значение скобки Кауффмана диаграммы восьмерки, нужно нарисовать все 16 возможных состояний диаграммы ($16 = 2^4$) и просуммировать шестнадцать членов вроде только что вычисленного. Таким образом получается полином от a , который даст значение скобки Кауффмана для диаграммы данного узла. (На самом деле в общем случае полином может содержать и отрицательные степени a , т. е. это «полином Лорана».)

Заметим, что формула (6.2) имеет смысл не только для узлов, но и для зацеплений с числом компонент, большим 1.

Прежде чем продолжить изучение скобки Кауффмана сравним полученную модель с какой-нибудь классической моделью, например, с моделью Поттса. Начнем сравнивать рисунки 6.1 и 6.2. Они похожи до такой степени, что их можно перепутать. Конечно, внешнее сходство — лишь следствие подходящего выбора узла, представленного на рисунке 6.2, однако можно и вообще сказать, что состояние узла и состояние плоской регулярной атомной структуры — это приблизительно одно и то же. В противоположность этому,

формулы (6.1) и (6.2) для статсумм моделей совершенно разные, и формула Кауффмана (6.2) не имеет никакой физической интерпретации. Модель Кауффмана, таким образом, не «настоящая» статистическая модель, — что ничуть не мешает использовать ее для узлов. С другой стороны, мы увидим далее, что настоящие статистические модели (в частности, модель Поттса) могут служить для конструирования других инвариантов узлов.

Свойства скобки Кауффмана

Наша ближайшая цель — уточнить некоторые свойства этой скобки, чтобы увидеть, как из нее получается инвариант узлов.

Три главных свойства скобки следующие:

$$\langle \langle \otimes \rangle \rangle = a \langle \langle \cup \rangle \rangle + a^{-1} \langle \langle \cap \rangle \rangle; \tag{I}$$

$$\langle \langle K \cup \bigcirc \rangle \rangle = (-a^2 - a^{-2}) \langle \langle K \rangle \rangle; \tag{II}$$

$$\langle \langle \bigcirc \rangle \rangle = 1. \tag{III}$$

Начнем с конца. Третье свойство, самое простое, говорит нам, что скобка Кауффмана диаграммы тривиального узла \bigcirc равна 1

(полином нулевой степени, состоящий из одного члена, равного 1).

Свойство (II), в котором K есть некоторый узел или зацепление, показывает, как изменяется значение скобки K , когда к K добавляется не зацепленный с K тривиальный узел: это значение получается умножением на коэффициент, равный $(-a^2 - a^{-2})$.

Свойство (I) (несмотря на свою простоту, это — основное соотношение теории Кауффмана, а также этой главы) показывает связь между скобками трех зацеплений (или узлов), обозначенных символически тремя значками:



они отличаются между собой лишь в одном месте: именно, эти три зацепления совпадают везде, кроме внутренностей трех маленьких шаров, где они имеют вид, показанный этими значками.

Тот, кто прочитал главу, посвященную соотношениям Конвея, заметил аналогию между свойством (I) построения Кауффмана и скейн-соотношением. Напомним вид значков, которые участвуют в скейн-соотношении:



Чем отличается скейн-соотношение Конвея от свойства (I)? Прежде всего, узлы, рассматриваемые Кауффманом, неориентированы (отсутствуют стрелки). Следовательно, существует только один тип перекрестка (два у Конвея), но два способа его разрешить (стрелки у Конвея определяют единственное разрешение, одно и то же для двух различных перекрестков — прохода снизу или сверху). Это говорит о том, что основное соотношение (I) в теории Кауффмана — лишь очень простое тождество, связанное с локальными хирургическими операциями.

Свойства (I)—(III) позволяют очень просто вычислять скобку Кауффмана диаграммы узла (или зацепления): достаточно применить (I) (запоминая промежуточные результаты) до полного исчезновения перекрестков, далее вычислить с помощью соотношений (I) и (II) скобку зацепления, состоящего из N непересекающихся окружностей (она, очевидно, равна $(-a^2 - a^{-2})^{N-1}$) и, зная это значение, получить значение всей скобки рассматриваемого узла, используя, шаг за шагом, промежуточные результаты. Например, для тривиального узла (по свойству (III)) имеем

$$\langle \bigcirc \rangle = 1,$$

откуда с помощью (II) получаем

$$\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = -a^2 - a^{-2},$$

а теперь, из (I) и предыдущего результата, находим

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \infty \rangle &= a \langle \bigcirc \rangle + a^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = \\ &= a \cdot 1 + (a^{-1})(-a^2 - a^{-2}) = -a^{-3}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\langle \infty \infty \rangle = a^{-3}.$$

Таким образом, мы видим, что три диаграммы тривиального узла



имеют разные значения скобки Кауффмана, а значит, сама скобка не инвариантна.

Для зацепления Хопфа, используя предыдущие вычисления, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= a \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + a^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = \\ &= a(-a^3) + a^{-1}(-a^{-3}) = -a^4 - a^{-4}. \end{aligned}$$

Для трилистника аналогично получаем формулы:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle = \\ &= a(a^6) + a^{-1}(-a^4 - a^{-4}) = a^7 - a^3 - a^{-5}, \\ \langle \text{Diagram 4} \rangle &= a^{-7} - a^{-3} - a^5. \end{aligned}$$

Разумеется, скобка Кауффмана может быть полезна в теории узлов, если она является инвариантом, то есть если две диаграммы одного и того же узла имеют всегда одну и ту же скобку Кауффмана. Это существенное обстоятельство обсуждается в следующем пункте, предназначенном для тех, кто прочел главу о преобразованиях Рейдемейстера. Читатель, который ее пропустил (или не любит математических доказательств), может без больших потерь перейти к следующим разделам, в которых появляется полином Джонса.

Инвариантность скобки Кауффмана

В силу леммы Рейдемейстера, чтобы проверить инвариантность скобки, достаточно выяснить, сохраняется ли ее значение при преобразованиях Рейдемейстера. Читатель, может быть, помнит, что их три; их можно освежить в памяти, взглянув на рис. 3.1.

Начнем со второго преобразования Ω_2 . Используя свойство (I) несколько раз и свойство (II) один раз, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram A} \rangle &= a \langle \text{Diagram B} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram C} \rangle = \\ &= a[a \langle \text{Diagram D} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram E} \rangle] + \\ &\quad + a^{-1}[a \langle \text{Diagram F} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram G} \rangle] = \\ &= (a^2 + a^{-2} + aa^{-1}(-a^2 - a^{-2})) \langle \text{Diagram H} \rangle + \\ &\quad + aa^{-1} \langle \text{Diagram I} \rangle = \langle \text{Diagram I} \rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая первый и последний член этой серии равенств, мы видим, что инвариантность скобки относительно Ω_2 установлена.

Внимательный читатель должен был заметить исчезновение различных степеней a , в результате которого появился множитель 1 перед желаемым значком



и множитель 0 перед нежелательным значком



Конечно, это не является счастливой случайностью: выбор (априори странный) коэффициентов в формуле Кауффмана (II) как раз мотивируется этим вычислением.

Переходим к проверке инвариантности относительно Ω_3 , наиболее сложного из преобразований Рейдемейстера. Используя опять основное соотношение (I), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle, \\ \langle \text{Diagram 4} \rangle &= a \langle \text{Diagram 5} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle. \end{aligned} \tag{*}$$

Очевидно,

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 4} \rangle,$$

поскольку эти две диаграммы изотопны на плоскости. Применяя теперь два раза инвариантность относительно Ω_2 (мы только что ее установили), получаем:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 2} \rangle = \langle \text{Diagram 3} \rangle.$$

Сравнивая правые части двух равенств (*) и учитывая предыдущие равенства, мы видим, что эти правые части совпадают. То же самое, следовательно, имеет место для левых частей. Но это как раз то равенство, которое выражает инвариантность скобки по отношению к Ω_3 !

Чтобы доказать инвариантность скобки Кауффмана, осталось проверить ее инвариантность относительно первого преобразования Рейдемейстера Ω_1 , наиболее простого из трех. Используя (I) и (II), получаем:

$$\langle \text{link} \rangle = a \langle \text{link} \rangle + a^{-1} \langle \text{link} \rangle = \lambda \langle \text{link} \rangle,$$

где $\lambda = a(-a^2 - a^{-2}) + a^{-1} = -a^3$.

Коэффициент a^3 испортил все дело (для симметричной малой петли получается коэффициент a^{-3}). Неудача!

Скобка Кауффмана не инвариантна относительно Ω_1 и, следовательно, не является инвариантом изотопии узлов. Например, имеем:

$$\langle \text{link} \rangle = -a^3 \neq \langle \text{link} \rangle = -a^{-3},$$

в то время как обе диаграммы представляют тривиальный узел и, следовательно, хотелось бы получить равенство:

$$\langle \text{link} \rangle = \langle \text{link} \rangle = \langle \text{circle} \rangle = 1,$$

которое на самом деле не выполняется. Стоит ли все бросить в отчаянии?

Трюк Кауффмана и полином Джонса

Отправной пункт очевиден: поскольку этот коэффициент $-a^{\pm 3}$ не желает исчезать, к нашей скобке нужно добавить дополнительный множитель, который помог бы избавиться от этого назойливого $-a^{\pm 3}$. Но каким образом?

Для этого нужно воспользоваться классическим инструментом теории узлов — индексом скрещивания; он определяется следующим образом: для каждого *ориентированного* узла K индекс скрещивания (*writhe*) $w(K)$ — целое число, равное разности между числом положительных перекрестков и числом отрицательных перекрестков (рис. 6.4).



Рис. 6.4. Положительные и отрицательные перекрестки узла

Легко проверяется, что индекс скрещивания инвариантен относительно преобразований Рейдемейстера Ω_2 и Ω_3 . Напротив, преобразование Ω_1 изменяет этот индекс: оно добавляет 1 или -1 в соответствии с тем, отрицательная



или положительная



Петля ликвидируется.

Следуя Кауффману, определим сейчас полином Джонса $X(K)$ ориентированного узла K (или зацепления), положив:

$$X(K) = (-a)^{-3w(K)} \langle |K| \rangle, \quad (6.3)$$

где неориентированная диаграмма $|K|$ получается из ориентированной диаграммы K снятием стрелок и где $\langle \cdot \rangle$ — это та самая скобка

Кауффмана, которая была для нас причиной стольких радостей и огорчений.

Трюк Кауффмана — это множитель $(-a)^{-3w(K)}$, который прекрасно справляется с задачей уничтожения коэффициента $a^{\pm 3}$, мешающего при применении преобразования Ω_1 .

Теперь очевидно, что *полином Джонса есть инвариант изотопии узлов (и зацеплений)*.

Действительно, и скобка $\langle \cdot \rangle$, и множитель $(-a)^{-3w(K)}$ являются (это

мы видели) инвариантными относительно преобразований

Рейдемейстера Ω_2 и Ω_3 ; с Ω_1 все также проходит хорошо;

изотопическая инвариантность $X(\cdot)$ вытекает, следовательно, из леммы Рейдемейстера.

Никто из математиков не оспаривал у Луиса Кауффмана чести изобретения соотношения (I), формулы безобидного вида, однако, как сразу же стало очевидным, фундаментального значения. Тем не менее, не прошло и года, как Кауффман узнал, что не он ее изобрел: один специалист по древней кельтской культуре объяснил ему, что скульпторы, работавшие над менгирами много тысячелетий тому назад, использовали в точности это соотношение для преобразования структур переплетенных лент (а следовательно, узлов и зацеплений), которые украшают эти могильные камни.

Свойства полинома Джонса

Мы только что доказали первое фундаментальное свойство полинома Джонса:

(i) *Две диаграммы одного и того же узла (зацепления) имеют один и тот же полином Джонса.*

Второе фундаментальное свойство (доказательство которого получается достаточно простым вычислением, основанным на «кельтском

свойстве» (I) скобки Кауффмана и на определении (6.3)) — это скейн-соотношение для полинома Джонса:

$$a^{-4}X\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) - a^4X\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) = (a^2 - a^{-2})X\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right). \quad (\text{ii})$$

Два других свойства получаются непосредственно из свойств (I) и (II) скобки:

$$X(K \sqcup \bigcirc) = (-a^2 - a^{-2})X(K), \quad (\text{iii})$$

$$X(\bigcirc) = 1. \quad (\text{iv})$$

Этих свойств достаточно, чтобы вычислить полином Джонса конкретных узлов или зацеплений. (На самом деле, можно показать, что свойства (i)—(iv) полностью определяют полином Джонса.)

Проведем вычисления для трилистника, сделав замену $a^4 = q$ и обозначив полученный полином через V (вместо X):

$$q^{-1}V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - qV\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ \diagup \end{array}\right) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \\ \diagup \end{array}\right).$$

Значение V для тривиального узла известно; вычислим его для зацепления Хопфа:

$$q^{-1}V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}\right) - qV\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}\right) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}\right).$$

Из (iii) и (iv)

$$\begin{aligned} V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}\right) &= -q^{-2}(q^{1/2} + q^{-1/2}) - q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \\ &= -q^{-1/2} - q^{-5/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для трилистника

$$\begin{aligned} V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) &= q^{-2} + q^{-1}(q^{-1/2} + q^{-5/2})(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \\ &= q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}. \end{aligned}$$

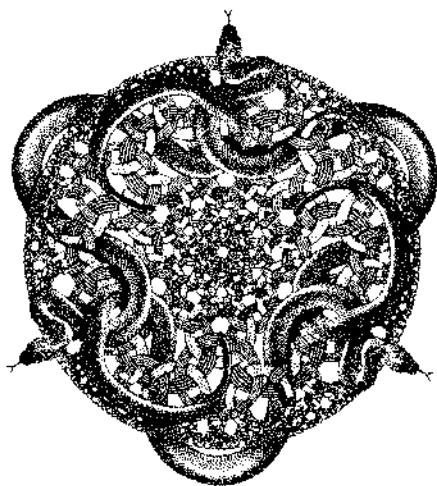
Можно проверить, что тот же самый результат получается, если использовать определение (6.2) и наше предыдущее вычисление скобки Кауффмана для трилистника.

Подобные вычисления показывают, что все узлы небольшой таблицы на рис. 1.5 различны. Не следует думать, что доказательство этого факта — жертва математическому педантизму. Когда полином Джонса только появился, его подсчет для узлов из более обширных таблиц дал различные значения для всех узлов, кроме двух узлов с одиннадцатью пересечениями. Этот результат показался подозрительным, и более

пристальное сравнение диаграмм этих узлов (совершенно другим, геометрическим, образом) показало, что эти диаграммы на самом деле изотопны (диаграммы одного и того же узла): таблица оказалась ошибочной.

Это применение (очень значимое для специалистов по теории узлов) породило у Воана Джонса надежду, что его полином является полным инвариантом, по крайней мере для простых узлов. Увы! Ничуть не бывало: существуют простые неизотопные узлы с одинаковыми полиномами Джонса, например, те, что показаны на рис. 5.8. Тем не менее, для теории узлов роль полинома Джонса остается весьма важной: он является очень тонким инвариантом, более тонким, например, чем полином Александера—Конвея. Он отличает трилистник от его зеркального отражения, что полином Конвея не умеет делать. К тому же, сам Джонс и его последователи нашли инварианты еще более тонкие, чем его полином $V(K)$. Однако им не удалось найти полный инвариант. Другая попытка, основанная на совершенно иных идеях, описывается в следующей главе.

15.7. Инварианты конечного порядка



Ученик Владимира Арнольда Виктор Васильев и, следовательно, специалист в *теории особенностей* (более известной на Западе под броским названием *теории катастроф*), не мог априори применять

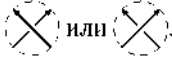
технику этой теории к узлам, объектам с регулярной локальной структурой, изменяющимся непрерывно и гладко, без малейшего намека на катастрофу.

Может быть, один мудрый гуманист XVIII века шепнул ему на ухо: «Если особенности не существует, ее следует изобрести». Именно это и сделал Васильев.

Его идея проста. Наряду с обычными узлами, Васильев предложил рассматривать *сингулярные узлы*; они отличаются от настоящих узлов тем, что допускают *двойные точки* (самопересечения), в которых одна часть кривой трансверсально пересекает другую:



На диаграмме узла вид двойной точки слегка отличается от вида точки перекрестка



Можно сказать, что если мы меняем у узла тип перекрестков некоторой точке, то «катастрофа» происходит, когда одна часть узла пересекает другую; в это мгновение узел становится сингулярным, а в следующее мгновение опять превращается в обычный узел, отличающийся, вообще говоря, от первоначального. Так, на рис. 7.1 показано, как узел-трилистник превращается (проходя через катастрофу) в сингулярный узел с одной двойной точкой, становясь затем тривиальным узлом.

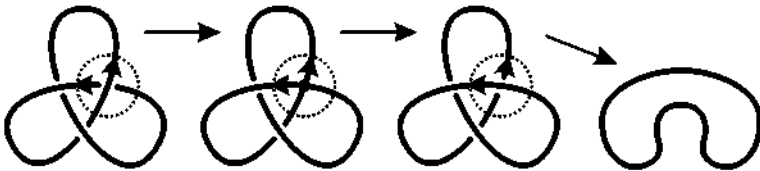


Рис. 7.1. Трилистник становится сингулярным, а потом развязывается

Таким образом, Васильев рассматривает множество \mathcal{F} всех узлов, как обычных, так и тех, что допускают особенности указанного вида. Обычные узлы образуют подмножество в \mathcal{F} , обозначаемое Σ_0 , в то время как остальные узлы образуют *дискриминант* Σ . Последний разбивается на *страты* $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$, состоящие из сингулярных узлов с 1, 2, 3, ... двойными точками соответственно. Именно к этим стратам мы обратимся в изучении инвариантов узлов.

К сожалению, стратифицированное множество

$$\mathcal{F} \supset \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$$

бесконечномерно и, следовательно, трудно представимо. Тем не менее, дадим его описание, весьма наглядное (но не очень строгое), используя наивный чертеж, где пространство (бесконечномерное!) \mathcal{F} будет представлено... в виде квадрата: он расположен в середине рис. 7.2.

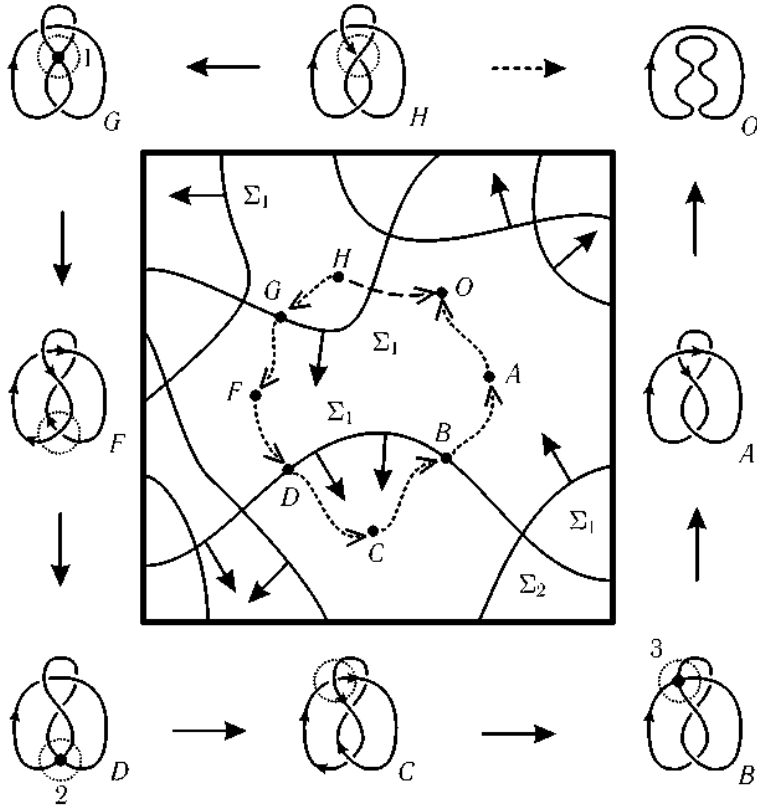


Рис. 7.2. Деформация узла в \mathbb{R}^3 и в \mathcal{F}

Точки пространства \mathcal{F} представляют собой узлы (сингулярные и обыкновенные); вокруг квадрата мы видим более «реалистичное» изображение некоторых из этих точек-узлов, а также процесс деформации одного узла (восьмерки) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Внутри квадрата мы видим путь, пройденный точкой, соответствующей этому узлу, в пространстве \mathcal{F} . Ее траектория

$$H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$$

при этом символически изображает изменения, происходящие с нашим узлом.

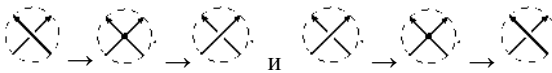
В момент первой катастрофы (когда у восьмерки образуется самопересечение 1) движущаяся точка «протыкает» страт Σ_1 (состоящий из сингулярных узлов ровно с одним пересечением) в точке G . Узел становится, таким образом, тривиальным (F) и непрерывно изменяется до момента второй катастрофы, когда образуется вторая двойная точка 2, чтобы моментально исчезнуть; тривиальный узел преобразуется при этом в трилистник. На символическом представлении внутри квадрата этому событию соответствует новый переход ($F \rightarrow D \rightarrow C$) через страт Σ_1 , но в другом месте (D). Наконец, очередной переход ($C \rightarrow B \rightarrow A$) через тот же страт происходит в другой его части, и получается узел A , который на самом деле тривиален (O).

Каждый инвариант Васильева ставит в соответствие любому узлу (в частности, сингулярному) определенное числовое значение. Начнем с простого примера. Определим конкретный инвариант Васильева, который обозначим v_0 . Для ЭТОГО ПОЛОЖИМ его равным нулю для тривиального узла

$$v_0(\bigcirc) = 0$$

и потребуем, чтобы каждый раз, когда движущаяся точка M , изображающая наш узел, пересекала страт Σ_1 в положительном направлении (показанном стрелками, которыми снабжается Σ_1), значение $v_0(M)$ увеличивалось на 1, а при переходе страта в отрицательном направлении уменьшалось на 1.

(Направление стрелок, которое называется *коориентацией*, выбирается так, что следующие катастрофы (при переходе через Σ_1):



считаются соответственно положительной и отрицательной.)

Теперь легко посчитать значение выбранного инварианта Васильева для узла-восьмерки. Для этого начинаем с точки O (соответствующей тривиальному узлу), для которой полагаем $v_0(\bigcirc) = 0$, и далее следуем по кривой, показанной на рис. 7.2:

$$O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H,$$

пересекая три раза страт Σ_1 , один раз в положительном направлении и два раза в отрицательном. Получаем

$$v_0(H) = 0 + 1 - 1 - 1 = -1.$$

Сразу же встает вопрос. Корректно ли определен рассматриваемый инвариант? Не зависит ли его значение от выбора пути, соединяющего O и H ? Получится ли тот же результат, если использовать, например, короткий путь OH , показанный на рисунке жирным пунктиром? К счастью, ответ положительный, как в этом частном случае, так и в общем. Однако этот фундаментальный факт совсем не очевиден, и для его доказательства потребовалась вся находчивость Васильева, а также очень тонкая техника алгебраической топологии.

Что нам должно говорить проведенное вычисление? Прежде всего то, что восьмерку нельзя развязать, поскольку ее инвариант отличен от инварианта тривиального узла ($-1 \neq 0$). С другой стороны, мы попутно увидели, что трилистник также не тривиален (поскольку $v_0(C) = 1 \neq 0$) и что восьмерка не эквивалентна трилистнику ($v_0(H) = -1 \neq 1 = v_0(C)$)**).

Рассматриваемый инвариант Васильева, таким образом, хорошо выполняет свою основную роль: ему удастся различать некоторые узлы. Правда, он не является полным инвариантом: он не различает все узлы; например, простые вычисления показывают, что значения v_0 для правого и левого трилистников одинаковы, т. е. этот инвариант не видит разницы между трилистником и его зеркальным отображением. Однако это не единственный инвариант Васильева, их существует бесконечно много. В частности, нетрудно найти другой инвариант Васильева, который различает два трилистника; для этого нужно погрузиться более глубоко в страты, а именно, спуститься в окрестность страта Σ_2 .

Можно сказать, что подход Васильева к узлам — это подход *социологический*. Вместо того чтобы рассматривать узлы индивидуально (как это делает, например, Воан Джонс), он рассматривает *пространство всех узлов* (сингулярных или нет), в котором они являются просто *точками* и, таким образом, теряют свои внутренние свойства. Более того, Васильев не собирается искать один-единственный инвариант — он хочет найти их все, он собирается определить целое пространство инвариантов. Так же как обычный социолог абстрагируется от личностей людей, которых он изучает, интересуясь лишь их положением в социальной, экономической, политической или какой-то другой стратификации общества, — математический социолог интересуется положением узла с точки зрения стратификации пространства \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} \supset \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$$

Этот социологический подход в математике не является изобретением Васильева. В теории особенностей он восходит к Рене Тому и остается излюбленным оружием Владимира Арнольда и его школы. Задолго до них этот подход использовался Гильбертом для создания *функционального анализа* (функции теряют свои личные свойства, становясь точками некоторых линейных пространств), а также, еще более поразительным образом, — Эйленбергом, Маклейном, Гротендиком и другими при разработке основ *теории категорий*. Математики более классического склада иронически называли ее «абстрактной чепухой» — вероятно, для того, чтобы ее приземлить: ее создатели считали, что она полностью поглотит математику. (К счастью, сегодня ясно, что ничего подобного не произошло и не произойдет.)

Однако вернемся к Васильеву и к его сингулярным узлам. В этой конкретной ситуации социологический подход раскрывается — как мы это сейчас увидим в деталях — особенно плодотворно. Вся информация, необходимую для определения узловых инвариантов, можно найти в окрестностях стратов $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$. Следуя Васильеву, мы попытаемся найти все инварианты, продвигаясь все глубже и глубже, т. е. изучая страты Σ_n с возрастающими индексами n . Но для этого необходима привычка к математическим рассуждениям, и читатели, у которых ее нет, могут переходить непосредственно к заключению этой главы.

Краткое описание общей теории

Итак, мы называем *сингулярным узлом* K любую гладкую кривую (т. е. любое гладкое отображение K окружности S^1 в евклидово пространство \mathbf{R}^3) в пространстве \mathbf{R}^3 , не имеющую других особых точек, кроме конечного числа точек трансверсального самопересечения (эти точки мы назвали *двойными*). Отметим, что сингулярные узлы, как и обычные, ориентированы (снабжены стрелками).

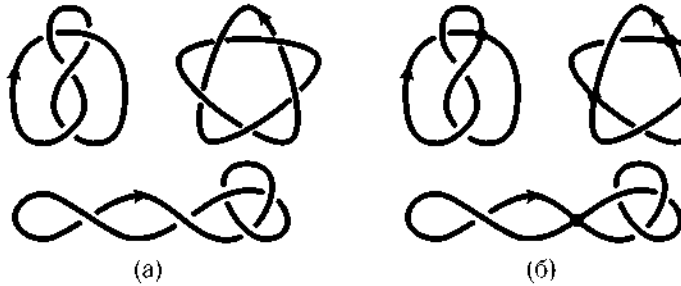


Рис. 7.3. Обычные (а) и сингулярные (б) узлы

Для сингулярных узлов, так же как для обычных, имеется естественное отношение эквивалентности (изотопия): два узла (обычные или сингулярные) K_1 и K_2 изотопны, если существует гомеоморфизм пространства \mathbb{R}^3 (сохраняющий ориентацию), который переводит K_1 в K_2 , сохраняя стрелки и циклический порядок ветвей в двойных точках. Выражения «узел» или «сингулярный узел» могут обозначать либо какой-то конкретный объект, либо класс изотопно эквивалентных объектов — из контекста читателю будет ясно, о чем идет речь. Обозначим через Σ_0 множество узлов без двойных точек, а через Σ_n — множество сингулярных узлов с n двойными точками.

Пошевелив немного одну из ветвей сингулярного узла у двойной точки, можно *разрешить* особенность в два различных перекрестка:



при этом левое разрешение называется *положительным*, а правое — *отрицательным*. (Положительное (соответственно отрицательное) разрешение корректно определено: это такое разрешение, при котором путешественник,двигающийся по верхней ветви согласно стрелке, видит стрелку нижней ветви направленной влево (соответственно вправо).

Мы говорим, что функция $v: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ является *инвариантом Васильева* (в широком смысле), если для каждой двойной точки сингулярного узла имеет место следующее равенство:

$$v\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right); \quad (7.1)$$

оно означает, что функция v применяется к трем узлам, совпадающим везде, за исключением внутренней маленького шара, где узлы имеют

Лемма. Значение инварианта Васильева порядка не выше n на узле, имеющем ровно n двойных точек, не изменяется, когда какой-либо перекресток меняется на противоположный.

Идея доказательства очень проста: когда некоторый перекресток заменяется на противоположный, значение инварианта v согласно свойству (1) меняется на величину

$$v \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array} \right).$$


Но

$$v \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) = 0,$$

поскольку по условию инвариант v равен нулю на всех узлах, имеющих более чем n двойных точек.

Очевидное следствие этой леммы: все инварианты порядка 0 являются константами (другими словами, $V_0 = \mathbf{R}$) и не представляют, следовательно, никакого интереса. Действительно, известно, что каждый узел может быть развязан, если поменять некоторое количество его перекрестков; эти операции не изменяют значения инварианта порядка 0 (в силу леммы), следовательно, значение этого инварианта для любого узла равно его значению для тривиального узла.

Почти так же просто доказывается, что нет ненулевых инвариантов порядка 1 (другими словами, $V_0 = V_1$). Теория становится нетривиальной уже для порядка 2. Чтобы это показать, выделим среди элементов множества V_2 один конкретный инвариант и подсчитаем его значение на узле-трилистнике. Мы определим этот инвариант, обозначаемый v_0 , положив его равным 0 на тривиальном узле и равным 1 на сингулярном узле с двумя пересечениями следующего

вида: . Можно показать, что инвариант v_0 вполне определен и удовлетворяет условиям леммы. Вычисления, в которых три раза применяется равенство (7.1) и три раза равенство $v_0 \left(\bigcirc \right) = 0$, показаны на рис. 7.4.

$$\begin{aligned} 1 &= v_0 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) = v_0 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array} \right) - v_0 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) = \\ &= v_0 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) - v_0 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array} \right) - \left[v_0 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) - v_0 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array} \right) \right] \end{aligned}$$

Рис. 7.4. Вычисление инварианта порядка 2 для трилистника

Здесь, на самом деле, речь идет о том же инварианте v_0 , значение которого для узла-восьмерки мы уже считали (не обосновывая, однако, свои вычисления) в начале главы, но теперь наши вычисления проводятся строго.

Диаграммы Гаусса и теорема Концевича

Сейчас мы избавимся от скрытой геометрии, лежавшей до сих пор в основе изучения инвариантов узлов, преобразовав последнее в чисто комбинаторную теорию.

Лемма из предыдущего пункта говорит нам, что значение инварианта порядка n для узла с n двойными точками не меняется при замене типов перекрестков. Это значение не зависит, следовательно, от процесса завязывания; оно зависит только от порядка (комбинаторное понятие!), в котором появляются двойные точки при движении по кривой. Мы будем кодировать этот порядок следующим образом. Рассмотрим некоторый узел $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с n двойными точками. Двигаясь по окружности S^1 , мы отметим все ее точки, переводящиеся в двойные точки отображением K , затем соединим отрезками кривых (хордами) все пары отмеченных точек, переводящиеся в одну и ту же двойную точку (рис. 7.5).

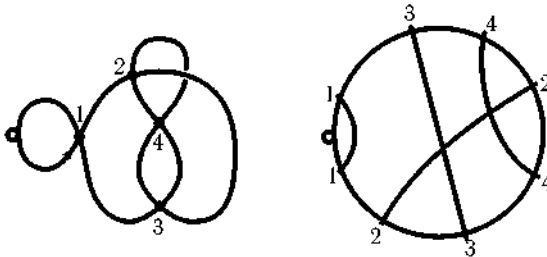


Рис. 7.5. Диаграмма Гаусса сингулярного узла

Полученная конфигурация называется *диаграммой Гаусса*, или *хордовой диаграммой* порядка n сингулярного узла K .

Переформулируем лемму из предыдущего пункта на язык диаграмм Гаусса.

Лемма. *Значение инварианта Васильева порядка n на узле с n двойными точками зависит только от диаграммы Гаусса этого узла.*

На рис. 7.6 показаны диаграммы Гаусса порядка $n = 1, 2, 3$. Отметим, что все несингулярные узлы имеют одну и ту же диаграмму с пустым множеством хорд.

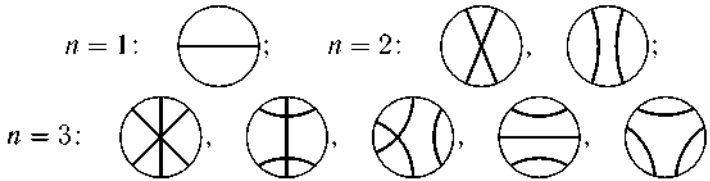


Рис. 7.6. Диаграммы Гаусса порядка $n \leq 3$

Упражнение для заинтересовавшегося читателя — для восьми диаграмм Гаусса с рис. 7.6 нарисовать восемь соответствующих сингулярных узлов (конечно, имеется много узлов, соответствующих одной и той же диаграмме).

Переведем теперь одночленное соотношение (7.1) и четырехчленное соотношение (7.2) на язык диаграмм Гаусса. Получим следующее:

$$\text{Diagram 1} = 0; \quad \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} = 0. \quad (7.4)$$

Как понимать эти формулы? Первая из них означает, что значения всех инвариантов *порядка n* на сингулярном узле с *n* *двойными точками*, содержащем малую петлю (с двойной точкой, см. (7.1)), равны нулю; в этой формуле мы опустили запись $v(\dots)$ и не нарисовали на диаграмме другие хорды; подразумевается, что ни одна из этих $n-1$ хорд не имеет концов на малой дуге, стягиваемой хордой, явно показанной на диаграмме. Точно так же, во второй формуле речь идет о знакопеременной сумме значений одного и того же инварианта порядка *n* на четырех диаграммах с *n* хордами, однако на каждой диаграмме нарисованы только две хорды, остальные $n-2$ хорды *совершенно одинаковы* для всех четырех диаграмм; подразумевается, что эти дополнительные хорды не должны иметь концов на маленькой дуге (обозначенной более жирной линией на рисунке и ограниченной двумя близкими друг к другу концами двух хорд, показанных явно на диаграмме). Например, для $n = 3$ четырехчленное соотношение, в котором третья хорда показана пунктиром, имеет вид

$$\text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} = 0.$$

В силу одночленного соотношения (см. первое равенство в (7.4)) третья диаграмма аннулируется, и мы получаем

$$\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = 2 \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \right). \quad (7.5)$$

Формула, которую мы только что получили, может рассматриваться как некое равенство в вещественном векторном пространстве над диаграммами Гаусса с тремя хордами. Обобщая эту ситуацию, можно рассматривать векторное пространство $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}(\Delta_n)$ всех конечных линейных комбинаций диаграмм Гаусса $D \in \Delta_n$; можно затем написать для \mathcal{D}_n множество всех уравнений, которые вытекают из одночленного и четырехчленного соотношений и рассмотреть факторпространство \mathcal{D}_n по этим уравнениям. Получается векторное пространство, которое будет обозначаться \mathcal{A}_n .

Например, для $n = 3$ мы имеем $\dim \mathcal{D}_3 = 5$ (рис. 7.6), но одночленное соотношение аннулирует три последних «базисных вектора» в \mathcal{D}_3 , показанных на рис. 7.6, а уравнение (7.5) выражает один из двух оставшихся ненулевых векторов через другой, из чего вытекает, что $\dim \mathcal{A}_3 = 1$. (Читатель может проверить, что $\dim \mathcal{A}_4 = 3$.)

Главный результат этой комбинаторной теории состоит в том, что пространство \mathcal{A}_n полностью описывает инварианты Васильева порядка n .

Теорема Концевича. *Векторное пространство V_n/V_{n-1} инвариантов Васильева порядка n изоморфно пространству \mathcal{A}_n диаграмм Гаусса с n хордами по модулю одночленного и четырехчленного соотношений.*

Доказательство этой теоремы см. Bar-Natan, 1995.

Мы видим, таким образом, что изучение пространств инвариантов Васильева порядка n (и определение их размерностей) сводится к чисто комбинаторным вычислениям. Правда, эти вычисления совсем не легкие. Однако с помощью суперкомпьютера Дрор Бар-Натан (Dror Bar-Natan) из Гарварда сумел вычислить размерности пространств $\mathcal{A}_n \cong V_n/V_{n-1}$ для $n = 0, 1, 2, \dots, 9$. Их значения составляют соответственно

1, 0, 1, 1, 3, 4, 9, 14, 27, 44.

Использование комбинаторной теории (более детальное изложение которой можно найти в CDL, 1994) не сводится только к вычислению размерностей пространств Васильева; ее можно использовать для нахождения значений конкретных инвариантов для конкретных узлов.

Например, можно использовать инвариант $v_3 \in V_3$, определяемый соотношениями

$$v_3\left(\bigcirc\right) = 0 \text{ и } v_3\left(\bigotimes\right) = 1,$$

чтобы доказать, что правый трилистник не эквивалентен своему зеркальному отражению — левому трилистнику. Эти вычисления мы оставляем читателю для самостоятельной работы.

После полиномиальных инвариантов Джонса и его последователей есть ли, на самом деле, необходимость изобретать другие? Вне всякого сомнения: все известные к настоящему времени полиномиальные инварианты *неполные*. Это означает, что *два неэквивалентных узла могут иметь один и тот же полиномиальный инвариант*. Напротив, что касается инвариантов Васильева, то для них имеется следующее предположение.

Гипотеза. *Инварианты конечного порядка классифицируют узлы, т.е. для каждой пары неэквивалентных узлов K_1, K_2 существуют такое целое число $n \in \mathbb{N}$ и такой инвариант $v \in V_n$, что $v(K_1) \neq v(K_2)$.*

В настоящее время не существует ни доказательства, ни опровержения этой гипотезы.

Другая причина использования инвариантов Васильева — это их универсальность: *все* остальные инварианты должны из них выводиться. Так, Джоан Бирман и Сяо-Сун Линь (Xia Song Lin) из Колумбийского университета показали, что коэффициенты полиномов Джонса выражаются в терминах инвариантов Васильева. Идеей того же порядка, но на более элементарном уровне, является предложение читателю, знакомому с гл. 16.5, показать, что *коэффициент при x^2 полинома Крнвея $\nabla(N)$ некоторого узла N есть инвариант Васильева порядка 2*.

Сегодня существует много других примеров, которые показывают, что метод Васильева позволяет не только получить известные ранее инварианты узлов, но и определить инварианты — классические и новые — для многих других объектов (а не только для узлов). Но этот аспект теории выходит за рамки книги.

Наконец, существуют очевидные и естественные связи метода Васильева с физикой (значительно более тесные, чем у Джонса и Кауффмана). Эта часть теории кажется наиболее интересной, поскольку ее создание еще не закончено.

15.8. Узлы и физика



Эта последняя глава в корне отличается от предыдущих. Те имели своей целью рассказать историю некоторых фундаментальных идей теории узлов (простых в своей основе), описать различные подходы к центральной проблеме теории — классификации узлов, — основанные чаще всего на применении различных инвариантов. Во всех случаях речь шла об изложении уже завершенных исследований, принявших свою законченную форму. В этой главе, напротив, речь пойдет о еще не законченных и даже только еще намечаемых исследованиях.

Но можно ли серьезным образом прогнозировать будущие научные открытия? Разумеется, нет. Однако иногда случается так, что люди, работающие в определенной области науки, предчувствуют появление великого события. На повседневном языке эта ситуация описывается расхожей фразой: «Эта идея витала в воздухе», которая, разумеется, произносится уже после события. Классический (и, может быть, наиболее яркий) пример — это независимое открытие неевклидовой геометрии Лобачевским и Бойаи, предчувствие этого события многими другими, и помрачение Гаусса, который мог все понять до конца, но не посмел *).

(Гаусс открыл основные принципы гиперболической геометрии раньше Лобачевского и Бойаи, но ему не хватило смелости опубликовать эту скандальную теорию. (Лобачевский, который посмел, сразу стал объектом насмешек для своих современников, а Бойаи не выдержал непризнания своих работ и бросил занятия геометрией.) Гаусс, к тому времени, когда узнал о публикации работ Лобачевского, уже создал дифференциальную геометрию поверхностей, на которых построение моделей гиперболической геометрии для профессионала было детской игрой. Как могло случиться, что такой гений, как Гаусс, имея на руках все козыри, прошел мимо обоснования новой геометрии, как будто на него опустилась невероятная и непонятная слепота?)

Мы вернемся коротко к возможным прогнозам в конце главы. Но сначала нужно объяснить, каковы источники уже существующего симбиоза между узлами и физикой.

Совпадения

Связи между узлами, косами, статистическими моделями и квантовой физикой основываются на странном совпадении между пятью соотношениями, происходящими из совершенно различных областей знания:

- соотношения Артина в группе кос (о которых мы говорили в гл. 16.2);
- одно из базовых соотношений в операторной алгебре Гекке;
- третье преобразование Рейдемейстера (рассмотренное в гл. 16.3);
- классическое уравнение Янга—Бакстера (один из основных законов, управляющий эволюцией так называемых статистических моделей в физике, о которых шла речь в гл. 16.6);
- квантовое уравнение Янга—Бакстера (которое определяет поведение элементарных частиц в определенных ситуациях).

Эти совпадения (видимые невооруженным глазом без необходимости понимать детали) частично показаны на рис. 8.1.

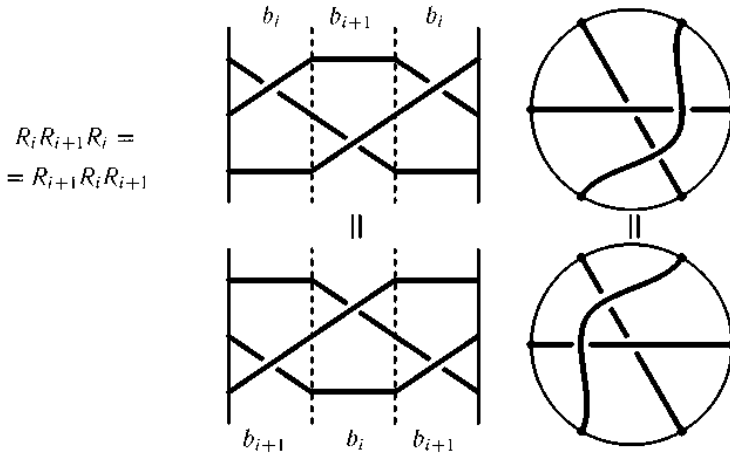


Рис. 8.1. Три аспекта одного и того же соотношения

На нем мы видим слева уравнение Янга—Бакстера, в центре — соотношение Артина в группе кос, в алгебраической форме

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$$

и в графической интерпретации, и справа — рисунок, представляющий третье преобразование Рейдемейстера. Два уравнения фактически одинаковы (достаточно заменить b на R или *vice versa*), так же как два рисунка (вглядитесь внимательно!).

Используя эти совпадения, новозеландец Джонс, россиянин Тураев, украинец Дринфельд, англичанин Ликориш, американец Виттен, француз Вожель и другие открыли определенные связи (фундаментальные? случайные?) между теорией узлов и многими областями физики.

Вариант статистической модели, на который обратил внимание Луис Кауффман, позволил ему описать инвариант узлов, открытый ранее Воаном Джонсом, — знаменитый полином Джонса. Первоначальное определение Джонса (которое мы не уточняли) базировалось на теории кос и на алгебре Гекке (и, следовательно, на совпадении соотношений Гекке и Артина). В подходе Кауффмана (описанном в гл. 16.6) ключевую роль играет третье преобразование Рейдемейстера. Джонс построил версию модели Поттса (статистической модели, сильно отличающейся от модели Кауффмана), основанную на соотношении Янга—Бакстера, и это позволило ему получить другим способом его же собственный полином. Тураев, используя некоторые решения

уравнения Янга—Бакстера, открыл целую серию узловых инвариантов...

Стоит ли продолжать? Не разумнее ли было бы дать всем этим междисциплинарным связям более конкретное и убедительное объяснение, чем просто «совпадение»? На это можно взглянуть с более общей точки зрения, с точки зрения связи между математикой и действительностью.

Совпадения и математические структуры

Все науки, естественные и социальные, имеют свой *объект* изучения; они претендуют на описание определенной части реальности, реального мира. Что является объектом математики?

Ответ парадоксален: все и ничего. «Ничего», поскольку математика изучает не что иное, как *абстракции*: числа, дифференциальные уравнения, полиномы, геометрические фигуры и т. п. Математика не имеет конкретного объекта изучения в объективной реальности (с точки зрения чистых платонистов, это не так, ибо изучению подлежит объективно существующий, но абстрактный мир идей, более реальный, чем материальный мир). Но при этом она изучает «все», так как ее методы можно применить ко всему, к любому объекту, обладающему *той же структурой*, что и рассматриваемая абстракция. Мы не будем объяснять значение выражения, выделенного выше курсивом), надеясь, что читатель понимает (например, глядя на рис. 8.1), что уравнение Янга—Бакстера обладает «той же структурой», что и первое преобразование Рейдемейстера.

Следствием (быть может, неожиданным) этого положения вещей является *важность совпадений*: если «случайно» оказывается, что структуры двух объектов «совпадают» (даже если эти объекты совершенно различной природы), то они описываются одной и той же «математикой», одной и той же теорией. Так, если след оператора из алгебры Гекке обладает теми же свойствами, которыми должен обладать инвариант узлов, то почему бы не сконструировать таковой, используя этот след (что и сделал Джонс)? Или если квантовая частица, так же как узел, удовлетворяет соотношению, которое совпадает с уравнением Янга—Бакстера, то почему бы не построить теорию квантовых частиц с помощью узловых инвариантов (как это сделал сэр Майкл Атья (Michael Atiyah), о котором мы еще поговорим)?

Мы вернулись к конкретным физическим моделям, связанным с теорией узлов.

Статистические модели и полиномы узлов

В начале гл. 16.6 мы уже говорили о статистических моделях, в частности о моделях Изинга и Поттса. Напомним, что речь идет о регулярных атомных структурах (таких, как кристаллы), составленных из атомов (снабженных, при необходимости, *спинами*) с простыми локальными взаимодействиями (отмеченными символически на рисунках отрезками, соединяющими взаимодействующие атомы). Каждая такая структура X обладает *статистической суммой* $Z(X)$ (представляющей собой сумму по всем допустимым состояниям структуры X некоторых выражений, зависящих от энергии локальных взаимодействий). Величина $Z(X)$ позволяет вычислять основные глобальные параметры (температуру, полную энергию) и изучать *фазовые переходы* системы (например, из жидкого состояния в твердое).

В гл. 16.7 мы видели, как такая функция деления позволила нам определить и вычислить полином Джонса. Честно говоря, эта функция не соответствует никакой реальной статистической модели — это скорее плод богатого воображения Луиса Кауффмана. Но самое удивительное — это то, что существует настоящая статистическая модель, восходящая к самому Джонсу, с настоящей статсуммой, которая и позволила ему еще одним способом построить свой полином. Наша непосредственная цель — описать эту конструкцию, не вдаваясь в детали.

Если дана плоская диаграмма узла (или зацепления), мы начинаем с построения его *дуального графа* (или *дуальной статистической модели узла*) таким образом, как показано на рис. 8.2.

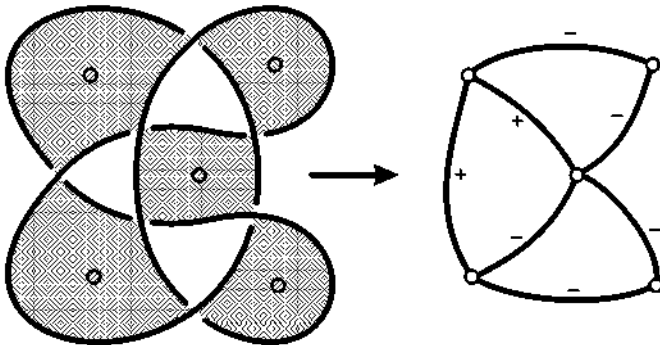


Рис. 8.2. Дуальный граф узла

Для этого раскрашиваем попеременно в белый и черный цвет части плоскости, ограниченные проекцией узла, заботясь о том, чтобы

внешняя часть была белой. Полагаем далее, что черные части являются *вершинами* графа (или *атомами* модели) и что две вершины связаны *ребром* (или *находятся во взаимодействии*), если соответствующие черные области имеют непустое пересечение (одну или несколько точек); кроме того, ребра (взаимодействия) объявляются положительными или отрицательными согласно условию, которое читатель может угадать, глядя на рис. 8.2.

Когда модель находится в некотором определенном состоянии $s \in S$ (через S обозначается множество всех допустимых состояний), *локальная энергия* $E(s(v_1), s(v_2))$ взаимодействия двух вершин-атомов, соединенных ребром $[v_1, v_2]$, предполагается равной ± 1 , если они имеют один и тот же спин, и равной $a^{\pm 1}$, если их спины противоположны; знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, положительно или отрицательно ребро (взаимодействие); a обозначает здесь переменную полинома от a и a^{-1} , который мы и собираемся получить. (Такой специальный выбор энергии взаимодействия атомов относится к модели Поттса, описывающей фазовый переход между водой и льдом.)

Задав все эти величины, определим *статсумму* модели по формуле

$$Z(K) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s \in S} \prod_{[v_i, v_j] \in A} E(s(v_i), s(v_j)),$$

где A есть множество всех ребер.

Чтобы определить полином Джонса исходя из этой статсуммы, достаточно применить к ней рассуждения, подобные «трюку Кауффмана» (детально описанному в гл. 16.6).

(Действительно, легко показывается, что полином $Z(K)$ инвариантен относительно второго и третьего преобразований Рейдемейстера, в то время как первое преобразование дает лишний множитель, от которого можно избавиться благодаря другому множителю, зависящему от индекса скрещивания, точно так, как это сделано в гл. 16.6.)

Мы видим, таким образом, что модель Поттса замерзания воды довольно легко приводит нас к самому знаменитому инварианту узлов. Анализируя эту конструкцию в журнальных или научно-популярных статьях, математики склонны восклицать с энтузиазмом о «применении теории узлов в статистической физике». Странный вывод! Теория узлов здесь не дает ничего для физики — наоборот, именно статистическая физика создает конструкцию, применимую в математике. (Напомним, что первоначальная конструкция Джонса — чисто математическая — предшествовала «физической» конструкции, которую мы только что описали.)

Конечно, то, что здесь действительно важно, — это не соперничество между физиками и математиками, а неожиданное совпадение между двумя областями знания, априори весьма далекими друг от друга. Перейдем к другому совпадению, где речь идет уже о применении теории узлов к физике.

Скобка Кауффмана и квантовые поля

Мы уже имели дело со скобкой Кауффмана в гл. 16.6, где она использовалась для определения полинома Джонса, самого знаменитого инварианта узлов. Сейчас мы увидим, что она может применяться совсем по-другому.

Напомним, что эта скобка ставит в соответствие каждой плоской диаграмме K узла некоторый полином $\langle K \rangle$ от a и a^{-1} , определенный явной формулой, причем формула эта задается некоторой статсуммой, определяемой статистической моделью, связанной с данным узлом.

Мы уже отмечали, что эта формула (нет необходимости приводить ее здесь) не имеет никакой физической интерпретации, по крайней мере в рамках реальных статистических моделей. Но в другой области физики — топологической квантовой теории поля — она сыграет свою роль.

Эта теория, обычно обозначаемая английской аббревиатурой TQFT (Topological Quantum Field Theory), ищет формализацию квантовой версии теории классических полей (гравитационных, электромагнитных и т. д.) в самых широких — т. е. в топологических — рамках. При таком подходе изучаемые физические величины, *наблюдаемые*, не должны никоим образом зависеть от выбранной системы координат; они должны сохранять одни и те же значения при любом топологическом преобразовании координат; следовательно, они должны быть *топологическими инвариантами*, как и инварианты узлов.

Американец Эдвард Виттен (Edward Witten) пришел к идее использовать для создания TQFT обобщение полинома Джонса. Это обобщение (с \mathbf{R}^3 на трехмерные многообразия), часто называемое *инвариантом Джонса—Виттена*, он использовал для создания TQFT. (Несправедливое название: конструкции Виттена недоставало математической строгости, и только русские математики Н. Решетихин и В. Тураев сумели, используя другой подход, дать математически корректное определение этих инвариантов. Поэтому было бы правильнее называть их инвариантами Джонса—Решетихина—Тураева—Виттена, несмотря на чрезмерную длину термина.) За эту работу Виттену была присуждена филдсовская медаль. Виттен построил модель размерности $2+1$, где 2 — размерность

«пространства», а 1 — «времени», причем эти три координаты — относительно обязывает — перемешаны. Эта модель представляется, следовательно, как трехмерное многообразие, которое может содержать узлы, называемые в этом контексте физиками *линиями Вильсона*.

Далее, англичанин Майкл Атья (он также филдсовский медалист, но за предшествующие работы) пересмотрел с математической точки зрения модель Виттена, обобщил ее и создал аксиоматическую теорию TQFT. Конкретизируя эту теорию, француз Пьер Вожель и его соавторы построили целую серию примеров TQFT, в которых ключевую роль играла как раз скобка Кауффмана. Вероятно, здесь не место для рассказа об этой теории и этих примерах — используемая там математика слишком сложна — ограничимся тем, что укажем, в каком контексте возникает скобка Кауффмана.

Вместо плоскости рассматривается поверхность с краем, и на ней рисуется диаграмма узла (или зацепления), которая может иметь концы на крае поверхности; типичный пример представлен на рис. 8.3.

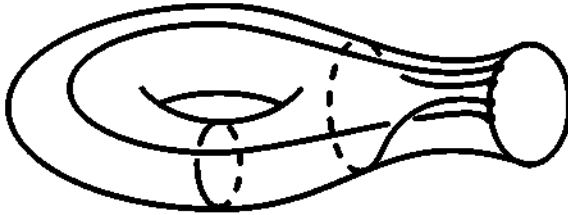


Рис. 8.3. Диаграмма зацепления на поверхности с краем

С каждой диаграммой такого вида связывается полином от a и a^{-1} , который удовлетворяет двум следующим очень простым соотношениям (уже появлявшимся в гл. 16.6):

$$\langle \text{X} \rangle = a \langle \text{O} \rangle + a^{-1} \langle \text{O} \rangle, \quad (8.1)$$

$$\langle K \sqcup \text{O} \rangle = (-a^2 - a^{-2}) \langle K \rangle. \quad (8.2)$$

Читатель, который помнит эту главу, узнает два основных свойства скобки Кауффмана. Заметим, чтобы закончить с совпадениями, что один частный случай этой конструкции (когда поверхность является диском) дает *алгебру Темперли—Либа*, удовлетворяющую соотношениям Артина, Янга, Бакстера, Рейдемейстера, Гекке и т. д. Не будем здесь говорить о важности моделей TQFT с точки зрения физической реальности. Физики проявляют к ним серьезный интерес, но, может быть, не такой серьезный, как к понятию (математическому)

квантовой группы, к обсуждению которых (в контексте связей с узлами) мы и приступаем.

Квантовые группы как машина для производства инвариантов

Квантовые группы представляются сегодня объектом, хорошо изученным как математиками, так и физиками. Их формальное определение, тем не менее, малопривлекательно: это множество абстрактных элементов, удовлетворяющих целому списку алгебраических аксиом, плохо поддающихся наглядному объяснению.

Поэтому мы не будем пытаться детально разобраться в них, а сконцентрируем наше внимание на их физическом значении. Прежде всего отметим, что, вопреки их названию, квантовые группы совсем не группы; они являются алгебрами и даже «биалгебрами». Это означает, что на рассматриваемом множестве Q заданы две операции:

умножение и *коумножение*. Умножение (привычное для нас понятие) ставит в соответствие каждой паре элементов из Q вполне определенный элемент из Q — их *произведение*; коумножение делает обратное: каждому элементу из Q оно ставит в соответствие пару элементов (более точно, линейную комбинацию пар элементов) из этого множества — его *копроизведение*.

С физической точки зрения, эти две операции отвечают соответственно слиянию двух частиц в одну и расщеплению одной частицы на две другие. Мы попытались графически представить это соответствие на рис. 8.4.



Рис. 8.4. Произведение и копроизведение двух частиц

Операции умножения и коумножения должны удовлетворять некоторым вполне естественным аксиомам (таким, как ассоциативность), что превращает Q в объект, который математики называют *биалгеброй* (а также алгеброй Хопфа). Эти аксиомы не являются слишком ограничительными, существует достаточно много различных квантовых групп, и поэтому приходится изучать более ограниченные классы групп, например, класс квантовых групп, кото-

рые, следуя украинскому математику Владимиру Дринфельду (еще один филдсовский лауреат!), называют *квазитреугольными*. Аксиома квазитреугольности влечет для этого класса выполнимость соотношения Янга—Бакстера, которое обеспечивает связь квазитреугольных квантовых групп с узлами. Более точно, представления этих квантовых групп позволяют строить, один за другим, бесконечный набор инвариантов, как уже известных, так и совершенно новых. Квантовые группы, так сказать, являются вполне научным способом массового производства узловых инвариантов.

Инварианты Васильева и физика

Инварианты Васильева — это мы видели в предыдущей главе — получаются применением к узлам весьма общей конструкции, идеологически близкой к теории катастроф. Можно ли придать какое-нибудь фундаментальное физическое значение переброске (основной катастрофе, при которой нижняя ветвь узла протыкает верхнюю ветвь и располагается над ней)? С первого взгляда нет. Для того чтобы найти физику у Васильева, нужно ее поискать в алгебраических и комбинаторных свойствах, которыми обладает множество его инвариантов.

Дело в том, что множество V инвариантов Васильева (образующее на самом деле векторное пространство) снабжено не только естественной операцией умножения, но также операцией *коумножения*

$\Delta: V \rightarrow V \otimes V$. Она получается с помощью композиции $\#$ двух узлов (о которой шла речь в гл. 16.4) по следующей простой формуле:

$$(\Delta v)(K_1 \# K_2) = v(K_1) \cdot v(K_2).$$

Легко проверяется, что эти две операции превращают V в биалгебру. Таким образом, мы имеем здесь с самого начала «очень физическую» структуру (слияние и расщепление частиц), и нет необходимости искать где-то «на стороне» другой алгебраический объект (такой, как квазитреугольная квантовая группа для инвариантов типа Виттена—Джонса), для нахождения «физических» инвариантов. Эта структура биалгебры внутренне присуща инвариантам Васильева.

Но здесь есть и нечто большее. Во-первых, с аналитической точки зрения, узловые инварианты Васильева можно выразить с помощью интеграла Концевича. Он является, в некотором смысле, обобщением интеграла Гаусса в электромагнетизме и должен, следовательно, иметь какую-то физическую интерпретацию. Какую? Неизвестно.

Во-вторых, с комбинаторной точки зрения, интерпретация инвариантов Васильева с помощью хордовых диаграмм (о которой мы говорили в предыдущей главе), восходящая также к Максиму Концевичу (этот российский математик, занимавший должность постоянного профессора в престижном Институте высших научных исследований (IHES) недалеко от Парижа, тоже получил Филдсовскую медаль), дает многочисленные алгебры, подходящие для физических интерпретаций. В частности, алгебра китайских характеров (которая еще называлась «алгеброй диаграмм Фейнмана») близка к теоретической физике, как указывает ее бывшее название. Но здесь мы пока находимся лишь на уровне надежд и гипотез.

И наконец, последний важный пункт, также пока еще не понятый. Это четырехчленное соотношение, о котором мы уже говорили в гл. 16.7. Дрор Бар-Натан воспользовался тем фактом, что это соотношение — не что иное, как другая форма классического тождества Якоби, и построил инварианты Васильева на основе представлений алгебр Ли. Не будет ли иметь физического продолжения это совпадение между фундаментальными математическими соотношениями?

В начале 16 раздела мы видели, как идея сделать узел моделью атома, предложенная Уильямом Томсоном почти полтора века назад, привела к возникновению теории узлов. В совсем недавнем прошлом инварианты узлов, в частности скобка Кауффмана, стали основанием теорий, имеющих физический характер, — таких, как топологическая квантовая теория поля. Где мы находимся сейчас? Можно ли подводить итоги?

Идее Томсона была суждена недолгая жизнь. Напротив, важность, с точки зрения физической реальности, теории TQFT (по линии Виттена, Атья, Вожеля, Йеттера) не оставляет ни малейшего сомнения. Очевидно, интерес к связям между физикой и узлами будет возрастать. Для специалистов по теории узлов также осталось много работы: например, до сих пор не существует достаточно простого и эффективного алгоритма развязывания, такого, чтобы его можно было перевести на компьютер; остаются открытыми и многие другие важные проблемы. Для специалистов в области математической физики, использующих идеи теории узлов, имеется много неисследованных областей, в частности по линии инвариантов Васильева.

Наконец, не следует забывать, что кроме классических узлов (кривые в трехмерном пространстве) существуют малоизученные «обобщенные узлы», например, сферы (и другие поверхности) в пространстве размерности четыре. Согласно Эйнштейну, мы живем в

четырёхмерном пространстве-времени. По мнению специалистов в теории струн, распространение элементарной частицы может моделироваться с помощью поверхностей. Не прячется ли за всем этим каким-то образом квантовая теория гравитации? Не имеют ли инварианты Васильева (которые должны существовать также и в этой ситуации) реальной физической интерпретации?

Исследование всегда начинается с вопроса и с надежды..

16. Указания, комментарии, советы и ответы

4.1 Множество $\{\emptyset\}$ состоит из одного элемента, каковым является пустое множество \emptyset . Конечно, сам этот элемент есть пустое множество, которое не содержит элементов, но множество $\{\emptyset\}$ состоит из единственного элемента \emptyset .

4.2 Формулы 1) и 2) верны, а 3) нет.

4.3 Да, множество $\{\{\emptyset\}\}$ состоит из одного элемента, его единственным элементом является множество $\{\emptyset\}$.

4.4 2, 3, 1, 2, 2, 2, 1, 2 для $x \neq \frac{1}{2}$ и 1, если $x = \frac{1}{2}$.

4.5 (a) $\{1, 2, 3, 4\}$; (b) $\{\}$; (c) $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots\}$

4.8 Множество решений системы уравнений есть пересечение множеств решений уравнений, составляющих эту систему.

5.1 Решение задачи основано на теоретико-множественном тождестве: $\cup(a_\alpha; +\infty) = (\inf a_\alpha; +\infty)$ (докажите его). Кстати, набор из замкнутых лучей $[a; +\infty)$ не является топологией, поскольку вполне возможно, что $\cup[a_\alpha; +\infty) = (a_0; +\infty)$ (приведите пример).

5.2 Да, является. Решение почти дословно совпадает с решением предыдущей задачи.

5.3 Основное, что нужно осознать в связи с определением топологии в множестве, - это то, что аксиомы топологической структуры являются условиями на *набор* подмножеств, при выполнении которых этот набор и называется топологической структурой. Второй набор его не является, поскольку множества $\{a\}$, $\{b, d\}$ в него входят, а множество $\{a, b, d\} = \{a\} \cup \{b, d\}$ - нет. Найдите два таких элемента третьего набора пересечение которых ему не принадлежит. Тогда вы покажете, что это не топология. И, наконец, нетрудно видеть, что любые пересечения и объединения элементов первого набора не выводят из него (т. е. при таких операциях не будет получаться новых множеств).

5.4 Нет, поскольку пересечение бесконечных множеств может быть конечным (приведите пример).

5.5 Да. При решении удобно использовать формулу де Моргана 2.Е, то, что пересечение конечных множеств всегда конечно и что объединение конечного числа конечных множеств также является конечным множеством.

5.6 Да, является, поскольку

$$\bigcup (\{a\} \cup U_\alpha) = \{a\} \cup \left(\bigcup U_\alpha \right),$$

$$\bigcap (\{a\} \cup U_\alpha) = \{a\} \cup \left(\bigcap U_\alpha \right).$$

5.1 Конечно, является.

5.10 Замкнуты:

- (1) в дискретном пространстве все множества;
- (2) в аптидискретном - только те же, какие и открыты: пустое и все пространство;
- (3) в стрелке - \emptyset , X и отрезки вида $[0; a]$;
- (4) в \mathcal{V} - X , \emptyset , $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{d\}$, $\{c, d\}$;
- (5) в \mathbb{R}_{T_1} - все конечные множества и все \mathbf{R} .

5.11 При решении этой задачи нужно преодолеть в себе ощущение полной очевидности вопроса. Почему промежуток $(0; 1]$ не открыт? Если $(0; 1] = \cup (a_\alpha; b_\alpha)$, то $1 \in (a_{\alpha_0}; b_{\alpha_0})$, значит $b_{\alpha_0} > 1$, откуда $\cup (a_\alpha; b_\alpha) \neq (0; 1]$. Аналогично и множество

$$\mathbb{R} \setminus (0; 1] = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$$

не открыто. С другой стороны,

$$(0; 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1 \right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{n+1}{n} \right).$$

5.12 Представьте дополнение этого множества как объединение интервалов.

5.13 Проверьте, что $\Omega = \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{F}\}$ есть топологическая структура.

5.14 Для контроля укажем, что всего существует четырнадцать таких наборов.

5.15 Вы уже знаете все, что нужно для решения этой задачи и просто обязаны находить ответы па такие вопросы самостоятельно. Не ленитесь.

6.1 Нет, конечно! Топологическая структура восстанавливается по базе, поскольку она является совокупностью объединений всевозможных наборов множеств, входящих в эту базу.

6.2

(1) База дискретного пространства —набор всех одноточечных подмножеств, и эта база минимальна.

(2) В пространстве \mathcal{V} базой является, к примеру, такой набор: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c, d\}$.

(3) В антидискретном пространстве минимальная база состоит из всего пространства.

(4) В стрелке, к примеру, базой является набор $\{[0; +\infty), (r; +\infty)\}_{r \in \mathbb{Q}_+}$.

6.3 Сама топологическая структура является своей собственной базой. Следовательно, никакой отличный от нее набор, не является базой.

Значит, в таком пространстве никакое открытое множество не может быть объединением двух отличных от него открытых множеств.

Следовательно, в нем открытые множества линейно упорядочены по включению. Более того, в нем не существует бесконечных строго возрастающих цепочек открытых множеств.

6.4 Мы покажем, что в результате удаления любого элемента из любой базы прямой получается база той же топологии. Пусть U - произвольное базовое множество. Его можно представить как объединение открытых интервалов, которые короче чем расстояние между некоторыми двумя точками множества U . Таких интервалов понадобится не меньше двух. В свою очередь, каждый из них можно представить как объединение множеств из рассматриваемой базы. Поскольку U удалось представить как объединение других базовых множеств, его самого можно из базы удалить.

6.5 Это так, поскольку второе из условий, сформулированных в 3.В, выполнено автоматически.

6.6 Докажите, что пересечение арифметических прогрессий есть арифметическая прогрессия.

6.7 Поскольку множества $\{i, i + d, i + 2d, \dots\}$, $i = 1, \dots, d$, открыты, попарно по пересекаются и покрывают \mathbb{N} , то каждое из них и замкнуто. В частности, для каждого простого числа p замкнуты и множества $\{p, 2p, 3p, \dots\}$, образующие покрытие множества $\mathbb{N} \setminus 1$. Если бы простых чисел было конечное число, то оказалось бы, что одноточечное множество $\{1\}$ открыто.

6.8 Включение $\Omega_1 \subset \Omega_2$ означает, что множество, открытое в первой топологии (т. е. входящее в набор Ω_1) принадлежит и набору Ω_2 . Поэтому следует показать, что множество $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=1}^n$ является открытым в обычной топологии прямой.

7.2 Ср. 4-В.

7.4 Ответ в 7.7.

7.7 Квадраты, стороны которых параллельны, соответственно, осям координат и биссектрисам координатных углов.

7.8. $D_1(a) = X$, $D_{1/2}(a) = \{a\}$, $S_{1/2}(a) = \emptyset$.

7.9. К примеру, $X = D_1(0) \subset \mathbb{R}^1$. а $D_{3/2}(5/6) \subset D_1(0)$.

7-10 Обойдитесь тремя точками.

7-11 Пусть $R > r$ и $D_R(b) \subset D_r(a)$. Возьмите $c \in D_R(b)$ и воспользуйтесь тем, что $\rho(b, c) \leq \rho(b, a) + \rho(a, c)$.

7-12 Положим $u = b - x$ и $t = x - a$. Неравенство Коши обращается в равенство, тогда векторы u и t сонаправлены, т. е. тогда точка x лежит на отрезке с концами в точках a и b .

7-13 В метрике $\rho^{(p)}$ при $p > 1$ указанное множество совпадает с отрезком с концами a и b , а в метрике $\rho^{(1)}$ является прямоугольным параллелепипедом, противоположными вершинами которого являются эти точки.

7-14 См. решение задачи 7.F.

7-19 Дискретная.

7-20 Покажите, что множество $X \setminus D_r(a) = \{x \mid \rho(x, a) > r\}$ открыто.

7-23 Воспользуйтесь равенством $X \setminus S_r(a) = B_r(a) \cup (X \setminus D_r(a))$ и результатом задачи 7-20.

7-25 Только прямая и дискретное пространство.

7-26 Утверждение задачи 6.F как раз и состоит в том, что при $n = 2$ метрики $\rho^{(2)}$, $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(\infty)}$ эквивалентны; аналогичное рассуждение можно провести и при $n > 2$. Однако в этом случае удобнее воспользоваться результатом следующей задачи, показав, что для любой пары метрик вида $\rho^{(p)}$ с $(1 \leq p \leq \infty)$ найдутся соответствующие константы c и C .

7-27 Разобьем эту задачу на две. Именно, вначале покажем, что если $\rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$, то $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Действительно, из неравенства $\rho_2 \leq C\rho_1$ следует включение $B_r^{(\rho_1)}(a) \subset B_{Cr}^{(\rho_2)}$. Теперь воспользуемся утверждением задачи 7.1. Неравенство $c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y)$ можно переписать в виде $\rho_1(x, y) \leq \frac{1}{c}\rho_2(x, y)$. Тем самым, $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

7-28 Метрики $\rho_1(x, y) = |x - y|$ и $\rho_2(x, y) = \arctg|x - y|$ на прямой эквивалентны, однако ясно, что не существует такой константы C , что $\rho_1 \leq C\rho_2$.

7-29 Ответ: метрики ρ_1, ρ_2 эквивалентны, если существуют такие $c, C, d > 0$, что если $\rho_1(x, y) \leq d$, то $c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$.

7-30 Найдите такие константы c и C , что $c\rho^{(\infty)}(x, y) \leq \rho^{(p)}(x, y) \leq C\rho^{(\infty)}$.

7-31 Поскольку $\rho_1(f, g) \leq \rho_C(f, g)$, то $\Omega_1 \subset \Omega_C$. С другой стороны, не существует такого шара в метрике ρ_1 с центром в нуле, который содержался бы в шаре $B_1^{\rho_C}(0)$, поскольку $\forall \varepsilon > 0 \exists f$, такая что

$$\int_0^1 |f(x)| dx < \varepsilon, \text{ а } \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq 1, \text{ таким образом } \Omega_C \not\subset \Omega_1.$$

7-32 1) Ясно, что во всех случаях требует проверки лишь неравенство треугольника, причем для $\rho_1 + \rho_2$ оно очевидно верно. Далее:

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) \leq$$

$$\max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(y, z), \rho_2(y, z)\}.$$

Аналогичное неравенство верно для $\rho_2(x, y)$, поэтому $\max\{\rho_1, \rho_2\}$ - метрика.

2) Постройте примеры, из которые показывали бы, что ни $\min\{\rho_1, \rho_2\}$, ни $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, ни $\rho_1 \rho_2$ метриками не являются (для этого достаточно надлежащим образом подобрать попарные расстояния между тремя точками).

7-33 Последнее утверждение практически очевидно. Первое и второе следуют из него при $f(t) = \frac{t}{1+t}$ и $f(t) = \min\{1, t\}$, соответственно, так что достаточно проверить, что эти функции удовлетворяют условиям последнего пункта.

7-34 Поскольку $\frac{\rho}{1+\rho} \leq \rho$, а при $\rho(x, y) \leq 1$ верно неравенство $\frac{1}{2}\rho(x, y) \leq \frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$, то утверждение задачи следует из 7.29.

7-35 Для произвольной точки $z \in A$ верно, что $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$,

значит, $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$, или $\rho(x, A) - \rho(y, A) \leq \rho(x, y)$.

Поменяв местами x и y , получим неравенство $\rho(y, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, y)$. Система из двух полученных неравенств равносильна искомому неравенству.

8.1 Так же, как строится сама топология: если Σ - база в X , то $\Sigma_A = \{A \cap V \mid V \in \Sigma\}$ - база индуцированной топологии в A .

8.2

(1) Дискретная, поскольку $(n - 1, n + 1) \cap \mathbb{N} = \{n\}$;

(2) $\Omega_{\mathbb{N}} = \{(k, k + 1, k + 2, \dots)\}_{k \in \mathbb{N}}$;

(3) дискретная;

(4) $\Omega = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

8.3 Да, открыт, поскольку $[0; 1) = (-1; 1) \cap [0; 2]$, а множество $(-1; 1)$ открыто на прямой.

8.5 Положите $V = U$. Используйте задачу 8.E.

8.6 Рассмотрите интервал $(-1; 1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ и открытый единичный круг с центром в начале координат. Другое решение основано на следующем общем утверждении: всякое открытое множество является локально замкнутым. Действительно, если множество U открыто в X , то для всякой его точки пересечение $U \cap U$ замкнуто в U .

8.7 Топология, порожденная метрикой в A , задается базой $\Sigma_1 = \{B_r^A(a) \mid a \in A\}$, где $B_r^A(a) = \{x \in A \mid \rho(x, a) < r\}$ -открытый шар в A с центром в a и радиусом r . Вторая топология задается базой $\Sigma_2 = \{B_r(x) \cap A \mid x \in X\}$. Здесь $B_r(\cdot, r)$ -открытый шар в X . Очевидно $B_r^A(a) = B_r(a) \cap A$ для $a \in A$. Поэтому $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Однако, может случиться, что $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Таким образом, осталось показать, что множества из Σ_2 являются открытыми в топологии, порожденной базой Σ_1 . Для этого проверьте, что для всякой точки x элемента второй базы $U \in \Sigma_2$ найдется элемент $V \in \Sigma_1$ первой базы, такой что $x \in V \subset U$.

9.1 $\text{Int}\{a, b, d\} = \{a, b\}$, поскольку это и есть наибольшее открытое множество пространства \mathbb{I} , содержащееся в $\{a, b, d\}$.

9.2 Внутренность интервала $(0; 1)$ на прямой с топологией Зариского пуста, поскольку никакое непустое открытое множество этого пространства не помещается в $(0; 1)$.

9.3 1) Действительно.

$$\text{Cl}_A B = \bigcap_{\substack{F \supset B, \\ A \setminus F \in \Omega_A}} F = \bigcap_{\substack{H \supset B, \\ X \setminus H \in \Omega}} (H \cap A) = A \cap \bigcap_{\substack{H \supset B, \\ X \setminus H \in \Omega}} H = A \cap \text{Cl}_X B.$$

2) Очевидно, что второе равенство может быть неверным.

Действительно, если $X = \mathbb{R}^2$, $A = \mathbb{R}^1$, $B = A$, то

$$\text{Int}_A B = \mathbb{R}^1 \neq \emptyset = (\text{Int}_X B) \cap A.$$

$$9.4 \text{Cl}\{a\} = \{a, c, d\}.$$

$$9.5 \text{Fr}\{a\} = \{c, d\}.$$

9.6 Следует из 9.К; см. 9.7.

$$9.7 \text{Fr} A = \text{Cl} A \setminus \text{Int} A = \text{Cl} A \cap (X \setminus \text{Int} A) = \text{Cl} A \cap \text{Cl}(X \setminus A).$$

9.8 В топологии Ω_1 меньше открытых множеств, значит, меньше и замкнутых множеств, следовательно, пересечение всех замкнутых в этой топологии и содержащих A множеств не может быть меньше, чем пересечение содержащих A замкнутых в топологии Ω_2 множеств.

$$9.9 \text{Int}_1 A \subset \text{Int}_2 A.$$

9.10 Так как $\text{Int} A$ есть открытое и содержащееся в B множество, то оно содержится в $\text{Int} B$.

9.11 Так как множество $\text{Int} A$ является открытым, то его внутренность совпадает с ним самим.

9.12 Из очевидного включения $\text{Int } A \cap \text{Int } B \subset A \cap B$ следует, что $\text{Int } A \cap \text{Int } B \subset \text{Int}(A \cap B)$. Далее, если $x \in \text{Int}(A \cap B)$, то у точки x имеется окрестность, содержащаяся в $A \cap B$. значит, эта окрестность содержится в каждом из этих множеств, следовательно, $x \in \text{Int } A \cap \text{Int } B$. Второе утверждение неверно - см. задачу 9.13.

9.13 $\text{Int}([-1; 0] \cup [0; 1]) = (-1; 1) \neq (-1; 0) \cup (0; 1) = \text{Int}[-1; 0] \cup \text{Int}[0; 1]$.

9.14 $\text{Int } A \cup \text{Int } B$ - это открытое множество, содержащееся в объединении $A \cup B$, значит, оно содержится и в его внутренности, таким образом, $\text{Int } A \cup \text{Int } B \subset \text{Int}(A \cup B)$.

9.15 Если $A \subset B$, то $\text{Cl } A \subset \text{Cl } B$; $\text{Cl } \text{Cl } A = \text{Cl } A$; $\text{Cl } A \cup \text{Cl } B = \text{Cl}(A \cup B)$; $\text{Cl } A \cap \text{Cl } B \supset \text{Cl}(A \cap B)$.

9.16 $\text{Cl}\{1\} = [0; 1]$, $\text{Int}\{0; 1\} = \emptyset$, $\text{Fr}(2; +\infty) = [0; 2]$.

6.17 $\text{Int}((0; 1] \cup \{2\}) = (0; 1)$. $\text{Cl}\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\text{Fr } \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

9.18 $\text{Cl } \mathbb{N} = \mathbb{R}$, $\text{Int}(0; 1) = \emptyset$, $\text{Fr}\{0; 1\} = \mathbb{R}$. Действительно, в \mathbb{R}_{T_1} замкнутыми множествами являются лишь конечные и сама прямая, значит замыкание всякого бесконечного множества есть...

9.19 Да, содержит. Действительно, так как $\text{Cl } B_r(x) \subset D_r(x)$, то $\text{Fr } B_r(x) = \text{Cl } B_r(x) \setminus B_r(x) \subset D_r(x) \setminus B_r(x) = S_r(x)$.

9.20 Да, содержит. Действительно, так как $\text{Int } D_r(x) \supset B_r(x)$, то $\text{Fr } D_r(x) = D_r(x) \setminus \text{Int } D_r(x) \subset D_r(x) \setminus B_r(x) = S_r(x)$.

9.21 Если $X = [0; 1] \cup \{2\}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, $S_2(0) = \{2\}$, а $\text{Cl } B_2(0) = [0; 1]$.

9.22.1 К примеру, $A = [0; 1]$.

9.22.2 Возьмите $A = [0; 1) \cup (1; 2] \cup (\mathbb{Q} \cap [3; 4]) \cup \{5\}$.

9.22.3 Так как $\text{Int } A \subset \text{Cl } \text{Int } A$ и множество $\text{Int } A$ открыто, то $\text{Int } A \subset \text{Int } \text{Cl } \text{Int } A$, следовательно, $\text{Cl } \text{Int } A \subset \text{Cl } \text{Int } \text{Cl } \text{Int } A$. Так как $\text{Int } \text{Cl } \text{Int } A \subset \text{Cl } \text{Int } A$ и множество $\text{Cl } \text{Int } A$ замкнуто, то $\text{Cl } \text{Int } A \supset \text{Cl } \text{Int } \text{Cl } \text{Int } A$.

9.23 Будем последовательно строить множества J_n , $n \geq 1$, каждое из которых является объединением интервалов длиной 3^{-n} . Если $J_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n; 2n + 1)$ и множества J_0, \dots, J_{n-1} уже построены, то J_n — это объединение срединных третей тех отрезков, на которые распадается множество $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} J_k$. Если $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{3k}$, $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{3k+1}$, $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{3k+2}$, то $\text{Fr } A = \text{Fr } B = \text{Fr } C = \text{Cl}(\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Cl } J_k)$. (Аналогичным

образом можно построить даже бесконечное семейство открытых множеств с общей границей.)

9.24 Если концы двух отрезков достаточно близки, то для любой точки на одном из них найдется близкая к ней точка на другом отрезке. Если две точки принадлежат внутренности выпуклого множества, то оно содержит цилиндр, осью которого является отрезок с концами в этих точках.

9.26 Только если A лежит в некоторой гиперплоскости, в этом случае $\text{Cl } A = \text{Fr } A$, или же если A - полупространство. Иначе $\text{Int } A \neq \emptyset$ (докажите это), и если $x_0 \notin A$, то найдется содержащий ее отрезок, концы которого принадлежат $\text{Fr } A$.

9.27 В силу свойства (а) $X \in \Omega$. Из (б) следует, что $\text{Cl}_* X = X$, значит $\emptyset \in \Omega$. Если $U_1, U_2 \in \Omega$, то прямо из (с) получаем, что $U_1 \cap U_2 \in \Omega$. Прежде чем проверить последнее условие топологической структуры, покажите, что из (с) следует монотонность: если $A \subset B$, то $\text{Cl}_* A \subset \text{Cl}_* B$. Для доказательства последнего утверждения задачи советуем проверить два включения и использовать тот факт, что множество F замкнуто, тогда $F = \text{Cl}_* F$ (надо где-то использовать данное в условии свойство (d)!).

9.29 1) Непустые; 2) неограниченные; 3) бесконечные.

9.30 Ясно, что в дискретном пространстве единственным всюду плотным множеством является само это пространство. Рассуждаем от противного. Если пространство не дискретно, то в нем имеется такая точка x , что одноточечное множество $\{x\}$ не открыто, значит, множество $X \setminus x$ также будет всюду плотным.

9.31 См. 5.6.

9.32 Первое утверждение следует из монотонности замыкания. Контр-пример ко второму утверждению проще всего построить, рассмотрев антидискретное пространство. Полезно также построить его и в \mathbf{R} , взяв \mathbf{Q} в качестве одного из множеств.

9.33 Пусть множества A и B открыты и всюду плотны, U - произвольное непустое открытое множество. Основная идея:

$$U \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap B.$$

9.34 Открытость одного из множеств.

9.35 1) Пусть U_k - счетное семейство всюду плотных множеств, V - произвольное непустое открытое подмножество прямой. Нетрудно построить вложенную последовательность $\{[a_n; b_n]\}$, такую, что

$$[a_n; b_n] \subset V \cap \bigcap_{k=1}^n U_k \text{ и } b_n - a_n \rightarrow 0. \text{ По аксиоме Кантора найдется}$$

точка, принадлежащая каждому из этих отрезков, следовательно,

пересечение $V \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ непусто, значит, пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ всюду

плотно. 2) Ответ на второй вопрос задачи - отрицательный.

9.36 Рассмотрим открытые множества $U_n \supset \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Так как каждое из них содержит множество \mathbb{Q} , все они всюду плотны на прямой. Теперь занумеруем рациональные числа, пусть

$\mathbb{Q} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Возьмем отрезок $[a_1; b_1] \subset U_1$, такой что $x_1 \notin [a_1; b_1]$. Поскольку множество U_2 всюду плотно, в ней имеется отрезок $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1] \cap U_2$, такой что $x_2 \notin [a_2; b_2]$. Продолжая построение аналогичным образом, мы получим вложенную последовательность $\{[a_n; b_n]\}$ отрезков, такую что 1) $[a_n; b_n] \subset U_n$ и 2) $x_n \notin [a_n; b_n]$. В силу стандартного факта математического анализа, найдется точка $c \in \bigcap_{j=1}^{\infty} [a_n; b_n]$. Ясно, что $c \in (\bigcap U_n) \setminus \mathbb{Q}$.

9.37 Конечно, нет, поскольку внешность всюду плотного множества пуста.

9.38 Конечно, пуста.

9.39 Конечно, является.

9-40 Имеем, $X \setminus \text{Int Cl } A = \text{Cl}(X \setminus \text{Cl } A) = X$, в силу определения нигде не плотного множества.

9-41 Внешностью границы замкнутого множества F является объединение $(X \setminus F) \cup \text{Int } F$. Осталось заметить, что $\text{Cl}(X \setminus F) \supset \text{Fr } F$. Если множество U открыто, то множество $F = X \setminus U$ замкнуто, а $\text{Fr } U = \text{Fr } F$, значит, граница открытого множества является нигде не плотным множеством. Для произвольного множества утверждение очевидно неверно, к примеру, $\text{Fr } \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

9.42 Имеем,

$$X \setminus \text{Cl}(\cup A_i) = X \setminus \cup \text{Cl } A_i = \cap (X \setminus \text{Cl } A_i).$$

Осталось применить задачу 9.33, точное, ее прямое обобщение на случай конечных пересечений.

9-43 Это множество $\text{Int Cl } A$.

9-44 Пусть множества $Y_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, нигде не плотны. Поскольку Y_1 нигде не плотно, то найдется отрезок $[a_1; b_1] \subset \mathbb{R} \setminus Y_1$. Аналогично, так как и множество Y_2 нигде не плотно, отрезок $[a_1; b_1]$ содержит отрезок $[a_2; b_2] \subset \mathbb{R} \setminus Y_2$. Продолжая построение, мы получим вложенную последовательность $\{[a_n; b_n]\}$ отрезков, такую что $[a_n; b_n] \subset \mathbb{R} \setminus Y_n$. В силу стандартного утверждения математического анализа, найдется точка $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$. Ясно, что $c \in \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n \neq \emptyset$.

9-45 Например, всякая точка конечного подмножества прямой является его точкой прикосновения, но не является предельной.

9-47 Множеством предельных точек является все пространство \mathbb{R}_{T_1} .

9.48 (a) \Rightarrow (b): Рассмотрите $V = \bigcup_{x \in A} U_x$, где U_x - окрестности, существующие по определению локальной замкнутости, и покажите, что $A = V \cap \text{Cl } A$. (b) \Rightarrow (c): Используйте определение топологии подпространства, (c) \Rightarrow (a): В качестве окрестностей U_x можно взять одно и то же множество.

10.1 Нет, поскольку это отношение не антисимметрично. Действительно, $-1|1$ и $1| -1$, но $-1 \neq 1$.

10.2 Обозначим через $— C$ множество, симметричное C относительно точки 0 - начала координат. Прямо из определения нестрогого частичного порядка следует, что: C должно быть замкнуто относительно сложения; должно содержать ноль и $C \cap (-C) = \{0\}$. Верхним конусом элемента a является множество $a + C$ - результат параллельного переноса множества C на вектор a .

10.6 Очевидно, наибольший элемент максимален, наименьший - минимален, но обратные утверждения вообще говоря не верны. Если же для любого подмножества частично упорядоченного множества эти понятия совпадают, то любые два элемента этого множества сравнимы, то есть один из них больше другого. Действительно, рассмотрим любое двуэлементное подмножество. Если бы эти два элемента не были сравнимы, то каждый из них был бы максимальным и значит наибольшим элементом этого множества. Но наибольший элемент единствен. Это противоречие показывает, что элементы на самом деле сравнимы. Наоборот, из сравнимости любых двух элементов легко выводится, что во всяком подмножестве любой максимальный элемент является наибольшим, а любой минимальный - наименьшим.

10.9 Отношение включения в множестве подмножеств множества X является линейным порядком, тогда X либо пусто, либо состоит из единственного элемента.

10.11 Рассмотрите, например, следующее условие: для любых a, b и c , таких что $a \prec c$ и $b \prec c$, найдется такой элемент d , что $a \prec d$, $b \prec d$ и $d \prec c$. Покажите, что это условие выполнено во всяком линейно упорядоченном множестве и что из этого условия следует, что правые лучи составляют базу некоторой топологии. Покажите, что верно и обратное: из того, что правые лучи составляют базу некоторой топологии, следует это условие.

10.13 Точка, открытая в топологии порядка, это наибольший элемент пространства. Аналогично, точка, замкнутая в топологии порядка, это наименьший элемент.

10.14 Лучи вида $(a; \infty)$ и $[a; \infty)$. пустое множество и вся прямая.

10.16 Одноточечное множество, элемент которого является наибольшим во всем пространстве.

11.1 Да, правда. Докажем, к примеру, последнее равенство. Если $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$, то $f(x) \in Y \setminus A$. значит, $f(x) \notin A$, таким образом, $x \notin f^{-1}(A)$, следовательно, $x \in X \setminus f^{-1}(A)$. Осталось заметить, что рассуждение можно провести в обратном направлении.

11.2 Докажем первое равенство. Если $y \in f(A \cup B)$, то найдется такой элемент $x \in A \cup B$, что $f(x) = y$. Если $x \in A$, то $y \in f(A)$, если же $x \in B$, то $y \in f(B)$, таким образом, во всяком случае $y \in f(A) \cup f(B)$. Обратное включение доказывается проще.

Так как $A \subset A \cup B$, то $f(A) \subset f(A \cup B)$, аналогично, $f(B) \subset f(A \cup B)$, откуда и следует, что $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Оба других равенства неверны, см. 11.3 и 11-4.

11.3 Рассмотрим отображение $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$: $f(0) = f(1) = 0$. Пусть $A = \{0\}$ и $B = \{1\}$. Тогда $f(A) \cap f(B) = \{0\}$, между тем, как $f(A \cap B) = \emptyset$. Аналогично, $f(X \setminus A) = \{0\}$, тогда как $Y \setminus f(A) = \emptyset$.

11-4 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, однако никакого естественного включения между множествами $f(X \setminus A)$ и $Y \setminus f(A)$ не имеется.

11.5 Отображение f является биекцией.

11.6 Пусть $y \in B \cap f(A)$. Тогда $y = f(x)$, где $x \in A$. С другой стороны,

$x \in f^{-1}(B)$, значит, $x \in f^{-1}(B) \cap A$. следовательно,
 $y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$.

Докажите обратное включение самостоятельно.

11.7 Нет, не обязательно. Пример: $f : \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$, $g : \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$. Конечно, отображение f обязано быть инъекцией, а g - сюръекцией.

12.1 Отображение id непрерывно, тогда $U = \text{id}^{-1}(U) \in \Omega_1$ для каждого $U \in \Omega_2$, что и означает, что $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

12.2 (a),(d) Да, останется. (b),(c) Нет, не обязательно.

12.3 1) Произвольные; 2) только постоянные, т. е. отображающие все пространство Y в некоторую точку пространства X .

12-4 1) Только постоянные, т. е. отображающие все пространство Y в некоторую точку пространства X : 2) произвольные.

12.5 Семейство $\Omega' = \{f^{-1}(U) \mid U \in \Omega\}$ является топологией на A , причем эта топология - самая грубая из тех, относительно которых отображение f непрерывно.

12.6 Имеем, $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\text{Cl } A)$. Если отображение f непрерывно, то множество $f^{-1}(\text{Cl } A)$ замкнуто, следовательно,

$$\text{Cl } f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\text{Cl } A).$$

Если имеет место данное включение, то для всякого замкнутого в Y множества F , $\text{Cl } f^{-1}(F) \subset f^{-1}(F)$, следовательно, множество $f^{-1}(F)$ совпадает со своим замыканием, значит, оно замкнуто. Тем самым доказано, что f - непрерывное отображение.

12.7 Отображение f непрерывно, тогда $\text{Int } f^{-1}(A) \supset f^{-1}(\text{Int } A)$ для любого $A \subset Y$, тогда $\text{Cl } f(A) \supset f(\text{Cl } A)$ для любого $A \subset X$, тогда $\text{Int } f(A) \subset f(\text{Int } A)$ для любого $A \subset X$.

12.8 Утверждение следует из того, что прообраз открытого множества есть объединение прообразов базовых множеств.

12.9 Конечно нет, поскольку введенное определение совпадает с известным для числовых функций (см. 12.К). Рассуждение, основанное на определении: множество $U = (1; 2]$ открыто в $[0; 2]$, однако его прообраз $f^{-1}((1; 2]) = \{1; 2\}$ не является открытым в $[0; 2]$ множеством.

12.10 Да, непрерывно. Рассмотрите, каким может быть множество $f^{-1}(a; +\infty)$ (прообраз множества, открытого в стрелке). Кстати, будет ли непрерывным отображение g , совпадающее с f всюду, кроме $x = 1$, а $g(1) = 2$?

12.11 Только постоянные. Если, к примеру, $0, 1 \in f(\mathbb{R}_{T_1})$, то рассмотрим $f^{-1}(-\infty; \frac{1}{2})$ и $f^{-1}(\frac{1}{2}; +\infty)$. В чем противоречие?

12.12 Конечнократные или постоянные.

12.13 Монотонно возрастающие, непрерывные слева (в смысле математического анализа).

12.14 Отображение f непрерывно, а g^{-1} - нет. Дело в том, что топология на \mathbf{Z}_+ дискретна, а в топологии на множестве $f(\mathbf{Z}_+)$ одноэлементное множество $\{0\}$ не является открытым.

12.15 Если U открыто и непусто, то, поскольку отображение сюръективно и непрерывно, $f^{-1}(U)$ тоже открыто и непусто, значит, непусто его пересечение со всюду плотным в X множеством A , следовательно, непусто пересечение $U \cap f(A)$, откуда и следует, что множество $f(A)$ всюду плотно в пространстве Y .

12.16 Конечно, неверно.

12.17 Да, существует. Возьмем в качестве A канторово множество.

Отображение сопоставляет числу $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$, где $a_i = 0; 2$, число $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$.

Осталось проверить, что определенное таким образом отображение является непрерывным (проделайте это самостоятельно).

12.18 Докажем первое утверждение. Пусть U_a - окрестность точки $a \in X$, такая что $f(U_a) \subset (-\frac{\varepsilon}{2} + f(a); f(a) + \frac{\varepsilon}{2})$, а V_a - аналогичная окрестность для отображения g . Нетрудно видеть, что, взяв $W_a = U_a \cap V_a$, мы получим, что $(f + g)(W_a) \subset (-\varepsilon + f(a); f(a) + \varepsilon)$.

12.20 Если

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ ix & 0 \leq x \leq \frac{1}{i}, \\ 1 & x \geq \frac{1}{i}, \end{cases}$$

то указанная в задаче формула определяет функцию, равную 0 при $x \leq 0$ и равную 1 при $x > 0$.

12.21 Топология в \mathbb{R}^n индуцируется метрикой $\rho^{(\infty)}$, где

$$\rho^{(\infty)}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

Следовательно, $\rho^{(\infty)}(f(x), f(a)) < \varepsilon$, тогда $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

12.22 Воспользуйтесь 12.21 и 12.18.

12.23 Воспользуйтесь 12.21 и 12.18. 12.19.

12.24 Если топология Ω' такова, что для любого множества A отображение $x \mapsto \rho(x, A)$ непрерывно, то Ω' содержит всевозможные открытые шары. Значит, в нее входят и все множества, открытые в метрической топологии.

12.25 Если $\rho(x, a) < \varepsilon$, то $\rho(f(x), f(a)) \leq \alpha\varepsilon < \varepsilon$.

12.27 Там, где речь идет о замкнутых множествах.

12.28 Следует использовать такой, возможно неизвестный для вас факт: если $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ в некоторой окрестности некоторой точки, то $P \equiv 0$. Отсюда следует, что для во всякой окрестности всякой точки x множества $\{x \mid P(x) = 0\}$ найдется точка, не принадлежащая этому множеству. Осталось заметить, что множество $\{x \mid P(x) = 0\}$ замкнуто.

12.29 В случаях (а), (с) и (d), конечно, нет. Попробуйте доказать, что ответ утвердительный в случае (b), к примеру, используя технику математического анализа (см. также 12. T).

12.31 Если пересечение некоторого множества U с каждым элементом покрытия Γ открыто в этом элементе, то то же верно для любого элемента покрытия Γ' . Поскольку по условию покрытие Γ' фундаментально, то множество U открыто во всем пространстве, таким образом, и покрытие Γ является фундаментальным.

12.32 Если $B \cap U$ открыто в U для всякого $U \in \Gamma$, а $A \in \Delta$, то множество $(B \cap U) \cap A = (B \cap A) \cap (U \cap A)$ открыто в $U \cap A$, значит, $B \cap A$ открыто в A . Поскольку покрытие Δ фундаментально, то B открыто в пространстве X .

12.33 Следствие предыдущего утверждения. Что за покрытие следует взять в качестве \mathcal{D} ?

12.1x Рассмотрите $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(x) = x$ при $x \in [0; 1]$ и $f(x) = x + 1$ при $x \in (1; 2]$.

12.2x Рассмотрите естественное отображение $f : \{\pm \frac{1}{n}, 0\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.

12.3x Да, непрерывно. Более того, достаточно требовать обычной (нестрогой) монотонности отображения.

12. Сx Построим такое пространство Z как объединение дизъюнктивных копий пространств X и Y . В нём расстояние между точками, принадлежащими копии одного из исходных пространств, положим равным расстоянию между соответствующими точками этого пространства. Для того, чтобы определить расстояния между точками разных пространств, выберем точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ и положим $\rho(a, b) = \rho_X(a, x_0) + \rho_Y(y_0, b) + 1$ для $a \in X$ и $b \in Y$. Проверьте (это действительно легко), что это будет метрика.

12.Dx Да, например, одноточечное пространство и любое неограниченное пространство.

129. Ex Хотя, как мы видели, решив предыдущую задачу, расстояние Громова-Хаусдорфа может быть бесконечным, а симметричность и неравенство треугольника формулировались выше для функций, принимающих только конечные значения, симметричность имеет смысл и очевидна, а неравенству треугольника тоже легко придать разумный смысл при появлении бесконечных значений. Именно, при наличии бесконечностей неравенство треугольника следует считать выполненным, тогда из трёх расстояний бесконечны два или три. Для доказательства таким образом обобщённого неравенства треугольника полезна следующая конструкция. Пусть пространства X и Y изометрически вложены в пространство A , а пространства Y и Z изометрически вложены в пространство B . Построим новое пространство, в котором будут изометрически вложены A и B , пересекаясь друг с другом по Y . Для этого добавим к A точки множества $B \setminus A$. Расстояния между добавленными точками положим равным расстоянию между ними в B . Расстояние между точками $x \in A \setminus B$ и $z \in B \setminus A$ положим равным $\inf\{\rho_A(x, y) + \rho_B(y, z) \mid y \in A \cap B\}$.

Сравните эту конструкцию с конструкцией из решения задачи 12. Сx. Докажите, что так получается метрическое пространство, и примените

неравенство треугольника для расстояния Хаусдорфа между множествами X , Y и Z в этом пространстве.

12.Fx Отчасти, ответ очевиден. Конечно, расстояние Громова-Хаусдорс неотрицательно! Но вот если оно равно нулю, в каком смысле тогда пространства равны? Первое, наиболее оптимистическое предположение, это что тогда должна существовать изометрическая биекция между пространствами. Но это предположение неверно, как показывает пример пространств \mathbf{Q} и \mathbf{R} со стандартным расстоянием в них. Однако это верно для компактных метрических пространств.

13.1 Утверждения 13.C- 13.E и означают, что гомеоморфность является отношением эквивалентности.

13.2 Пусть $\tau : x \mapsto \frac{Rx}{|x|^2}$ -инверсия. Покажите, что $\tau^{-1} = \tau$. Непрерывность следует из теорем математического анализа: выпишите координатное представление отображения τ и воспользуйтесь утверждениями 12.18, 12.19 и 12.21.

13.3 Покажите, что если $z = x + iy$ и $f(z) = u + iv$, то $v = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2}$, откуда следует, что $f(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Обратное отображение задается аналогичной формулой. Для доказательства непрерывности воспользуйтесь 12.18, 12.19 и 12.21

13.4 Воспользуйтесь теоремой о промежуточном значении. См. 13.M.

13.5 1) и 2) очевидны; 3) Всякая биекция $\mathbb{R}_{T_1} \rightarrow \mathbb{R}_{T_1}$ устанавливает биективное соответствие между конечными множествами.

13.6 Только тождественное отображение \mathcal{V} есть гомеоморфизм.

13.7 Используйте 12.13 и 13. M.

13.8 Пусть $X = Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k; 2k + 1)$ и рассмотрите биекцию

$$X \rightarrow Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } x \in [0; 1), \\ \frac{x-1}{2} & \text{при } x \in [2; 3), \\ x-2 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

13.10 При решении пунктов (f) и (i) используйте полярные координаты; при решении остальных можно применить отображения, построенные при решении задачи 13.O.

13.11 В пункте (b).

13.12 Каждое из них гомеоморфно одному из следующих множеств: точка, отрезок, луч, круг, полоса, полуплоскость, плоскость. Докажите это!

13.13 В задачах 13. T и 13.11 достаточно заменить замкнутый круг D^2 замкнутым n -мерным шаром D^n и открытый круг B^2 открытым

n -мерным шаром B^n . В задаче 13.12 ситуация более запутанная. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество. Прежде всего, мы вправе считать, что $\text{Int } K \neq \emptyset$, поскольку в противном случае K изометрично подмножеству пространства \mathbb{R}^k с $k < n$. Во-вторых, предположим, что K не ограничено. (В противном случае оно будет гомеоморфно замкнутому шару.) Если K не содержит никакой прямой, то оно гомеоморфно полупространству. Если K содержит некоторую прямую, то оно изометрично "цилиндру" с замкнутой выпуклой "базой", лежащей в пространстве \mathbb{R}^{n-1} , образующие которого параллельны n -ой координатной оси. Таким образом, мы можем провести индукцию по размерности. Сформулируйте полный ответ!

13.14 Отобразите каждое звено ломаной на дугу окружности.

13.15 См. решение предыдущей задачи. Можно построить даже кусочно-линейный гомеоморфизм.

13.16 Внимательно сопоставьте вес необходимые определения!

13.17 Рассмотрите квадрат на плоскости, заданный неравенством $|x| + |y| \leq 2$, и используйте идею задач 13.Т или 13.5.

13.18 Доказательство элементарное, но тяжелое...

13.19 При помощи гомеоморфизмов, описанных в решении задачи 13.0, вы сможете построить, к примеру, следующие гомеоморфизмы: $(a) \cong (d) \cong (f)$, $(d) \cong (e) \cong (h) \cong (b)$. $(h) \cong (g) \cong (c)$.

13.21 Если множество X состоит только из одного отрезка, то это в точности утверждение 13.20 (f). В общем случае используйте 13.19 (т. е. то, что $(l) \cong (h)$, при этом надо заметить, что гомеоморфизм можно считать тождественным на границе квадрата). Окружите отрезки непересекающимися ромбами и примените построенный гомеоморфизм к каждому из них.

13.22 Проведите индукцию по числу звеньев ломаной X . На каждом шаге, используя рассуждение в решении задачи 13.21, отображайте $\mathbb{R}^2 \setminus X$ на дополнение ломаной с меньшим числом звеньев.

13.23 Докажите, что для всякой пары точек $p, q \in \text{Int } D^2$ существует гомеоморфизм $f : D^2 \rightarrow D^2$, такой что $f(p) = f(q)$, $\text{aab}(f) = \text{id}_{S^1}$. Осталось провести рассуждение по индукции.

Ниже приведена более явная конструкция. Пусть $K = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$. Мы вправе предположить, что абсцисс точек множества K различны. (Почему?) Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $ff(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ - гомеоморфизм, для которого $F(K) \subset \mathbb{R}^1$. Существует также гомеоморфизм $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такой что $g(x_i) = i$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим гомеоморфизм $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (g(x), y)$. Тогда $(G \circ F)(K) = \{1, \dots, n\}$, следовательно, $\mathbb{R}^2 \setminus K \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{1, \dots, n\}$.

13.24 Используйте гомеоморфизм (b) \cong (c) задачи 13.20.

13.26 Рассмотрите отображение $(x, t) \mapsto (x, (1 - t)f(x) + tf(x))$.

13.27 Первый вопрос - а что представляет собой с математической точки зрения кофейная чашка, каким образом она задана? В дальнейшем мы укажем точный подход к описанию подобных объектов, введя соответствующий класс пространств, а пока будем рассуждать "с точки зрения здравого смысла". Замкнутый шар гомеоморфен своей половине, не правда ли? Далее, если вы из половины шара удалим половину шара меньшего радиуса с тем же центром, то оставшаяся часть ("корка от половины арбуза") по-прежнему будет гомеоморфна и полушару, и шару. Эти утверждения можно доказать аккуратно, даже выписав необходимые формулы. Оставшаяся "корка" - это чашка с отбитой ручкой. Значит, чашка с отбитой ручкой гомеоморфна замкнутому шару, который, в свою очередь, гомеоморфен цилиндру. Более того, если на поверхности шара зафиксированы два "круга", то мы вправе считать, что именно они и являются основаниями цилиндра, ср. 13.25. В качестве отмеченных кругов давайте возьмем круги, по которым к чашке приставлена ручка, которая сама представляет собой цилиндр. Что же получилось, - бублик!

13.28 Монете гомеоморфны: блюдце, стакан, ложка, вилка, нож, тарелка, гвоздь, винт, болт, сверло. Обручальному кольцу гомеоморфны: кофейная чашка, гайка, шайба, цветочный горшок, ключ.

13.29 См. решение следующей задачи.

13.30 К этой задаче применимы те же слова, что были сказаны в решении задачи 13.27. Ясно, что если в шаре высверлить неглубокую ямку, то полученное тело по-прежнему гомеоморфно шару. Осталось объяснить, почему же описанное в задаче тело гомеоморфно слегка просверленному шару. Основная идея та же, что и в решении задачи 13.22; в данном случае решение основано на следующем утверждении. Пусть C_0 - цилиндр, пусть цилиндр C лежит в C_0 , имеет меньший радиус, меньшую высоту, а его нижнее основание лежит внутри нижнего основания цилиндра C_0 . Пусть C' - это некоторая нижняя часть цилиндра C . Существует такой гомеоморфизм $f : C_0 \rightarrow C_0$, тождественный на границе C_0 , что $f(C) = C'$. Отверстие, высверленное в данном шаре, является цилиндром. В силу сформулированной леммы мы вправе считать, что этот цилиндр — небольшой.

13.33 Каждое из пространств гомеоморфно $S^3 \setminus (S^1 \cup \text{point})$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите гомеоморфизм $\mathbb{R}^3 \cong S^3 \setminus \text{point}$, описанный в решении задачи 13.R. (Во втором случае удалите точку из окружности S^1 .) Рассуждение остается справедливым и в случае пространства \mathbb{R}^n . Но что произойдет, если заменить S^1 на S^k ?

13.34 Стереографическая проекция $S^n \setminus (0, \dots, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводит рассматриваемое множество в (сферически симметричную) окрестность S^{k-1} , которая, как совсем нетрудно видеть, гомеоморфна $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-k}$.

13.35 \mathbb{Z}, \mathbb{Q} счетны, остальные три — нет. $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Q}$, поскольку в первом из них топология дискретна, во втором — нет. Только в \mathbb{R}_{T_1} нет бесконечных замкнутых множеств, не совпадающих со всем пространством. В стрелке два любых открытых множества пересекаются.

13.36 Пусть $X = \{k\}_{-\infty}^{-1} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k; 2k+1)$; $Y = X \cup \{1\}$. Рассмотрите биекции

$$X \rightarrow Y : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{при } x \leq -2, \\ 1 & \text{при } x = -1, \\ x & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad Y \rightarrow X : x \mapsto \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } x \in [0; 1], \\ \frac{x-1}{2} & \text{при } x \in [2; 3), \\ x-2 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

Похожий трюк называется "гостиницей Гильберта"; а почему?

13.37 Возьмите $[0; 1]$ и \mathbb{R} .

13.38 Топология в \mathbb{Q} не дискретна.

13.39 1), 2) Если они не одноточечны, то нельзя.

13.40 См. 13.35.

14.1 1)-3) Да, в каждом из них два любых непустых открытых множества имеют непустое пересечение.

14.2 Пустое и одноточечное.

14.3 Несвязное двуточечное пространство, очевидно, является дискретным.

14.4 1) Нет, не связно, так как

$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty; \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}; +\infty))$. 2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ несвязно по таким же (и даже более простым) соображениям.

14.5 1) Да, так как, если $X = U \cup V$, где $U, V \in \Omega_1$, то $U, V \in \Omega_2$.

2) Нет, не обязательно: рассмотрите ситуацию, в которой топология Ω_1 тривиальна, топология Ω_2 дискретна, а множество X состоит более, чем из одной точки.

14.6 Множество A несвязно, если существуют открытые множества U и V , такие что $A \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A = \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$ и $V \cap A \neq \emptyset$.

14.7 1),3) Нет, так как индуцированная на $\{0,1\}$ топология является дискретной. 2) Да, так как индуцированная топология не дискретна (см. 14.3).

14.8 1) Всякое подмножество стрелки связно. 2) Подмножество пространства $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ связно, тогда оно пусто, является одноточечным или бесконечным.

14.9 Покажите, что отрезок $[0; 1]$ и открыт и замкнут в $\{0; 1\} \cup (2; 3]$.

14.10 Если $x, y \in A \subset \mathbb{R}$, $z \in (x; y)$ и $z \notin A$, то на какие открытые в A подмножества можно разбить множество A ? Ср. 11.4-

14.11 Используйте такое соображение: если $B \cap \text{Cl}_X C = \emptyset$, то $B = A \cap (X \setminus \text{Cl}_X C)$.

14.12 Пусть $X = A \cup \{x_*\}$, а Ω_* состоит из пустого множества и всех множеств, содержащих точку x_* . Проверьте, что Ω_* - топологическая структура. Какова топологическая структура Ω_A ?

14.13 Пусть A несвязно, а множества B и C удовлетворяют утверждениям задачи 14.11. Множества

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, B) < \rho(x, C)\}, \quad V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, B) > \rho(x, C)\}$$

являются искомыми. Заметим, что утверждение этой задачи останется верным, если вместо \mathbb{R}^n рассмотреть произвольное пространство, любое открытое подмножество которого нормально, см. 17.

14.14 Очевидно. (Ср. 14.6.)

14.15 Множество A плотно в B , снабженном относительной топологией. Осталось применить теорему 14.6.

11.16 Предположим противное, что множество $A \cup B$ несвязно.

Тогда в объемлющем пространстве найдутся открытые подмножества U и V , такие что

$$A \cup B \subset U \cup V, \quad U \cap (A \cup B) \neq \emptyset, \quad V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$U \cap V \cap (A \cup B) = \emptyset \quad (\text{см. решение задачи 14.6}).$$

Так как $A \cup B \subset U \cup V$, то множество A пересекается по крайней мере с одним из множеств U или V . Пусть, для определенности, $A \cap U \neq \emptyset$. Тогда

$$A \cap V = \emptyset \quad \text{в силу связности множества } A, \text{ значит } A \subset U.$$

Так как множество U является окрестностью любой точки из пересечения

$$A \cap \text{Cl} B, \quad \text{то } U \cap B \neq \emptyset.$$

Множество V также пересекается с B , поскольку $V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, а $A \cap V = \emptyset$. Мы получили

противоречие со связностью B , так как $B \cap U$ и $B \cap V$ - два непустых открытых в B и непересекающихся множества, объединение которых дает B .

14.17 Если множество $A \cup B$ несвязно, то найдутся такие открытые в X множества U и V , для которых: $U \cup V \supset A \cup B$ и $U \cap V \cap (A \cup B) = \emptyset$.

Поскольку множество A связно, то оно содержится в одном из множеств U или V , для определенности, пусть $A \subset U$. Положим $B_1 = B \cap V$. Так как B открыто в $X \setminus A$, а $V \subset X \setminus A$, то B_1 открыто в V , значит, оно открыто в X . Далее, так как $B_1 \subset X \setminus U \subset X \setminus A$, то B_1 замкнуто в $X \setminus U$, значит, замкнуто в X . Таким образом, множество B_1 открыто и замкнуто в X , что противоречит связности этого пространства.

14.18 Нет, не следует. Пример: $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

14.19 1) Если A и B открыты и A несвязно, то $A = U \cup V$, где U и V - непустые, не пересекающиеся и открытые в A множества. Так как $A \cap B$ связно, то либо $A \cap B \subset U$, либо $A \cap B \subset V$. Для определенности считаем, что $A \cap B \subset U$. Тогда множества $V, U \cup B$ составляют разбиение $A \cup B$ на два непустых открытых множества.

Действительно, U и V открыты в $A \cup B$, так как открытое подмножество открытого множества открыто в объемлющем пространстве. Мы получили противоречие со связностью $A \cup B$.

2) Замените везде в предыдущем рассуждении слова *открыто*, *открытое* на слова *замкнуто*, *замкнутое*.

14.20 Нет, не обязательно. Рассмотрим связные множества $K_n = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N},$

$x \geq n, y \in [-1; 1]\}$, $n \in \mathbb{N}$. (Бесконечный забор, железная дорога, баллюстрада - что вам больше нравится.) Пересечением этих множеств является объединение лучей $\{y = 1, x \geq 0\}$ и $\{y = -1, x \geq \theta\}$.

14.21 Пусть C - компонента X . Рассмотрим точку $x \in C$, пусть U_x - это её связная окрестность. Тогда U_x целиком содержится в C , значит x - внутренняя точка множества C . Таким образом у множества C все точки - внутренние, следовательно, оно открыто.

14.22 Переформулируем утверждение, после чего оно станет очевидным. Именно, если множество M связно, а A открыто и замкнуто, то либо $M \subset A$, либо $M \subset X \setminus A$.

14.23 См. следующую задачу.

14.24 Докажите, что никакие две точки канторова множества не могут принадлежать одной его компоненте связности.

14.25 Если $\text{Fr } A = \emptyset$, то $A = \text{Cl } A = \text{Int } A$ - нетривиальное открытое и замкнутое множество.

14.26 Если $F \cap \text{Fr } A = \emptyset$, то $F = (F \cap \text{Cl } A) \cup (F \cap \text{Cl}(X \setminus A))$, причем $F \cap \text{Cl } A \cap \text{Cl}(X \setminus A) = \emptyset$.

14.27 Если $\text{Cl } A$ - несвязное множество, то $\text{Cl } A = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 - замкнутые и непересекающиеся в X множества. По 14.25 имеем $\text{Fr } F_1, \text{Fr } F_2 \neq \emptyset$ и $\text{Fr } \text{Cl } A = \text{Fr } F_1 \cup \text{Fr } F_2$, что противоречит связности $\text{Fr } A$.

14.30 Сопоставьте 14. N и 14.10.

14.31 Пусть M - компонента единицы. Для каждой точки $x \in M$ множество xM связно и содержит точку $x = xe$. Таким образом, множества xM и M пересекаются, следовательно $xM \subset M$, т. е. M является подгруппой X . Далее, для каждой точки $x \in X$ множество $x^{-1}Mx$ связно и содержит единицу. Следовательно $x^{-1}Mx \subset M$, так что M нормальная подгруппа.

14.32 Пусть множество $U \subset \mathbb{R}$ открыто. Для всякой точки $x \in U$ рассмотрите максимальный интервал $(m_x; M_x) \subset U$, содержащий эту точку. Любые два таких интервала либо совпадают, либо не пересекаются, таким образом, они составляют разбиение множества U .

14.33 1) Конечно, связно, поскольку, если l - спираль, то $S \cap l = l \cup S^1$. 2) Конечно, ответ не изменится, если к спирали добавлена только часть предельной окружности.

14.34 (a) Несвязно, к примеру, потому что несвязна его проекция на ось абсцисс. (b) Связно, поскольку любые две точки этого множества соединены (не более чем) двузвенной ломаной, (c) Связно. Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся объединением прямых $y = kx$, где $k \in \mathbb{Q}$. Ясно, что координаты (x, y) всякой точки множества X или обе рациональны, или обе иррациональны. Осталось заметить, что это множество связно, а данное в задаче множество лежит в его замыкании (совпадающей со всей плоскостью).

14.35 Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - связное множество. Воспользуйтесь тем, что шары пространства \mathbb{R}^n связны (см. 14.U или 14.V), и проверьте утверждение 14.E к семейству $\{A\} \cup \{B_\varepsilon(x)\}_{x \in A}$.

14.36 Для каждой точки $x \in A$ рассмотрим шаровую окрестность $V_x \subset U$ этой точки. Окрестность $\bigcup_{x \in A} V_x$ of A является искомой (см. рассуждение предыдущей задачи).

14.37 Пусть

$$X = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \{(x, y) \mid x \in [0; 1], y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Докажите, что любое одновременно и открытое, и замкнутое в X множество содержит точки $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$.

15.1 Действительно, всякий многочлен нечетной степени принимает как положительные, так и отрицательные значения (при достаточно больших по модулю значениях аргумента), следовательно, он принимает и нулевое значение.

15.2 Сопоставьте 14. Y, 15.B и 15. E.

15.3 Имеются девять топологических типов, именно: (1) A, R; (2) B; (3) C, L, M, N, S, U, V, W, Z; (4) D, O; (5) E, F, G, J, T, Y; (6) I, H; (7) K, X;

(8) P; (9) Q. Заметим, что ответ зависит от принятых начертаний букв. К примеру, можно так нарисовать букву R, что она будет гомеоморфна не A, а Q. Постарайтесь понять, какие же начертания подразумевали авторы, приводя данный выше ответ. Парную негомеоморфность букв разных типов можно доказать, используя аналоги рассуждения, проведенного в 15. E.

15-4 Поскольку квадрат без любой своей точки связан (докажите это!). Подчеркнем, что часто произносимая фраза: "Потому что его нельзя разбить на два открытых" доказательством отнюдь не является. Проще всего воспользоваться утверждением 14.1.

15.5 Поскольку $S^n \setminus \text{point} \cong \mathbb{R}^n$.

15.4x Фиксируем $h \in H$ и рассмотрим отображение $x \mapsto xhx^{-1}$. Поскольку H - нормальный делитель, то образ группы G лежит в H . Поскольку топология в H дискретна, то это отображение является локально постоянным, значит, в силу 15.2x, оно постоянно. Так как единица отображается в h , то тем самым $xhx^{-1} = h$ для всякого элемента x группы G , откуда и следует, что $gh = hg$ для любых элементов $g \in G$ и $h \in H$.

15.5x Рассмотрите то, что естественно назвать компонентой точки в смысле свойства ϵ , т. е. объединение всех множеств, обладающих этим свойством. Докажите, что из условия задачи следует, что любая компонента открыта. Поэтому, если пространство связно, то компонента любой точки совпадает со всем пространством.

15.7x Для удобства введем систему координат, осью ординат которой является данная прямая l , и рассмотрим функцию, значение $f(t)$ которой равно площади части множества A , лежащей левее прямой $x = t$. Докажите, что функция f непрерывна. Осталось заметить, что множеством ее значений является отрезок $[0; S]$, где S - площадь A , и применить теорему о промежуточном значении.

15.8x Если множество A связно, то определенная в решении задачи 15.7x функция будет строго монотонной на множестве $f^{-1}((0, S))$.

15.9x Фиксируем на плоскости некоторую систему координат и для всякого числа $\varphi \in [0; \pi]$ будем рассматривать также систему координат, получаемую поворотом исходной на угол φ . Введем функции f_A и f_B следующим образом: прямая $x = f_A(\varphi)$ ($x = f_B(\varphi)$) делит фигуру A (соответственно, фигуру B) на две части равной площади (конечно, для каждого угла φ прямая задана уравнением в соответствующей системе координат). Положим $g(\varphi) = f_A(\varphi) - f_B(\varphi)$. Ясно, что $g(\pi) = -g(0)$, поэтому,

если мы докажем непрерывность функций f_A и f_B , то найдется такое значение φ_0 , что $g(\varphi_0) = 0$. таким образом прямая $x = f_A(\varphi_0)$ делит каждую из фигур на две части равной площади. Докажите непрерывность функций f_A и f_B !

15.1 *Ох* Идея решения близка к идее решения предыдущей задачи.

16.1 Сопоставьте 14.R и 14. N.

16.2 Сопоставьте 16.1 и 14.26.

16.3 Это очевидно, поскольку включение in_A непрерывно. Не менее очевидно; отображение u непрерывно как подотображение непрерывного отображения $\text{in}_A \circ u$.

16.4 Из перечисленных пространств линейно связными являются только: одноточечное дискретное, аптидискретное, стрелка, \mathbb{R}_{T_1} . Заметим также, что в пространстве \mathcal{V} точки a и c можно соединить путем!

16.5 Следствие 16.3.

16.6 См. формулу в 16. C и 16.5.

16.8 Действительно, пусть $u : I \rightarrow X$ - путь. Тогда любые две точки $u(x), u(y) \in u(I)$ можно соединить путем, являющимся композицией отображений u и $I \rightarrow I : t \mapsto (1-t)x + ty$.

16.9 Путем в пространстве многоугольников является непрерывная деформация многоугольника. Покажем, что произвольный выпуклый многоугольник P можно продеформировать в правильный треугольник T . Выберем некоторую вершину V многоугольника и станем сдвигать ее по направлению к, например, середине диагонали, соединяющей смежные с V вершины P . Тем самым мы уменьшим число вершин на единицу. Продолжая в том же духе, мы в результате получим некоторый треугольник, который легко продеформировать в правильный треугольник T .

Также нетрудно видеть, что всякий выпуклый n -угольник можно продеформировать в правильный в пространстве выпуклых n -угольников.

16.11 Приведем рассуждение для случая, когда A и B - открытые множества. Пусть $x, y \in A$ и u - путь, соединяющий эти точки в $A \cup B$, причем $\exists t_0 \ u(t_0) \notin A$. Положим $\bar{t} = \sup\{t \mid u([0; t]) \subset A\}$.

Ясно, что $u(\bar{t}) \in B \setminus A$. Покажите, что

$\exists t_1 < \bar{t} : u(t_1) \in A \cap B$. Аналогично построим t_2 . Осталось заметить, что точки $u(t_1)$ и $u(t_2)$ можно соединить путем в $A \cap B$.

16.12 1), 2) Утверждение относительно границы очевидно. Пример легко найти в \mathbb{R}^1 , а в \mathbb{R}^2 нетрудно найти линейно связное множество, внутренность которого не является связной (так сказать, не "размерностно-однородное" множество).

16.13 Пусть $x, y \in \text{Cl } A$. Предположим, что $x, y \in \text{Int } A$ (в противном случае рассуждение станет лишь проще). Соединим x и y отрезками с точками $x', y' \in \text{Fr } A$, которые, в свою очередь, соединим друг с другом путем в $\text{Fr } A$.

16.16 Всякое связное подмножество прямой является выпуклым, значит, и линейно связным.

16.17 Сопоставьте задачу 14.35 и теорему 16. U.

16.18 Сопоставьте задачу 16.36 и теорему 16. U. Приведем также другое рассуждение. Если U - окрестность связного подмножества \mathbf{R}^1 , то существует такая непрерывная функция $r : A \rightarrow (0; +\infty)$, что $V = \bigcup_{x \in A} B_{r(x)}(x) \subset U$. В любой компоненте линейной связности множества V найдутся точки из множества A , поэтому если V не линейно связно, то множество A не может быть связным.

16.1x Используйте произведение путей.

16.2x Очевидно.

16.3x Очевидно.

16.4x Введите понятие компоненты соответствующей связности и докажите, что для открытых подмножеств \mathbf{R}^n такие компоненты являются открытыми множествами.

16.5x Например, S^1 .

16.6x Пусть $x, y \in \mathbf{R}^2 \setminus X$. Изобразите две непараллельные прямые, проходящие через точки x и y и непересекающие множество X .

16.7x Сведите эту задачу к предыдущей задаче, показав, что для любых точек $x, y \in \mathbf{R}^n$ найдется плоскость, содержащая эти точки и пересекающаяся с любым заданным подпространством не более чем по одной точке.

16.8x Всякая комплексная прямая, проходящая через точки $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus X$, пересекается с каждым из алгебраических множеств в конечном числе точек, поэтому общее число точек пересечения счетно, так что утверждение задачи является следствием 16.7x.

16.9x При решении этой задачи следует использовать два соображения. Первое связано с тем, что функция $\det : A \mapsto \det A$ непрерывна, откуда сразу следует, что множества $GL(n; \mathbb{R})$, $O(n; \mathbb{R})$, $Symm(n; \mathbb{R}) \cap GL(n; \mathbb{R})$ и $\{A \mid A^2 = E\}$ связными не являются. Множество $Symm(n; \mathbb{R}) = \{A \mid {}^t A = A\}$ является линейным подпространством пространства всех матриц, значит, оно линейно связно. Осталось показать, что, к примеру, множество $GL_+(n; \mathbb{R}) = \{A : \det A > 0\}$ линейно связно. Здесь и далее полезно использовать следующее утверждение (докажите его). Для всякого базиса $\{e_i\}$ в \mathbf{R}^n существуют такие непрерывные отображения $e_i(t)$, $t \in [0; 1]$, что:

1) для любого $t \in [0; 1]$ множество $\{e_i(t)\}$ есть базис;

2) $e_i(0) = e_i$; 3) $\{e_j(1)\}$ - ортонормированный базис.

16.10x $GL(n, \mathbb{C})$ связно, поскольку уравнение $\det A \neq 0$ является алгебраическим в \mathbb{C}^{n^2} , значит, в силу 16.8x, оно даже связно посредством ломаных. Остальные пространства также связны (и даже линейно связны).

17.1 Только дискретное пространство является хаусдорфовым (и, с формальной точки зрения, еще одноточечное с тривиальной топологией).

17-2 Прочитайте следующее выражение с кванторами:

$$\exists U_b : \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : a_n \notin U_b.$$

17-4 Рассмотрим два непрерывных отображения $f, g : X \rightarrow Y$.

Предположим, что Y - хаусдорфово пространство. Для того, чтобы доказать, что множество совпадения $C(f, g)$ является замкнутым, докажем, что его дополнение открыто. Если

$x \in X \setminus C(f, g)$, то $f(x) \neq g(x)$. Так как пространство Y является хаусдорфовым, то у точек $f(x)$ и $g(x)$ имеются непересекающиеся окрестности U и V . Ясно, что для каждой точки

$y \in W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ верно, что $f(y) \neq g(y)$, таким образом $W \subset X \setminus C(f, g)$. Так как отображения f и g непрерывны, то W является окрестностью точки x , следовательно множество $X \setminus C(f, g)$ открыто.

17-5 Рассмотрите следующие отображения из I в пространство стрелки: $x \mapsto 1$ и $x \mapsto \text{sign } x$. (Здесь sign - это функция, отображающая отрицательные числа в -1 , 0 в 0 и положительные числа в 1.)

17-6 Следует 17-4-, так как множество неподвижных точек отображения f - это множество $C(f, \text{id}_X)$.

17-7 Пусть X - пространство стрелки. Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow X : x \mapsto x + \sin x$. Что представляет из себя множество неподвижных точек этого отображения? Является ли оно замкнутым?

17-8 В силу 17-4, множество совпадения $C(f, g)$ замкнуто в X . По условию оно содержит всюду плотное в X подмножество, значит, оно совпадает со всем пространством.

17-10 Только первые два свойства являются наследственными.

17-11 $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} U$, тогда для любой точки $y \neq x$ найдется окрестность U точки x , такая что $y \notin U_x$, что и есть в точности аксиома T_1 .

17-12 Очевидно.

17-13 См. 17-11.

17-14 Рассмотрите прообраз той окрестности точки $f(a)$, которая не содержит точку $f(b)$.

17-15 Следует из предыдущей задачи.

17-16 Эта топология является полным аналогом топологии \mathbb{R}_{T_1} : в таком пространстве замкнуты лишь конечные множества и все пространство.

17-17 Рассмотрите слабейшую топологию, содержащую обычную топологию прямой и такую, в которой множество $A = \{\frac{1}{n}\}_1^\infty$ замкнуто. В ней 0 нельзя отделить от A .

17-18 Во-первых, антидискретное. Более содержательный пример: $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \cup 0_1 \cup 0_2$, база топологии состоит из интервалов, однако интервалы $(a; b)$, где $a < 0 < b$, бывают двух типов: одни содержат 0_1 , а другие – 0_2 . Проверьте, что это действительно база. Третья аксиома отделимости выполнена, однако "различные нули" нельзя отделить друг от друга.

17-19 Предположим, что в пространстве X выполнена аксиома T_3 . Если $b \in X$ и W - окрестность b , то, применяя T_3 к точке b и множеству $X \setminus W$, получаем, что найдутся непересекающиеся открытые множества U и V , такие что $b \in U$ и $X \setminus W \subset V$. Ясно, что $\text{Cl}(U) \subset X \setminus V \subset W$.

Пусть X - топологическое пространства, $F \subset X$ - замкнутое множество и $b \in X \setminus F$. Тогда $X \setminus F$ - окрестность точки x , следовательно, найдется окрестность U точки x , такая что $\text{Cl}(U) \subset X \setminus F$. Тогда $X \setminus \text{Cl}(U)$ - искомая окрестность множества F , не пересекающаяся с U .

17-20 Пусть X – пространство, A - его подпространство, B - замкнутое в A множество. Если $x \notin B$, то $x \notin F$, где F замкнуто и $F \cap A = B$. Далее очевидно.

17-21 Например, антидискретное пространство или пространство стрелки.

17-22 Сравните с доказательством задачи 17.19. Пусть в пространстве X выполнена T_4 . Если множество $F \subset X$ замкнуто и W - окрестность F , то, применяя T_4 к F и $X \setminus W$, мы получим, что имеются непересекающиеся открытые множества U и V , такие что $F \subset U$ и $X \setminus W \subset V$. Ясно, что $\text{Cl}(U) \subset X \setminus V \subset W$.

Пусть X - пространство, $F, G \subset X$ два замкнутых непересекающихся множества. Тогда $X \setminus G$ - окрестность F , следовательно, найдется окрестность U множества F , такая что $\text{Cl}(U) \subset X \setminus G$. Тогда $X \setminus \text{Cl}(U)$ - искомая окрестность F , не пересекающаяся с U .

17-23 Используйте то, что замкнутое множество замкнутого подпространства замкнуто во всем пространстве.

17-24 Рассмотрите, к примеру, множества $A = \mathbb{N}$ и $B = \{n + \frac{1}{n}\}_1^\infty$

в \mathbf{R} .

17-26 Пусть F_1 и F_2 дизъюнктные замкнутые подмножества пространства Y . Так как f непрерывно, то их прообразы $f^{-1}(F_1)$ и $f^{-1}(F_2)$ замкнуты, а так как X нормально, то они отделимы друг посредством окрестностей W_1 и W_2 . Положим $A_i = X \setminus W_i$, $i = 1, 2$. Множества A_i замкнуты, значит, замкнуты и их образы B_i . При этом $B_1 \cup B_2 = f(A_1 \cup A_2) = Y$, следовательно, открытые множества $U_1 = Y \setminus B_1$ и $U_2 = Y \setminus B_2$ не пересекаются. Докажите, что $U_i \supset F_i$, $i = 1, 2$.

17-1x Для всяких точек $x, y \in I$ найдутся непересекающиеся круги D_x и D_y . Если же хотя бы одна из точек лежит в \mathcal{H} , то существование их непересекающихся окрестностей очевидно.

17-2x Убедитесь, что если открытый круг D касается L в точке $x \in L$, то $\text{Cl}\{\{x\} \cup D\} = \text{Cl} D$; далее используйте 17-19.

17-3x Дискретная.

17-4x Поскольку L является замкнутым в X множеством, а топология на L дискретна, то всякое подмножество L замкнуто в \mathcal{N} . Докажем, что подмножество \mathcal{N} , состоящее из рациональных точек L невозможно отделить от подмножества, состоящего из иррациональных точек L . Пусть U - окрестность в пространстве Немыцкого множества $L \setminus \mathbf{Q}$. Для каждой точки $x \in L \setminus \mathbf{Q}$ фиксируем число $r(x)$ таким образом, что открытый круг $D_{r(x)} \subset U$ радиуса $r(x)$ касается прямой L в точке x . Пусть $Z_n = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid r(x) > 1/n\}$. Так как, очевидно, что $\mathbf{Q} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = \mathbf{R}^1$, то из утверждения 9.44 следует, что для некоторого (достаточно большого) n множество Z_n не является нигде не плотным. Следовательно $\text{Cl} Z_n$ содержит некоторый отрезок $[a; b] \subset \mathbf{R}^1$. Значит, $U \cup [a; b]$ содержит окрестность $[a; b]$, которая пересекается с каждой окрестностью произвольной рациональной точки из $[a; b]$ в \mathcal{N} . Следовательно, U пересекается с каждой окрестностью множества \mathbf{Q} , поэтому пространство \mathcal{N} не является нормальным.

17-6x См. 21.1x и 19.N.

17-8x Положите $f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$.

17-9x.1 Положим $A = f^{-1}([-1; -\frac{1}{3}])$ и $B = f^{-1}([\frac{1}{3}; 1])$. Используйте 17.8x для того, чтобы показать, что найдется функция $g : X \rightarrow [-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$, такая что $g(A) = -\frac{1}{3}$ и $g(B) = \frac{1}{3}$.

17.9x. В силу 17.9x.1 существует функция $g_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ такая что $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ при всех $x \in F$. Положим $f_1(x) = f(x) - g_1(x)$. Если слегка изменить доказательство утверждения 17-9x.1, то мы

покажем, что найдется функция $g_2 : X \rightarrow [-\frac{2}{9}; \frac{2}{9}]$, такая что $|f_1(x) - g_2(x)| \leq \frac{4}{9}$ при всех $x \in F$, так что $|f(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leq \frac{4}{9}$. Продолжая конструкцию, мы построим последовательность функций $g_n : X \rightarrow [-\frac{2^n - 1}{3^n}; \frac{2^n - 1}{3^n}]$, такую что $|f(x) - g_1(x) - \dots - g_n(x)| \leq \frac{2^n}{3^n}$.

Используйте 27-Нх для того, чтобы показать, что сумма $g_1(x) + \dots + g_n(x)$ сходится к непрерывного функции $g : X \rightarrow [-1; 1]$. Ясно, что $g|_F = f$.

18.1 Очевидно.

18.2 Сопоставим каждой восьмерке пару точек с рациональными координатами, лежащих внутри каждой из ее половин. Таким образом, каждой восьмерке сопоставлена четверка рациональных чисел. Нетрудно видеть, что непересекающимся восьмеркам сопоставляются различные пары, значит, их имеется не более, чем есть четверок рациональных чисел, т. е. счетное количество.

18.3 Стрелка удовлетворяет второй аксиоме счетности: набор $\{(x; +\infty) \mid x \in \mathbb{Q}\}$ является ее счетной базой (используйте 21.F.)

Используйте 18. G, чтобы показать, что в пространстве \mathbb{R}_{T_1} не существует счетной базы топологии.

18.4 Да, сепарабельны: множество \mathbb{N} всюду плотно и в стрелке, и в \mathbb{R}_{T_1} .

18.5 Рассмотрите пример пространства из задачи 5.6.

18.6 Рассмотрите несчетное множество (например, \mathbf{R}), расстояния между различными точками которого равны 1 (см.7.A.).

18.7 Сопоставим каждому открытому множеству из данной совокупности некоторую лежащую в нем точку всюду плотного множества. В результате мы получим инъекцию заданной совокупности в счетное множество.

18.8 Следует из предыдущей задачи, поскольку компоненты открытого подмножества \mathbf{R}^n открыты и не пересекаются.

18.9 Рассмотрите отображение $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{T_1}$ и воспользуйтесь 18. M и результатом 18.3.

18.10 Пусть X - пространство, \sum_0 - счетная база топологии пространства X , а \sum - произвольная база топологии в X . В силу теоремы Липделёфа 18. O, каждое множество из \sum_0 является объединением счетного множества элементов базы \sum . Осталось использовать 18. E.

18.12 Ясно, что надо доказать лишь последнее утверждение. Если множество U открыто и $a \in U$, то $\exists r \ B_r(a) \subset U$. Далее, существует такое число k , что $r_k < r$, поэтому $B_{r_k}(a) \subset U$.

18.13 В дискретном пространстве минимальной базой в точке x является одноточечное множество $\{x\}$. В антидискретном пространстве X минимальной базой в точке является все это пространство.

18.14 Все, кроме пространства \mathbb{R}_{T_1} .

18.15 Прямая, базой топологии которой является множество промежутков вида $[a; b)$.

18.16 Если $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ - счетная база в точке, то можно положить $U_i = \bigcap_{j=1}^n V_j$.

18.17 В этом пространстве $x_n \rightarrow a$, тогда $x_n = a$ при всех n , начиная с некоторого номера. Таким образом, $\text{SCl } A = A$ для всякого $A \subset \mathbb{R}$. С другой стороны, к примеру, отрезок $[0; 1]$ не является замкнутым множеством, поэтому $\text{SCl}[0; 1] = [0; 1] \neq \text{Cl}[0; 1] = \mathbb{R}$.

18.18 Рассмотрите тождественное отображение пространства из задачи 18.17 в \mathbb{R} .

19.1 1) Если пространство (X, Ω_2) компактно, то очевидно, что пространство (X, Ω_1) также является компактным. 2) Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

19.2 Стрелка компактна (какое множество обязано принадлежать всякому ее покрытию?). Пространство \mathbb{R}_{T_1} также компактно, поскольку, если рассмотреть всякий непустой элемент произвольного открытого покрытия, то останется непокрытым лишь конечное число точек этого пространства.

19.3 Это множество не компактно в \mathbb{R} , так как из покрытия $\{(-\infty; \frac{2n-1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ невозможно выделить конечное подпокрытие.

19.4 Множество $[1; 2)$ компактно в стрелке, так как одним из элементов покрытия $[1; 2)$ является луч $(a; +\infty)$, где $a < 1$.

19.5 A компактно в стрелке, тогда $\inf A \in A$.

19.6 См. решение задачи 19.2.

19.7 1) Если $\{U_\alpha\}$ - покрытие множества $A \cup B$, то оно одновременно покрытие A и покрытие B , следовательно, из него можно выбрать конечное подпокрытие множества A и конечное подпокрытие B , объединение которых будет конечным покрытием объединения $A \cup B$. 2) Множество $A \cap B$ не обязано быть компактным (используйте 19.5 для построения соответствующего примера).

19.8 Пусть U_0 - элемент покрытия, содержащий 0. Осталось заметить, что вне U_0 лежит конечное число точек множества A .

19.9 Рассмотрите двуточечное пространство с антидискретной топологией и его одноточечное подмножество.

19.10 Сопоставьте 19.K, 5.F и 19., 1.

19.11 $\{X \setminus K_\alpha\}$ - покрытие компактного множества $K_{\alpha_0} \setminus U$. Если $\{X \setminus K_i\}$ - его конечное подпокрытие, то $U \supset \bigcap K_i$.

19.12 Набор $\{K_n\}$ образует центрированную систему, значит, пересечение $\bigcap K_n$ непусто. Если $\bigcap K_n$ несвязно, то $\bigcap K_n = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 - непересекающиеся замкнутые множества. Рассмотрите их непересекающиеся окрестности U_1, U_2 , используйте предыдущую задачу и придите к противоречию со связностью множеств K_n .

19.13 Только если это пространство конечно.

19.14 Из 19.S следует, что компактны S^1, S^n , эллипсоид. Множества $[0; 1)$ и $[0; 1) \cap \mathbb{Q}$ не компактны, так как не замкнуты, а некомпактность луча и гиперboloида следует из того, что они не ограничены.

19.15 Замкнуто и ограничено в \mathbb{R}^{n^2} лишь $O(n)$, значит, только оно и компактно.

19.16 В силу 15.C и теорем 19.O и 19.T, множество $f(I)$ является компактным промежутком, значит - отрезком.

19.17 Это утверждение 19. U. Так как функция $A \rightarrow \mathbb{R} :$

$x \mapsto \rho(0, x)$ ограничена, то множество A ограничено. Докажем, что оно замкнуто. Предположим противное, пусть $x_0 \in \text{Cl } A \setminus A$. Тогда функция $A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/\rho(x, x_0)$ не является ограниченной - противоречие.

Значит A замкнуто и ограничено, поэтому в силу 19.S оно компактно.

19.18 Рассмотрим функцию $f : K \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \rho(x, F)$. В силу 7-35, функция f непрерывна. Поскольку $\rho(K, F) = \inf_{x \in K} f(x)$, то осталось применить 19. U.

19.19 Следствие предыдущего утверждения, примененного к множествам A и $X \setminus U$, где U - окрестность A ; положите $\varepsilon = \rho(A, X \setminus U)$.

19.20 Докажите, что если A замкнуто в \mathbf{R}^n , то для всякой точки $x \in \mathbf{R}^n$ найдется $y \in A$, такая, что $\rho(x, y) = \rho(x, A)$, откуда следует, что $V = \bigcup_{x \in A} D_\varepsilon(x)$. Множество $\bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$ линейно связно как связное открытое подмножество \mathbf{R}^n , откуда и следует линейная связность множества V .

19.22 Рассмотрим функцию $\varphi : x \mapsto \rho(x, f(x))$. Если $f(x) \neq x$, то $\varphi(f(x)) = \rho(f(x), f(f(x))) < \rho(x, f(x)) = \varphi(x)$. Ясно (докажите это), что φ непрерывна. Поскольку пространство X компактно, то φ достигает своего наименьшего значения в некоторой точке x_0 . Если $f(x_0) \neq x_0$, то значение φ в x_0 не будет наименьшим.

19.23 Пусть U_1, \dots, U_n - конечное подпокрытие данного покрытия. Положим $f_i(x) = \rho(x, X \setminus U_i)$. Покажите, что функция $\varphi : x \mapsto$

$\max\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, n\}$ непрерывна и положительна; так как X компактно, то она достигает своего наименьшего значения $r > 0$.

19.24 Очевидно.

19.25 Если X не компактно, см., к примеру, 13.B; если Y не хаусдорфово, рассмотрите, к примеру, тождественное отображение id отрезка $[0; 1]$ с обычной топологией в него же с топологией Зариского, или же просто тождественное отображение пространства с дискретной топологией в пространство с антидискретной топологией.

19.26 Нет, не существует. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Если A не замкнуто, то отображение $\text{in} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ не замкнуто. Если $A = \mathbb{R}^n$, то существует гомеоморфизм $\mathbb{R}^n \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$. Если A замкнуто, но не ограничено, то возьмем $x_0 \notin A$ и рассмотрим инверсию относительно этой точки.

19.27 Используйте 8.F: замкнутые подмножества замкнутого подпространства замкнуты в объемлющем пространстве.

19.1x Пусть $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - норма. Из неравенства

$$p(x) \leq \sum |x_i| p(e_i) = \sum \lambda_i |x_i|$$

следует, что p непрерывна в нуле (здесь $\{e_i\}$ - базис \mathbf{R}^n . Покажите, что p непрерывна и в любой другой точке \mathbf{R}^n .

19.2x Поскольку сфера компактна, то найдутся такие числа $c, C > 0$, что $c|x| \leq p(x) \leq C|x|$, где $|\cdot|$ - обычная евклидова норма. Далее воспользуйтесь 17.27.

19.3x Конечно же, нет!

19.4x Рассмотрите покрытие пространства X окрестностями, на которых f ограничена.

20.1 Очевидное следствие 20.E.

20.2 По лемме Цорна существует максимальное множество, попарные расстояния между точками которого не меньше ε ; оно и будет искомой ε -сетью.

20.N Очевидно. Следует из предыдущего утверждения, так как $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть для $\frac{\varepsilon}{2}$ -сети есть ε -сеть всего пространства.

20.1x Замкнутые шары пространства ℓ^∞ некомпактны. Действительно, рассмотрим последовательность $\{e_n\}$, где e_n - орт. Каковы попарные расстояния между этими точками?

20.2x Это множество компактно, поскольку множество

$$A = \{x \in \ell^\infty \mid |x_n| \leq 2^{-n} \text{ и } n \leq k, x_n = 0 \text{ при } n > k\}$$

является его 2^{-k} -сетью.

20.4x Нет, не существует. Докажите, что если E - конечномерное подпространство нормированного пространства (X, p) , $x \notin E$ и

$y \in E$ является ближайшей к x точкой E , то точка $x_0 = \frac{x-y}{|x-y|}$ такова, что $\rho(x_0 - z) \geq 1$ (это так называемая лемма о перпендикуляре).

Используя ее, можно по индукции построить такую последовательность $x_n \in X$, что $\rho(x_n) = 1$, $\rho(x_n - x_k) \geq 1$ при $n \neq k$. Ясно, что у нее нет никакой сходящейся подпоследовательности.

20.5x См. 7.1x.

20.6x Если $x = a_0 + a_1p + \dots$, $y = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$, то $\rho(x, y) \leq p^{-k-1}$.

20.7x Да, является. Для доказательства используйте следующее утверждение: если

$x = a_0 + a_1p + \dots$, $y = b_0 + b_1p + \dots$ и $\rho(x, y) < p^{-k}$, то $a_i = b_i$ при всех $i = 1, \dots, k$.

20.8x Поскольку конечное множество $A = \{y = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k\}$ является p^{-k-1} -сетью в \mathbb{Z}_p , то из доказанной в 20.7x полноты этого пространства следует его компактность.

20.9x Рассмотрите метрику Хаусдорфа.

20.10x Рассмотрим \mathbb{R}^{2n} как пространство (упорядоченных) наборов n точек плоскости. У каждого набора точек рассмотрим его выпуклую оболочку, которая будет представлять собой многоугольник с не более, чем n вершинами. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{2n}$ множество наборов из n точек, выпуклые оболочки которых являются многоугольниками, принадлежащими пространству \mathcal{P}_n . Нетрудно видеть, что множество \mathcal{K} ограничено и замкнуто, значит, компактно. Ясно, что отображение $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}_n$, переводящее набор точек в его выпуклую оболочку, сюръективно и непрерывно, откуда и следует, что множество \mathcal{P}_n компактно.

20.11x Используйте то, что множество \mathcal{P}_n компактно, а площадь является непрерывной функцией $S : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$.

20.12x Достаточно показать, что если многоугольник $P \subset D$ не является правильным, то найдется многоугольник $P' \subset D$, такой что его периметр не превосходит p , а его площадь больше площади многоугольника P , или же такой, что его периметр меньше p , а площадь не превосходит площади P . 1) Прежде всего, удобно считать, что P (так же как и P') содержит центр круга D . 2) Если у P имеются две соседние стороны, длины которых различны, то легко построить многоугольник той же площади и меньшего периметра. 3) Если все стороны P имеют одну и ту же длину, но его углы различны, то мы, опять-таки легко

можем построить многоугольник большей площади и меньшего периметра.

30.13x Так же как в 20.9x, рассмотрите метрику Хаусдорфа.

20.14x Рассмотрим последовательность парвильных многоугольников периметра p с увеличивающимся числом вершин. Покажите, что эта последовательность не имеет предела в пространстве \mathcal{P}_∞ . Более того, у нее нет сходящейся подпоследовательности. Следовательно, пространство \mathcal{P}_∞ не является даже секвенциально компактным.

20.15x Опять-таки, как в 20.9x и 20.13x, можно рассмотреть метрику Хаусдорфа.

20.16x В силу 20.N, достаточно показать, что: 1) для каждого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$ в пространстве \mathcal{P} имеется компактная ε -сеть и 2) пространство \mathcal{P} является полным. Итак, 1) таковой сетью является пространство \mathcal{P}_n при достаточно больших n . (Какие конечные ε -сети вы можете предложить?) 2) Пусть K_1, K_2, \dots - последовательность Коши пространства \mathcal{P} . Покажите, что $K_* = \text{Cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{i=n}^{\infty} K_i))$ является выпуклым множеством и $K_i \rightarrow K_*$ при $i \rightarrow \infty$.

20.17x Следует из 20.16x и непрерывности площади. (Ср. 20.11x.)

20.18x Аналогично решению задачи 20.12x, достаточно показать, что мы можем увеличить площадь компактного множества X , отличного от круга без увеличения его периметра. 1) Рассмотрим точки $A, B \in \text{Fr } X$, которые делят $\text{Fr } X$ на две дуги равной длины. 2) Отрезок AB делит множество X на две части, X_1 и X_2 . Предположим, что площадь X_1 не меньше площади X_2 . Если мы заменим X_2 зеркальным образом X_1 , мы не уменьшим площадь множества. Так как X_1 не является полукругом, то найдется точка, $C \in X_1 \cap \text{Fr } X$, такая что $\angle ACB \neq \pi/2$, так что мы сможем увеличить площадь множества.

21.1x Очевидно.

21.2x Все, за исключением \mathbf{Q} .

21.3x Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $B = \{0\}$. Множества A и B локально компактны, однако у точки $0 \in A \cup B$ нет окрестности с компактным замыканием (в $A \cup B$).

21.4x См. 21.Lx.

21.7x Это очевидно, так как если открытое множество U пересекается с $A \in \Gamma$, тогда U пересекается с $\text{Cl } A$.

21.8x Прямое следствие утверждения 21.Qx.

21.9x Воспользуйтесь 21.8x.

21.11x Пусть X - локально компактное пространство. Тогда у X имеется база, состоящая из открытых множеств с компактным замыканием. В силу теоремы Линделёфа, из этой базы (которая является

открытым покрытием $\text{of } X$) можно выделить счетное подпокрытие пространства X . Осталось воспользоваться утверждением 21.11х.

21.12х Доказательство аналогично сходному факту о компактности.

21.13х Очевидно. (Все, что нужно - это вспомнить определения.)

21.14х Рассмотрим покрытие $\Gamma' = \{X \setminus F, U_\alpha\}$ пространства X .

Пусть $\{V_\alpha\}$ - вписанное в Γ' локально конечное покрытие. Тогда $\Delta = \{V_\alpha \mid V_\alpha \cap F \neq \emptyset\}$ - покрытие множества F . Положим

$W = \bigcup_{V_\alpha \in \Delta} V_\alpha$. Так как покрытие Δ локально конечно, то множество

$K = \bigcup_{V_\alpha \in \Delta} \text{Cl } V_\alpha$ является замкнутым. Следовательно, W и $X \setminus K$ -

искомые окрестности множеств F и M .

21.15х Непосредственно следует из 21.12х (или 21.16х).

21.16х Немедленно следует из 21.14х.

21.17х Поскольку X хаусдорфово и локально компактно, у каждой точки $x \in U_\alpha \in \Gamma$ существует окрестность $V_{\alpha,x}$, замыкание которой компактно и содержится в U_α . Поскольку X также является паракомпактным, в нем существует локально конечное покрытие Δ , вписанное в покрытие $\{V_{\alpha,x}\}$, что и требовалось доказать.

21.18х Рассуждение опирается на лемму Цорна. Рассмотрим множество \mathcal{M} всех открытых покрытий Δ пространства X , таких что для каждого $V \in \Delta$: $V \in \Gamma$ или же $\text{Cl } V$ содержится в некотором элементе покрытия Γ . Сопоставим каждому покрытию $\Delta \in \mathcal{M}$ подмножество $A_\Delta = \{V_\alpha \mid \text{Cl } V_\alpha \subset U_\alpha\} \subset \Gamma$. Введем порядок на множестве \mathcal{M} : $\Delta \preceq \Delta'$, если $A_\Delta \subset A_{\Delta'}$ и $V_\alpha = V'_\alpha$ для каждого $\alpha \in A_\Delta$. Можно доказать, что в этом множестве существует наибольший элемент Δ_0 , при этом A_{Δ_0} - вес множество индексов Γ , таким образом, Δ_0 является искомым покрытием.

21.20х Практически очевидно.

22.1 $\text{pr}_Y^{-1}(B) = X \times B$.

22.2 Имеем:

$$\begin{aligned} \text{pr}_Y(\Gamma_f \cap (A \times Y)) &= \text{pr}_Y(\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \cap (A \times Y)) = \\ &= \text{pr}_Y(\{(x, f(x)) \mid x \in A\}) = \{f(x) \mid x \in A\} = f(A). \end{aligned}$$

Докажите второе тождество самостоятельно.

22.3 Действительно, $(A \times B) \cap \Delta = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x = y\} = \{(x, x) \mid x \in A \cap B\}$.

22.4 $\text{pr}|_{\Gamma_f} : (x, f(x)) \leftrightarrow x$.

22.5 Действительно, $f(x_1) = f(x_2)$, тогда

$\text{pr}_Y(x_1, f(x_1)) = \text{pr}_Y(x_2, f(x_2))$.

22.6 Очевидным образом следует из равенства

$$T(x, f(x)) = (f(x), x) = (y, f^{-1}(y)).$$

22.7 Воспользуйтесь формулой

$$(A \times B) \cap W = (A \times B) \cap \left(\bigcup U_\alpha \times V_\alpha \right) = \\ \bigcup ((A \times B) \cap (U_\alpha \times V_\alpha)) = \bigcup ((A \cap U_\alpha) \times (B \cap V_\alpha)).$$

22.8 Воспользуйтесь третьей формулой из 22.А:

$$X \times Y \setminus A \times B = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)).$$

22.9 Как обычно, будем проверять два включения. \square Воспользуйтесь 22.8.

\square Если x и y - точки прикосновения множеств A и B ,

соответственно, то, очевидно, что (x, y) - точка прикосновения $A \times B$.

22.10 Да, верно. \square Это очевидно. \square Если $z = (x, y) \in \text{Int}(A \times B)$, то у точки z существует элементарная окрестность

$W = U \times V \subset A \times B$, значит, $x \in U \subset A$ и $y \in V \subset B$,

следовательно $x \in \text{Int } A$ и $y \in \text{Int } B$, так что $z \in \text{Int } A \times \text{Int } B$.

22.11 Конечно, нет! К примеру, границей квадрата $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ является контур этого квадрата, тогда как произведение $\text{Fr } I \times \text{Fr } I$ состоит из четырех точек.

22.12 Нет, не верно; рассмотрите множество $(-1; 1) \times (-1; 1) \subset \mathbb{R}^2$.

22.13 Верно. Если множества A и B замкнуты, то $\text{Fr } A = A \setminus \text{Int } A$ и $\text{Fr } B = B \setminus \text{Int } B$. Множество $A \times B$ также замкнуто, поэтому

$$\text{Fr}(A \times B) = A \times B \setminus \text{Int}(A \times B) = A \times B \setminus \text{Int } A \times \text{Int } B =$$

$$((A \setminus \text{Int } A) \times B) \cup (A \times (B \setminus \text{Int } B)) = (\text{Fr } A \times B) \cup (A \times \text{Fr } B).$$

22.14 $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr } A \times B) \cup (A \cup B) \cup (A \times \text{Fr } B)$, поскольку

$$\text{Fr}(A \times B) = \text{Cl}(A \times B) \setminus \text{Int}(A \times B) = (\text{Cl } A \times \text{Cl } B) \setminus (\text{Int } A \times \text{Int } B) \\ = ((\text{Cl } A \setminus \text{Int } A) \times \text{Cl } B) \cup (\text{Cl } A \times (\text{Cl } B \setminus \text{Int } B)) = (\text{Fr } A \times \text{Cl } B) \cup (\text{Cl } A \times \text{Fr } B) \\ = (\text{Fr } A \times (B \cup \text{Fr } B)) \cup ((A \cup \text{Fr } A) \times \text{Fr } B) = (\text{Fr } A \times B) \cup (\text{Fr } A \times \text{Fr } B) \cup (A \times \text{Fr } B).$$

22.15 Достаточно показать, что всякое элементарное множество в топологии произведения есть объединение множеств данного вида. Действительно,

$$U \times V = \bigcup_{\alpha} U_\alpha \times \bigcup_{\beta} V_\beta = \bigcup_{\alpha, \beta} U_\alpha \times V_\beta.$$

22.16 Сужение $\text{pr}_X | \Gamma_f$ - непрерывная биекция. Обратное отображение $X \rightarrow \Gamma_f : x \mapsto (x, f(x))$ непрерывно, тогда отображение $g : X \rightarrow X \times Y : x \mapsto (x, f(x))$ непрерывно, что имеет место в силу равенства $g^{-1}(U \times V) = U \cap f^{-1}(V)$.

Воспользуйтесь равенством $f = \text{pr}_Y \circ (\text{pr}_X | \Gamma_f)^{-1}$.

22.17 Действительно, $\text{pr}_X(W) = \text{pr}_X(\cup U_\alpha \times V_\alpha) = \cup \text{pr}_X(U_\alpha \times V_\alpha) = \cup U_\alpha$. (Мы предполагали, что $V_\alpha \neq \emptyset$)

22.18 Нет, не является. К примеру, рассмотрите проекцию множества $A = \{(x, y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ на ось абсцисс.

22.19 Рассмотрим замкнутое множество $F \subset X \times Y$ и точку $x \notin \text{pr}_X(F)$. Тогда $(x \times Y) \cap F = \emptyset$ и для всякой точки $y \in Y$ найдется элементарное множество $U_x^y \times V_y \subset X \times Y \setminus F$. Поскольку слой $x \times Y$ компактен, то существует конечное подпокрытие $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$. Окрестность $U = \bigcap_{i=1}^n U_x^{y_i}$ такова, что $U \cap \text{pr}_X(F) = \emptyset$. Значит, дополнение проекции $\text{pr}_X(F)$ множества F открыто, таким образом, само множество $\text{pr}_X(F)$ является замкнутым.

22.К Положим $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$. Если $f(z) = (x, y) \in X \times Y$, то $x = (\text{pr}_X \circ f)(z) = f_1(z)$. Аналогично и $y = f_2(z)$.

22.20 Несложное и полезное упражнение на использование теоретико-множественных определений.

22.21 Проведите прямое вычисление.

22.22 Проведите прямое вычисление.

22.23 Вспомните определение произведения топологий и воспользуйтесь 22.21.

22.24 Проще всего доказать непрерывность в каждой точке $(x_1, x_2) \in X \times X$. Действительно, пусть $d = \rho(x_1, x_2)$, $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенства треугольника сразу следует, что

$$\rho(B_{\varepsilon/2}(x_1) \times B_{\varepsilon/2}(x_2)) \subset (d - \varepsilon; d + \varepsilon).$$

22.25 Проведите прямую проверку.

22.26 Пусть $(x, y) \notin \Delta$. Тогда $x \neq y$, значит, у них существуют

непересекающиеся окрестности: $U_x \cap V_y = \emptyset$. Тогда

$(U_x \times V_y) \cap \Delta = \emptyset$ в силу 22.3, таким образом,

$U_x \times V_y \subset X \times X \setminus \Delta$. Следовательно, множество $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто, а Δ , тем самым, замкнуто.

Пусть x и y - две различные точки пространства X . Тогда $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ и так как множество Δ замкнуто, у точки (x, y) имеется элементарная окрестность $U_x \times V_y \subset X \times X \setminus \Delta$. Значит,

множество $U_x \times V_y$ не пересекается с Δ , так что $U_x \cap V_y = \emptyset$ в силу 22.3, что и требовалось доказать.

22.27 Сопоставьте 22.26 и 22.25.

22.28 В силу 22.19 проекция $\text{pr}_X : X \rightarrow Y$ является замкнутым отображением. Следовательно, ее сужение $\text{pr}_X \upharpoonright \Gamma : \Gamma \rightarrow X$ также замкнуто (см. 19.27, в силу 19.24 оно — гомеоморфизм, так что из 22.16 следует, что отображение f непрерывно).

Или по-другому: воспользуйтесь 22.19 и равенством $f^{-1}(F) = \text{pr}_X(\Gamma_f \cap (X \times F))$.

22.29 Да, существенно. Рассмотрите отображение

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

22.32 Только из линейной связности. Контрпример к остальным утверждениям дают функции из задачи 22.31.

22.36 Нет, не верно.

22.37 Удобно использовать следующее свойство, эквивалентное определению регулярности пространства (см. 17.19). Для всякой окрестности W точки (x, y) найдется такая ее окрестность U , что $\text{Cl}U \subset W$. Достаточно рассмотреть случай, когда W — элементарная окрестность. Воспользуйтесь регулярностью пространств X и Y и задачей 22.9.

22.38.1 Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества. Для каждой точки $a \in A$ найдется открытое множество $U_a = [a; x_a) \subset X \setminus B$. Положим $U = \bigcup_{a \in A} U_a$. Окрестность $V \supset B$ определяется аналогичным образом. Предположим, что

$$U \cap V \neq \emptyset, \text{ то } [a; x_a) \cap [b; y_b) \neq \emptyset$$

для некоторых точек $a \in A$ и $b \in B$. Пусть, для определенности, $a < b$. Тогда $b \in [a; x_a)$, что противоречит выбору x_a .

22.38.2 Множество ∇ замкнуто в \mathbb{R}^2 , тем более оно замкнуто в $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Поскольку $\{(x, -x)\} = \nabla \cap [x; x+1) \times [-x; -x+1)$, то каждая точка множества ∇ открыта в нем.

22.38.3 См. 17.4х.

22.39 Модифицируйте рассуждение, использованное при доказательстве утверждения 22.S.

22.40 Следует из 22.U и 22.9.

22.44 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \cong (\mathbb{R}^{n-k} \setminus 0) \times \mathbb{R}^k \cong (S^{n-k-1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k \cong S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

22.46 Пространство $O(n)$ является объединением $SO(n)$ и не пересекающегося с ним открытого подмножества, гомеоморфного $SO(n)$, значит, оно гомеоморфно $SO(n) \times \{ \cdot 1, 1 \} \cong SO(n) \times O(1)$.

22-47 Достаточно показать, что $GL_+(n) = \{A \mid \det A > 0\}$ гомеоморфно произведению $SL(n) \times \{0; +\infty\}$. Искомый гомеоморфизм сопоставляет матрице $A \in GL_+(n)$ пару, состоящую из матрицы $\frac{1}{\sqrt{\det A}} A$ и числа $\det A$.

22-49 Существование подобного гомеоморфизма непосредственно связано с существованием кватернионов (см. последний раздел в 25), поэтому и в доказательстве мы будем использовать свойства кватернионов. Пусть $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ - четверка попарно перпендикулярных единичных кватерниона, определяющая точку $SO(4)$. Искомый гомеоморфизм сопоставляет этой четверке пару, состоящую из единичного кватерниона $x_0 \in S^3$ и тройки $\{x_0^{-1}x_1, x_0^{-1}x_2, x_0^{-1}x_3\}$ попарно перпендикулярных векторов пространства \mathbf{R}^3 , определяющей элемент $SO(3)$. Предупреждаем, что, к примеру, $SO(5)$ не гомеоморфно $S^4 \times SO(4)$!

23.2 Отображение pr относит каждой точке содержащий её элемент разбиения (рассматриваемый как элемент фактормножества), поэтому прообразом $\text{pr}^{-1}(\text{point}) = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(x))$ и является элемент разбиения, содержащий точку $x \in X$.

23.3 Пусть $X/S = \{a, b, c\}$, где $p^{-1}(a) = [0; \frac{1}{3}]$, $p^{-1}(b) = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, $p^{-1}(c) = (\frac{2}{3}; 1]$. Тогда $\Omega_{X/S} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

23-4 Все элементы этого разбиения являются открытыми в X множествами.

23.6 Пусть $X = \mathbb{N} \times I$, а разбиение S состоит из множества $\mathbb{N} \times 0$, а остальные элементы разбиения S являются одноточечными. Пусть $\text{pr}(\mathbb{N} \times 0) = x_* \in X/S$. Докажем, что в точке x_* не существует счетной базы. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\{U_k\}$ - это счетная база в этой точке. Каждое из множеств $\text{pr}^{-1}(U_k)$ открыто в X и содержит каждую из точек $x_n = (n, 0) \in X$. Для каждой из этих точек найдется такое открытое в X множество V_n , что $x_n \in V_n \subset \text{pr}^{-1}(U_n)$.

Осталось заметить, что множество $W = \text{pr}(\cup V_n)$ является окрестностью точки x_* , не содержащейся ни в одной из окрестностей U_n этой точки, что противоречит предположению.

23.7 Для всякого открытого в X/S множества U его образ $(f/S)(U) = f(\text{pr}^{-1}(U))$ открыт, поскольку он совпадает с образом открытого множества $\text{pr}^{-1}(U)$ при открытом отображении f .

23. 1x Если F - замкнутое и X множество, то $F = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(F))$,

значит, множество $\text{pr}(F)$ замкнуто. Для всякого множества F , замкнутого в X , множество $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(F))$, во-первых, замкнуто, так как pr непрерывна, во-вторых, является насыщением F .

23.2x Пусть A - замкнутое множество, являющееся неодноточечным элементом данного разбиения. Насыщением любого замкнутого множества F будет либо само F , либо объединение $F \cup A$, т. е. замкнутое множество.

23.3x Аналог 23.1x.

23.4x Если множество A насыщено, то для всякого множества $U \subset A$ насыщение U также является подмножеством A , следовательно, насыщение множества $\text{Int } A$ лежит в A и, поскольку это насыщение является открытым, должно совпадать с $\text{Int } A$. Так как множество $X \setminus A$, также насыщенное, то насыщено $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl } A$, следовательно, насыщено и множество $\text{Cl } A$.

24.1 Опишем, к примеру, разбиение отрезка, для которого соответствующее факторпространство гомеоморфно букве A . Оно состоит из двуточечных множеств $\{\frac{1}{6}, 1\}$, $\{\frac{2}{3} - x, \frac{2}{3} + x\}$ при $x \in (0; \frac{1}{6}]$; остальные его элементы одноточечны. Идея доказательства та же, что была использована в 24.2, именно, надо построить непрерывную сюръекцию отрезка на букву A . Рассмотрим отображение, определенное формулами

$$f(t) = \begin{cases} (3t, 6t) & \text{при } x \in [0; \frac{1}{3}], \\ (3t, 4 - 6t) & \text{при } x \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}], \\ (\frac{9}{2} - 6t, 1) & \text{при } x \in [\frac{1}{2}; \frac{2}{3}], \\ (6t - \frac{7}{2}, 1) & \text{при } x \in [\frac{2}{3}; \frac{5}{6}], \\ (3t - 1, 6 - 6t) & \text{при } x \in [\frac{5}{6}; 1]. \end{cases}$$

Покажите, что $f(I)$ - это и есть буква A , а разбиение на прообразы f -это в точности разбиение, описанное в начале решения.

24.2 Пусть $u : I \rightarrow I \times I$ - кривая Пеано, т. е. непрерывная сюръекция. Тогда инъективный фактор отображения u и будет гомеоморфизмом некоторого факторпространства отрезка на квадрат.

24.3 Пусть S - это разбиение подпространства A на $A \cap B$ и одноточечные множества, состоящие из точек $x \in X \setminus B = A \setminus B$, а T - разбиение X на B и одноточечные подмножества из $X \setminus B$. Включение $A \hookrightarrow X$ индуцирует непрерывное факторотображение

$$\text{in } / (S, T) : A/A \cap B \rightarrow X/B, \text{ являющееся непрерывной биекцией.}$$

Осталось доказать, что эта биекция открыта. Рассмотрим открытое множество $U \subset A/A \cap B$ и его прообраз $V \subset A$ относительно

проекции. Если $U \cap B = \emptyset$, то $W = U$ открыто в X , так как множества A, B образуют фундаментальное покрытие пространства X . Если $U \cap B \neq \emptyset$, то $U \supset A \cap B$, таким образом множество $W = U \cup B$ открыто в X . В любом случае W является открытым насыщенным относительно разбиения T множеством, значит, открыт и его образ в X/B , совпадающий с $(\text{in } / (S, T))(U)$.

24.4 Рассмотрите отображение

$$f : I \rightarrow I : x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2}x, & x \in [0; \frac{1}{3}]; \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]; \\ \frac{3x-1}{2}, & x \in [\frac{2}{3}; 1], \end{cases}$$

и докажите, что $S(f)$ - заданное разбиение. Таким образом, $f/S(f) : I/S(f) \cong I$. Какое отображение надо взять, чтобы доказать второе утверждение?

24.5 Рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, равную 0 при $t \in [0; 1]$ и равную $t - 1$ при $t \geq 1$ и отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $f(x, y) = (\frac{x(r)}{r}x, \frac{y(r)}{r}y)$, здесь, как и ранее, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. По построению, $\mathbb{R}^2/D^2 = \mathbb{R}^2/S(f)$. Отображение $f/S(f)$ является непрерывной биекцией. Для того, чтобы установить, что оно - гомеоморфизм, следует воспользоваться утверждением 21.Ох (21.Рх). Для проверки гомеоморфности \mathbb{R}^2 и других пространств, воспользуйтесь конструкциями, описанными в решениях задач 13.20-13.22.

24.6 Обозначим через S разбиение пространства X на множество A и одноточечные подмножества его дополнения $X \setminus A$. Пусть T - это разбиение Y на $f(A)$ и точки $Y \setminus f(A)$. Покажите, что $f/(S, T)$ -гомеоморфизм.

24.7 Нет, эти пространства не гомеоморфны; в пространстве \mathbb{R}^2/A не выполнена первая аксиома счетности (ср. 23.6).

24.8 Разбиение $S(\varphi)$, где $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} : z \mapsto z^3$, совпадает с заданным, поэтому $S^1/S \cong S^1$.

24.9 В первом случае рассмотрите отображение $\varphi(z) = z^2$.

24.10 Предостережение: факторпространство D^n по отношению эквивалентности $x \sim y \iff x_i = -y_i$ не гомеоморфно D^n .

24.11 Рассмотрите $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Ясно, что $x \sim y \iff f(x) = f(y)$, таким образом, разбиение $S(f)$ совпадает с заданным. К сожалению, прямая \mathbb{R} некомпактна, поэтому мы не можем просто сослаться на теорему 19.X. Докажите, что, тем не менее, данное факторпространство является компактным.

24.12 Факторпространство цилиндра по отношению эквивалентности $(x, p) \sim (y, q)$, если

$x + y = 1, p = -q$ (здесь $x, y \in [0; 1], p, q \in S^1$), гомеоморфно ленте Мебиуса.

24.13 Следует использовать транзитивность факторизации (теорему 24.H). Пусть S - разбиение квадрата на пары расположенных на одной горизонтали точек его вертикальных сторон, все остальные элементы разбиения одноточечны. Получаем, что факторпространство I^2/S гомеоморфно цилиндру. Пусть теперь S' - разбиение цилиндра на пары точек его оснований, симметричные относительно прямой, параллельной основаниям цилиндра и пересекающей его ось симметрии; остальные элементы одноточечны. Тогда T - разбиение квадрата на прообразы при отображении $p : I^2 \rightarrow I^2/S$ прообразов элемента разбиения S' - совпадает с разбиением, факторпространство которого есть бутылка Клейна.

24.17 Первое утверждение следует из того, что множества, открытые в индуцированной из $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ на образе $\text{in}_\beta(X_\beta)$ топологии, имеют вид $\{(x, \beta) \mid x \in U\}$, где U - это множество, открытое в пространстве X_β , таким образом, $\text{ab}(\text{in}_\beta) : X_\beta \rightarrow \text{in}_\beta(X_\beta)$ - гомеоморфизм. Более того, каждый из этих образов открыт в сумме пространств (поскольку каждый из его прообразов при in_α либо пуст, либо же равен X_β), значит, и замкнут.

24.18 Аксиомы отделимости и первая аксиома счетности передаются. Для сепарабельности или же существования счетной базы необходима счетность индексного множества. Пространство $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ несвязно, если число слагаемых больше единицы. Оно будет компактным, если число слагаемых конечно и каждое из рассматриваемых пространств компактно.

24.19 Инъективность композиции $\varphi = \text{pr} \circ \text{in}_2$ следует из того, что в каждом элементе разбиения в $X_1 \sqcup X_2$ имеется не более одной точки из $\text{in}_2(X_2)$. Ее непрерывность очевидна. Рассмотрим открытое множество $U \subset X_2$. Множество $\text{in}_1(X_1) \cup \text{in}_2(U)$ открыто в $X_1 \sqcup X_2$ и является насыщенным, поэтому его образ W открыт в $X_2 \cup_f X_1$. Так как пересечение $W \cap \varphi(X_2) = \varphi(U)$ открыто в $\varphi(X_2)$, то φ - топологическое вложение.

24.20 Итак, $Y = \{x_*\}$. Положим $X' = X \sqcup \{x_*\}$ и $A' = A \sqcup \{x_*\}$. Ясно, что фактор $g : X/A \rightarrow X'/A'$ инъекции $\text{in} : X \rightarrow X'$ является непрерывной биекцией. Докажите, что отображение δ открыто.

24.21 Разрежем квадрат так, как изображено на рисунке. Произведя склеивание сторон a и a' , b и b' , c и c' , получим две ленты Мебиуса, которые надо склеить по окружности, являющейся факторпространством объединения отрезков d_1 и d_2 .

24.22 Рассмотрите отображение

$$(\text{id}_{S^1} \times i_+) \sqcup (\text{id}_{S^1} \times i_-) : (S^1 \times I) \sqcup (S^1 \times I) \rightarrow S^1 \times S^1,$$

где i_{\pm} - вложения отрезка I в S^1 как верхней и, соответственно, нижней полуокружности.

24.23 См. 24.М и 24.22.

24.24 Если квадрат, факторпространством которого является бутылка Клейна, разрезать вертикальным отрезком на два прямоугольника, то после склеивания его горизонтальных сторон мы получим два цилиндра.

24.25 Пусть $S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$. Подмножество этой сферы, определяемое уравнением $|z_1| = |z_2|$ состоит из всех пар (z_1, z_2) , таких что $|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, таким образом, оно является тором. Теперь рассмотрим подмножество T_I , заданное неравенством $|z_1| \leq |z_2|$ и отображение, сопоставляющее точке $(z_1, z_2) \in T_I$ точку $(u, v) = \left(\frac{z_1}{|z_2|}, \frac{z_2}{|z_2|}\right) \in \mathbb{C}^2$. Покажите, что это отображение является гомеоморфизмом T_I на $D^2 \times S^1$, и закончите рассуждение самостоятельно.

24.26 Цилиндр или лента Мёбиуса. Рассмотрим гомеоморфизм g между вертикальными сторонами квадрата, пусть

$g : (0, x) \mapsto (1, f(x))$. Отображение f - это гомеоморфизм $I \rightarrow I$, значит, оно является (строго) монотонной функцией. Предположим, что функция f - возрастающая, в частности, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

Покажем, что существует такой гомеоморфизм $h : I^2 \rightarrow I^2$, что $h(0, x) = x$ и $h(1, x) = (1, f(x))$ при всех $x \in I$. Для этого разобьем квадрат его диагоналями на четыре части, и определим h на правом треугольнике посредством формулы

$$h\left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2} + tx\right) = \left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2} + tf(x)\right),$$

$t, x \in I$. На остальных трех треугольниках h тождественно. Ясно, что при указанном гомеоморфизме элемент $\{(0, x), (1, x)\}$ разбиения переходит в элемент $\{(0, x), (1, f(x))\}$, значит, существует непрерывная биекция цилиндра (следовательно, гомеоморфизм) на результат склейки квадрата посредством гомеоморфизма g его вертикальных сторон. Если же функция f является убывающей, то, рассуждая аналогичным образом, получим, что результат склеивания будет лентой Мёбиуса.

24.27 Тор и бутылка Клейна: рассуждение аналогично 24.26.

24.28 Покажите, что любой гомеоморфизм граничной окружности ленты Мёбиуса можно продолжить до гомеоморфизма всей ленты Мёбиуса.

24.29 См. 24.27.

24.30 Покажите, что любой автогомеоморфизм граничной окружности ручки можно продолжить до автогомеоморфизма всей ручки. (Ср. с задачей 24.28. При решении обеих задач полезно воспользоваться следующим фактом: любой автогомеоморфизм внешней граничной окружности кольца можно продолжить до автогомеоморфизма всего кольца, который на внутренней граничной окружности был бы неподвижен или задавал бы ее осевую симметрию.)

24.31 См. решения задач 24.28 и 24.30.

24.32 Можно считать, что дыры разбиты на пары "близких" дыр, соединенных "трубками". (Ср. решение задачи 24. V.) Вместе с кругом, окружающим такую пару, каждая трубка образует ручку или бутылку Клейна с дырой. Если все трубки образуют ручки, то перед нами - сфера с ручками. В противном случае мы превращаем все ручки в бутылки Клейна с дырами (см. решение задачи 24. V), и перед нами - сфера с пленками.

25.1 Существует естественное взаимно однозначное соответствие между прямыми на плоскости, заданными уравнением вида $ax + by + c = 0$ и точками $(a : b : c)$ пространства $\mathbb{R}P^2$. При этом дополнением образа множества всех прямых является множество, состоящее из единственной точки $(0:0:1)$.

26.1x Да, является. Число a всегда делит самое себя (даже 0 делит 0). Далее, если a делит b и b делит c , то a делит c .

26.2x $a \sim b$, тогда $a = \pm b$.

26.3x Утверждение очевидно, поскольку включение $A \subset \text{Cl } B$ имеет место, тогда $\text{Cl } A \subset \text{Cl } B$.

27-1x Очевидно.

27-2x Сопоставив каждой точке $y \in Y$ постоянное отображение f_y , образом которого является эта точка, мы и получим инъекцию $Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$.

27-4x Соответствие $f \mapsto f^{-1}(0)$ определяет биекцию $\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \Omega_X$.

27-5x Поскольку топология в пространстве X дискретна, то всякое отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Если $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то отображение f однозначно определяется набором $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\} \in Y^n$.

27.6x Множество X состоит из двух компонент связности.

27-Сх Так как всякое одноточечное подмножество компактно, то $\Delta^{(pw)} \subset \Delta^{(co)}$, следовательно, $\Omega^{(pw)} \subset \Omega^{(co)}$.

27-7х Ясно (докажите это), что топологические структуры $\mathcal{C}(I, I)$ и $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$ различны, и, следовательно, тождественное отображение множества $\mathcal{C}(I, I)$ не есть гомеоморфизм. Чтобы доказать, что рассматриваемые пространства не гомеоморфны, нужно найти такое топологическое свойство, которым одно из них обладает, а другое - нет. Покажите, что $\mathcal{C}(I, I)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, а $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$ - нет.

27-8х Отождествим Y с $\text{Const}(X, Y)$ посредством отображения $y \mapsto f_y : x \mapsto y$. Рассмотрим пересечения множеств из предбазы с образом пространства Y при указанном отображении. Имеем $W(x, U) \cap \text{Const}(X, Y) = U$, значит, пересечение с Y всякого предбазового множества из топологии поточечной сходимости открыто в Y . Обратно, для всякого открытого в Y множества U и для всякой точки $x \in X$ выполняется равенство $U = W(x, U) \cap \text{Const}(X, Y)$. То же рассуждение справедливо и в случае компактно-открытой топологии.

27-9х Отображение $f \mapsto (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ переводит предбазовое множество $W(x_1, U_1) \cap W(x_2, U_2) \cap \dots \cap W(x_n, U_n)$ в базовое множество $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ топологии произведения. Наконец, ясно, что если пространство X конечно, то топологии $\Omega^{co}(X, Y)$ и $\Omega^{pw}(X, Y)$ совпадают.

27-10х Воспользуйтесь 27.Тх. Если X - линейно связное пространство, то в нем любые два пути свободно гомотопны. Рассмотрим гомотопию $h : I \times I \rightarrow X$. В силу утверждения 27-5х отображение $\tilde{h} : I \rightarrow \mathcal{C}(I, X)$, определенное формулой $\tilde{h}(t)(s) = h(t, s)$, непрерывно. Таким образом, любые два пути в пространстве X соединены путем в пространстве путей, что и означает, что пространство $\mathcal{C}(I, X)$ линейно связно.

27-11х Пространство $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$ не компактно, поскольку последовательность функций $f_n(x) = x^n$ не имеет в нем точки накопления. Та же последовательность не имеет в $\mathcal{C}(I, I)$ предельных точек, и, следовательно, это пространство также не является компактным.

27-12х Пусть

$$d_n(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [-n; n]\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f, g)}{2^n(1 + d_n(f, g))}.$$

Нетрудно доказать, что d - метрика. Покажите, что индуцированная ею топология является компактно-открытой.

27-13x Доказательство аналогично доказательству утверждения 27-12x. Надо лишь заметить, что поскольку, очевидно,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Int } X_i, \text{ то для всякого компактного множества } K \subset X$$

найдется n , такое что $K \subset X_n$.

29.1x Отметим, что: 1) $\beta(x, y) = \omega(x, \alpha(y))$; 2) $\alpha(x) = \beta(1, x)$ и $\omega(x, y) = \beta(x, \alpha(y))$. Отображение β непрерывно как композиция непрерывных отображений в силу равенства 1). Используйте равенства 2).

29.2x В обозначениях из доказательства утверждения 29.1x, α является непрерывным и обратным самому себе отображением, значит оно - гомеоморфизм.

29.3x Непрерывность указанных отображений вытекает из того, что первое из них является композицией $\omega \circ (f \times y)$, второе - композицией $\alpha \circ f$ (в обозначениях из доказательства 29.1x).

29.5x В тех случаях, когда топология в группе индуцируется стандартной топологией евклидова пространства, для проверки непрерывности отображений $(x, y) \mapsto xy$ и $x \mapsto x^{-1}$ достаточно убедиться, что они задаются непрерывными функциями. Если $x = a + ib$ и $y = c + id$, то $xy = (ac - bd) + i(ad + bc)$, значит умножение задается функцией $(a, b, c, d) \mapsto (ac - bd, ad + bc)$, которая очевидно непрерывна. Переход к обратному элементу также задается непрерывной (на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$) функцией $(a, b) \mapsto (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$.

29.6x Используйте идею рассуждения из решения задачи 29.5x.

29.7x Возьмите, к примеру, топологию из задачи 5.5.

29.10x Да, справедливо.

29.11x Утверждение следует из равенств $UV = \bigcup_{x \in V} Ux$ и $VU = \bigcup_{x \in V} xU$ в силу 29.Еx.

29.12x Нет, не останется. Если $U = \{0\}$ и $V = (0; 1) \in \mathbb{R}$, то $U + V = V$. Контрпример, в котором оба множества замкнуты, дан в 29.13x.

29.13x Первые две. Докажите, что вторая группа всюду плотна в \mathbf{R} и не совпадает с ней (хотя бы потому, что она счетна, а \mathbf{R} - нет).

29.14x Из 29.1x следует, что найдется окрестность V' единицы, такая что $V'V' \subset U$, а в силу 29. Hx существует симметричная окрестность

единицы, такая что $V_2 \subset V'$. Значит $V_2V_2 \subset V'V' \subset U$. Проведем рассуждение по индукции. Если V_n - симметричная окрестность единицы, такая что $V_n^{n-1} \subset V_2$, то $V_n^n = V_nV_n^{n-1} \subset V_2V_2 \subset U$ (обратите внимание, что $VV \subset V$).

29.15x Ясно, что $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ открытое множество, $1 \in H$, $HH \subset H$ и $H^{-1} \subset H$ (в силу симметричности окрестности V). Значит H - открытая подгруппа. То, что всякая открытая подгруппа одновременно является и замкнутой, будет доказано в 30.3x.

29.Nx.1 Достаточно взять симметричную окрестность единицы, такую что $V^2 \subset U$. Действительно, тогда для любого элемента $g \notin U$ множества gV и V не будут пересекаться. Следовательно, $\text{Cl}V \subset U$.

29.17x Пусть N - пересечение всех окрестностей единицы. Так как группа G конечна, то N - окрестность единицы. Из 29.Hx и 29.1x следует, что $N = N^{-1}$ и $N^2 = N$, значит N - подгруппа. Из построения N следует, что $N \subset gNg^{-1}$ для любого элемента $g \in G$. Поскольку оба множества содержат одинаковое число элементов, то $N = gNg^{-1}$, следовательно, N - нормальная подгруппа. Одноэлементный набор $\{N\}$ является базой в единице, значит набор $\{gN \mid g \in G\}$ - база топологии на группе G .

30.2x Очевидно. Пусть H - подгруппа, U открытое множество и $g \in U \subset H$. Тогда $h \in hg^{-1}U \subset H$ для любого $h \in H$, значит всякая точка подгруппы H внутренняя.

30.3x Если H - подгруппа и $g \notin H$, то множества H и gH не пересекаются. Следовательно, множество $G \setminus H = \bigcup_{g \notin H} (gH)$ открыто, поэтому множество H замкнуто.

30.4x Если H - подгруппа конечного индекса, то множество $G \setminus H = \bigcup_{i=1}^n g_iH$ замкнуто, значит подгруппа H - открытое множество.

30.5x (a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

30.6x Очевидно. Если в подгруппе имеется изолированная точка, то все ее точки - изолированные.

30.7x Очевидно. Пусть $U \subset G$ - открытое множество, такое что $U \cap H = U \cap \text{Cl}H \neq \emptyset$. Если $g \notin H$ и $gH \cap U \neq \emptyset$, то $g \in \bigcup_{h \in H} h(U \setminus H)$ - открытое и не пересекающееся с H множество.

Если $gH \cap U = \emptyset$, то выберем точку $h' \in H \cap U$ и симметричную окрестность V единицы, такую что $Vh' \subset U$. Множество Vg - окрестность элемента g , не пересекающаяся с H (в противном случае из равенства $vg = h$ следовало бы, что $gh^{-1}h' = v^{-1}h' \in Vh'$).

30.8x В силу 24.7x замыкание множества $\text{Cl}H \setminus H$ содержит под-

группу H .

30.9x Это следует из равенств $(Cl H)^{-1} = Cl H^{-1}$ и $Cl H \cdot Cl H \subset Cl(H \cdot H) = Cl H$.

30.10x Это так, если внутренность подгруппы непуста, ср. 30.2x.

30.12x отождествим элементы группы $SO(n)$ с положительно ориентированными ортонормальными базисами в \mathbf{R}^n . Отображение $p : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ сопоставляет каждому базису его последний вектор. Прообразом каждой точки $x \in S^{n-1}$ является правый класс смежности по подгруппе $SO(n-1)$ (докажите это). Ясно, что отображение p непрерывно. Его фактором является непрерывная биекция $\hat{p} : SO(n)/SO(n-1) \rightarrow S^{n-1}$. В силу компактности $SO(n)$ и хаусдорфовости S^{n-1} , \hat{p} - гомеоморфизм.

30.13x 1) Компактность групп $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ следует из того, что они являются замкнутыми и ограниченными подмножествами в соответствующем пространстве матриц.

2) Связность групп $SO(n)$ доказывается по индукции при помощи

30.12x. Заметим, что группа $SO(2) \cong S^1$ связна. Для того, чтобы проверить связность $U(n)$, $SU(n)$ и $Sp(n)$, сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное 30.12x. В группе $O(n)$ имеются две компоненты: $SO(n)$ и ее дополнение (единственный нетривиальный класс смежности подгруппы $SO(n)$). При $p > 0, q > 0$ в группе $O(p, q)$ имеется 4 компоненты. Проведите доказательство индукцией по p и q , используя утверждения 30.Gx и 2I.Ox.

30.14x См. решение задачи 30.1x.

30.15x Пусть H - дискретная нормальная подгруппа, $h \in H$. Рассмотрим образ группы G при отображении сопряжения $g \mapsto ghg^{-1}$. Поскольку H нормальна, то этот образ лежит в H , в силу связности группы G и дискретности топологии на H , он состоит из единственной точки. Так как h является образом единицы, то $ghg^{-1} = h$ при всех $g \in G$. Таким образом, элемент h коммутирует со всеми элементами группы G .

30. Tx Они не изоморфны, так как не гомеоморфны (окружность S^1 компактна, а прямая - нет). Проверьте, что отображение $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ является локальным изоморфизмом.

30.18x Рассмотрите стандартное отображение (см. 30. Tx) и открытый интервал в \mathbf{R} , содержащий 0 and $\frac{1}{2}$.

30.19x Пусть $f : U \rightarrow V$ гомеоморфизм окрестности U единицы группы G на окрестность единицы группы H . такой что $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in U$. В силу 29.1x существует

окрестность \widehat{U} единицы группы G , такая что $\widehat{U}^2 \subset U$. Так как $\widehat{U} \subset U$, то $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \widehat{U}$, таких что $xy \in \widehat{U}$.

Положим $\widehat{V} = f(\widehat{U})$ и рассмотрим $z, t \in \widehat{V}$, такие что $zt \in \widehat{V}$. Тогда $z = f(x)$ и $t = f(y)$, где $x, y \in \widehat{U}$, значит $xy \in U$, поэтому $f(xy) = f(x)f(y) = zt$. Таким образом, $x = f^{-1}(z)$, $y = f^{-1}(t)$, следовательно $f^{-1}(z)f^{-1}(t) = xy = f^{-1}(zt)$.

30.20x Следует из 30.19x, так как проекция $p_G : G \times H \rightarrow G$ является открытым отображением.

30.22x Первое утверждение очевидно, так как указанное отображение есть сужение непрерывного отображения $G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$. Для построения требуемого примера пусть $G = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, а группа B порождена элементами $h \notin \mathbb{Q}$ базиса Гамеля пространства \mathbf{R} (базиса \mathbf{R} , рассматриваемого как векторное пространство над \mathbf{Q}). Так как пространство $A \times B$ несвязно, оно не может быть гомеоморфно \mathbf{R} .

30.23x Изоморфизм $S^0 \times \mathbb{R}_+^*$ задается правилом $(s, r) \mapsto rs$.

30.24x Замените в решении задачи 30.23x S^0 на S^1 .

30.25x Замените в решении задачи 30.23x S^0 на S^3 .

30.26x Утверждение очевидно, так как трехмерная сфера связна, а двоеточие - нет. Однако подгруппа $S^0 = \{1, -1\}$ не является прямым фактором группы $S^3 = \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\}$ даже в алгебраическом смысле.

Для доказательства используйте то, что $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

30.27x Таковой является факторгруппа S^3/S^0 (см. 30.26x).

31.1x В случаях (1) и (2) отображение $G \rightarrow \text{Тор}X$ непрерывно (см. решение 31.6x). Тем не менее, если мы требуем, чтобы множество $\text{Тор}X$ было бы топологической группой, необходимы дополнительные условия, к примеру такие как хаусдорфовость и локальная компактность.

31.2x Ясно, что величины углов такого треугольника должны быть равными π/n , $n \in \mathbf{N}$. В действительности решений всего два: $(\pi/2, \pi/3, \pi/6)$ и $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$.

31.3x Рассмотрите иррациональный поток (31.1x) или же действие группы $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ с дискретной топологией на \mathbf{R} посредством сдвигов. В последнем случае $G = G/G^x$, но группа $G(x)$ не дискретна (ср. 29.13x).

31.4x Если A - компактное множество, то его орбита $G(A)$ компактна как образ компактного множества $G \times A$ при непрерывном отображении $G \times X \rightarrow X$. Предположим, что множество A замкнуто и

рассмотрим некоторую орбиту $G(x)$, не лежащую в $G(A)$. Для каждого элемента $g \in G$ возьмем окрестность $U(g)$ точки $x \in X$ окрестность $V(g)$ элемента $g \in G$, такие что множество $V(g)U(g)$ не пересекается с $G(A)$. В силу компактности G , найдется конечный набор элементов $g_k \in G$, такой что множества $V(g_k)$ образуют покрытие группы G . Насыщение множества $\cap U(g_k)$ будет окрестностью орбиты $G(x)$, не пересекающим множество $G(A)$. Таким образом, $G(A)$ замкнуто.

31.5x Существуют всего две различные орбиты: $\{0\}$ и $\mathbb{R} \setminus 0$. Соответствующими изотропными подгруппами являются G и 1 . Пространство орбит состоит из двух точек, к примеру, $\{0, 1\}$ в котором множество $\{1\}$ является открытым.

31.6x Пространство орбит гомоморфно самому этому треугольнику, причем гомеоморфизм индуцирован его вложением в \mathbb{R}^2 (являющемся, тем самым, непрерывным сечением для отображения факторизации). Группа G - свободное произведение трех экземпляров группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

31.7x Воспользуемся транзитивностью факторизации и заменим пространство орбит \mathbb{R}^2/G на результат склеивания объединения двух треугольников с общей стороной по двум парам оставшихся сторон посредством осевой симметрии. В результате мы получим пространство, гомоморфное S^2 (точнее, "подушку"). Группа G есть прямое произведение $C \times C$, где $C = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$, H - ее подгруппа, состоящая из элементов четных степеней.

31.8x Две точки принадлежат одной и той же орбите, тогда пропорциональны модули их однородных координат. Другими словами, существует взаимно-однозначное соответствие между орбитами и выходящими из начала координат лучами, лежащими в первом ортанте $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \geq 0\}$. Изотропными подгруппами являются координатные торы меньшей размерности. В силу транзитивности факторизации пространство орбит гомеоморфно проективизации $\mathbb{R}_+^{n+1}/\mathbb{R}_+$ первого органта, т. е. n -мерному симплексу.

31.9x Две точки принадлежат одной и той же орбите, тогда совпадают значения элементарных симметрические многочленов от их координат. Поэтому, по крайней мере с теоретико-множественной точки зрения, формулы Виета отождествляют каждую орбиту с множеством всех унитарных многочленов степени n , которое есть \mathbb{C}^n . Поскольку оба пространства локально компактны, а группа $G = Sym(n)$ конечна (значит, компактна), то $X/G \cong \mathbb{C}^n$.

31.10x Две такие матрицы принадлежат одной и той же орбите, когда у них совпадает набор их собственных чисел (с учетом их кратностей). Значит, с теоретико-множественной точки зрения, сопоставив орбите набор собственных чисел матрицы, расположенных в порядке убывания, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, мы получим взаимно-однозначное соответствие между пространством орбит и подмножеством \mathbf{R}^3 , заданным указанными неравенствами и уравнением $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Поскольку у данного отображения имеется непрерывное сечение - сопоставление набору такому набору диагональной матрицы, то пространство орбит X/G гомеоморфно указанному подмножеству \mathbf{R}^3 , представляющему собой плоскую область, ограниченную двумя лучами, угол между которыми равен $\frac{2\pi}{3}$. Для всякой точки внутри этой области изотропная подгруппа изоморфна $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Для внутренних точек на граничных лучах изотропной подгруппой является нормализатор группы $SO(2)$, а орбиты гомеоморфны проективной плоскости. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то орбитой является точка, а ее изотропная группа есть вся группа $SO(3)$.

31.11x Сфера $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ($S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$) является однородным хаусдорфовым G -пространством на котором естественным образом действует группа $G = O(n+1)$ (соответственно, $G = U(n)$). Для каждой точки $x \in S^n$ (соответственно, $r \in S^{2n-1}$) соответствующей изотропной подгруппой является группа $O(n) \subset O(n+1)$ (соответственно, $U(n-1) \subset U(n)$). Осталось применить утверждение 31.1x.

31.12x Описанное выше действие группы $O(n+1)$ (группы $U(n)$) переносится на $\mathbf{R}P^n$ (соответственно, $\mathbf{C}P^{n-1}$). Для каждой точки $x \in S^n$ (соответственно, $x \in S^{2n-1}$) соответствующей изотропной подгруппой является группа $O(n) \times O(1)$ (соответственно, $U(n-1) \times U(1)$).

31.13x Как и в случае задачи 31.11x, утверждение следует из представления сферы $S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$ как однородного G -пространства с группой $G = Sp(n)$.

31.14x Тор гомеоморфен факторпространству (в данном случае - факторгруппе) \mathbb{R}^2/\mathbb{H} плоскости но лежащей в ней целочисленной решетке $H = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Чтобы аналогичным образом получить бутылку Клейна, достаточно к группе H добавить осевые симметрии $(x, y) \mapsto (1-x, y)$.

28.15x 1) Пространство наборов из n попарно ортогональных прямых в \mathbf{R}^n . 2) Грассманово многообразие k -мерных плоскостей в \mathbf{R}^n . 3) Грассманово многообразие ориентированных k -мерных плоскостей в

\mathbf{R}^n . 4) Многообразие Штифеля $(n - k)$ -мерных ортонормированных реперов в \mathbf{R}^n .

31.16x Воспользуйтесь тем, что произведение однородных пространств является однородным пространством. С другой стороны, это произведение изоморфно пространству ориентированных двумерных плоскостей в \mathbf{R}^4 (попробуйте доказать это!).

31.17x По своему определению, группа $SO(n, 1)$ действует транзитивно на квадрике в \mathbf{R}^{n+1} , заданной уравнением $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$.

Для каждой точки на этой квадрике соответствующей изотропной подгруппой является образ $SO(n)$ при ее стандартном вложении в $SO(n, 1)$. В силу 31.17x, пространство орбит гомеоморфно указанной квадрике, таким образом оно гомеоморфно несвязному объединению двух открытых n -мерных шаров.

32.1 Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow I$ отображение $H : H(x, t) = (1-t)f(x)$ является гомотопией между f и постоянным отображением $h_0 : x \mapsto 0$.

32.2 Пусть $f_0, f_1 : Z \rightarrow X$ - постоянные отображения, $x_0 = f_0(Z)$ и $x_1 = f_1(Z)$. Если H - гомотопия между f_0 и f_1 , то для произвольной точки $z_* \in Z$ путь $u : t \mapsto H(z_*, t)$ соединяет x_0 с x_1 . Значит, эти точки лежат в одной компоненте линейной связности пространства X .

Если путь $u : I \rightarrow X$ соединяет точку x_0 с x_1 , то формула $H(z, t) = u(t)$ задает гомотопию $H : Z \times I \rightarrow X$ между f_0 и f_1 .

32.3 Рассмотрим произвольное отображение $f : I \rightarrow Y$ и покажем, что оно гомотопно нулю. Действительно, если $H(s, t) = f(s(1 - t))$, то $H(s, 0) = f(s)$ и $H(s, 1) = f(0)$. Рассмотрим два непрерывных отображения $f, g : I \rightarrow Y$. Покажем, что если $f(I)$ и $g(I)$ лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства Y , то эти отображения гомотопны. Каждое из отображений f и g гомотопно нулю, следовательно они являются гомотопными в силу транзитивности отношения гомотопности и результата задачи 32.2. Для полноты картины предьявим в явном виде гомотопию, соединяющую f и g :

$$H(s, t) = \begin{cases} f(s(1 - 3t)) & \text{при } t \in [0; \frac{1}{3}], \\ u(3s - 1) & \text{при } t \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], \\ g(s(3t - 2)) & \text{при } t \in [\frac{2}{3}; 1]. \end{cases}$$

32.4 Докажите, что всякое непрерывное отображение в звёздное множество гомотопно постоянному отображению, образом которого центр звезды.

32.5 Пусть $f : C \rightarrow X$ - непрерывное отображение. Если a - центр множества C , то искомая гомотопия $H : C \times I \rightarrow X$ определяется формулой $H(c, t) = f(ta + (1 - t)c)$.

32.6 Пространство X линейно связно.

32.7 Воспользуйтесь утверждением 32.5 и тем, что $S^n \setminus \text{point} \cong \mathbb{R}^n$.

32.8 Если путь $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ соединяет $x = f(0)$ с точкой $y = g(0)$, то он определяет гомотопию между f и g , так как $0 \times I \cong I$.

32.9 Рассмотрим отображения f и g , определенные формулами

$f(0) = -1, g(0) = 1$. Они не гомотопны, так как точки 1 и -1 лежат в разных компонентах линейной связности пространства $\mathbb{R} \setminus 0$.

32.10 Если $n > 1$, то существует ровно один гомотопический класс.

При $n = 1$ имеется $(k + 1)^m$ таких классов.

32.11 Поскольку для всякой точки $x \in X$ и любого числа $t \in I$ справедливо неравенство

$$|(1 - t)f(x) + tg(x)| = |f(x) + t(g(x) - f(x))| \geq |f(x)| - |g(x) - f(x)| > 0,$$

то образ прямолинейной гомотопии, соединяющей f и g , лежит в $\mathbb{R}^n \setminus 0$, следовательно эти отображения гомотопны.

32.12 Для простоты будем считать, что у многочленов p и q коэффициенты при старшей степени равны 1. Воспользуйтесь 32.11 для того, чтобы показать, что отображения, задаваемые многочленом $p(x)$ степени n и одночленом z^n , гомотопны.

32.13 Искомая гомотопия задается формулой

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tg(x)}{\|(1 - t)f(x) + tg(x)\|}.$$

Подумайте, для чего нам нужно условие $|f(x) - g(x)| < 2$?

32.14 Это непосредственно следует из 32.13.

33.1 Для краткости записи положим $\alpha = (uv)w$ и $\beta = u(vw)$;

по условию $\alpha(s) = \beta(s)$ при всех $s \in [0; 1]$. В доказательстве утверждения 33.Е.2 будет построена такая функция φ , что $\alpha \circ \varphi = \beta$. Следовательно, $\alpha(s) = \alpha(\varphi(s))$, поэтому $\alpha(s) = \alpha(\varphi^n(s))$ при всех $s \in [0; 1]$ и $n \in \mathbb{N}$ (здесь через φ^n обозначена n -кратная композиция функции φ). Поскольку $\varphi(s) < s$ при $s \in (0; 1)$, то последовательность $\varphi^n(s)$ является монотонно убывающей, при этом нетрудно видеть, что её предел равен нулю для каждого $s \in (0; 1)$. По предположению $\alpha : I \rightarrow X$, значит $\alpha(s) = \alpha(\varphi^n(s)) \rightarrow \alpha(0) = x_0$ при всех

$s \in [0, 1)$, следовательно, и $\alpha(s) = x_0$ при всех $s \in [0; 1)$.

Следовательно, и $\alpha(1) = x_0$. Очевидно.

33.2 Из решения задачи 33. D следует, что надо построить пути u , v и w в некотором пространстве, такие что $\alpha(\varphi(s)) = \alpha(s)$ при всех $s \in [0; 1]$ (здесь, как и в 33. D. $\alpha = (uv)w$). Рассмотрим, к примеру, пути $I \rightarrow [0; 3]$, заданные формулами:

$u(s) = s$, $v(s) = s + 1$ и $w(s) = s + 2$;

путь $\alpha : [0; 1] \rightarrow [0; 3]$ является биекцией. Введем в $[0; 3]$ следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если существуют $n, k \in \mathbb{N}$, такие что $x = \alpha(\varphi^k(s))$ и $y = \alpha(\varphi^n(s))$. Пусть X - это факторпространство отрезка $[0,3]$ по этому отношению. Для путей $u' = \text{pr} \circ u$, $v' = \text{pr} \circ v$, $w' = \text{pr} \circ w$ как раз и имеет место равенство $(u'v')w' = u'(v'w')$.

33.4 Если $u(s) = e_a u(s)$, то

$$u(s) = \begin{cases} a & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ u(2s - 1) & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Таким образом, $u(s) = a$ при всех $s \in [0; \frac{1}{2}]$. Далее, если $s \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$, то $2s - 1 \in [0; \frac{1}{2}]$, откуда следует, что $u(s) = u(2s - 1) = a$ и при всех $s \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$. Рассуждая далее аналогичным образом, в результате получим, что $u(s) = a$ при всех $s \in [0; 1)$. Если на пространство X не накладывать никаких условий, то вполне возможно, что $u(1) = x \neq a$ (покажите это).

И покажите, что из условия задачи следует, что $u(1) = a$ (ср. 33.1).

33.5 Совсем очевидно.

34.1 Такие гомотопии h , при которых $h(0, t) = h(1, t)$ для всех $t \in I$.

34.2 См. следующую задачу.

34.3 Если $z = e^{2\pi i s}$, то

$$uv(e^{2\pi i s}) = \begin{cases} u(e^{4\pi i s}) & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ v(e^{4\pi i s}) & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases} = \begin{cases} U(z^2) & \text{при } \text{Im } z \geq 0, \\ V(z^2) & \text{при } \text{Im } z \leq 0. \end{cases}$$

34.4 Следует рассмотреть множество гомотопических классов круговых петель в некоторой точке x_0 , операция в котором определена так, как в задаче 34.3.

34.5 Она тривиальна, так как всякое отображение в такое пространство является непрерывным, следовательно, всякие две петли (в одной и той же точке) гомотопны.

34.6 Эта группа тривиальна, так как описанное факторпространство гомеоморфно кругу D^2 .

34.7 На двуточечном пространстве существуют (с точностью до гомеоморфизма) ровно три топологические структуры: тривиальная, дискретная и топология, в которой открыта только одна точка из двух. Первый случай тривиален; дискретное пространство не является линейно связным, поэтому следует рассмотреть случай, когда $\Omega_X = \{\emptyset, X, \{a\}\}$.

Пусть u - петля в точке a . Формула

$$h(s, t) = \begin{cases} u(s) & \text{при } t = 0, \\ a & \text{при } t \in (0; 1] \end{cases}$$

определяет гомотетию между u и постоянной петлей. Действительно, непрерывность h следует из того, что множество

$$h^{-1}(a) = (u^{-1}(a) \times I) \cup (I \times (0; 1])$$

открыто в квадрате $I \times I$.

34.9 Воспользуйтесь теоремой 34.H, тем, что $\mathbb{R}^n \setminus 0 \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$, и теоремой 34.G.

34.10 Дискретное пространство односвязно, тогда оно одноточечно.

Апидискретное пространство, \mathbf{R}^n , выпуклое множество, звездное множество односвязны. Сфера S^n односвязна, тогда $n \geq 2$.

Пространство $\mathbb{R}^n \setminus 0$ односвязно, тогда $n \geq 3$.

34.11 Пусть $X = U \cup V$, где U и V - открытые множества, причем оба они односвязны, а их пересечение $U \cap V$ линейно связно. Заметим, что, поскольку пространство X линейно связно, то $U \cap V \neq \emptyset$. Рассмотрим петлю u , для определенности пусть $u(0) = u(1) = x_0 \in U$. В силу 34.G.3, найдется последовательность точек $a_1, \dots, a_N \in I$, где $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1$, такая что для всякого i образ $u([a_i; a_{i+1}])$ содержится в одном из множеств U или V . При этом (за счет укрупнения отрезков) мы вправе считать, что если $u([a_{k-1}; a_k]) \not\subset U$ (или V), то $u([a_k; a_{k+1}]) \subset U$ (соответственно, U), таким образом, $u(a_k) \in U \cap V$ при всех $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Рассмотрим отрезок $[a_k; a_{k+1}]$, такой что $u([a_k; a_{k+1}]) \subset V$. Точки $u(a_k)$ и $u(a_{k+1})$ можно соединить путем $v_k : [a_k; a_{k+1}] \rightarrow U \cap V$.

Поскольку множество V односвязно, то существует гомотопия

$$h_k : [a_k; a_{k+1}] \times I \rightarrow V, \text{ соединяющая } u|_{[a_k; a_{k+1}]} \text{ и } v_k$$

следовательно, петля u гомотопна петле $v : I \rightarrow U$. Так как множество U также односвязно, то v гомотопна нулю, таким образом, пространство X является односвязным.

34.12 В действительности, в настоящий момент эту задачу полностью решить невозможно, так как у нас до сих пор не было ни одного примера неодносвязного пространства. В дальнейшем будет доказано, что таким пространством является, к примеру, окружность. Пусть

$$U = \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\} \cup \{(1, 0)\}, \quad V = \{(x, y) \in S^1 \mid y \leq 0\}.$$

Каждое из этих множеств гомеоморфно промежутку, значит, оно односвязно, их пересечением является точка - линейно связное множество, однако пространство $U \cup V = S^1$ односвязным не является.

34.13 Рассмотрим произвольную петлю $s : I \rightarrow U$. Так как пространство $U \cup V$ односвязно, то эта петля гомотопна нулю в $U \cup V$, значит, существует гомотопия $H : I \times I \rightarrow U \cup V$ между путем s и постоянным путем. Разобьем единичный квадрат $I \times I$ отрезками, параллельными его на сторонам, на мелкие квадраты K_n так, чтобы образ каждого из этих квадратов содержался бы целиком в одном из открытых множеств U или V . Рассмотрим объединение K квадратов разбиения, образ каждого из которых содержится в множестве V . Пусть L - это контур, состоящий из границ квадратов множества K , охватывающий некоторую часть этого множества. Ясно, что $L \subset U \cap V \subset U$, значит, гомотопию H можно продолжить с контура L до ограниченное им множество так, чтобы его образ содержался в U . Рассуждая подобным образом далее, получим гомотопию $H' : I \times I \rightarrow U$.

35.1 Нетрудно описать семейство петель a_i , составляющее свободную гомотопию между петлей a и петлей, представляющей элемент $T_s(\alpha)$. Именно, петля a_i начинается в точке $s(t)$, далее за время $\frac{t}{3}$ она доходит до точки $x_0 = s(0)$, затем за время $1 - \frac{2t}{3}$ мы пробегаем по пути a и, на конец, вновь за время $\frac{t}{3}$ мы возвращаемся в точку $s(t)$. В таком случае петля a_{00} совпадает с исходной петлей a . Петля a_i задана формулами

$$a_1(\tau) = \begin{cases} s(1 - 3\tau) & \text{если } \tau \in [0; \frac{1}{3}], \\ a(3\tau - 1) & \text{если } \tau \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], \\ s(3\tau - 2) & \text{если } \tau \in [\frac{2}{3}; 1], \end{cases}$$

и, следовательно, ее гомотопический класс совпадает с классом петли $\sigma^{-1}\alpha\sigma$. Для полноты рассуждения приведем формулу для описанной выше гомотопии:

$$H(\tau, t) = \begin{cases} s(t - 3\tau) & \text{если } \tau \in [0; \frac{t}{3}], \\ a(\frac{3\tau - t}{3 - 2t}), & \text{если } \tau \in [\frac{t}{3}; \frac{3-t}{3}], \\ s(3\tau + t - 3) & \text{если } \tau \in [\frac{3-t}{3}; 1]. \end{cases}$$

35.2 Рассмотрите гомотопию, определенную формулой

$$H'(\tau, t) = \begin{cases} s(1 - 3\tau), & \text{если } \tau \in [0; \frac{1-t}{3}], \\ H(\frac{3\tau+t-1}{2t+1}, t), & \text{если } \tau \in [\frac{1-t}{3}; \frac{t+2}{3}], \\ s(3\tau - 2), & \text{если } \tau \in [\frac{t+2}{3}; 1], \end{cases}$$

и убедитесь в том, что $H'(\tau, 1) = b(\tau)$, а соответствие $\tau \mapsto H'(\tau, 0)$ определяет путь из гомотопического класса $[s^{-1}as]$.

35.1x Прямое следствие утверждения 35.Bx.

36.1 Если $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ -гомеоморфизм, то p гомеоморфно отображает $V_\alpha \cap p^{-1}(U')$ на U' .

36.E Убедитесь в том, что произведение правильно накрытых окрестностей точек $b \in B$ и $b' \in B'$ является правильно накрытой окрестностью точки $(b, b') \in B \times B'$.

36.2 См. доказательство утверждения 36.F; накрытия p и q называются изоморфными.

36.3 Следствие 36.H и 36.E в силу того, что $\mathbb{C} \setminus 0 \cong S^1 \times \mathbb{R}$, и $p' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto nx$ есть тривиальное накрытие. Нарисуйте также правильно накрытую окрестность какой-либо точки $z \in \mathbb{C} \setminus 0$.

36.4 Рассмотрим два следующих разбиения прямоугольника $K = [0; 2] \times [0; 1]$. Разбиение R состоит из двучечных множеств $\{(0, y), (2, y) \mid y \in [0; 1]\}$, все остальные его элементы одноточечны.

Разбиение R' состоит из двучечных множеств $\{(x, y), (x+1, 1-y) \mid x \in (0; 1), y \in [0; 1]\}$ и трехточечных множеств $\{(0, y), (1, 1-y), (2, y) \mid x \in (0; 1), y \in [0; 1]\}$.

Поскольку каждый элемент первого разбиения содержится в некотором элементе второго разбиения, то определено факторотображение $p : K/R \rightarrow K/R'$, которое и является накрытием ленты Мёбиуса цилиндром. Можно было поступить проще. Введем отношение эквивалентности на $S^1 \times I : (z, t) \sim (-z, 1-t)$. Убедитесь, что факторпространство по этому отношению гомеоморфно ленте Мёбиуса, а отображение факторизации есть накрытие.

36.5 Решение аналогично решению предыдущей задачи. Рассмотрите два разбиения прямоугольника $K = [0; 3] \times [0; 1]$. Двучечными элементами первого из них являются пары $\{(0, y), (3, 1-y) \mid y \in [0; 1]\}$, а четырехточечными элементами второго – четверки $\{(0, y), (1, 1-y), (2, y), (3, 1-y) \mid x \in (0; 1), y \in [0; 1]\}$.

36.6 Модифицируйте решение задачи 36.4, включив в разбиение R четверку вершин прямоугольника K и пары $\{(x, 0), (x, 1) \mid x \in (0; 2)\}$.

Другой подход к построению того же самого накрытия состоит во введении в $S^1 \times S^1$ отношения эквивалентности: $(z, w) \sim (-z, \bar{w})$ (см. решение задачи 36.4).

36.7 Существуют стандартные накрытия $\mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$, композиции которых с накрытием, построение которого намечено в решении предыдущей задачи, являются накрытиями бутылки Клейна цилиндром и плоскостью. Нетривиальное накрытие бутылки Клейна бутылкой Клейна получится, если модифицировать решение задачи 36.5. Приведем также более геометрическое описание искомого накрытия. Пусть $q: M \rightarrow M$ - это накрытие ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса. Рассмотрим две копии M_1 и M_2 ленты Мёбиуса. Пусть $q_1: M_1 \rightarrow M_1$ и $q_2: M_2 \rightarrow M_2$ - две копии отображения q . Мы можем склеить M_1 и M_2 по их общей границе, получив в результате бутылку Клейна. Ясно, что в результате мы построим накрытие бутылки Клейна бутылкой Клейна.

36.8 Прообразы точек имеют вид $\{(x + k, \frac{1}{2} + (-1)^{k-1}(\frac{1}{2} - y) + l) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$.

36.9 Мы уже имеем накрытия $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ и $S^1 \times S^1 \rightarrow K$, где K - бутылка Клейна, таким образом, имеем накрытия сферы с k пленками сферой с $k - 1$ ручками при $k = 1, 2$. Докажем, что подобное накрытие существует при любом k . Пусть S_1 и S_2 - два экземпляра сферы с k дырами. Обозначим через S , основную, так сказать, сферу с k дырами и рассмотрим отображение $p': S_1 \sqcup S_2 \rightarrow S$. Теперь заклеим имеющиеся на S дыры пленками (т. е. лентами Мёбиуса), а пары имеющихся на S_1 и, соответственно, S_2 дыр цилиндрами $S^1 \times I$. В результате мы получим K - сферу с k пленками, а $S_1 \sqcup S_2$ с приклеенными k цилиндрами гомеоморфно сфере M с $k-1$ ручками. Поскольку существует накрытие ленты Мёбиуса цилиндром, то p' продолжается до двулистного накрытия $p: M \rightarrow K$.

36.10 В действительности будет доказано, что всякий локальный гомеоморфизм является открытым отображением, а, как следует из 36.11 всякое накрытие есть локальный гомеоморфизм. Итак, пусть множество V открыто в X , $V' = p(V)$. Рассмотрим точку $b = p(x) \in V'$, где $x \in V$. По определению локального гомеоморфизма, найдется такая окрестность U точки x , что $p(U)$ является открытым множеством и отображение $p: U \rightarrow p(U)$ есть гомеоморфизм. Значит, множество $p(U \cap V)$ открыто в V , таким образом, оно открыто в B , следовательно, оно является лежащей в $p(V)$ окрестностью точки b . Таким образом, $p(U)$ - открытое множество.

36.11 Если $x \in X$, U - правильно накрытая окрестность точки $b =$

$p(x), p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$, то найдется множество V_α , которое содержит точку x . В силу определения накрытия, $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ есть гомеоморфизм.

36.12 Да, существуют; см., к примеру, 36.К.

36.13 Пусть $f : X \rightarrow Y$ - локальный гомеоморфизм, G - открытое подмножество пространства X и $x \in G$. Предположим, что U такая окрестность точки x (в X), что множество $f(U)$ открыто в Y и сужение $f|_U : U \rightarrow f(U)$ является гомеоморфизмом. Если $V = W \cap U$, то множество $f(W)$ открыто в $f(U)$. значит, оно открыто в Y . Ясно, что $f|_W : W \rightarrow f(W)$ - гомеоморфизм.

36.14 Только для всей прямой. Покажем, что если A - собственное подмножество \mathbf{R} , то $p|_A : A \rightarrow S^1$ не является накрытием.

Действительно, у множества A есть граничная точка x_0 , пусть $b_0 = p(x_0)$. Нетрудно видеть, что b_0 не обладает правильно накрытой (для отображения $p|_A$) окрестностью.

36.15 См., к примеру, 36.Н.

36.16 К примеру, число листов накрытия из задачи 36.1 равно pq . Во многих примерах число листов бесконечно (счетно).

36.17 Все натуральные четные числа и только они. Первое утверждение очевидно, а аккуратно доказать второе в настоящее время в действительности невозможно. В приведенном далее рассуждении мы будем использовать методы и факты, изложенные в последующих параграфах (ср. 42.3). Рассмотрим гомоморфизм

$p_* : \pi_1(S^1 \times I) \rightarrow \pi_1(M)$, который есть мономорфизм. Известно, что $\pi_1(S^1 \times I) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(M)$, при этом образующая группы $\pi_1(S^1 \times I)$ переходит в $2k$ -кратную образующую группы $\pi_1(M)$. Следовательно, в силу 42. G (или 42.H), накрытие является четнолистным.

36.18 Все нечетные натуральные числа (ср. 36.5) и только их (см.42.4).

36.19 Все четные натуральные числа (ср. 36.6) и только их (см. 42.5).

36.20 Все натуральные числа (ср. 36.7).

36.21 Рассмотрим накрытие $T_1 = S^1 \times S^1 \rightarrow T_2 = S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^d, w)$. Обозначим через S_2 поверхность, получающуюся из тора T_2 после того, как из него удалили $p - 1$ дыр. Прообразом S_2 при указанном накрытии является поверхность S_1 , гомеоморфная тору с $d(p - 1)$ дырами. Если каждую из дыр (на S_1 и S_2) заклеить ручкой, то мы подклеим $p - 1$ ручек к S_2 , в результате чего получим поверхность M_2 - сферу с p ручками, и $d(p - 1)$ ручек - к S_1 , получив поверхность M_1 - сферу с $d(p - 1) + 1$ ручками. Ясно, что накрытие $S_1 \rightarrow S_2$ продолжается до d -листного накрытия $M_1 \rightarrow M_2$.

36.22 Рассмотрим произвольную точку $z \in Z$, пусть $q^{-1}(z) = \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$. Если V - окрестность точки z , правильно накрытая относительно проекции q , а W_k - окрестности точек $y_k, k = 1, 2, \dots, d$, правильно накрытые относительно проекции p , то

$U = \bigcap_{k=1}^d q(W_k \cap q^{-1}(V))$ - окрестность точки z , правильно накрытая при проекции $q \circ p$. Значит, $q \circ p : X \rightarrow Z$ - накрытие.

36.23 Пусть Z есть объединение бесконечного множества окружностей, заданных уравнениями $x^2 + y^2 = \frac{2x}{n}, n \in \mathbb{N}$, а Y - объединение оси ординат и "дважды" бесконечного семейства $x^2 + (y - k)^2 = \frac{2x}{n}$, где $n \in \mathbb{N}, n > 1, k \in \mathbb{Z}$. Накрытие $q : Y \rightarrow Z$ устроено следующим образом: ось ординат "наматывается" на внешнюю окружность пространства Z , а сужения q на другие окружности задаются параллельными переносами. Постройте накрытие $p : X \rightarrow Y$, композиция которого с q не будет накрытием. При этом накрытие p может быть всего лишь двулиственным.

36.24 1) Заметим, что топология в слое (индуцированная из X) дискретна. Значит, если пространство X компактно, то слой $F = p^{-1}(b)$ замкнут в X и, следовательно, компактен. Поэтому множество F конечно, таким образом накрытие конечнолистно.

2) Так как пространство B компактно и хаусдорфово, то оно регулярно, значит у каждой точки имеется окрестность U_x , такая что ее компактное замыкание $Cl U_x$ лежит в некоторой правильно накрытой окрестности. В силу компактности базы,

$B = \bigcup U_{x_i}, X = \bigcup p^{-1}(Cl U_{x_i})$. Так как накрытие конечнолистно, то тем самым X покрывается конечным числом компактных множеств, значит оно само компактно.

36.25 Пусть $U \cap V = G_0 \cup G_1$, где G_0 и G_1 - открытые подмножества. Рассмотрим произведение $X \times \mathbb{Z}$ и его подмножество

$$Y = \{(x, k) \mid x \in U, k \text{ четно}\} \cup \{(x, k) \mid x \in V, k \text{ нечетно}\},$$

являющееся несвязным объединением счетного числа экземпляров множеств U и V . Введем в Y отношение

$$(x, k) \sim (x, k + 1), \quad \text{если } x \in G_1, k \text{ четно},$$

$$(x, k) \sim (x, k - 1), \quad \text{если } x \in G_0, k \text{ нечетно}.$$

Рассмотрим разбиение Y на пары эквивалентных друг другу точек и на одноточечные подмножества из $(Y \setminus (U \cap V)) \times \mathbb{Z}$. Обозначим через Z факторпространство по построенному разбиению. Пусть $p : Z \rightarrow X$ - это факторизация отображения, являющегося сужением на Y стандартной проекции $X \times \mathbb{Z} \rightarrow X$. Убедитесь, что $p : Z \rightarrow X$ является бесконечнолиственным накрытием. Примените описанную

конструкцию к окружности S^1 , являющейся объединением двух открытых дуг с несвязным пересечением; что за накрытие в результате вы получите?

37-1 По условию $X = B \times F$, где F - дискретное пространство, а $p = \text{pr}_B$. Пусть $y_0 \in F$ - вторая координата точки x_0 . Соответствие $a \mapsto (f(a), y_0)$ определяет непрерывное поднятие $\tilde{f} : A \rightarrow X$ отображения f .

37-2 Пусть $x_0 = (b_0, y_0) \in B \times F = X$. Рассмотрим отображение $g = \text{pr}_F \circ \tilde{f} : A \rightarrow F$. Поскольку множество A связно, а топологическая структура в F дискретна, то g - постоянное отображение. Значит, $f(a) = (f(a), y_0)$, следовательно, поднятие единственно.

37-3 Рассмотрим множество совпадения $G = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ отображений f и g , по условию $G \neq \emptyset$. Для всякой точки $a \in A$ выберем связную окрестность $V_a \subset \varphi^{-1}(U_b)$, где U_b - некоторая правильно накрытая окрестность точки $b = \varphi(a)$. Если $V_a \cap G \neq \emptyset$, то $V_a \subset G$ в силу 37-2. В частности, если $a \in G$, то $V_a \subset G$, следовательно множество G открыто. Точно так же, если $a \notin G$, то $V_a \cap G = \emptyset$, т. е. $V_a \subset A \setminus G$, значит, и множество $A \setminus G$ открыто. По условию A связно и $G \neq \emptyset$, откуда следует, что $A = G$.

37-5 Покажите, что если $b_0 = -1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, то поднятия пути $u : t \mapsto e^{3\pi i t}$ не существует.

37-6 Имеем: $\tilde{u}(t) = \ln(2-t)$. $\tilde{v}(t) = \ln(1+t) + 2\pi i t$, $\tilde{u}\tilde{v} = \tilde{u}\tilde{v}$, а $\tilde{v}\tilde{u} = \tilde{v}\tilde{u}$, где $\tilde{u} = \ln(2-t) + 2\pi i$.

37-7 Если накрытие нетривиально и при этом накрывающее пространство линейно связно, то существует путь s , соединяющий различные точки $x_0, x_1 \in p^{-1}(b_0)$. В силу утверждения 37-E петля $p \circ s$ не гомотопна нулю, значит, пространство B не односвязно.

37-8 Это следует из 37.7.

37-9 К примеру, пространство $\mathbb{R}P^2$ не односвязно.

38.1 Это класс a . Действительно, путь $\tilde{s}(t) = t^2$, накрывающий данный путь, заканчивается в точке $1 \in \mathbb{R}$, значит, он гомотопен пути s_1 .

38.2 Если $[s] = \alpha^n$, то $s \sim s_n$, значит, пути \tilde{s} и \tilde{s}_n оканчиваются в одной и той же точке.

38.3 Универсальным накрывающим пространством для n -мерного тора является пространство \mathbf{R}^n , накрытие p определяется формулой

$p(x_1, \dots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$. Отображение

$\text{deg} : \pi_1((S^1)^n, (1, 1, \dots, 1)) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ определяется следующим образом.

Если u - петля на торе и \tilde{u} - накрывающий ее путь, начинающийся в начале координат, то $\text{deg}([u]) = \tilde{u}(1) \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что это отображение определено корректно и является изоморфизмом.

38.4 Это предположение использовалось там, где мы использовали односвязность n -мерной сферы, другими словами, накрытие $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^2$ является универсальным лишь при $n \geq 2$.

34.7 Рассмотрите три случая, именно, когда в пространстве X : 1) нет открытых одноточечных множеств; 2) имеется единственное открытое одноточечное множество; 3) существуют два открытых одноточечных множества.

38.7 К примеру, постройте бесконечно-листное накрытие (в узком смысле) пространства X (см. 10.V).

38.8 Покажем, что $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$. Пространством, накрывающим X , является множество \mathbf{Z} с топологией, базой которой являются одноточечные множества $\{2k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, и трехточечные множества $\{2k, 2k+1, 2k+2\}$, $k \in \mathbb{Z}$. При этом $p^{-1}(a) = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Как и в случае вычисления фундаментальной группы окружности, достаточно показать, что пространство, накрывающее X , является односвязным. Это следует, к примеру, из того, что взяв $U = \{0, 1, 2\}$ и $V = \{2, 3, 4\}$, получим, что U и V открыты в $U \cup V$, односвязны и их пересечение линейно связно. Следовательно, их объединение $U \cup V$ также односвязно (см. 34.II). Приведем также другое рассуждение.

Положим $J_n = \{0, 1, \dots, 2n\}$. Определим отображение

$H_n : J_n \times I \rightarrow J_n$ посредством формул:

$$H_n(x, t) = x \text{ при } x \in J_{n-1}, \quad H_n(2n-1, t) = \begin{cases} 2n-1 & \text{при } t = 0, \\ 2n-2 & \text{при } t \in (0; 1], \end{cases}$$

$$H_n(2n, t) = \begin{cases} 2n & \text{при } t \in [0; \frac{1}{3}), \\ 2n-1 & \text{при } t \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], \\ 2n-2 & \text{при } t \in (\frac{2}{3}; 1]. \end{cases}$$

Пусть u - петля в 0, образ которой содержится в множестве J_n . Формула $h_n(s, t) = H_n(u(s), t)$ определяет гомотопию между u и петлей, образ которой лежит в множестве J_{n-1} . Рассуждая по индукции, получим, что петля u гомотопна постоянной петле.

38.9 1) Из результатов задач 34.7, 38.6, and 38.7 следует, что $n_0 = 4$.

2) Из вычисления, проведенного при решении задачи 38.8, следует, что группа Z реализуется как фундаментальная группа четырехточечного пространства. Покажите, что никакая другая нетривиальная группа не может быть фундаментальной группой такого пространства.

38.10 1) Рассмотрим семиточечное пространство

$$Z = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

топология в котором определена базой

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, e\}, \{a, b, f\}, \{b, c, g\}\}.$$

Для того, чтобы убедиться, что Z не является односвязным, достаточно построить его универсальное накрытие в узком смысле, которое в нашем случае строится так же, как универсальное накрытие букета двух окружностей. Вместо "креста" K рассмотрите пространство

$\tilde{K} = \{a, b_+, b_-, c_+, c_-, d, e, f, g\}$. 2) В силу 38.9, необходимо взять по крайней мере пять точек. Рассмотрим пространство

$$Y = \{a, b, c, d, e\}, \text{ топология в котором определена базой } \{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}\}.$$

Убедитесь, что фундаментальной группой пространства Y является свободная группа с двумя образующими.

38.12 Рассмотрите топологическое пространство

$$X = \{a_0, b_0, c_0, a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1, a_2, b_2, c_2, d_2\}$$

топология в котором определена базой

$$\begin{aligned} &\{a_0\}, \{a_0, b_0, c_1\}, \{a_0, b_0, c'_1\}, \{a_0, b_0, c_0, a_1, b'_1, c'_1, a_2\}, \\ &\{b_0\}, \{a_0, b_1, c_0\}, \{a_0, b'_1, c_0\}, \{a_0, b_0, c_0, a'_1, b_1, c'_1, b_2\}, \\ &\{c_0\}, \{a_1, b_0, c_0\}, \{a'_1, b_0, c_0\}, \{a_0, b_0, c_0, a'_1, b'_1, c_1, c_2\}, \\ &\{a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, d_2\}. \end{aligned}$$

39.1 Заметим прежде всего, что, поскольку фундаментальная группа проколотой плоскости коммутативна, то оператор переноса вдоль петля является тождественным гомоморфизмом. Следовательно, если два отображения $f, g : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$ гомотопны, то они индуцируют один и тот же гомоморфизм фундаментальных групп. Пусть f -отображение $z \mapsto z^3$. Образующей группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus 0, 1)$ является класс α петли $s(t) = e^{2\pi it}$. образом $f_*(\alpha)$ является класс петли

$$f_{\#}(u) = f \circ u, \text{ таким образом, } f_{\#}(u)(t) = e^{6\pi it}, \text{ значит,}$$

$f_*(\alpha) = \alpha^3 \neq \alpha$. Следовательно, $f_* \neq \text{id}_{\pi_1(\mathbb{C} \setminus 0, 1)}$, откуда и следует, что отображение f не гомотопно тождественному.

39.2 Обозначим через i включение $X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Если отображение f продолжается до $F : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, то $f = F \circ i$, значит, $f_* = F_* \circ i_*$.

Однако, поскольку пространство \mathbf{R}^n односвязно, то гомоморфизм F_* тривиален, следовательно, тривиален и гомоморфизм f_* .

39.3.1 Обозначим через φ гомеоморфизм открытого множества $U \subset X$ на $S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$. Если $X = U$, то утверждение очевидно, так как группа $\pi_1(S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\})$ изоморфна свободной группе с двумя образующими. В противном случае определим отображение $f : X \rightarrow S^1 \times S^1$, положив

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in U, \\ (1, 1) & \text{при } x \notin U. \end{cases}$$

Проверьте, что f - непрерывное отображение. Теперь возьмем точку $x_0 \in U$ и рассмотрим гомоморфизм

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^1, f(x_0)).$$

Нетрудно видеть, что f_* - эпиморфизм.

39.4 Пусть $f(z) = \text{diag}\{z, 1, 1, \dots, 1\}$ для всякой точки $z \in S^1$, а

$g(A) = \frac{\det(A)}{|\det(A)|}$ для всякой матрицы $A \in GL(n, \mathbf{C})$. Тем самым определены отображения $f : S^1 \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$ и $g : GL(n, \mathbf{C}) \rightarrow S^1$, композиция $g \circ f$ которых является тождественным отображением. Так как композиция $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id}_{\pi_1(S^1)}$, то g_* эпиморфизм, следовательно, фундаментальная группа пространства $GL(n, \mathbf{C})$ бесконечна.

39.1x Это в точности утверждение 39.Dx.

39.2x В силу 39.1x достаточно проверить, что если $a \in \text{Int } D^2$ и i - это стандартное вложение стандартной окружности S^1 в $\mathbb{R}^2 \setminus a$, то круговая петля i определяет нетривиальный элемент в группе $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus a)$. Действительно, формула $h(z, t) = z + ta$ определяет гомотопию между i и круговой петлей, класс которой очевидно порождает фундаментальную группу проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus a$.

39.3x Возьмем произвольную точку $a \in \mathbb{R}^2$, пусть $R > |a| + m$.

Рассмотрим круговую петлю, определенную формулой

$\varphi(z) = f(Rz)$, где $z \in S^1$, и стандартную петлю i_R где

$i_R(z) = Rz$. Если $h(z, t) = t\varphi(z) + (1 - t)i_R(z)$, то

$$|h(z, t)| = |Rz + t(f(Rz) - Rz)| \geq R - |f(Rz) - rz| \geq R - m > |a|,$$

значит, отображение h определяет гомотопию в $\mathbb{R}^2 \setminus a$ между круговыми петлями φ и i_R . Так как петля i_R в $\mathbb{R}^2 \setminus a$ не гомотопна постоянной петле, то и φ не гомотопна постоянной петле. В силу 39.1x, $a = f(Rz)$, где $|z| < 1$, таким образом, точка a принадлежит образу отображения f .

36.4x.1 Проще всего было бы воспользоваться теоремой 39.1x, проверив, что соответствующая круговая петля не гомотопна в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$

постоянной петле. Конечно в этой теореме речь идет о круге, а не о квадрате, но квадрат гомеоморфен кругу, так что с топологической точки зрения нет никакой разницы между парой $(I^2, \Gamma I^2)$ и парой (D^2, S^1) . Однако для того, чтобы читатель лучше осознал основную идею доказательства теоремы 39.1х, мы приведем решение данной задачи, не опирающееся на эту теорему. Предположим, что $w(x, y) \neq 0$ при всех $(x, y) \in I^2$. Рассмотрим пути, идущие по сторонам квадрата, именно,

$$s_1(\tau) = (1, \tau); \quad s_2(\tau) = (1 - \tau, 1); \quad s_3(\tau) = (0, 1 - \tau); \quad s_4(\tau) = (\tau, 0).$$

Ясно, что определено произведение $s = s_1 s_2 s_3 s_4$, которое является петлей, гомотопной нулю в квадрате I^2 . Теперь рассмотрим петлю $w \circ s$ и покажем, что она не гомотопна нулю в проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Поскольку $w(s_1(\tau)) = u(1) - v(\tau)$, то образ пути $w \circ s_1$ лежит в первой четверти. Его началом является точка $u(1) - v(0) = (1, 0)$, а концом – точка $u(1) - v(1) = (0, 1)$. Так как первая четверть является односвязным множеством, то путь $w \circ s_1$ гомотопен в ней любому пути, соединяющему те же точки, к примеру, пути $\varphi_1(t) = e^{\pi i t/2}$. Аналогичным образом, путь $w \circ s_2$ лежит во второй четверти и гомотопен в ней пути $\varphi_2(t) = e^{\pi i(t+1)/2}$. Таким образом, путь $w \circ s$ гомотопен в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ пути $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$, который определен формулой $\varphi(\tau) = e^{2\pi i \tau}$. Следовательно, класс петли $w \circ s$ является образующей фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus (1, 0))$, в частности, эта петля не гомотопна постоянной петле. С другой стороны, в силу 39.G-4 петля $w \circ s$ гомотопна постоянной петле в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Полученное противоречие доказывает то, что $u(x) - v(y) = w(x, y) = 0$ при некоторых $x \in I$ и $y \in I$, т. е., что пути u и v пересекаются.

39.5х К примеру, рассмотрите множества

$$F = \{(1, 1)\} \cup ([0, 1) \times 0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \times [0; \frac{2n-1}{2n}] \right)$$

$$G = \{(1, 0)\} \cup ([0, 1) \times 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \times [\frac{1}{2n+1}; 1] \right).$$

39.6х Нет, нельзя. Проведем доказательство от противного. Пусть $\varepsilon = \rho(F, G) > 0$. Из результата задачи 16.17 следует, что точки $(0, 0), (1, 1) \in F$ можно соединить путем u , образ которого лежит в $\varepsilon/2$ -окрестности множества F , а точки $(0, 1), (1, 0) \in G$ – путем v с образом в $\varepsilon/2$ -окрестности G . При этом $u(I) \cap v(I) = \emptyset$ в силу выбора ε , что противоречит утверждению задачи 39.4х.

Теперь приведем более элементарное решение этой задачи. Из результата задачи 16.4х следует, что существует простая ломаная, соединяющая точки (0,0) и (1,1) и не пересекающаяся с множеством G . Рассмотрим многоугольник $K_0 \dots K_n PQR$ (рисунок). Одна из оставшихся вершин лежит внутри этого многоугольника, а другая - вне него. Следовательно, эти точки не могут принадлежать связному множеству, не пересекающемуся с этим многоугольником.

39.8х Докажем, что если точки x и y соединены путем, не пересекающим множество $u(S^1)$, то $\text{ind}(u, x) = \text{ind}(u, y)$. Действительно, если такой путь s существует, то формула

$$h(z, t) = \varphi_{u, s(t)}(z) = \frac{u(z) - s(t)}{|u(z) - s(t)|}$$

определяет гомотопию между отображениями $\varphi_{u, x}$ и $\varphi_{u, y}$; далее - как в доказательстве 39.Ех. Таким образом, если $\text{ind}(u, x) \neq \text{ind}(u, y)$, то точки x и y нельзя соединить путем, образ которого не задевал бы множество $u(S^1)$.

39.9х Предположим для простоты, что данный круг содержит начало координат. Из формулы

$$h(z, t) = \frac{(1-t)u(z) - x}{|(1-t)u(z) - x|}$$

следует, что отображение $\varphi_{u, x}$ гомотопна нулю, значит, $\text{ind}(u, x) = 0$.

39.10х (а) $\text{ind}(u, x) = 1$, если $|x| < 1$, и $\text{ind}(u, x) = 0$, если $|x| > 1$.

(б) $\text{ind}(u, x) = -1$, если $|x| < 1$ и $\text{ind}(u, x) = 0$, если $|x| > 1$.

(с) $\{\text{ind}(u, x) \mid x \in \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1)\} = \{0, 1, -1\}$.

39.11х Лемниската разбивает плоскость на три компоненты. Индекс любой петли, образом которой является лемниската, относительно любой точки, лежащей в неограниченной компоненте, равен нулю. Для любой пары (k, l) целых чисел найдется такая петля u , что её индекс относительно точки из одной ограниченной компоненты равен k , а её индекс относительно точки, лежащей в другой ограниченной компоненте, равен l .

39.12х См. решение предыдущей задачи.

39.13х Мы вправе считать, что x - начало координат, а луч R совпадает с положительной частью оси абсцисс. Будет удобнее рассматривать петлю

$$u : I \rightarrow S^1 : t \mapsto \frac{f(e^{2\pi i t})}{|f(e^{2\pi i t})|}.$$

Предположим, что множество $f^{-1}(R)$ конечно и состоит из n точек. Следовательно $u^{-1}(1) = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. при этом $t_0 = 0$ и $t_n = 1$. Петля u гомотопна произведению петель u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, каждая из которых

обладает следующим свойством: $u_i(t) = 1$ только при $t = 0, 1$. Докажите, что $[u_i]$ либо равен пулю, либо является одной из образующих группы $\pi_1(S^1)$. Значит, если k_i - целое число - образ $[u_i]$ при изоморфизме $\pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $k = \text{ind}(f, x)$ - образ класса $[u]$ при этом изоморфизме, то

$$|k| = |k_1 + k_2 + \dots + k_n| \leq |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n| \leq n,$$

так как каждое из чисел k_i - это 0 или ± 1 .

39. 14х Примените теорему Борсука -Улама к функции, сопоставляющей каждой точке земной поверхности пару чисел (t, p) , где t есть температура в этой точке, а p - давление.

40.1 Если $\rho_1 : X \rightarrow A$ и $\rho_2 : A \rightarrow B$ являются ретракциями, то и $\rho_2 \circ \rho_1 : X \rightarrow B$ есть ретракция.

40.2 Если $\rho_1 : X \rightarrow A$ и $\rho_2 : Y \rightarrow B$ являются ретракциями, то и $\rho_1 \times \rho_2 : X \times Y \rightarrow A \times B$ есть ретракция.

40.3 Положим $f(x) = a$ при $x \leq a$, $f(x) = x$ при $x \in [a; b]$, $f(x) = b$ при $x \geq b$ (т.е. $f(x) = \max\{a, \min\{x, b\}\}$). Тогда $f : \mathbb{R} \rightarrow [a; b]$ - ретракция.

40.4- Следствие 40.6, *или*, более привычно: если $f(x) = x$ при всех $x \in (a; b)$, то из непрерывности функции f следует, что $f(b) = b$, таким образом, не существует непрерывной функции на \mathbf{R} , образом которой является интервал $(a; b)$.

40.5 Те свойства, которые передаются от топологических пространств их подпространствам и (или) непрерывным образам. К примеру, хаусдорфовость, связность, компактность, и т. п.

40.6 Следует из 17.4.

40.7 Так как это пространство не является линейно связным.

40.8 Нет, не является. Действительно, группа $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ конечна, а группа $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ бесконечна, следовательно, не существует эпиморфизма первой из них на вторую (так же как и не существует мономорфизма второй на первую). Значит, в силу утверждения 40.F не существует и ретракции $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$.

40.9 Пусть L - это граничная окружность ленты Мёбиуса M . Ясно, что $\pi_1(L) \cong \pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Однако (ср. 36.4) нетрудно убедиться (проверьте это!), что гомоморфизм i_* , индуцированный включением $i : L \rightarrow M$, переводит образующую $\alpha \in \pi_1(L)$ в элемент 2β , где β - это образующая $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Если бы существовала ретракция $\rho : M \rightarrow L$, то композиция $\rho_* \circ i_*$ переводила бы образующую $\alpha \in \pi_1(L)$ в элемент $2\rho_*(\beta) \neq \alpha$, что противоречит тому, что эта композиция является тождественным изоморфизмом фундаментальной группы $\pi_1(L)$.

40.10 Пусть L - это граничная окружность ручки K . Ясно, что $\pi_1(L) \cong \mathbb{Z}$, а $\pi_1(K)$ - это свободная группа с двумя образующими a и b . При этом можно проверить (сделайте это!), что гомоморфизм включения $i_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(K)$ переводит образующую $\alpha \in \pi_1(L)$ в коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$. Предположим противное: пусть существует ретракция $\rho : K \rightarrow L$. Тогда композиция $\rho_* \circ i_*$ переводит образующую $\alpha \in \pi_1(L)$ в нейтральный элемент этой группы, поскольку в силу коммутативности группы \mathbb{Z} элемент $\rho_* \circ i_*(\alpha) = \rho_*(aba^{-1}b^{-1}) = \rho_*(a)\rho_*(b)\rho_*(a)^{-1}\rho_*(b)^{-1}$ является нейтральным. С другой стороны, эта композиция должна совпадать с $\text{id}_{\pi_1(L)}$. Противоречие.

40.11 Утверждение очевидно, так как всякое свойство, сформулированное в топологических терминах, является топологическим. Интересно, однако, поставить такой вопрос. Пусть пространство X обладает свойством неподвижной точки и $h : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм. Таким образом, мы знаем, что всякое непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет неподвижную точку. Как, зная это, доказать, что и произвольное непрерывное отображение $g : Y \rightarrow Y$ имеет неподвижную точку? Покажите, что таковой будет точка $h(x)$, где x - неподвижная точка некоторого отображения $X \rightarrow X$.

40.12 Рассмотрим непрерывную функцию $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ и вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - x$. Так как $g(a) = f(a) - a \geq 0$, а $g(b) = f(b) - b \leq 0$, то найдется точка $x \in [a; b]$, такая что $g(x) = 0$.

Таким образом, $f(x) = x$, т. е. x - неподвижная точка f .

40.13 Пусть $\rho : X \rightarrow A$ - ретракция. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $f : A \rightarrow A$ и композицию $g = \text{id} \circ f \circ \rho : X \rightarrow X$. Пусть x - неподвижная точка отображения g , таким образом, $x = f(\rho(x))$. Поскольку $\rho(x) \in A$, то и $x \in A$, поэтому $\rho(x) = x$, значит, $x = f(x)$.

40.14 Обозначим через ω точку букета, являющуюся образом пары $\{x_0, y_0\}$ при отображении факторизации. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $f : X \vee Y \rightarrow X \vee Y$, пусть для определенности $f(\omega) \in X$. Пусть $i : X \rightarrow X \vee Y$ - стандартное включение, а $\rho : X \vee Y \rightarrow X$ - ретракция, переводящая все пространство Y в точку ω . По предположению отображение $\rho \circ f \circ i$ имеет неподвижную точку $x \in X$, $\rho(f(i(x))) = x$, таким образом, $\rho(f(x)) = x$. Если $f(x) \in Y$, то $\rho(f(x)) = \omega$, значит, $x = \omega$. С другой стороны мы предполагали, что $f(\omega) \in X$, следовательно, $f(\omega) = \omega$ неподвижная

точка отображения f . Теперь предположим, что $f(x) \in X$. В таком случае

$$x = (\rho \circ f \circ i)(x) = \rho(f(x)) = f(x),$$

значит, x - неподвижная точка отображения f . Следует из 40.13.

40.15 Поскольку отрезок обладает свойством неподвижной точки (см. 40.12), то, в силу 40.14, рассуждая по индукции, получаем, что всякое конечное дерево обладает этим свойством. Произвольное бесконечное дерево этим свойством обладать не обязано; пример - числовая прямая. Однако попробуйте сформулировать дополнительное условие, при выполнении которого и бесконечное дерево будет обладать свойством неподвижной точки.

40.16 Конечно, нет; например, параллельный перенос не имеет неподвижных точек.

40.17 Конечно, нет: например, антиподальное отображение $x \mapsto -x$ не имеет неподвижных точек.

40.18 Пусть $n = 2k - 1$. Например, отображение

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_{2k-1} : x_{2k}) \mapsto (-x_2 : x_1 : \dots : -x_{2k} : x_{2k-1})$$

не имеет неподвижных точек.

40.19 Пусть $n = 2k - 1$. Например, отображение

$$(z_1 : z_2 : \dots : z_{2k-1} : z_{2k}) \mapsto (-\bar{z}_2 : \bar{z}_1 : \dots : -\bar{z}_{2k} : \bar{z}_{2k-1})$$

не имеет неподвижных точек.

41.1 Отображение $f : [0; 1] \rightarrow \{0\}$ является гомотопической эквивалентностью; гомотопически обратным к нему отображением будет, например, включение $i : \{0\} \rightarrow [0; 1]$. Композиция $i \circ f$ гомотопна id_I , так как любые непрерывные два отображения $I \rightarrow I$ гомотопны, а композиция $f \circ i : \{0\} \rightarrow \{0\}$ сама является тождественным отображением.

Конечно, f - не гомеоморфизм.

41.2 Обозначим через $\pi_0(X)$ множество компонент линейной связности пространства X , через $\pi_0(Y)$ - множество компонент линейной связности гомотопически ему эквивалентного пространства Y . Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ - взаимно обратные гомотопические эквивалентности. Поскольку отображение f непрерывно, то оно переводит линейно связное множество в линейно связное, следовательно, гомотопические эквивалентности f, g индуцируют отображения $\hat{f} : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ и $\hat{g} : \pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(X)$. Так как композиция $g \circ f$ гомотопна тождественному отображению, то всякая точка $x \in X$ лежит в той же компоненте линейной связности, что и точка $g(f(x))$, следовательно, композиция $\hat{g} \circ \hat{f}$ является

тождественным отображенном. Аналогичным образом, тождественна и композиция $\widehat{f} \circ \widehat{g}$. Следовательно, \widehat{f} и \widehat{g} являются взаимно обратными отображениями, в частности, множества $\pi_0(X)$ и $\pi_0(Y)$ равномошпы.

41.3 Аналогично 41.2.

41-4 К примеру, возьмите: точку, отрезок, букет n отрезков при $n \geq 3$.

41.5 Докажем, что средняя линия L ленты Мёбиуса M (т. е. образ отрезка $I \times \frac{1}{2}$ при факторизации квадрата $I \times I \rightarrow M$) является ее строгим деформационным ретрактом. Геометрическое рассуждение очевидно: в качестве h_t можно взять сжатие с коэффициентом $I - t$ ленты Мёбиуса по направлению к ее средней линии. Таким образом, h_0 тождественно, а h_1 отображает M в L . Теперь выпишем соответствующие формулы. Поскольку M является факторпространством квадрата, вначале рассмотрим гомотопию

$$H : I \times I \times I \rightarrow I \times I : (u, v, t) \mapsto (u, (1-t)v + \frac{t}{2}).$$

При этом $H(u, \frac{1}{2}, t) = (u, \frac{1}{2})$ при всех $t \in I$. Поскольку

$$(1-t)v + \frac{t}{2} + (1-t)(1-v) + \frac{t}{2} = 1, \text{ то эта гомотопия}$$

выдерживает факторизацию, порождая гомотопию $h : M \times I \rightarrow M$.

Имеем $H(u, v, 0) = (u, v)$, значит,

$$h_0 = \text{id}_M, \text{ а } H_1(u, v) = (u, \frac{1}{2}).$$

41.6 Буквы $E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ гомотопически эквивалентны точке: буквы A, O, P, Q, R гомотопически эквивалентны окружности; буква B - букету из двух окружностей.

41.7 Это можно доказать различными способами. Укажем лежащие в ручке окружности, объединение которых является ее строгим деформационным ретрактом. Для этого представим ручку как результат факторизации кольца $\{z \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$ по следующему отношению:

$$e^{i\varphi} \sim -e^{-i\varphi} \text{ при } \varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \text{ и } e^{i\varphi} \sim e^{-i\varphi} \text{ при } \varphi \in [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}].$$

Образом стандартной единичной окружности при факторизации по указанному отношению эквивалентности и является лежащий в ручке букет двух окружностей. Формула $H(z, t) = (1-t)z + t \frac{z}{|z|}$

определяет гомотопию между тождественным отображением кольца и отображением $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ этого кольца на его внешнюю окружность,

причем $H(z, t) = z$ при всех $z \in S^1$ и $t \in I$. Факторотображение гомотопии H и является искомой гомотопией кольца.

41.8 Следствие 41.7 и 41.1.

41.9 Вложите каждое из этих пространств в пространство $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ так, чтобы его образ при вложении был деформационным ретрактом этого пространства. Укажем еще одно пространство, гомотопически

эквивалентное указанном: объединение сферы S^2 и одного ее диаметра. Его также можно вложить в $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ в качестве деформационного ретракта.

41.10 Положим $A = \{(z_1, z_2) \mid 4z_2 = z_1^2\} \subset \mathbb{C}^2$. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus 0) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus A : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2 + \frac{z_1^2}{4})$. Убедитесь, что f - гомеоморфизм, а $\mathbb{C}^2 \setminus A \simeq \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus 0) \simeq S^1$. Более того, окружность вкладывается в $\mathbb{C} \setminus A$ в качестве его деформационного ретракта.

41.11 Докажем, что $O(n)$ является деформационным ретрактом пространства $GL(n, \mathbb{R})$. Пусть $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ - набор столбцов матрицы $A \in GL(n, \mathbb{R})$, каждый из которых мы будем рассматривать как элемент \mathbb{R}^n . Пусть $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ - результат применения процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Таким образом матрица, столбцы которой образованы координатами этих векторов, является ортогональной. Векторы \mathbf{e}_k выражаются через \mathbf{f}_k посредством формул

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \lambda_{11}\mathbf{f}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \lambda_{21}\mathbf{f}_1 + \lambda_{22}\mathbf{f}_2, \\ &\dots, \\ \mathbf{e}_n &= \lambda_{n1}\mathbf{f}_1 + \lambda_{n2}\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_{nn}\mathbf{f}_n, \end{aligned}$$

где $\lambda_{kk} > 0$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Введем векторы

$$\mathbf{w}_k(t) = t(\lambda_{n1}\mathbf{f}_1 + \lambda_{n2}\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_{k,k-1}\mathbf{f}_{k-1}) + (t\lambda_{kk} + 1 - t)\mathbf{f}_k$$

и рассмотрим матрицу $h(A, t)$, столбцы которой состоят из координат этих векторов. Ясно, что соответствие $A \mapsto h(A, t)$ определяет непрерывное отображение $GL(n, \mathbb{R}) \times I \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$. Как нетрудно видеть, $h(A, 0) = A$, $h(A, 1) \in O(n)$, причем $h(B, t) = B$ для всех $B \in O(n)$.

Таким образом, отображение $A \mapsto h(A, 1)$ является искомой деформационной ретракцией.

41.13 Используйте, к примеру, 22.44.

41.14 Нам понадобится понятие цилиндра Z_f непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$. По определению, Z_f есть пространство, получающееся в результате приклеивания обычного цилиндра $X \times I$ к пространству Y вдоль отображения $X \times 0 \rightarrow Y$, $(x, 0) \mapsto f(x)$. Тем самым Z_f есть результат факторизации несвязного объединения $(X \times I) \sqcup Y$, при которой точка $(x, 0) \in X \times 0$ отождествляется с точкой $f(x) \in Y$. Будем отождествлять пространство X с $X \times 1 \subset Z_f$, пространство Y также естественно считать лежащим в

цилиндре отображения. Имеется очевидная строгая деформационная ретракция $p_Y : Z_f \rightarrow Y$, при которой Y остается на месте, а точка $(x, t) \in X \times (0, 1)$ отображается в точку $f(x)$. Осталось доказать, что если f является гомотопической эквивалентностью, то и пространство X является деформационным ретрактом Z_f . Пусть $g : Y \rightarrow X$ - обратная к f гомотопическая эквивалентность. Таким образом, существует гомотопия $H : X \times I \rightarrow X$, такая что $H(x, 0) = g(f(x))$ и $H(x, 1) = x$. Определим ретракцию $p : Z_f \rightarrow X$ как фактор отображения $(X \times I) \sqcup Y \rightarrow X : (x, t) \mapsto h(x, t), y \mapsto g(y)$. Осталось доказать, что отображение p является деформационной ретракцией, т. е.

проверить, что $\text{in}_X \circ p$ гомотопно id_{Z_f} . Эта гомотопность следует из следующей цепочки, где значком \sim обозначена гомотопность, которая в каждом случае следует из гомотопности композиции гомотопных отображений:

$$\begin{aligned} \text{in}_X \circ p &= \bar{p} \circ \bar{p} \circ \text{id}_{Z_f} \sim \bar{p} \circ p_Y = g \circ p_Y = \text{id}_{Z_f} \circ (g \circ p_Y) \sim \\ &\sim p_Y \circ (g \circ p_Y) = (p_Y \circ g) \circ p_Y = (f \circ g) \circ p_Y \sim \text{id}_Y \circ p_Y = p_Y \sim \text{id}_{Z_f}. \end{aligned}$$

41.15 Достаточно воспользоваться прямолинейными гомотопиями.

41.16 Пусть $h : X \times I \rightarrow X$ - гомотопия между id_X и постоянным отображением $x \mapsto x_0$. Формула $u_r(t) = h(x, t)$ задает путь, соединяющий (произвольную) точку x пространства X с точкой x_0 . Следовательно, пространство X линейно связно.

41.17 Утверждения (a)-(d) очевидно попарно эквивалентны. Докажем, что они также эквивалентны утверждениям (e) и (f).

(a) \implies (e): Пусть $h : X \times I \rightarrow X$ - гомотопия между id_X и постоянным отображением. Для любого непрерывного отображения $f : Y \rightarrow X$ формула $H = h \circ (f \times \text{id}_I)$ (или по-другому $: H(y, t) = h(f(y), t)$) определяет гомотопию между f и постоянным отображением.

(e) \implies (a): Возьмите $Y = X$ и $f = \text{id}_X$.

(a) \implies (f): Пусть h - то же, что и выше. Формула $H = f \circ h$ определяет гомотопию между отображением $f : X \rightarrow Y$ и постоянным отображением.

(f) \implies (a): Возьмите $Y = X$ и $f = \text{id}_X$.

41.18 Утверждение (b) верно: утверждение (a) верно, тогда пространство Y линейно связно.

41.19 Каждое из пространств (a) (c) стягиваемо.

41.20 Пусть h - гомотопия между id_X и постоянным отображением $x \mapsto x_0$, а g - между id_Y и постоянным отображением $y \mapsto y_0$.

Формула $H(x, y, t) = (h(x, t), g(y, t))$ определяет гомотопию между $\text{id}_{X \times Y}$ и отображением $(x, y) \mapsto (x_0, y_0)$.

Для всякой гомотетии H между $\text{id}_{X \times Y}$ и постоянным отображением $(x, y) \mapsto (x_0, y_0)$ формула $h(x, t) = \text{pr}_X(H(x, y_0, t))$ определяет гомотопию между id_X и постоянным отображением $x \mapsto x_0$. Стягиваемость Y доказывается аналогичным образом.

41.21 (а) Поскольку $X = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \cong (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}^1 \simeq S^1$, то $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

(b) Ясно, что $X = \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^{N-n} \setminus 0) \times \mathbb{R}^n \simeq S^{N-n-1}$.

Следовательно, если $N = n + 1$, то $X \simeq S^0$; если $N = n + 2$, то $X \simeq S^1$, поэтому $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$; если $N > n + 2$, то X односвязно.

(c) Так как $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$, то $\pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$.

(d) Если $N = n + 1$, то $X = \mathbb{R}^N \setminus S^{N-1}$ состоит из двух компонент, одна из которых является открытым N -мерным шаром, и, значит стягиваема, а вторая - гомотопически эквивалентна сфере S^{N-1} . Если $N > n + 1$, то X гомотопически эквивалентно букету $S^{N-1} \vee S^{N-n-1}$. Следовательно, при $N = 2$ и $n = 0$ $\pi_1(X)$ есть свободная группа с двумя образующими; при $N > 2$ или $N = n + 2$ мы получим группу \mathbb{Z} ; во всех оставшихся случаях пространство X односвязно.

(e) Деформационным ретрактом пространства $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ является сфера с двумя отождествленными точками, которая, в силу 41.9, гомотопически эквивалентна букету $X = S^1 \vee S^2$. Универсальным накрывающим пространства X является "гирлянда", представляющая собой прямую \mathbb{R}^1 , к которой во всех ее целых точках приклеены двумерные сферы. Таким образом, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

(f) Если $N = k + 1$, то $S^N \setminus S^{N-1}$ гомеоморфно объединению двух открытых N -мерных шаров, так что фундаментальная группа каждой из двух его компонент тривиальна. Конечно, этот факт следует из общего результата: $S^N \setminus S^k \cong S^{N-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$, поэтому фундаментальная группа $\pi_1(S^N \setminus S^k) \cong \mathbb{Z}$ при $N = k + 2$ и является тривиальной в остальных случаях.

(g) Можно показать, что $\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$, но проще показать, что это пространство деформационно ретрагируется на S^1 . В обоих случаях ясно, что $\pi_1(\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$.

(h) Так как ручка гомотопически эквивалентна букету двух окружностей, то ее фундаментальной группой является свободная группа с двумя образующими.

- (i) Средняя линия (окружность) ленты Мёбиуса является ее деформационным ретрактом, значит, фундаментальная группа ленты Мёбиуса изоморфна \mathbf{Z} .
- (j) Сфера с s дырами гомотопически эквивалентна букету $s - 1$ окружностей, поэтому ее фундаментальная группа тривиальна при $s = 1$, а при других значениях s она является свободной группой с $s - 1$ образующими.
- (к) В результате удаления одной точки из бутылки Клейна получится пространство, гомотопически эквивалентное букету двух окружностей, поэтому его фундаментальная группа это свободная группа с двумя образующими.
- (l) Лента Мёбиуса с выколотой из нее точкой гомотопически эквивалентна "букве θ ", которая, в свою очередь, гомотопически эквивалентна букету двух окружностей. Если из ленты Мёбиуса удалить s точек, то полученное пространство будет гомотопически эквивалентно букету из $s + 1$ окружностей, таким образом, его фундаментальной группой является свободная группа с $s + 1$ образующими.

41.22 Пусть K - край ленты Мёбиуса M , L - ее средняя линия и T - полноторие, на границе которого лежит K . Рассмотрим вложения $i : K \rightarrow T \setminus S$ и $j : T \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus S$. Так как $T \setminus S \cong (D^2 \setminus 0) \times S^1$, то $\pi_1(T \setminus S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Обозначим через a и b образующие группы $\pi_1(T \setminus S)$. Пусть α - образующая $\pi_1 K \cong \mathbb{Z}$, тогда $i_*(\alpha) = a + 2b$. При этом $j_*(a)$ является образующей группы $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S)$, а $j_*(b) = 0$. Значит, $j_*(i_*(\alpha)) \neq 0$. Если бы существовал диск D , границей которого является край ленты Мёбиуса и который не имеет с ней других общих точек, то тогда $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus S$, следовательно, край ленты Мёбиуса определял бы петлю, гомотопную нулю в $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Однако $j_*(i_*(\alpha)) \neq 0$.

41.23 1) Используем обозначения, введенные в 41.10, и рассмотрим отображение

$$Q \rightarrow (\mathbb{C} \setminus 0) \times (\mathbb{C}^2 \setminus A) \simeq S^1 \times S^1 : (a, b, c) \mapsto \left(a, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right).$$

Оно является гомеоморфизмом, следовательно $\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 2) Как следует из результата задачи 41.10, подпространство Q_j гомотопически эквивалентно окружности, и, следовательно, его фундаментальная группа изоморфна \mathbf{Z} .

42.1 Следует из 42.H в силу того, что группа $p_*(\pi_1(X, x_0))$ универсального накрытия тривиальна, а значит, ее индекс равен порядку фундаментальной группы $\pi_1(B, b_0)$ базы этого накрытия.

42.2 Следует из 42.H в силу того, что группа, в которой существует подгруппа ненулевого индекса, не тривиальна.

42.3 Все четные числа. Будем считать что каждая из граничных окружностей цилиндра отображается на край S ленты Мёбиуса M . Пусть α - образующая группы $\pi_1(S^1 \times I)$, тогда $p_*(1) = b^k$, где элемент $b \in \pi_1(M)$ является образом образующей $\pi_1(S)$ при вложении $S \rightarrow M$. Осталось заметить, что $b = a^2$, где a - образующая группы $\pi_1(M)$ с \mathbf{Z} . Таким образом, $p_*(\alpha) = a^{2k}$, следовательно, индекс $p_*(\pi_1(S^1 \times I))$ является четным числом. Нетрудно видеть, что существуют накрытия с произвольным четным числом листов (см. 36.4).

42-4 Все нечетные числа, см.42.10x.

42.5 См. 42.10x.

42.6 См. 42.10x.

42.7 Если база накрытия компактна, а его тотальное пространство некомпактно, то, в силу 36.24, накрытие является бесконечнолистным.

42.8 См. указание к 42.7.

42.9 Класс тождественного отображения.

42.1x К примеру, объединение стандартных единичных отрезков на осях абсцисс и ординат и отрезков $I_n = \{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in I\}$, $n \in \mathbb{N}$ (так называемая "расческа").

42.4x Это очевидно, так как группа $\pi_1(X, a)$ тривиальна, так что можно положить $U = X$.

42.5x К примеру, таким пространством является окружность.

42.6x Пусть V - наименьшая окрестность точки a , поэтому топология на ней антидискретна. Пусть $h_t(x) = x$ при $t < 1$, $h_1(x) = a$. Докажите, что $h : V \times I \rightarrow V$ - гомотопия.

42.7x Это так, поскольку уже гомоморфизм включения $\pi_1(V, a) \rightarrow \pi_1(U, a)$ является тривиальным.

42.8x Например, таким пространством будет $D^2 \setminus \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (рассмотрите точку $(0, 0)$).

42.9x Рассмотрите конус над пространством из примера 42.8x.

42.10x Как следует из теоремы 42.Fx, достаточно описать иерархию классов сопряженных подгрупп базы и указать накрытия с данной подгруппой. Во всех примерах фундаментальная группа данного пространства (базы) коммутативна, поэтому достаточно указать все подгруппы фундаментальной группы и определить их порядок по включению. В каждом случае все накрытия подчинены универсальному накрытию, а тривиальное накрытие подчинено всем накрытиям.

- (а) Универсальным накрытием является отображение $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$.
 Накрытие $p_k : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^k$, где $k \in \mathbb{N}$, подчинено накрытию p ,
 тогда число k является делителем числа l , при этом подчинение само
 является накрытием $p_{l/k}$.
- (б) Поскольку $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \cong S^1 \times \mathbb{R}$, ответ аналогичен предыдущему.
- (с) Если M - лента Мёбиуса, то $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Таким образом, как и в
 первом примере, все подгруппы фундаментальной группы базы имеют
 вид $k\mathbb{Z}$. Отличие в том, что при нечетном k накрывающим
 пространством будет лента Мёбиуса, если же число k четно, то
 накрывающее пространство - это цилиндр $S^1 \times I$.
- (d) Универсальное накрывающее было построено при решении задачи
 38.7. Поскольку фундаментальная группа данного пространства изо-
 морфна \mathbb{Z} , достаточно указать накрытия, группой которых является
 подгруппа $k\mathbb{Z}$. Постройте их самостоятельно. В отличие от примера
 (а), тотальные пространства не гомеоморфны, поскольку в каждом из
 них - свое число точек.
- (е) Универсальным накрытием тора является отображение
 $p : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (x, y) \mapsto (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$. Примером накрытия с
 группой $k\mathbb{Z} \oplus l\mathbb{Z}$ является отображение тора на себя

$$p_k \times p_l : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^k, w^l).$$

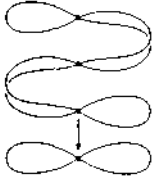
Более общо, для всякой целочисленной матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ можно
 рассмотреть накрытие

$$p_A : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d),$$

группой которого является решетка $L \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисными вектора-
 ми $\mathbf{a}(a, c)$ и $\mathbf{b}(b, d)$. Накрытие p_A подчинено накрытию p_A' , заданно-
 му матрицей $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, если решетка L' с базисными вектора-
 ми $\mathbf{a}'(a', c')$ и $\mathbf{b}'(b', d')$ содержится в решетке L . В таком случае бази-
 сы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ в L и $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$ в V можно выбрать согласованными, т. е. так,
 чтобы $\mathbf{a}' = k\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}' = l\mathbf{b}$ для некоторых $k, l \in \mathbb{N}$. Подчинение само
 будет накрытием $p_k \times p_l$. Бесконечнолистные накрытия с точностью до
 эквивалентности описываются циклическими подгруппами в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, т.
 е. векторами $\mathbf{a}(a, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Каждый такой вектор задает
 отображение $p_{\mathbf{a}} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, t) \mapsto (z^a e^{2\pi it}, z^b)$.
 Накрытие $p_{\mathbf{a}}$ подчинено накрытию $p_{\mathbf{b}}$, если $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, $k \in \mathbb{Z}$. Подчинение
 в таком случае имеет вид $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} : (z, t) \mapsto (z^k, t)$.

Описание подчинений между конечнолистными и
 бесконечнолистными накрытиями оставляется читателю в качестве
 упражнения.

42.11x См. рисунок.



42.12x Действительно, всякая подгруппа абелевой группы нормальна. Можно также убедиться непосредственно, что для любой петли $s : I \rightarrow B$ либо каждый путь в X , накрывающий петлю s , является петлей (независимо от его начальной точки), либо ни один из этих путей не есть петля.

42.13x Это так, поскольку подгруппа индекса два всегда является нормальной.

42.15x См. пример, построенный в решении задачи 42.11x.

42.16x Следствие пункта (d) утверждения 42. Px.

43.3 Клеточное разбиение пространства Z очевидно: если e^m - открытая клетка в X , а e^n - в Y , то $e^m \times e^n$ будет открытой клеткой в Z , поскольку $B^m \times B^n \cong B^{m+n}$. Таким образом, n -остовом пространства Z будет объединение попарных произведений всех открытых клеток в X и Y , сумма размерностей которых не больше n .

Теперь надо описать приклеивающие отображения соответствующих замкнутых клеток. Чтобы построить клеточное пространство X , мы начинаем с дискретного топологического пространства X_0 , а затем для каждого $m \in \mathbb{N}$ строим пространство X_m , приклеивая к X_{m-1} дизъюнктное объединение m -мерных шаров $D_{X,\alpha}^m$ по некоторому

приклеивающему отображению $\bigsqcup_{\alpha} S_{X,\alpha}^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$. Ясно, что X

можно описать как результат одновременной факторизации дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{m,\alpha} D_{X,\alpha}^m$ по некоторому единому отождествлению. То же самое верно для пространства Y . В силу перестановочности в данном случае операций факторизации и перемножения топологических пространств (см. 27-Qx), произведение $X \times Y$ гомеоморфно результату факторизации дизъюнктного объединения

$$\bigsqcup_{\substack{m,\alpha \\ n,\beta}} D_{X,\alpha}^m \times D_{Y,\beta}^n$$

попарных произведений шаров, участвующих в построении пространств X и Y . Осталось заметить, что эту факторизацию, в свою очередь, можно произвести "по остовам", начиная с дискретного

топологического пространства $Z_0 = \sqcup (D_{X,\alpha}^0 \times D_{Y,\beta}^0)$. Приклеив к нему одномерные клетки вида $D_{X,\alpha}^1 \times D_{Y,\beta}^0$ и $D_{X,\alpha}^0 \times D_{Y,\beta}^1$, мы получим 1-остов Z_1 , и т. д. В размерностях, больших 1, описание приклеивающих отображений может вызвать затруднение. Рассмотрим клетку вида $e^m \times e^n$. Её характеристическое отображение $D^m \times D^n \rightarrow X \times Y$ есть просто произведение характеристических отображений клеток e^m и e^n , при котором образ граничной сферы "шара" $D^m \times D^n$ попадает в уже построенный остов Z_{n+m-1} . Тем самым определено приклеивающее отображение

$\omega : S^{n+m-1} \rightarrow Z_{n+m-1}$. Дадим еще и явное его описание. Для этого нам потребуется стандартный гомеоморфизм $\kappa : D^{m+n} \rightarrow D^m \times D^n$, при котором

$\kappa(S^{m+n-1}) = (S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1})$. Пусть $\varphi_1 : S^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$ и $\varphi_2 : S^{n-1} \rightarrow Y_{n-1}$ - приклеивающие отображения клеток e^m и e^n .

Тогда ω можно описать как композицию

$$\begin{aligned} S^{m+n-1} &\rightarrow (D^m \times S^{n-1}) \cup (S^{m-1} \times D^n) \rightarrow \\ &\rightarrow ((X_{m-1} \cup_{\varphi_1} D^m) \times Y_{n-1}) \cup (X_{m-1} \times (Y_{n-1} \cup_{\varphi_2} D^n)) \hookrightarrow Z_{m+n-1}, \end{aligned}$$

где первое отображение - сокращение гомеоморфизма κ , второе - очевидное отображение, определяемое на каждой части как произведение характеристического и приклеивающего отображений, а третье отображение - включение.

43-4 Нет, не останется. Покажите, что топология произведения двух экземпляров клеточного пространства из задачи 43.9 не является клеточной.

43.5 В действительности при решении предыдущей задачи использовалось, во-первых, представление $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{R}P^k$, во-вторых, то, что $\mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$ есть открытая k -мерная клетка. Воспользуйтесь представлением $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{C}P^k$. Докажите, что при всех целых $k \geq 0$ разность $\mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1} \cong B^{2k}$. При этом ясно, что приклеивающее отображение $S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$ является отображением факторизации.

43.6 (а) Удалите из квадрата множество, гомеоморфное открытому кругу, ограниченное кривой, начинающейся и заканчивающейся в некоторой вершине квадрата I^2 . Его дополнение разбито на 10 клеток, а факторпространство этого дополнения разбито на 5 клеток и гомеоморфно ручке.

(б) Лента Мёбиуса есть факторпространство квадрата, у которого существует клеточное разбиение из 9 клеток. В результате

факторизации мы получим разбиение ленты Мёбиуса, состоящее из 6 клеток.

(с) Как и пространство из предыдущего пункта, $S^1 \times I$ - это факторпространство квадрата. Или по-другому, см. 43.3.

(d-e) См. 43.L.

43.7 (а) 4 клетки - представьте ленту Мёбиуса как результат факторизации треугольника, при которой все три его вершины склеиваются в одну. Покажите, что одной одномерной клетки недостаточно.

(b) $2p + 2$ клеток; (с) $q + 2$ клеток. См.43.L. То, что данное число клеток является наименьшим возможным, следует из вычисления фундаментальных групп этих пространств; см. 46.L.

43.8 Нужны хотя бы три клетки: нульмерная, одномерная и еще одна.

43.9 См. 23.б.

43.K См. решение задачи 43.J-

43.11 Обратите внимание, что поскольку всякие две точки \mathbb{R}^∞ лежат в некотором его подпространстве \mathbb{R}^N , то несложно определить расстояние между ними. Таким образом, в \mathbb{R}^∞ имеется метрика, однако эта метрика индуцирует в нем не ту топологию. Невозможность индуцировать существующую в \mathbb{R}^∞ топологию какой-либо метрикой следует из того, что в этом пространстве нет счетной базы в точке (докажите это).

43.L Докажем несколько утверждений из перечисленных.

(а) Слово aa^{-1} описывает факторпространство диска D^2 по разбиению на пары точек окружности, симметричные относительно одного из ее диаметров, гомеоморфное двумерной сфере. Клеточное разбиение состоит из двух нульмерных клеток, одной одномерной и одной двумерной.

(b) Слово aa описывает факторпространство диска D^2 по разбиению на пары точек окружности, симметричные относительно ее центра, гомеоморфное проективной плоскости. Клеточное разбиение состоит из трех клеток: по одной в каждой из размерностей 0, 1 и 2.

(г) Рассмотрим p -угольник с вершинами в точках, в которых сходятся ребра, отмеченные символами a_1 и b_p^{-1} , a_2 и b_1^{-1} , ..., a_p и b_{p-1}^{-1} , и разрежем исходный $4p$ -угольник вдоль сторон рассмотренного p -угольника. Из этого p -угольника при его факторизации мы получим сферу с p дырками. При факторизации оставшихся 5 -угольников мы получим p ручек.

43.12 Таков, например, так называемый полный 5-граф K_5 , т. е. пространство с 5 вершинами, каждая пара которых соединена ребром.

Его невложимость в \mathbf{R}^2 можно доказать, воспользовавшись теоремой Эйлера 45.3.

44-1x Пусть $\psi : D^n \rightarrow X$ - характеристическое отображение приклеенной клетки, $i : A \rightarrow X$ - включение. Мы вправе считать, что $x = \psi(0)$, где 0 - центр шара D^n . Введем отображение

$$g : X \setminus x \rightarrow A : g(z) = \begin{cases} z & \text{при } z \in A, \\ \varphi(\iota^{-1}(z)/|\psi^{-1}(z)|) & \text{при } z \notin A. \end{cases}$$

Докажем, что отображения $\text{id}_{X \setminus x}$ и $i \circ g$ A -гомотопны. Рассмотрим прямолинейную гомотопию $\tilde{h} : (D^n \setminus x) \times I \rightarrow D^n \setminus x$ между тождественным отображением и проекцией $\rho : D^n \setminus x \rightarrow D^n \setminus x : z \mapsto \frac{z}{|z|}$.

Определим гомотопию

$$h : (A \sqcup (D^n \setminus x)) \times I \rightarrow A \sqcup (D^n \setminus x),$$

положив

$$h(z, t) = \begin{cases} z, & \text{если } z \in A, \\ \tilde{h}(z, t), & \text{если } z \in D^n. \end{cases}$$

Её факторотображение $H : (X \setminus x) \times I \rightarrow X \setminus x$ является искомой A -гомотопией между $\text{id}_{X \setminus A}$ и $i \circ g$.

44-2x Следует из 44.1x, в силу того, что замкнутые n -мерные клетки вместе с X_{n-1} образуют фундаментальное покрытие клеточного пространства X .

44-3x Утверждение об $\mathbb{R}P^n$ следует из 44.1x, поскольку пространство $\mathbb{R}P^n$ есть результат приклеивания одной n -мерной клетки к пространству $\mathbb{R}P^{n-1}$ - см. 43-Н. Утверждение про $\mathbb{C}P^n$ доказывается аналогичным образом (см. 43-5). С другой стороны, попробуйте дать явные формулы для деформационных ретракций $\mathbb{R}P^n \setminus \text{point} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ и $\mathbb{C}P^n \setminus \text{point} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$.

44.4x Рассмотрите клеточное разбиение полнотория с одной 3-клеткой, 2-остовом которого является тор, к которому вдоль меридиана $S^1 \times 1$ приклеен круг, и примените утверждение 44.1x.

44.5x Обозначим через $e_\varphi : D^{n+1} \rightarrow X_\varphi$ и $e_\psi : D^{n+1} \rightarrow X_\psi$ характеристические отображения $(n+1)$ -мерной клетки, приклеенной к пространству Y . Пусть $h : S^n \times I \rightarrow Y$ - это гомотопия, соединяющая φ и ψ . Рассмотрим отображения

$f' : Y \sqcup D^{n+1} \rightarrow X_\varphi$ и $g' : Y \sqcup D^{n+1} \rightarrow X_\psi$, которые являются стандартными вложениями на Y , а на шарах D^{n+1} определены формулами

$$f'(x) = \begin{cases} e_\psi(2x) & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ h\left(\frac{x}{|x|}, 2(1 - |x|)\right) & \text{при } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} e_\varphi(2x) & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ h\left(\frac{x}{|x|}, 2|x| - 1\right) & \text{при } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что определены факторы

$f : X_\varphi \rightarrow X_\psi$ и $g : X_\psi \rightarrow X_\varphi$ отображений f' и g' . Покажите, что f и g являются взаимно-обратными гомотопическими эквивалентностями.

44.6x Для доказательства нужно слегка изменить рассуждение, использованное при решении предыдущей задачи.

44.7x Пусть A - пространство, получающееся в результате приклеивания круга к окружности посредством отображения

$\alpha : S^1 \rightarrow S^1, \alpha(z) = z^2$. Тогда $A \cong \mathbb{R}P^2$, значит $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}_2$.

Следовательно, отображение $\varphi : S^1 \rightarrow A : z \mapsto z^3$, гомотопно отображению $\psi = \text{id}_{S^1}$. В силу 44.5x, пространство X гомотопически эквивалентно пространству $A \cup_\psi D^2$, которое совпадает с $D^2 \cup_\alpha D^2$. Поскольку отображение $\alpha : S^1 \rightarrow D^2$ гомотопно постоянному, то (снова в силу 44.5x) X гомотопически эквивалентно букету $D^2 \vee S^2$, который гомотопически эквивалентен S^2 :

$$X \simeq A \cup_\psi D^2 \simeq D^2 \cup_\alpha D^2 \simeq D^2 \vee S^2 \simeq S^2.$$

В этом разбиении - две клетки.

44-9x Тор $S^1 \times S^1$ получается из букета $S^1 \vee S^1$ приклеиванием к нему 2-клетки вдоль некоторого отображения $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$.

Обозначим через i включение $S^1 \vee S^1 \rightarrow A = (1 \times S^1) \cup (D^2 \times 1)$ и покажем, что композиция $i \circ \varphi : S^1 \rightarrow A$ гомотопна постоянному отображению.

Действительно, пусть α, β - стандартные образующие $\pi_1(S^1 \vee S^1)$.

Тогда

$$[\varphi] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}, \text{ и}$$

$$[i \circ \varphi] = i_*([\varphi]) = i_*(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) =$$

$$i_*(\alpha)i_*(\beta)i_*(\alpha)^{-1}i_*(\beta)^{-1} = i_*(\alpha)i_*(\alpha)^{-1} = 1,$$

так как $i_*(\beta) = 1 \in \pi_1(A)$. В силу теоремы 44-5x,

$$A \cup_\varphi D^2 \simeq A \vee S^2 = S^1 \vee D^2 \vee S^2 \simeq S^1 \vee S^2.$$

44.10x Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и утверждением 44-5x.

44.11x Докажите, что $X \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2$, значит, $\pi_1(X) \cong \mathbb{F}_2$, в то

время как $Y \simeq S^1 \times S^1$, поэтому $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}^2$. Так как $\pi_1(X) \not\cong \pi_1(Y)$, то сами пространства не являются гомотопически эквивалентными.

44.13x Рассмотрим клеточное разбиение $\mathbb{C}P^2$, состоящее из одной нульмерной клетки, одной одномерной, двух двумерных клеток и одной 4-клетки. При этом можно считать, что 2-остов полученного клеточного пространства совпадает с $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$, а 1-остов - с вещественной частью $RP^1 \subset \mathbb{C}P^1$. Обозначим через $\tau : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ инволюцию комплексного сопряжения, по которой и происходит факторизация. Ясно, что $\mathbb{C}P^1/[z \sim \tau(z)] \cong D^2$. Рассмотрим характеристическое отображение $\psi : D^4 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ четырехмерной клетки данного клеточного разбиения. Факторпространство $D^4/[z \sim \tau(z)]$ очевидно гомеоморфно D^4 , поэтому факторотображение

$$D^4/[z \sim \tau(z)] \rightarrow \mathbb{C}P^1/[z \sim \tau(z)]$$

является характеристическим отображением для 4-клетки пространства X . Таким образом, X - клеточное пространства, 2-остов которого совпадает с кругом D^2 . Значит, в силу 44.1.Cx, $X \simeq S^4$.

45.1 См. 41.2I.

45.2 Пусть $X \cong S^2$. Обозначим через $v = c_0(X)$, $e = c_1(X)$ и $f = c_2(X)$ число нульмерных, одномерных и двумерных клеток пространства X , соответственно. Выкинув по точке из каждой двумерной клетки пространства X мы получим пространство X' , которое деформационно ретрагируется на свой 1-остов. С одной стороны, в силу 45.1, фундаментальной группой $\pi_1(X')$ является свободная группа ранга $f - 1$. С другой стороны, $\pi_1(X') \cong \pi_1(X_1)$, а ранг последней группы, в силу 45.B, равен $1 - \chi(X_1) = 1 - v + e$. Таким образом, $f - 1 = 1 - e + v$, откуда и следует, что $\chi(X) = v - e + f = 2$.

45.3 Следует из 45.2.

46.1 Фундаментальная группа сферы S^n при $n > 1$ тривиальна, поскольку существует ее клеточное разбиение, 1-остов которого состоит из одной точки.

46.2 Группа $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$ тривиальна по той же причине.

46.1x Выберем по точке x_0 и x_1 . В каждой из компонент связности множества C так, чтобы их можно было соединить двумя вложенными в одномерный остов X_1 отрезками $\bar{e}_A \subset A$ и $\bar{e}_B \subset B$, общими точками которых являются только точки x_0 и x_1 . Идея состоит в том, чтобы заменить все пространства на гомотопически им эквивалентные, так чтобы одномерным остовом пространства X была окружность, являю-

щаяся объединением отрезков \bar{e}_A и \bar{e}_B . Для этого можно использовать технику, примененную при решении задачи 44.Fx. Тогда фундаментальная группа одномерного остова полученного в результате пространства будет изоморфна \mathbf{Z} . Осталось заметить, что образом приклеивающего отображения двумерной клетки не может быть весь 1-остов, так как эта клетка лежит либо в A , либо в B , но никак не в них обоих. Значит, оно гомотопно постоянному отображению, и, следовательно, при приклеивании 2-клетки не возникает никаких соотношений.

46.2x Нет, так как в условиях теоремы 46.Ax сказано, что множества A и B являются открытыми, а в теореме 46-2x предполагается, что они - клеточные подпространства, которые лишь в исключительных случаях являются открытыми. С другой стороны, теорему 46.Cx можно вывести из 46.Ax, построив окрестности клеточных подпространств A , B и C , деформационно ретрагирующиеся на сами эти пространства.

46.3x Вообще говоря, нельзя (приведите пример).

46.4x. Проследим, как меняется фундаментальная группа, когда к одномерному остову пространства X приклеиваются его двумерные клетки. Будем считать, что нульмерный остов состоит из точки x_0 . На первом шаге к X_1 приклеивается двумерная клетка, пусть $\varphi : S^1 \rightarrow X_1$ - приклеивающее, а $\chi : D^2 \rightarrow X_2$ - характеристическое отображение этой клетки. Пусть $F \subset D^2$ замкнутый диск (к примеру, радиусом $\frac{1}{2}$), S - его граница, $A = \chi(D^2 \setminus \text{Int } F) \cup X_1$, $B = \chi(F)$, тогда $C = \chi(S) \cong S^1$. Ясно, что X_1 является (строгим) деформационным ретрактом множества A , поэтому группа $\pi_1(A) \cong \pi_1(X_1)$ - свободная группа с образующими α_i .

С другой стороны, множество $B \cong D^2$, поэтому оно односвязно. Отображение $\chi|_S$ гомотопно φ , следовательно, образом образующей группы $\pi_1(C)$ является класс $\rho = [\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ приклеивающего отображения данной клетки. Следовательно, в фундаментальной группе $\pi_1(X, x_0)$ имеется соотношение $\rho = 1$. При приклеивании клеток старшей размерности никаких новых соотношений в этой группе не возникает, так как в этом случае $C \cong S^k$ - односвязно пространство, поскольку $k > 1$. Из теоремы Зейферта-ван Кампена следует, что соотношениями $[\varphi_i] = 1$ исчерпываются все соотношения между стандартными образующими фундаментальной группы пространства.

46.5x Если $m \neq 0$, то фундаментальной группой является циклическая группа порядка $|m|$, если $m = 0$, то фундаментальная группа изоморфна \mathbf{Z} .

46.6x Эти пространства гомеоморфны, соответственно, $S^2 \times S^1$ и S^3 .

46.7x Вместо дополнения узла будем рассматривать дополнение некоторой его открытой окрестности U , гомеоморфной $\text{Int } D^2 \times S^1$, для которой узел K является её осевой линией. Нам будет удобнее считать, что все рассматриваемые множества лежат не в \mathbf{R}^3 , а в S^3 . Пусть $X = S^3 \setminus U$. Тор, на котором лежит данный узел, разбивает S^3 на два полнотория $G = D^2 \times S^1$ и $F = S^1 \times D^2$. Положим $A = G \setminus U$ и $B = F \setminus U$, тогда $X = A \cup B$, а $C = A \cap B$ представляет собой дополнение в торе открытой ленточки, являющейся окрестностью кривой, заданной на этом торе уравнением $pu = qv$, поэтому $\pi_1(C) \cong \pi_1(A) \cong \pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$. В силу теоремы Зейферта-ван Кампена фундаментальной группой $\pi_1(X)$ является группа $\{\alpha, \beta \mid i_*(\gamma) = j_*(\gamma)\}$, где i и j - включения C в A и B , соответственно. Петля в C , класс которой является образующей группы $\pi_1(C)$, p раз обходит тор вдоль его параллели и q раз вдоль меридиана, поэтому $i_*(\gamma) = a^p$ и $j_*(\gamma) = b^q$. Значит $\pi_1(X) = \{a, b \mid a^p = b^q\}$. Покажите, что $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ (не забудьте, что p и q взаимно просты).

46.8x (а) Следует непосредственно из теорем 46 (или теоремы 46. Cx).

(b) Так как множества $A = X \vee V_{y_0}$ и $B = U_{x_0} \vee Y$ образуют открытое покрытие пространства Z и их пересечение $A \cap B = U_{x_0} \vee V_{y_0}$ связно, то односвязность Z следует из результата задачи 34.11.

(c)* Пусть пространство $X \subset \mathbf{R}^3$ конус с вершиной в точке $(-1, 0, 1)$ над объединением окружностей, заданных в плоскости \mathbf{R}^2 уравнениями $x^2 + \frac{2x}{n} + y^2 = 0$, $n \in \mathbb{N}$,

а пространство Y симметрично X относительно оси Oz . Каждое из пространств X и Y очевидным образом стягиваемо, значит односвязно. Попробуйте доказать (это совсем непросто), что их объединение $X \cup Y$ не является односвязным.

46.9x Да, является.

46.10x. Бутылку Клейна можно представить как объединение двух лент Мёбиуса, склеенных по их границам - окружностям.

46.13x Проверьте, что класс матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет порядок 2, а класс матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ - порядок 3.

46.14x Разрежем тор (соответственно, бутылку Клейна) по окружности B так, чтобы в результате у нас получился цилиндр, который и будет пространством C . Обозначим через β образующую группы $\pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$, через α - образующую $\pi_1(C) \cong \mathbb{Z}$. В случае тора $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$, для

бутылки Клейна $\varphi_1 = \alpha = \varphi_2^{-1}$. Таким образом, в силу теоремы 46. *Fx* мы получаем задание фундаментальной группы тора $\langle \alpha, \gamma \mid \gamma\alpha = \alpha\gamma \rangle$ и бутылки Клейна $\langle \alpha, \gamma \mid \gamma\alpha = \alpha\gamma^{-1} \rangle$.

Литература

1. Аров Д. З. О топологическом подобии автоморфизмов к сдвигов компактных коммутативных групп. Успехи матем. наук, 1963, 18, №5(113), 133—138 (РЖМат, 1964, 9A290)
2. Архангельский А. В. О совпадении размерности $\dim Q$ и $\text{ind } G$ для локально бикompактных групп. Докл. АН СССР, 1960, 132, № 6, 980—981 (РЖМат, 1961, 6A371)
3. Богнар М. Вложение локально компактных топологических абелевых групп в евклидово пространство. Успехи матем. наук, 1960, 15, №3(93), 133—136 (РЖМат, 1961, 6A372)
4. Бурбаки Н. Общая топология. Гос. изд. физ.-матем. лит., М., 1958 (РЖМат, 1961, 7A400К)
5. Виленчик Н. Я. О диадичности группового пространства бикompактных абелевых групп. Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6 (84), 79—80 (РЖМат, 1961, 6A369)
6. Виноградов А. А. О выполнимости одного соотношения в Топологической группе. Алгебра и логика. Семинар, 1964, 3, № 3, 13—15 (РЖМат, 1965, 1A194)
7. Глушков В. М. Локально нильпотентные локально бикompактные групп-. пы/ Тр. Мой?, матем. о-ва, 1955, 4, 291—332 (РЖМат, 1956, 6419)
8. Гольберг П. А. Силовские базы топологических групп. Уч. зап. Коломенского пед. ин-та, 1956, 1, 5—9
9. Граев М. И. Теория топологических групп. Успехи матем. наук, 1950, б, № 2(3\$), 3—56
10. Зарелуа А. В. Равенство размерностей и бикompактные расширения. Докл. АН СССР, 1962, 144, № 4, 713—716 (РЖМат, 1964, 1A344)
11. Иванюта И. Д. О словских p -подгруппах топологической группы всех подстановок счетного множества. Укр. матем. ж., 1964, 16, № 5, 602—609 (РЖМат, 1965, 3A216)
12. Ивановский Л. Н. Об одной гипотезе П. С. Александрова. Докл. АН СССР, 1958, 123, № 5, 785—786 (РЖМат, 1959, .6714)
13. Кац Г. И. Изоморфное отображение топологических групп в прямое произведение групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6(58), 107—113 (РЖМат, 1954, 4749)
14. Кузьминов В. И. О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп. Доклады АН СССР, 1959, 125, № 4, 727—729 (РЖМат, 1960, 10032)

15. Курош А. Г. Силовские подгруппы нульмерных топологических групп. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1945, 9, 65—78
16. — Теория групп. ГИТТЛ, М., 1953 (РЖМат, 1954, 3091 К)
17. Мальцев А. И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. Матем. сб., 1951, 28 (70), 567—588
18. Пасынков Б. А. О полиэдральных спектрах и размерности бикомпактов, в частности бикомпактных групп. Докл. АН СССР, 1959, 121, № 1, 45—48 (РЖМат, 1959, 10927)
19. Пруткина Л. А. О группах, покрываемых двумя замкнутыми полугруппами. Матем. зап. Уральский ун-т, 1963, 4, № 1, 70—73 (РЖМат, 1963, 10A171.)
20. Рохлин В. А. Метрические свойства эндоморфизмов компактных коммутативных групп. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, 28, № 4, 867—874 (РЖМат, 1965, 4B567)
21. А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
22. О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. Задачи по топологии. Л.: ЛГУ, 1988.- 92 с.
23. А. Г. Курош. Теория групп. М.: Наука. 1967. 648 с.
44. У. Масси, Дж. Столлингс. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977.-344 с.
55. В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.- 488 с.
26. J. R. Munkres. Topology. Prentice Hall, Inc., 2000.
27. Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997. Раджараман Р.,
28. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1985;
29. Шварц А. С., Квантовая теория поля и топология, М., 1989;
30. Воловик Г. Е., Минеев В. П., Физика и топология, М., 1980;
31. Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С., Нелинейные волны намагнитченности. Динамические и топологические солитоны, К., 1983;
32. Додд Р. и др., Солитоны и нелинейные волновые уравнения, пер. с англ., М., 1988;
33. Makhankov V. G., Soliton phenomenology, Dordrecht-[a. o.], 1990;
34. Райдер Л., Квантовая теория поля, пер. с англ., М., 1987;
35. Рыбаков К). П., Устойчивость многомерных солитонов в киральных моделях и гравитации, в кн.: Итоги науки и техники, сер. Классическая теория поля и теория гравитации, т. 2, М., 1991;

□