



ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

# ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

**Том 27. Випуск 1-2(39-40). 2022**

Одеса  
«Астропринт»  
2022

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

*Редакційна колегія журналу*

Головний редактор — М. О. Перестюк, д. ф.-м. н., проф., акад. НАНУ (Україна)

Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, к. ф.-м. н., доц. (Україна)

A. Alifov, д. ф.-м. н., проф. (Азербайджан)

A. Ashyralyev, д. ф.-м. н., проф. (Туреччина)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)

F. Iacoviello, PhD, проф. (Італія)

I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)

С. К. Асланов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. Д. Варбанець, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)

A. A. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. І. Когут, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Ан. О. Кореновський, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Ф. Кривий, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Є. Круглов, к. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Меньшиков, д. ф.-м. н., проф. (Шотландія)

A. В. Плотніков, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. В. Реут, к. ф.-м. н., доц. (Україна)

Н. В. Скришник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

І. М. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

С. А. Щоголев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

*Відповідальний за випуск* — К. С. Бондаренко, магістр

*Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу*

*масової інформації серія КВ № 21400–11200ПР від*

*17 червня 2015 р.*

*Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами*

*Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р.*

*та № 775 від 16.07.2018 р.*

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE  
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES  
in MATHEMATICS  
and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

**Volume 27. Issue 1-2(39-40). 2022**

Odesa  
«Astroprint»  
2022

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

*Editorial board of the journal*

Editor-in-chief — M. O. Perestyuk, D.Sc., prof., academ. NANU (Ukraine)

Deputy Editor-in-chief — V. M. Evtukhov, D.Sc., prof. (Ukraine)

Executive Editor — O. D. Kichmarenko, PhD, docent (Ukraine)

A. Alifov, D.Sc., prof. (Azerbaijan)

A. Ashyralyev, D.Sc., prof. (Turkey)

S. K. Aslanov, D.Sc., prof. (Ukraine)

I. M. Cherevko, D.Sc., prof. (Ukraine)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., prof. (Germany)

D. V. Dmitrishin, D.Sc., prof. (Ukraine)

A. A. Dorogovtsev, D.Sc., prof. (Ukraine)

O. V. Kapustyan, D.Sc., prof. (Ukraine)

I. T. Kiguradze, D.Sc., prof. (Georgia)

P. I. Kogut, D.Sc., prof. (Ukraine)

An. O. Korenovskyi, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. Ye. Kruglov, PhD, prof. (Ukraine)

O. F. Kryvyi, D.Sc., prof. (Ukraine)

F. Iacoviello, D.Sc., prof. (Italy)

O. Menshykov, D.Sc., prof. (Scotland)

A. V. Plotnikov, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. G. Popov, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. V. Reut, PhD, docent (Ukraine)

S. A. Shchogolev, D.Sc., prof. (Ukraine)

N. V. Skripnik, D.Sc., docent (Ukraine)

O. M. Stanzhytskyi, D.Sc., prof. (Ukraine)

P. D. Varbanets, D.Sc., prof. (Ukraine)

N. D. Vaysfeld, D.Sc., prof. (Ukraine)

*Publication Editor* — K. S. Bondarenko, master

*The certificate of mass media state registration under  
the number № 21400–11200IIP issued on June 17, 2015.*

*The journal was included in the list of scientific specialized  
publications by the orders of Ministry of education and  
science of Ukraine №527 issued on May 24, 2018 and  
№ 775 issued on July 16, 2018.*

## ЗМІСТ

### МАТЕМАТИКА

<i>Григор'єв Ю. О.</i> Метод Ньютона та його візуалізація . . . . .	7
<i>Євтухов В. М., Голубєв С. В.</i> Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь з експоненціальною нелінійністю . . . . .	25
<i>Карпетров В. В.</i> Асимптотичні зображення розв'язків одного виду диференціальних рівнянь $n$ -го порядку . . . . .	40
<i>Латвиш. А.О.</i> Усереднення в лінійних за керуванням задачах оптимального керування системами в дискретному часі із змінним запізненням . . . . .	48
<i>Самкова Г.Є., Ліманська Д.Є.</i> Деякі системи звичайних диференціальних рівнянь з прямокутними матрицями, які частково розв'язані відносно похідних, навколо полюса. . . . .	66
<i>Чепок О. О.</i> Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння другого порядку, яке містить добуток різного типу нелінійностей від невідомої функції та її похідної . . . . .	83
<i>Шарай Н.В., Шинкаренко В.М.</i> Асимптотичне зображення деяких класів розв'язків диференціального рівняння третього порядку . . . . .	96
<i>Якімова Н.А., Клішин М.Є.</i> Матричне подання операцій над графами . . . . .	111
<i>Belozerov G. S., Vorobiova A. V.</i> On numbers of the form $n = (u^2 + dv^2)w$ in arithmetic progression . . . . .	132
<i>Fesenko A. A. Bondarenko K. S.</i> The dynamical problem on acting distributed load on the elastic layer . . . . .	145
<i>Kusik L. I.</i> Necessary existence conditions of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions of second - order differential equation with rapidly varying nonlinearity	160

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<i>Hryhoriev Yu.</i> Newton’s method and its visualization . . . . .	7
<i>Evtukhov V. M., Golubev S. V.</i> Asymptotic behaviour of solutions of one class of the fourth-order nonlinear differential equations . . . . .	25
<i>Karapetrov V. V.</i> Asymptotic representations of the solutions of some type $n$ -th order differential equations . . . . .	40
<i>Latysh A.</i> An averaging in linear by control optimal control problem on discret time with variable delay . . . . .	48
<i>Samkova G., Limanska D.</i> The system of ordinary differential questions with rectangular matrices that is partially solved to the derivatives near the pole. . . . .	66
<i>Chepok O.O.</i> Asymptotic representations of the $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the second order differential equation, which contains the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its derivative . . . . .	83
<i>Sharai N.V., Shinkarenko V.M.</i> Asymptotic representation of some classes of solutions third-order differential equation . . . . .	96
<i>Yakimova N.A., Klishyn M.E.</i> Matrix representation of operations on graphs . . . . .	111
<i>Belozеров G. S., Vorobiova A. V.</i> On numbers of the form $n = (u^2 + dv^2)w$ in arithmetic progression . . . . .	132
<i>Fesenko A. A. Bondarenko K. S.</i> The dynamical problem on acting distributed load on the elastic layer . . . . .	145
<i>Kusik L. I.</i> Necessary existence conditions of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions of second - order differential equation with rapidly varying nonliniarilty	160

УДК 519.6

**Ю. О. Григор'єв**

Одеський національний морський університет

## МЕТОД НЬЮТОНА ТА ЙОГО ВІЗУАЛІЗАЦІЯ

Актуальність роботи. Математичне модулювання в різних галузях науки і техніки часто приводить до нелінійних рівнянь або систем таких рівнянь. Далеко не завжди ці рівняння можна розв'язати точними методами. Частіше доводиться застосовувати наближені методи. Одним із самих популярних серед них є метод Ньютона. У сучасних роботах метод Ньютона часто служить основою для розробки нових наближених методів, які прискорюють збіжність ітераційних процесів або застосовують для розв'язання систем великих порядків.

Мета роботи. Візуалізувати роботу алгоритму розв'язання рівняння, а також системи рівнянь за методом Ньютона, щоб результати цієї роботи можна було б використовувати при складанні електронних підручників з вивчення даного методу. Іншою метою є дослідження методу у разі, коли система має декілька розв'язків; вивчити можливість застосування методу для рівнянь з нескінченною кількістю розв'язків.

MSC: 65H05, 65H10.

Ключові слова: нелінійне рівняння, система нелінійних рівнянь, похідна, матриця Якобі, метод Ньютона.

DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).285581

### Вступ

У даній роботі розглядається метод Ньютона [1] наближеного розв'язання рівняння

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Якщо рівняння містить лише одну змінну  $x$ , то наближені значення  $x_i$  кореня  $x^*$  обчислюють за формулою

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Тут  $x_0$  - початкове значення шуканого кореня. Метод Ньютона узагальнюють і для рівнянь у багатовимірних просторах:  $f: R^n \rightarrow R^m$ . Для цього у формулі (1) похідну  $f'(x_{i-1})$  замінюють матрицею Якобі, а ділення – оберненою матрицею. В цьому випадку формула набуває вигляду:

$$x_i = x_{i-1} - (f'(x_{i-1}))^{-1} f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$



Метод Ньютона часто використовують у прикладних задачах при розв'язанні нелінійних рівнянь [2–6], а також цей метод часто служить основою для розробки нових наближених методів, які прискорюють збіжність ітераційних процесів або застосовують для розв'язання систем великих порядків. Так, для розв'язання систем  $n$  нелінійних рівнянь з  $n$  невідомими для великих значень  $n$  в роботі [7] запропоновано новий метод розв'язання з використанням блочних матриць Якобі. Метод Ньютона має квадратичний порядок збіжності. Для підвищення його порядку розроблено більше 200 різних багатокрокових ітераційних методів [8]. Звичайно метод Ньютона застосовують у випадках, коли матриця Якобі є квадратною, а визначник цієї матриці відмінний від нуля. У роботах [9–11] метод був узагальнений на випадок  $m \neq n$ . В роботі [9] було запропоновано обидві частини матричного рівняння (1) помножити на матрицю, що спряжена до якобіана. Таким чином, знаходився псевдорозв'язок рівняння (1). У роботах [10; 11] якобіан прямокутної форми подавався у вигляді добутку трьох матриць:

$$f'(x_{i-1}) = R_{i-1} J_{\sigma} S_{i-1},$$

де  $R_{i-1}$  та  $S_{i-1}$  - невироджені матриці, а

$$J_{\sigma} = \begin{pmatrix} I_{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тут  $\sigma$  - ранг матриця Якобі. Обернена матриця  $(f'(x_{i-1}))^{-1}$  замінювалась напівоберненою матрицею

$$J_{i-1}^{-} = S_{i-1}^{-1} J_{\sigma}^* R_{i-1}^{-1},$$

де  $J_{\sigma}^*$  - спряжена матриця. В результаті ітераційна схема прийняла вигляд:

$$x_i = x_{i-1} - J_{i-1}^{-} f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots$$

В роботах [9; 11] одержано деякі достатні умови збіжності цього ітераційного процесу до точного розв'язку рівняння (1).

У даній роботі у випадках якобіана прямокутної форми підбирались матриці, що є обернені до матриць Якобі з правої сторони. Першою метою роботи є візуалізація роботи алгоритму для того, щоб результати можна

було б використовувати при складанні електронних підручників, наприклад, в книгах системи дистанційного навчання moodle. На мові програмування Python складено код реалізації цього методу та складено код для його візуалізації, тобто для отримання анімації роботи алгоритму. Другою метою є дослідження роботи алгоритму у випадках коли рівняння (або система рівнянь) має декілька розв'язків чи безліч розв'язків. В усіх випадках роботу алгоритму наочно було продемонстровано на рисунках.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

### 1. Метод Ньютона для рівняння з однією змінною

У цьому розділі розглянемо метод Ньютона наближеного розв'язання рівняння (1) з однією змінною. Розрахункова формула наближеного розв'язання цього рівняння має вигляд (2), де  $x_i$  – наближені значення шуканого кореня  $x^*$ ,  $x_0$  – його початкове значення. Для візуалізації роботи методу Ньютона розв'язання рівняння (1) ми взяли функцію

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

та початкову точку  $x_0 = 3$ . На рис. 1 зображено графік функції та ламану, що ілюструє роботу алгоритму Ньютона.

Анімацію роботи алгоритму Ньютона ми створили на мові Python, включивши інтерактивний режим відображення графіків, застосувавши команду `plt.ion()`. Виключається режим командою `plt.ioff()`. Для оновлення даних використовуємо команди

```
plt.draw()
```

```
plt.gcf().canvas.flush_events()
```

із затримкою 0.001 секунд:

```
time.sleep(0.001)
```

На рис. 2 представлено фрагмент коду.

Тут цикл ведеться від 0 до 46 з кроком 0.1.

При  $i = 0$  вимальовується точка  $x_0$  на рис. 1 (команди 64, 65).

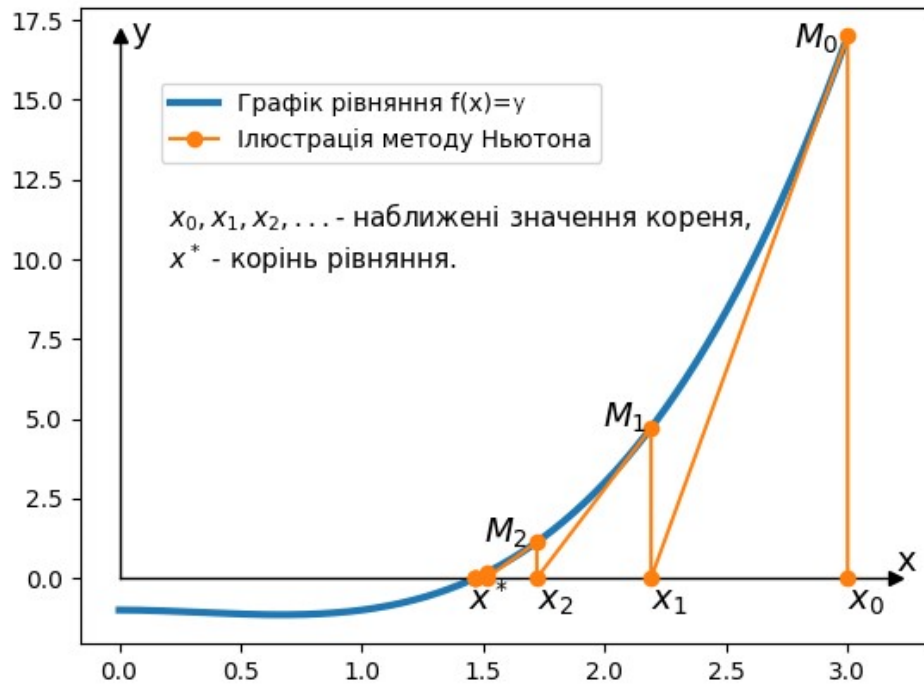


Рис. 1: Візуалізація роботи алгоритму Ньютона

При  $0 < i < 17$  вимальовуються відрізок  $x_0M_0$  (команди 66 - 69). Цей відрізок розбивається на частини довжини 0.1 і вимальовується кожна частина цього відрізка.

При  $i = 17$  вимальовується точка  $M_0$  (команди 70 -72).

При  $17 < i < 34$  вимальовуються кусочки відрізка  $M_0x_1$  (команди 73 - 79). Для цього ми побудували вектор  $\overline{M_0x_1}$  за координатами точок  $M_0$  та  $x_1$ , поділили на його довжину та отримали одиничний напрямний вектор  $\bar{e}_1$  відрізка  $M_0x_1$ . Координати цього вектора ми позначили через  $e1[0]$  та  $e1[1]$ :

$$\bar{e}_1 (e1[0], e1[1]).$$

На шляху  $M_0x_1$  вимальовуємо першу ділянку  $M_0P$  довжини 0.1. Щоб отримати координати точки  $P$  користуємось векторною рівністю

$$\overline{OP} = \overline{OM_0} + 0.1\bar{e}_1,$$

де  $O$  – початок координат. Оскільки над векторами виконуються лінійні

дії, то такі самі дії справедливі і для координат цих векторів:

$$x_p = x_0 + 0.1e1[0], \quad y_p = y_0 + 0.1e1[1],$$

де  $x_p, y_p$  — координати точки  $P$ ,  $x_0, y_0$  - координати точки  $M_0$ . Аналогічно вимальовуємо інші ділянки відрізка  $M_0x_1$ . В коді це реалізовано командами 76 та 78. Так само вимальовуємо решту відрізків ламаної, що зображена на рис. 1.

```

63 for i in np.arange(0,46,0.1):
64     if i==0:
65         plt.plot(x[0],0,'o',color='orange',linewidth=4)
66     if i<17:
67         yp[0]=i
68         yp[1]=i+0.1
69         plt.plot(xp,yp,color='orange',linewidth=2)
70     if i==17:
71         line3.set_data(x[0],y[0])
72         plt.text(x[0]-0.22,y[0]-0.4,'$M_0$',fontsize=14)
73         yp[1]=y[0]
74     if i>17 and i<34:
75         xp[0]=xp[1]
76         xp[1]=xp[0]+0.1*e1[0]
77         yp[0]=yp[1]
78         yp[1]=yp[0]+0.1*e1[1]
79         plt.plot(xp,yp,color='orange',linewidth=2)

```

Рис. 2: Фрагмент коду створення анімації

Повністю код отримання анімації можна переглянути за посиланням <https://bit.ly/43fX85B>

Тут була використана програма написана на мові Python версії 3.10.5 та бібліотеки `time`, `numpy`, `matplotlib.pyplot`. Результат роботи алгоритму у форматі GIF можна переглянути за наступним посиланням:

<https://bit.ly/3PJrNr3>

## 2. Метод Ньютона для системи рівнянь.

У цьому пункті розглянемо метод Ньютона для системи рівнянь. Якщо рівняння (1) задає систему рівнянь, то формулу (2) слід замінити формулою (3). Тут  $f'(x)$  — похідна Фреше (для багатовимірних просторів вона являє собою матрицю Якобі, що складається із частинних похідних функцій заданої системи),  $(f'(x))^{-1}$  — обернена матриця.

Приклад. За методом Ньютона розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 9.1 = 0, \\ x^2 + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Позначимо

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x^3 + y^2 - 9.1 \\ x^2 + y - 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix},$$

$(f'(x))^{-1}$  – обернена матриця. Зауважимо, що обернена матриця існує, якщо визначник  $|f'(x)|$  відмінний від нуля, тобто

$$3x^2 - 4xy \neq 0.$$

Значить, обернена матриця не існує на прямих  $x = 0$  та  $3x - 4y = 0$ . На цих прямих не можна брати початкові точки  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  для знаходження розв'язків системи за методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 5$ . При  $i = 0$  будемо мати

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f(x_0) = \begin{pmatrix} 42.9 \\ 9 \end{pmatrix}, \\ f'(x_0) = \begin{pmatrix} 27 & 10 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 6 & -27 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення кореня

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 6 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42.9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57273 \\ 4.56364 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, підставляючи у формулу (3)  $x_1$  замість  $x_0$ , знайдемо  $x_2$  – друге наближення кореня. Продовжуючи процес так далі, знайдемо на шостому кроці розв'язок системи

$$x_6 = 1.753, \quad y_6 = 1.927$$

з похибкою  $r = |f(x_6, y_6)| = 2.4 \cdot 10^{-5}$ .

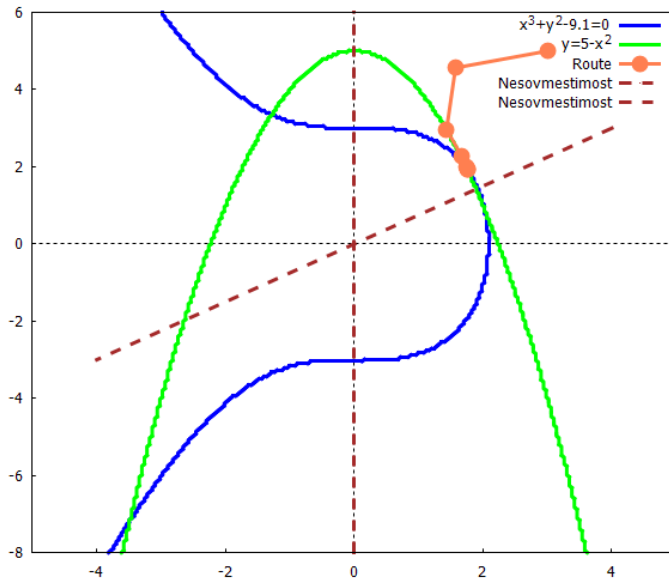


Рис. 3: Маршрут наближення від початкової точки  $(3,5)$

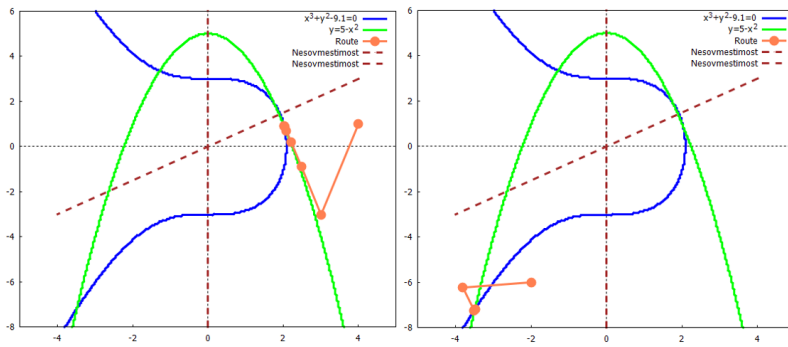


Рис. 4: Маршрути наближень від початкових точок  $(4,1)$  і  $(-2,-6)$

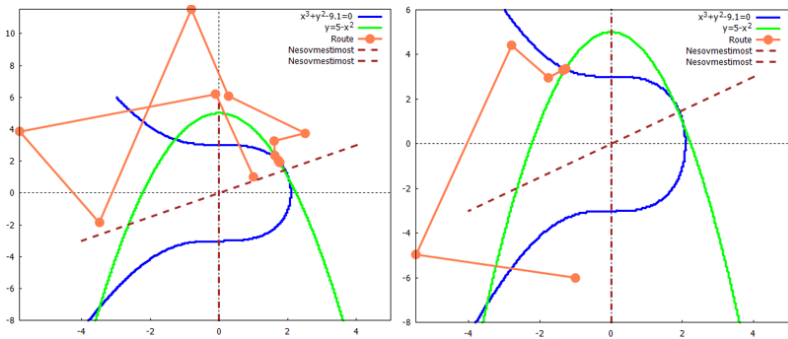


Рис. 5: Маршрути наближень від початкових точок  $(1,1)$  і  $(-1,-6)$

На рис. 3 зображено графіки заданих рівнянь, маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = 3, y_0 = 5$  до розв'язку системи  $x_6 = 1.753, y_6 = 1.927$  (червона ламана), а також лінії, на яких не можна брати початкові точки (штрихові лінії).

На рис. 3 видно, що система рівнянь має чотири розв'язки. Взяти за початкову точку  $x_0 = 3, y_0 = 5$ , ми знайшли найближчий до цієї точки розв'язок. Взяти другу початкову точку  $x_0 = 4, y_0 = 1$ , знайдемо другий розв'язок  $x_7 = 2.022, y_7 = 0.9097$  (рис. 4 ліворуч). Взяти третю початкову точку  $x_0 = -2, y_0 = -6$ , знайдемо третій розв'язок  $x_4 = -3.491, y_4 = -7.186$  (рис. 4 праворуч). Взяти четверту початкову точку  $x_0 = -4, y_0 = 1$ , знайдемо четвертий розв'язок  $x_5 = -1.285, y_5 = 3.35$ . В розглянутих вище чотирьох випадках метод Ньютона приводив до розв'язку, найближче розташованому до вибраної початкової точки. Але, якщо початкова точка взята близько до лінії, де не можна брати початкові точки, то маршрут стає непередбачуваним і може привести не до найближчого розв'язку системи (рис. 5). На рис. 5 ліворуч за початкову точку було взято  $x_0 = 1, y_0 = 1$ , а праворуч за початкову точку було взято  $x_0 = -1, y_0 = -6$ . На правому рисунку друге наближення до кореня знаходиться неподалеку від лінії, де не можна брати початкових точок.

### 3. Наближення до еліпса.

У попередньому пункті ми розв'язали систему двох рівнянь з двома невідомими, яка мала чотири розв'язки. Цікаво, як буде вести себе метод Ньютона у випадку, коли рівняння має безліч розв'язків? У даному пункті ми розглянемо рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

при  $a = 5, b = 3$ . Коренями цього рівняння є всі точки еліпса. Знайдемо один із цих коренів, користуючись методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0 = 6, y_0 = 5$ . Позначимо

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Тоді

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Тут обернених матриць  $(f'(x))^{-1}$  у звичайному розумінні не існує. Але існує (і не одна) матриця, що є оберненою до отриманої матриці з правої сторони. У якості такої візьмемо

$$(f'(x))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2x} \\ \frac{b^2}{2y} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на координатних осях  $x = 0$  та  $y = 0$ . На цих осях не можна брати початкових точок.

У вибраній початковій точці  $x_0 = 6$ ,  $y_0 = 5$  отримуємо

$$x_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f(x_0) = \frac{36}{25} + \frac{25}{9} - 1 = \frac{724}{225} = 3.218, \quad (f'(x_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1.042 \\ 0.45 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона

$$x_1 = x_0 - (f'(x_0))^{-1} f(x_0)$$

знайдемо перше наближення

$$x_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.042 \\ 0.45 \end{pmatrix} 3.218 = \begin{pmatrix} 2.647 \\ 3.552 \end{pmatrix}.$$

На сьомому кроці отримуємо один із коренів рівняння:

$$x_7 = -0.122, \quad y_7 = 3.0$$

з похибкою  $f(x_7, y_7) = 3.8 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 6, що ліворуч, зображено графік еліпса та маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = 6$ ,  $y_0 = 5$  до наближеного розв'язку рівняння  $x_7 = -0.122$ ,  $y_7 = 3.0$  (червона ламана).

Якщо за початкову точку візьмемо  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ , то дійдемо до іншого кореня рівняння  $x_4 = 4.442$ ,  $y_4 = 1.377$  (рис. 6, що праворуч).

#### 4. Наближення до параболи.

У даному пункті ми розглянемо рівняння параболи

$$x^2 - y = 0.$$

Коренями цього рівняння є всі точки параболи. Знайдемо один із цих коренів, користуючись методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 7$ . Позначимо

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - y.$$



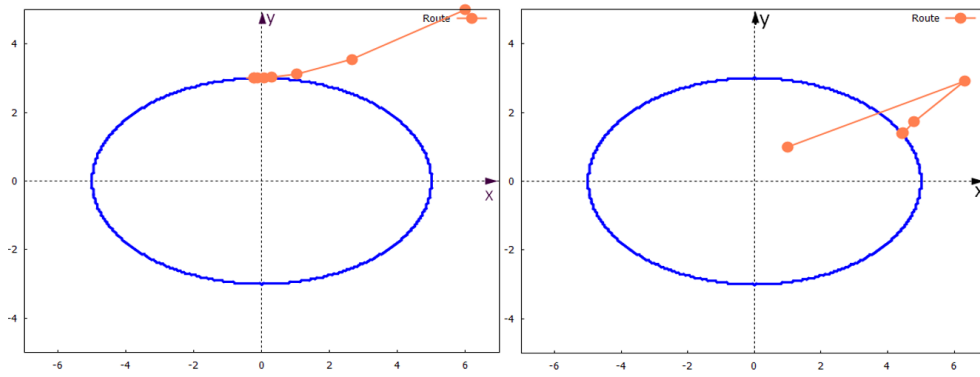


Рис. 6: Маршрути наближень від початкових точок (6,5) і (1,1)

Тоді

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \end{pmatrix}.$$

У якості оберненої з правої сторони візьмемо матрицю

$$(f'(x))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на прямій  $x = 0$ . На цій прямій не можна брати початкових точок.

У вибраній початковій точці  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 7$  отримаємо

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad f(x_0) = 1 - 7 = -6, \quad (f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \end{pmatrix} (-6) = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

На 3-му кроці ми отримали один із коренів рівняння:

$$x_3 = -2.269, \quad y_3 = 5.150$$

з похибкою  $f(x_3, y_3) = 3 \cdot 10^{-5}$ .

На рис. 7, що ліворуч, зображуємо графік параболи та маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 7$  до наближеного розв'язку рівняння  $x_3 = -2.269$ ,  $y_3 = 5.150$  (червона ламана).

Якщо за початкову точку візьмемо  $x_0 = 3, y_0 = 1$ , то дійдемо до іншого кореня рівняння  $x_3 = 2.285, y_3 = 5.223$  (рис. 7, що праворуч) з похибкою  $f(x_3, y_3) = 6 \cdot 10^{-8}$ .

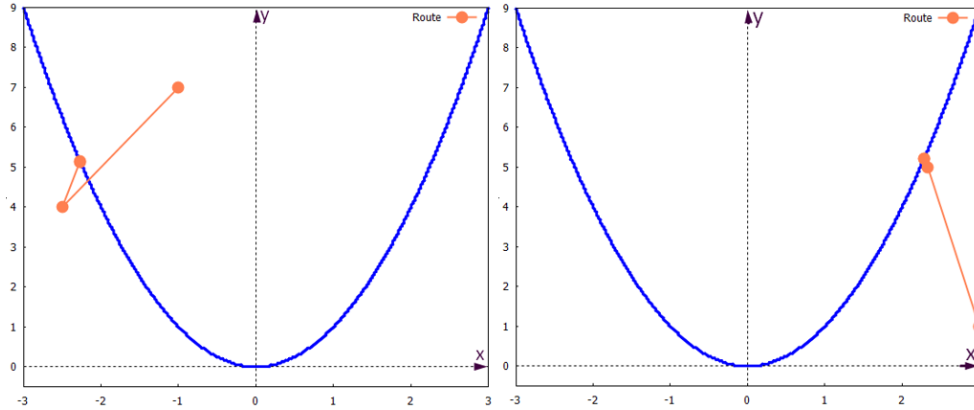


Рис. 7: Маршрути наближень від початкових точок  $(-1,7)$  і  $(3,1)$

### 5. Наближення до еліпсоїда.

У даному пункті ми розглянемо рівняння еліпсоїда

$$4x^2 - 2xy + 3y^2 + 2yz + 2z^2 - x + y - z = 0.$$

Коренями цього рівняння є всі точки еліпсоїда. Знайдемо один із цих коренів, користуючись методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 1$ . Позначимо

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}) = 4x^2 - 2xy + 3y^2 + 2yz + 2z^2 - x + y - z.$$

Тоді

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8x - 2y - 1 & -2x + 6y + 2z + 1 & 2y + 4z - 1 \end{pmatrix}.$$

У якості оберненої з правої сторони візьмемо матрицю

$$(f'(\mathbf{x}))^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{8x-2y-1} \\ -2x+6y+2z+1 \\ \frac{1}{2y+4z-1} \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на площинах

$$8x - 2y - 1 = 0, \quad -2x + 6y + 2z + 1 = 0, \quad 2y + 4z - 1 = 0.$$

На цих площинах не можна брати початкових точок. У вибраній початковій точці  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 1$  отримаємо

$$(f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{1}{9} \approx 0.111, \quad y_1 = -\frac{1}{9} \approx -0.111, \quad z_1 = \frac{8}{9} \approx 0.889.$$

На четвертому кроці ми отримали один із коренів рівняння:

$$x_4 = 0.194, \quad y_4 = -0.324, \quad z_4 = 0.777$$

з похибкою  $f(x_4, y_4, z_4) = 7 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 8 зображуємо графік еліпсоїда та маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 1$  до наближеного розв'язку рівняння  $x_4 = 0.194$ ,  $y_4 = -0.324$ ,  $z_4 = 0.777$  (червона ламана).

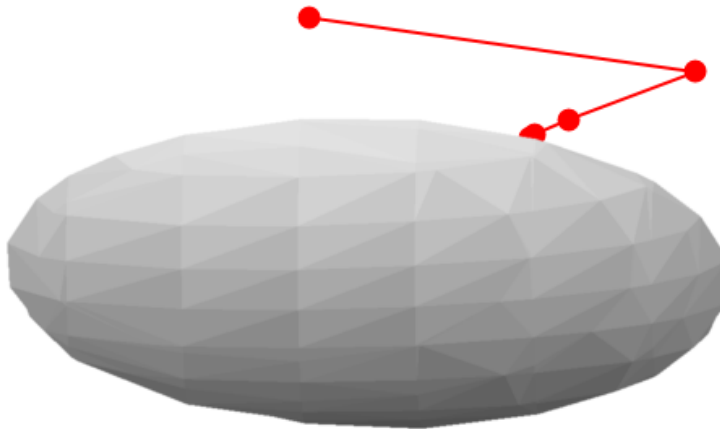


Рис. 8: Маршрут наближення від початкової точки  $(0,0,1)$

**6. Метод Ньютона для невизначеної системи.**

У даному розділі застосуємо метод Ньютона до наступної системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що ця система має безліч розв'язків. Всі розв'язки системи лежать на лінії перетину параболоїда з площиною. Знайдемо деякі з цих розв'язків.

Позначимо

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z \\ y + z - 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У якості оберненої з правої сторони візьмемо

$$(f'(\mathbf{x}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2y+1} \\ 0 & \frac{2y}{2y+1} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на площинах  $x = 0$  та  $2y + 1 = 0$ . На цих площинах не можна брати початкові точки. За початкову точку візьмемо  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 3$ . Отримаємо

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$(f'(\mathbf{x}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad y_1 = \frac{1}{3} \approx 0.333, \quad z_1 = \frac{5}{3} \approx 1.667.$$

На третьому кроці ми отримали один із коренів системи:

$$x_3 = 1.247, \quad y_3 = 0.333, \quad z_3 = 1.667$$

з похибкою  $|f(x_4, y_4, z_4)| = 4 \cdot 10^{-4}$ .

Якщо за початкову точку візьмемо  $x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 3$ , то на третьому кроці отримаємо наступний корінь системи:

$$x_3 = 0.829, \quad y_3 = -1.75, \quad z_3 = 3.75$$

з похибкою  $|f(x_4, y_4, z_4)| = 4 \cdot 10^{-6}$ .

Взявши за початкову точку  $x_0 = 0.5, y_0 = -2, z_0 = 5$ , то за чотири кроки прийдемо до наступного кореня системи:

$$x_4 = 0.943, \quad y_4 = -1.667, \quad z_4 = 3.667$$

з похибкою  $|f(x_4, y_4, z_4)| = 5 \cdot 10^{-7}$ .

Якщо ж початкову точку взяти подалі від розв'язків системи, наприклад,  $x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 2$ , то отримаємо розбіжну послідовність точок.

## Висновки

Робота присвячена дослідженню та візуалізації методу Ньютона наближеного розв'язання рівнянь виду (1), де

$$f : R^n \rightarrow R^m.$$

У розділі 1 розглянуто приклад наближеного розв'язання за методом Ньютона одного рівняння з однією змінною. На мові програмування Python складено код розв'язання цього прикладу. В результаті отримано файл у форматі gif, який наочно демонструє роботу алгоритму.

У розділах 2 – 6 роботу методу Ньютона було досліджено на випадок, коли рівняння (чи система рівнянь) має декілька розв'язків або безліч розв'язків. На прикладах було продемонстровано, що метод Ньютона працює і тоді, коли рівняння або система рівнянь мають навіть безліч розв'язків. В цих випадках у звичайному розумінні не існує матриць, обернених до матриць Якобі. Але існує багато матриць, обернених з правої сторони. Питання: яку з них краще вибрати потребує подальшого теоретичного дослідження. В роботі праві обернені матриці ми підбирали навмання. Ця частина роботи була виконана в системі комп'ютерної математики wxMaxima. Результати наочно представлено на графіках.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Андруник В. А.** Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник / В.А. Андруник, В.А. Висоцька, В.В. Пасічник, Л. Б. Чирун, Л. В. Чирун. – Львів: Видавництво «Новий світ – 2000», 2020. – 470 с.
2. **Boichuk A. A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – 2th ed. Berlin, Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
3. **Чуйко С. М.** Про узагальнення теореми Ньютона-Канторовича у банаховому просторі / С. М. Чуйко // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2018. – № 6. – С. 22–31.
4. **Chuiko S. M.** Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case / S. M. Chuiko, I. A. Boichuk // Nonlinear Oscillations.– 2009. – Vol.12, No. 3. –P. 417–428.
5. **Chuiko S. M.** On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton–Kantorovich method / S. M. Chuiko, I. A. Boichuk, O. E. Pirus // J. Math. Sci. – 2013. – Vol. 189, No. 5. – P. 867–881.
6. **Chuiko S. M.** On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method / S. M. Chuiko, O. E. Pirus // J. Math. Sci. – 2013. – Vol. 191, No. 3. – P. 449–463.
7. **Хіміч О. М.** Гібридний алгоритм методу Ньютона для розв'язування систем нелінійних рівнянь з блочними матрицями / О. М. Хіміч, В. А. Сидорук, А. Н. Нестеренко // Проблеми програмування. – 2020. – № 2-3. – С. 208 – 217.
8. **Petkovic M. S.** Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations / M. S. Petkovic. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 344 p.

9. **Ben-Israel A.** A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations / A. Ben-Israel // J. Math. Anal. Appl. – 1966. – Vol. 15. – P. 243–252.
10. **Chuiko S. M.** To The generalization of the Newton-Kantorovich theorem / S. M. Chuiko // Вісн. Харків. нац. ун-ту. ім. В.Н. Каразіна. Сер. матем., прикл. матем. і механіка. – 2017. – Т. 85. № 1. – С. 62–68.
11. **Чуйко С.М.** Обобщение метода Ньютона–Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений / С. М. Чуйко // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2020. – № 3. – С. 3–9.

*Hryhoriev Yu.*

NEWTON'S METHOD AND ITS VISUALIZATION

*Summary*

Relevance of work. Mathematical modulation in various fields of science and technology often leads to nonlinear equations or systems of such equations. Far from always, these equations can be solved by exact methods. More often it is necessary to use approximate methods. One of the most popular of them is Newton's method. In modern works, Newton's method often serves as the basis for the development of new approximate methods that accelerate the convergence of iterative processes or are used to solve systems of large orders. The goal of the work. Visualize the work of the algorithm for solving the equation, as well as the system of equations according to Newton's method, so that the results of this work could be used when compiling electronic textbooks on the study of this method. Another goal is to study the method in the case when the system has several solutions; to study the possibility of using the method for equations with an infinite number of solutions.

*Key words: nonlinear equation, system of nonlinear equations, derivative, Jacobi matrix, Newton's method.*

**REFERENCES**

1. Andrunyk, V. A., Vysotska, V. A., Pasichnyk, V.V., Chyrun, L. B., Chyrun, L. V. (2020). *Chyselni metody v komp'uternykh naukakh: navchalnyi posibnyk [Numerical methods in computer science: a study guide]*. Lviv: Vydavnytstvo «Novyi svit – 2000», 470 p.
2. Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. 2th ed. Berlin, Boston: De Gruyter, 298 p.
3. Chuiko, S. M. (2018). Pro uzaghalnennya teoremy Niutona-Kantorovicha u banakhovomu prostori [A generalization of the Newton–Kantorovich theorem in a Banach space]. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 6, P. 22–31.
4. Chuiko, S. M., Boichuk, I. A. (2009). Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations*, Vol. 12, No. 3, P. 417 – 428.
5. Chuiko, S. M., Boichuk, I. A., Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton–Kantorovich method. *J. Math. Sci.*, Vol. 189, No. 5, P. 867–881.
6. Chuiko, S. M., Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. *J. Math. Sci.*, Vol. 191, No. 3, P. 449–463.



7. Khimich, A. N., Sidoruk, V. A., Nesterenko, A. N. (2020). Hibrydnyi alhorytm metodu Niutona dlia rozviazuvannia system neliniinykh rivnian z blochnymy matrytsiamy [Hybrid algorithm Newton method for solving systems of nonlinear equations with block Jacobi matrix]. *Programming problems*, No. 2-3, P. 208–217.
8. Petkovic M. S. (2013). *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*. Amsterdam: Elsevier, 344 p.
9. Ben-Israel A. (1966). A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations. *J. Math. Anal. Appl*, Vol. 15, P. 243–252.
10. Chuiko S.M. (2017). To The generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visn. Kharkiv. nats. un-tu. im. V.N. Karazina. Ser. matem., prykl. matem. i mekhanika*. Vol. 85. No. 1, P. 62–68.
11. Chuiko S. M. (2020). Obobschenie metoda Nyutona–Kantorovicha dlya sistem nelineynykh veschestvennykh uravneniy [A generalization of the Newton-Kantorovich method for systems of nonlinear real equations]. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, P. 3–9.

УДК 517.925

**В. М. Євтухов, С. В. Голубєв**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## **АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ**

Для двочленого неавтономного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку з експоненціальною нелінійністю та неперервним і відмінним від нуля у деякому лівому околі  $\omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) коефіцієнтом  $p(t)$  досліджується асимптотична поведінка при  $t \uparrow \omega$  одного з можливих типів  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків. Спочатку з використанням апріорних асимптотичних властивостей розглядаємих  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків встановлюються необхідні умови їх існування, а також асимптотичні зображення цих розв'язків та їх похідних до третього порядку включно. Питання про фактичне існування розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями вирішується шляхом його зведення до питання про існування зникаючих в особливій точці розв'язків у системи квазілінійних диференціальних рівнянь, до якої рівняння зводиться за допомогою деяких перетворень, що визначаються з урахуванням виду встановлених асимптотичних зображень. При цьому також вирішується і питання про кількість розв'язків рівняння зі знайденими асимптотичними зображеннями

*MSC: 34E05.*

*Ключові слова: неавтономні диференціальні рівняння, експоненціальна нелінійність,  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язки, асимптотична поведінка  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків.*

*DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).293952*

### **Вступ**

Після розробки методів дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь другого та третього порядку зі степеневими та правильно змінними нелінійностями проявився зацікавленість дослідників до встановлення асимптотики розв'язків двочлених неавтономних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку зі швидко змінною нелінійністю виду

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y),$$

де  $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  – неперервна функція,  $a < \omega \leq +\infty$  та  $\varphi : \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$  – двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\varphi'(y) \neq 0, y \in \Delta_{Y_0}, \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \text{ саме} \end{cases} \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1,$$

$Y_0$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ ,  $\Delta_{Y_0}$  – однобічний окіл  $Y_0$ .

Важливим окремим випадком таких рівнянь є рівняння з експоненціальною нелінійністю. Для цих рівнянь в роботах Євтухова В.М., Дрік Н.Г.[1], Євтухова В.М., Шинкаренко В.М.[2], Євтухова В.М., Харьковова В.М.[3] були розроблені методи дослідження асимптотичної поведінки класу розв’язків, які визначаються через експоненціальну нелінійність, що не зовсім є природним. Найбільш природним представляється встановлення асимптотичних властивостей тих розв’язків, які досліджувалися раніше при розгляді диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями, а саме, так званих,  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв’язків (див., наприклад, роботу [4]).

**Означення 1** ([5]). Розв’язок  $y$  вказаного диференціального рівняння  $n$ -порядку називається  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв’язком, де  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , якщо він визначений на проміжку  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  і задовольняє наступні умови

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)} = \lambda_0.$$

В даній роботі розглядається двочлене неавтономне диференціальне рівняння четвертого порядку виду

$$y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y} \quad (\sigma \neq 0), \quad (1)$$

де  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p_0 : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  – неперервна, або неперервно диференційовна функція,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $r : [a, \omega[ \rightarrow ]-1, +\infty[$  – неперервна функція така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0. \quad (2)$$

В цьому рівнянні функція  $\varphi(y) = e^{\sigma y}$  ( $\sigma \neq 0$ ) є швидко змінною функцією тільки при  $y \rightarrow Y_0 = \pm\infty$ . При цьому у якості околів  $\Delta_{Y_0}$  точок  $Y_0 = \pm\infty$  можемо обирати проміжки

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases} ]0, +\infty[, & \text{якщо } Y_0 = +\infty, \\ ]-\infty, 0[, & \text{якщо } Y_0 = -\infty, \end{cases} \quad (3)$$

Таким чином, для рівняння (1) отримуємо наступне

**Означення 2.** Розв'язок  $y$  диференціального рівняння (1) називається  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язком, де  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , якщо він визначений на проміжку  $[t_0, \omega[$   $[a, \omega[$  і задовольняє наступні умови

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0 = \pm\infty, \quad (4)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(3)}(t)]^2}{y^{(2)}(t)y^{(4)}(t)} = \lambda_0. \quad (5)$$

З цього означення, зокрема, випливає, що число

$$\nu_0 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_0 = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } Y_0 = -\infty. \end{cases} \quad (6)$$

визначає знаки будь-якого  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язку і його першої похідної в деякому лівому околі  $\omega$ .

Метою роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у диференціального рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків у випадку, коли  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$  (не особливий випадок), а також асимптотичних зображень при  $t \uparrow \omega$  для таких розв'язків та їх похідних до третього порядку включно із визначенням їх кількості.

Вибір у даному дослідженні рівняння четвертого порядку пов'язаний з тим, що отримані раніше для рівнянь другого і третього порядків [7], [8] результати про поведінку  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків не можуть бути безпосередньо поширеними на рівняння  $n$ -го порядку без попереднього детального дослідження рівняння четвертого порядку.

При встановленні необхідних умов існування у диференціального рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків буде використаний відомий результат В.М. Євтухова про апріорні асимптотичні властивості таких розв'язків, який випливає з роботи [5]

**Лема 1** ([5], Розділ 3, §10). Якщо  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ , то кожний  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язок диференціального рівняння (1) задовольняє наступні граничні умови:

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1} \quad (k = 1, \dots, 4), \quad \text{де} \quad a_{0k} = (4 - k)\lambda_0 + k - 3, \quad (7)$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

Крім того, в роботі буде використовуватись одне відоме твердження про існування зникаючих в особливій точці розв'язків у системи квазілінійних диференціальних рівнянь виду

$$v'_i = h(t) \left[ f_i(t) + \sum_{k=1}^4 c_{ik}(t) v_k + V_i(t, v_1, \dots, v_4) \right] \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (8)$$

в якій функції

$$h, f_i : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad c_{ik} : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R} \quad (i, k = 1, \dots, 4)$$

є неперервними і задовольняють умови:

$$h(t) \neq 0, \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \omega \quad \int_{t_0}^{\omega} |h(t)| dt = +\infty, \quad (9)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_{ik}(t) = c_{ik}^0 \quad (i, k = 1, \dots, 4), \quad (10)$$

а функції  $V_i$  неперервні на множині

$$[t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_b, \quad \text{де} \quad \mathbb{R}_b = \{(v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4 : |v_i| \leq b \ (i = 1, \dots, 4), \ b > 0\}$$

і задовольняють умову

$$\lim_{|v_1| + \dots + |v_4| \rightarrow 0} \frac{V_i(t, v_1, \dots, v_4)}{|v_1| + \dots + |v_4|} = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad \text{рівномірно за } t \in [t_0, \omega[. \quad (11)$$

З теореми 2.2 роботи [6] випливає наступний результат для системи (8).

**Лема 2** ([6], Теорема 2.2). *Нехай виконуються умови (9) – (11) і гранична матриця коефіцієнтів  $C_0 = (c_{ik}^0)_{i,k=1}^2$  не має характеристичних коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді у системі диференціальних рівнянь (8) існує хоча б один розв'язок  $(v_i)_{i=1}^4 : [t_1, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^4$  ( $t_0 \leq t_1 < \omega$ ), що прямує до нуля при  $t \uparrow \omega$ . Більш того, існує  $m$ -параметрична сім'я таких розв'язків, якщо серед коренів характеристичного рівняння матриці  $C_0$  існує  $m$  коренів (з урахуванням кратних), дійсні частини, яких мають знак протилежний знаку функції  $h$  на проміжку  $[t_0, \omega[$ .*

Далі, при  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$  уведемо додаткові допоміжні позначення

$$K(\lambda_0) = \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}, \quad J_0(t) = \int_{A_0}^t \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau) d\tau,$$

де

$$A_0 = \begin{cases} \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^3 p_0(\tau) d\tau < +\infty, \\ a, & \text{якщо } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^3 p_0(\tau) d\tau = +\infty, \end{cases}$$

$$J_1(t) = \int_{A_1}^t \frac{p_0(\tau)}{J_0(\tau)} d\tau, \quad J_i(t) = \int_{A_i}^t J_{i-1}(\tau) d\tau, \quad (i = 2, 3)$$

де

$$A_1 = \begin{cases} a_0, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|} d\tau < +\infty, \end{cases} \quad a_0 \in [a, \omega[,$$

$$A_i = \begin{cases} a_0, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)| d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)| d\tau < +\infty \end{cases} \quad (i = 2, 3).$$

$$Y(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)), \quad q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)}$$

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**Теорема 1.** *Нехай  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ . Для існування у диференціального рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, щоб виконувались нерівності*

$$\alpha_0 \nu_0 \lambda_0 (2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2) > 0, \quad \alpha_0 \nu_1 K(\lambda_0) \pi_\omega(t) > 0, \quad \text{при } t \in ]a, \omega[ \quad (13),$$

і наступні умови

$$\alpha_0 \sigma K(\lambda_0) J_0(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in ]a, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm \infty, \quad (14)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_2'(t)}{J_2(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \quad (15)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_3'(t)}{J_3(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q(t) = 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\alpha_0 \pi_\omega(t) J_3(t)}{Y(t)} = \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}$$

причому кожний такий розв'язок допускає при  $t \uparrow \omega$  наступні асимптотичні зображення

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)) + o(1),$$

$$y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)[1 + o(1)], \quad (k = 1, 2, 3). \quad (16)$$

**Доведення.** Нехай  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$  і  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0} - P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язок диференціального рівняння (1). Тоді згідно з (1), умовами (5), (7) і уведеними позначеннями

$$\begin{aligned} \text{sign } y(t) &= \nu_0, & \text{sign } y'(t) &= \nu_1, & \text{sign } y''(t) &= \alpha_0 \lambda_0, \\ \text{sign } y'''(t) &= \alpha_0 [(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t)], & \text{sign } y^{(4)}(t) &= \alpha_0. \end{aligned} \quad (18)$$

При цьому, як вже було встановлено, виконується умова (12).

Крім того, з (7) випливає, що

$$y^{(4)}(t) = \frac{y^{(4)}(t) y'''(t) y''(t) y'(t)}{y'''(t) y''(t) y'(t) y(t)} y(t) \sim \frac{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2)}{(\lambda_0 - 1)^4} \frac{y(t)}{\pi_\omega^4(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$y^{(4)}(t) = \frac{y^{(4)}(t) y'''(t) y''(t)}{y'''(t) y''(t) y'(t)} y'(t) \sim \frac{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 - 1)^3} \frac{y'(t)}{\pi_\omega^3(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

і тому з (1) дістаємо

$$\frac{y(t)}{e^{\sigma y(t)}} = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^4}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2)} \pi_\omega^4(t) p_0(t) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \quad (19)$$

і

$$\frac{y'(t)}{e^{\sigma y(t)}} = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)} \pi_\omega^3(t) p_0(t) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \quad (20)$$

З цих співвідношень, зокрема, отримуємо наступні знакові умови

$$\nu_0 = \alpha_0 \text{sign}[\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2)], \quad \nu_1 = \alpha_0 \text{sign}[\lambda_0(\lambda_0 - 1)(2\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)],$$

і тоді виконуються нерівності (13), а також згідно з вже встановленим маємо що

$$\nu_0 = \nu_1$$

Далі, інтегруючи асимптотичне співвідношення (20) на проміжку від  $t_0$  до  $t$ , знаходимо

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{ds}{e^{\sigma s}} = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)} \int_{t_0}^t \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau) [1 + o(1)] d\tau, \quad \text{де } s = y(t), \quad (22)$$

Враховуючи, що в (22)  $y(t) \rightarrow Y_0 = \pm\infty$  при  $t \uparrow \omega$  а також правило обрання границь інтегрування  $A_0$  в інтегралі  $J_0$  знаходимо

$$-\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma y} \Big|_{y(t_0)}^{y(t)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)} \int_{t_0}^t \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau) [1 + o(1)] d\tau$$

$$e^{-\sigma y(t)} = \alpha_0 \left(-\frac{1}{\sigma}\right) K(\lambda_0) J_0(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (23)$$

звідки ми отримуємо першу умову з (14). Прологарифмуємо вираз (23)

$$-\sigma y(t) = \ln\left(\alpha_0 \left(-\frac{1}{\sigma}\right) K(\lambda_0) J_0(t) [1 + o(1)]\right) \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (24)$$

і отримуємо перше з асимптотичних співвідношень (16) для  $y(t)$ . Використовуючи властивості (19) отримуємо, що

$$y(t) = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^4}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2)} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{e^{-\sigma y(t)}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega \quad (25)$$

або з урахуванням отриманого значення  $y(t)$

$$y(t) = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^4}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2)} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{\alpha_0 \left(-\frac{1}{\sigma}\right) K(\lambda_0) J_0(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega \quad (26)$$

або

$$y(t) = \frac{\lambda_0 - 1}{3\lambda_0 - 2} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{\left(-\frac{1}{\sigma}\right) J_0(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega \quad (27)$$



де  $\pi_\omega(t)J_0'(t) > 0$ ,  $\text{sign } J_0 = \text{sign } \pi_\omega$ . Оскільки при  $t \uparrow \omega$ ,  $y(t) \rightarrow Y_0 = \pm\infty$  то звідси випливає справедливість другої граничної умови (14).

Далі отримуємо асимптотичні співвідношення для похідних першого, другого та третього порядку для розв'язку визначеного першою формолою (16). Підставляючи перше асимптотичне співвідношення з (16) у праву частину рівняння (1), дістанемо, що

$$y^{(4)}(t) = \alpha_0 p_0(t) e^{\sigma Y(t)} \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (28)$$

Інтегруючи (28) на проміжку від  $t_0$  до  $t$  з урахуванням правила обрання нижньої границі інтегрування  $A_1$  в інтегралі  $J_1(t)$  ми отримуємо асимптотичне співвідношення

$$y'''(t) = \alpha_0 J_1(t) [1 + o(1)], \quad t \uparrow \omega, \quad (29)$$

тобто має місце друге з асимптотичних співвідношень (16) при  $k = 3$ . Звідси з урахуванням правил обрання границь інтегрування  $A_2$  та  $A_3$  у інтегралів  $J_2(t)$  і  $J_3(t)$  в результаті інтегрування на проміжку від  $t_0$  до  $t$  співвідношення (29) таким же чином встановлюємо справедливість інших асимптотичних співвідношень (16) при  $k = 2$  і  $k = 1$ . З отриманих асимптотичних співвідношень (16) і того факту, що  $y(t) \sim Y(t)$  з урахуванням граничних умов (7) безпосередньо впливають перша, друга та третя граничні співвідношення з (15).

Доведемо справедливість четвертої умови (15). Оскільки

$$q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)} = \frac{e^{-\sigma Y(t)} \frac{J_0'(t)}{J_0(t)}}{\alpha_0 J_3(t)} = \frac{\alpha_0 K(\lambda_0) J_0'(t)}{\alpha_0 J_3(t)} = \frac{\alpha_0 K(\lambda_0) \pi_\omega^3(t) p_0(t)}{\alpha_0 J_3(t)}$$

і згідно з першим і третьою граничною умовою з (15)

$$\begin{aligned} J_3(t) &= \frac{J_3(t)}{J_2(t)} \frac{J_2(t)}{J_1(t)} \frac{J_1(t)}{J_1'(t)} J_1'(t) = \\ &= \frac{J_3(t)}{J_3'(t)} \frac{J_2(t)}{J_2'(t)} \frac{J_1(t)}{J_1'(t)} J_1'(t) \sim \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{(2\lambda_0 - 1)\lambda_0} \pi_\omega^3(t) p_0(t) = K(\lambda_0) \pi_\omega^3(t) p_0(t) \quad \text{при } t \uparrow \omega, \end{aligned}$$

звідси отримуємо то  $q(t) \sim 1$  при  $t \uparrow \omega$ , тобто має місце четверта з граничних умов з (15). Далі доведемо справедливість граничної умови п'ять

з (15) Для доведення застосуємо правило Лопітала у формі Штольця. При цьому з урахуванням четвертої з умов (15) дістанемо, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y'(t)}{\alpha_0(\pi_\omega(t)J_3(t))'} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t) \left[ \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1} + o(1) \right]} = \frac{\lambda_0 - 1}{3\lambda_0 - 2}$$

що доводить справедливість п'ятої з граничних умов (15).

Теорему повністю доведено.

**Теорема 2.** Нехай  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$  і виконуються умови (13)-(15). Нехай, крім того

$$\lim_{t \uparrow \omega} (1 - q(t))|Y(t)|^{\frac{3}{4}} = 0 \quad \text{і} \quad \alpha_0 \sigma > 0 \quad (30)$$

Тоді дифференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$  розв'язків, що задовольняють при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t) + o(1), \quad y'(t) = \alpha_0 J_3(t) \left[ 1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{3}{4}}} \right], \quad y''(t) = \alpha_0 J_2(t) \left[ 1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{2}}} \right], \\ y'''(t) &= \alpha_0 J_1(t) \left[ 1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

**Доведення.** Нехай  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$  і виконуються умови (13)-(15) і (30). Покажемо, що у цьому випадку рівняння (1) має хоча б один  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язок, що задовольняє при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення (16) і з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків. Для цього, спочатку, рівняння (1) за допомогою замін

$$y(t) = Y(t) + y_1(t), \quad y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)[1 + y_{k+1}(t)], \quad (k = 1, 2, 3) \quad (32)$$

зведемо до системи дифференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha_0 J_3(t) [1 - q(t) + y_2], \quad y_2' = \frac{J_3'(t)}{J_3(t)} (y_3 - y_2), \\ y_3' &= \frac{J_2'(t)}{J_2(t)} (y_4 - y_3), \quad y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \left[ (1 + r(t)) \frac{e^{\sigma(Y(t) + y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} - 1 - y_4 \right], \end{aligned} \quad (33)$$

Цю систему будемо розглядати на множині

$$\Omega = [t_1, \omega] \times D, \quad \text{де} \quad D = \left\{ (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4_{\frac{1}{2}} : |y_i| \leq \frac{1}{2}, (i = 1, \dots, 4) \right\}$$

і число  $t_1 \in [a, \omega[$  обрано таким чином, що

$$Y(t) + y_1 \subset \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[ \quad \text{і} \quad |y_1| \leq \frac{1}{2}$$

На даній множині праві частини системи неперервні і мають неперервні частині похідні до другого порядку включно за змінними  $y_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Використовуючи останій факт уточнемо вигляд четвертого рівняння системи. Розкладаючи  $\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}}$  при фіксованому  $t \in [t_1, \omega[$  за формулою Тейлора по змінній  $y_1$  в околі нуля з залишковим членом у формі Лагранжа, будемо мати

$$\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} = 1 + y_1 + \frac{1}{2!} \frac{e^{\sigma(Y(t)+\xi_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} y_1^2, \quad \text{де} \quad |\xi_1| < |y_1|$$

Тому останнє рівняння системи запишеться у вигляді

$$y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \left[ (1 + r(t))(1 + y_1 + \frac{1}{2!} e^{\xi_1}) y_1^2 - 1 - y_4 \right] \quad (34)$$

Оскільки  $|\xi_i| < |y_1|$  і  $|y_1| \rightarrow 0$  то існує  $\delta$  таке, що четверте рівняння системи (33) може бути записаним у вигляді

$$y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} [r(t) + (1 + r(t))y_1 - y_4 + R(t, y_1)]$$

$$\text{де} \quad |R(t, y_1)| \leq y_1^2 \quad \text{при} \quad |y_1| \leq \delta \quad \text{для деякого} \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \quad (35)$$

Надалі отриману систему будемо розглядати на множині  $\Omega_0 = [t_1, \omega[ \times \mathbb{R}_\delta^4$ .

Згідно з теоремою 1 маємо

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \xi_1(t) &= \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}, & \lim_{t \uparrow \omega} \xi_2(t) &= \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \xi_3(t) &= \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, & \lim_{t \uparrow \omega} \xi_4(t) &= \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \end{aligned} \quad (36)$$

З урахуванням виду функції  $\xi_i(t)$  перепишем систему (33) у вигляді

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} \{ \xi_1(t)(1 - q(t)) + y_2 \}, \\ y_2' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \{ \xi_2(t)(y_3 - y_2) \}, \\ y_3' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \{ \xi_3(t)(y_4 - y_3) \}, \\ y_4' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \{ \xi_4(t) [r(t) + (1 + r(t))y_1 - y_4 + R(t, y_1)] \}. \end{aligned} \quad (37)$$

З метою асимптотично вірівняти множники при  $t \uparrow \omega$  в правій частині рівнянь системи (37) застосуємо до неї додаткове перетворення

$$\begin{aligned} y_1(t) &= v_1(t), & y_2(t) &= |Y(t)|^{-\frac{3}{4}} v_2(t), \\ y_3(t) &= |Y(t)|^{-\frac{1}{2}} v_3(t), & y_4(t) &= |Y(t)|^{-\frac{1}{4}} v_4(t) \end{aligned} \quad (38)$$

В результаті цього перетворення отримаємо систему диференціальних рівнянь (8) в якій

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \quad (h(t) \neq 0), & f_1(t) &= \xi_1(t)(1 - q(t))|Y(t)|^{\frac{3}{4}} \text{sign } Y(t) \\ f_2(t) &= 0, & f_3(t) &= 0, & f_4(t) &= \xi_4(t)r(t) \\ c_{11}(t) &= 0, & c_{12}(t) &= \xi_1(t) \text{sign } Y(t), & c_{13}(t) &= 0, & c_{14}(t) &= 0 \\ c_{21}(t) &= 0, & c_{22}(t) &= 0, & c_{23}(t) &= \xi_2(t), & c_{24}(t) &= 0 \\ c_{31}(t) &= 0, & c_{32}(t) &= 0, & c_{33}(t) &= 0, & c_{34}(t) &= \xi_3(t) \\ c_{41}(t) &= \xi_4(t)(1 + r(t)), & c_{42}(t) &= 0, & c_{43}(t) &= 0, & c_{44}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

а також

$$V(t, v_1) = \xi_4(t)R(t, v_1) \quad (40)$$

В силу умов (36) і (30) та вигляду функції  $Y(t)$  впливає, що в цій системі  $\lim_{t \uparrow \omega} f_i(t) = 0$  де  $(i = 1, \dots, 4)$  і  $\int_{t_1}^{\omega} \frac{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} dt = +\infty$  тобто виконується умова (9) і перша умова з (10). Також тут функція  $V(t, v_1)$  згідно умов на функцію  $R(t, v_1)$  (35), задовольняє умові (11). Крім того в силу умов (36) і вигляду функції  $Y(t)$ , і що  $\text{sign } Y(t) = \frac{\nu_0}{\text{sign } \sigma}$  гранична матриця коефіцієнтів  $(c_{i,k=1}^4(t))$  при  $t \uparrow \omega$  має наступний вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1} \left( \frac{\nu_0}{\text{sign } \sigma} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \\ \frac{1}{\lambda_0 - 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

З урахуванням (13) характеристичне рівняння цієї сталої матриці має наступний вигляд

$$\lambda^4 = \frac{\alpha_0}{\text{sign } \sigma} \frac{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^4} \quad (41)$$

Знайдемо корені цього рівняння. У випадку, коли  $\frac{\alpha_0}{\text{sign } \sigma} = 1$  характеристичне рівняння може бути записаним у виді

$$\left( \lambda^2 - \sqrt{\frac{|3\lambda_0 - 2|(|2\lambda_0 - 1||\lambda_0|)}{(\lambda_0 - 1)^4}} \right) \left( \lambda^2 + \sqrt{\frac{|3\lambda_0 - 2|(|2\lambda_0 - 1||\lambda_0|)}{(\lambda_0 - 1)^4}} \right) = 0$$

і воно має два дійсних кореня

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt[4]{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}}{|\lambda_0 - 1|} \quad (42)$$

і два комплексно спряжених кореня

$$\lambda_{3,4} = \pm i \frac{\sqrt[4]{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}}{|\lambda_0 - 1|} \quad (43)$$

Таким чином, оскільки виконується умова  $\frac{\alpha_0}{\text{sign } \sigma} > 0$  то в цьому випадку характеристичне рівняння (41) має чотири комплексноспряжені корені з відмінною від нуля нульовою дійсною частиною.

Тоді на основі леми 2, система диференціальних рівнянь (8) має дво-параметричну сім'ю розв'язків  $v_i$  де ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) на проміжку  $[t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^4$ , які прямують до 0 при  $t \uparrow \omega$ . Кожному такому розв'язку з урахуванням замін (32) і (38) відповідає розв'язок  $y(t) : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  диференціального рівняння (1) для якого мають місце асимптотичні зображення (31).

Неважко також перевірити з урахуванням цих асимптотичних зображень і вигляду рівняння (1), що побудовані нами розв'язки є  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язками.

Теорему повністю доведено.

**Зауваження 1.** Питання про існування  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків у диференціального рівняння (1) у випадку коли  $\frac{\alpha_0}{\text{sign } \sigma} < 0$  залишається відкритим і воно потребує додаткового дослідження складного випадку коли серед коренів характеристичного рівняння є два чисто уявних кореня.

## Висновки

В данній роботі для рівняння зі швидкозмінною нелінійністю отримані необхідні і достатні умови існування  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків у випадку коли  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$  (не особливий випадок) і вирішено питання про кількість таких розв'язків.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Evtukhov V.M., Drik N.G.** Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation / V. M. Evtukhov, N. G. Drik // Georgian Math. J. – 1996. – Vol. 3, No. 2. – P. 101 – 120.
2. **Евтухов В.М., Шинкаренко В.Н.** Асимптотические представления решений двухчленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с экспоненциальной нелинейностью / В. М. Евтухов, В. Н. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 3. – С. 308-322.
3. **Евтухов В.М., Харьков В.М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, В. М. Харьков // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1311-1323.
4. **Евтухов В.М., Самойленко А.М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. Мат. Ж. – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52-80.
5. **Евтухов В.М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов. – Дисс.... д. физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 295 с.
6. **Евтухов В.М., Самойленко А.М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 5. – С. 628-650.
7. **Евтухов В.М., Черникова А.Г.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстроменяющейся нелинейностью / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Укр. Мат. Ж. – 2017. – Т. 69, № 10. – С. 1345-1363.
8. **Evtukhov V.M., Sharay N.V.** Asymptotic behaviour of solutions of third order differential equations with rapidly varying nonlinearities / V. M. Evtukhov, N. V. Sharay // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 77. – P. 1–15.

*Evtukhov V. M., Golubev S. V.*

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF ONE CLASS OF THE FOURTH-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Summary*

The asymptotic behaviour as  $t \uparrow \omega$  of one of the possible types of  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -solutions of a binomial non-autonomous fourth-order ordinary differential equation with exponential nonlinearity and a continuous and non-zero in some left neighbourhood  $\omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) coefficient  $p(t)$  is investigated. First, using a priori asymptotic properties of the considered  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -solutions, necessary conditions for their existence are established, as well as asymptotic representations of these solutions and their derivatives up to the third order. The question of the actual existence of solutions with the obtained asymptotic representations is solved by reducing it to the question of the existence of solutions that vanish at a specific point of a system of quasilinear differential equations. This system is obtained as a result of some transformations of the original equation, taking into account the kind of established asymptotic representations. In addition, the question of the number of solutions with found asymptotic representations is also resolved.

*Key words:* non-autonomous differential equations, exponential nonlinearity,  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ - solutions, asymptotic behavior of  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ - solutions.

**REFERENCES**

1. Evtukhov, V.M., Drik, N.G. (1996). Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation. *Georgian Math. J.*, Vol. 3, No. 2, P. 101–120.
2. Evtukhov, V.M., Shinkarenko, V.N.) (2008). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy dvuchlennykh neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy n-go poraydka s exponencialnoy nelineynostyu [Asymptotic Representations of Solutions of Two-Term Nonautonomous nth-Order Ordinary Differential Equations with Exponential Nonlinearity]. *Differential'nye Uravnenja*, Vol. 44, No. 3, P. 308-328.
3. Evtukhov, V.M., Harkov, V.M. (2007). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy suschestvenno nelineynykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions of second-order essentially nonlinear differential equations]. *Differential'nye Uravnenja*, Vol. 43, No. 10, P. 1311–1323.
4. Evtukhov, V.M., Samojlenko, A.M. (2010). Usloviya suschestvovaniya ischezayuschkh v osoboy tochke resheniy u veschestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsialnykh uravneniy [Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous

- 
- systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point]. *Ukr. Mat. J*, Vol. 62, No. 1, P. 52-80.
5. Evtukhov, V.M. (1997). Asimptotycheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations]. *Diss.... d-ra fiz.-mat.nauk, Kiev*.
  6. Evtukhov, V.M., Samojlenko, A.M. (2011). Asimptotycheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy s pravilno menyayuschimsya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities]. *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 47, No. 5, P. 628-650.
  7. Evtukhov, V.M., Chernikova, A.G. (2017). Asimptotycheskoe povedenie resheniy obyknovennykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s bystromeyayuscheisya nelineynostyu [Asymptotic behavior of the solutions of second-order ordinary differential equations with rapidly changing nonlinearities]. *Ukrain. Mat. Zh*, Vol. 69, No. 10, P. 1345-1363.
  8. Evtukhov, V.M., Sharay, N.V. (2019). Asymptotic behaviour of solutions of third order differential equations with rapidly varying nonlinearities. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, Vol. 77, P. 1-15.



УДК 517.925

**В. В. Карапетров**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ВИДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ $n$ -ГО ПОРЯДКУ

У даній роботі розглядається диференціальне рівняння  $n$ -го порядку  $(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} = \sum_{k=0}^m p_k u^{(k)}$ ,  $n \geq 2$ , для якого знайдені умови існування та асимптотичні зображення розв'язків при деяких умовах на функції  $p_k$  та функцію  $r$ . Розв'язки такого типу рівнянь при  $m = 0$  розглядалися у роботі Хінтона, а при  $s \equiv 1$  та  $m = n - 1$  розглядалися у роботі Кігурадзе І.Т. Результати, отримані у даній роботі для вказаного рівняння, у деякому сенсі узагальнюють результати, отримані в роботах Хінтона та І. Т. Кігурадзе. При отриманні асимптотичних зображень за допомогою заміни рівняння перетворюється у еквівалентну систему квазілінійних диференціальних рівнянь, для якої виконуються відомі результати Левінсона, рівняння у деякому сенсі асимптотично еквівалентне до відповідного двочленного диференціального рівняння  $n$ -го порядку.

*MSC: 34A34, 34C41, 34E99.*

*Ключові слова: диференціальні рівняння  $n$ -го порядку, асимптотичні зображення розв'язків, системи квазілінійних диференціальних рівнянь, квазіпохідні.*

*DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294141*

### Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} = \sum_{k=0}^m p_k u^{(k)}, \quad n \geq 2 \quad (1)$$

де  $p_k \in C_{loc}([a; +\infty[)$  ( $k = 0, \dots, m$ ),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p_0(t)}{q(t)} = \sigma, \quad \sigma = \text{sign}(p_0(a)), \quad (2)$$

$r(t)$  та  $q(t)$  – додатні двічі неперервно диференційовні на проміжку  $[a; +\infty[$  функції,  $C_{loc}([a; +\infty[)$  – простір локально неперервних функцій на проміжку  $[a; +\infty[$ ,  $L([a; +\infty[)$  – Банаховий простір інтегрованих за Лебегом функцій.

Рівняння виду (1) при  $m = 0$  розглядалися у роботі [2]:

$$(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} \pm qu = 0, \quad n \geq 2.$$

Рівняння виду (1) при  $s \equiv 1$  та  $m = n - 1$  розглядалися у роботі [3]:

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)u^{(k)}.$$

Для таких рівнянь було отримано асимптотичні зображення розв'язків при накладанні різних умов на коефіцієнти.

Метою даної роботи є встановлення асимптотичних зображень розв'язків рівняння (1) при  $t \rightarrow +\infty$ .

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Отримано наступну теорему.

**Теорема 1.** *Нехай для рівняння (1) виконується умова (2), а також умови*

$$\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \notin L([a; +\infty[), \quad (3)$$

$$\frac{r'}{r} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[), \quad \frac{q'}{q} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[) \quad (4)$$

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[), \quad \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[), \quad (5)$$

$$\frac{p_{k-1}(t)}{q(t)} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{k-1}{n}} \in L([a; +\infty[) \quad (k = \overline{2, m}), \quad \frac{p_m(t)}{r(t)q(t)} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{m}{n}} \in L([a; +\infty[). \quad (6)$$

Тоді рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків  $u_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), які допускають асимптотичні зображення

$$u_j^{k-1} = q(t)^{-\alpha_k} \cdot r(t)^{-\beta_k} \cdot \exp \left[ \lambda_j \cdot \int_a^t \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \right] \cdot [\lambda_j^{k-1} + o(1)], \quad (k, j = \overline{1, n}) \quad (7)$$

де  $\lambda_j^0$  – корені рівняння

$$\lambda^n = \sigma \quad (8)$$

### Доведення.

Застосуємо до рівняння (1) перетворення:

$$\begin{cases} u^{(i)}(t) = z_{i+1}(t), & 0 \leq i \leq m-1, \\ u^{(m)}(t) = \frac{z_{m+1}(t)}{r(t)}, \\ (r(t)u^{(m)})^{(i-m)} = z_{i+1}(t), & m+1 \leq i \leq n-1, m \neq n-1. \end{cases} \quad (9)$$

Отримаємо систему квазілінійних рівнянь, еквівалентну до рівняння (1)

$$\begin{cases} z'_{(i)}(t) = z_{i+1}(t), & 1 \leq i \leq n-1, \quad i \neq m \\ z'_{(m)}(t) = \frac{z_{m+1}(t)}{r(t)}, \\ z'_n = p_0(t)z_1 + \sum_{i=1}^{m-1} p_i(t) \cdot z_{i+1} + \frac{p_m(t)}{r(t)} \cdot z_{m+1}. \end{cases} \quad (10)$$

Запишемо систему (10) у матричній формі:

$$Z' = P \cdot Z; \quad (11)$$

де

$$P = (p_{ij})_1^n, \quad p_{ij} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, \quad i \neq m, \quad j = i+1, \\ \frac{1}{r(t)}, & i = m, \quad j = i+1, \\ p_{i-1}, & i = n, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \frac{p_m}{r}, & i = n, \quad j = m+1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

До системи (11) застосуємо перетворення

$$Z(t) = Q(t) \cdot W(t), \quad (13)$$

де

$$Q(t) = \text{diag} [q^{\alpha_1} r^{\beta_1} \dots q^{\alpha_n} r^{\beta_n}].$$

У результаті перетворення (13), отримаємо систему

$$W' = [Q^{-1}PQ - Q^{-1}Q'] \cdot W. \quad (14)$$

Зауважимо, що

$$Q^{-1} = \text{diag} \left[ \frac{1}{q^{\alpha_1} r^{\beta_1}} \dots \frac{1}{q^{\alpha_n} r^{\beta_n}} \right].$$

$$P \cdot Q = (a_{ij})_1^n, \quad a_{ij} = \begin{cases} q^{\alpha_{i+1}} \cdot r^{\beta_{i+1}}, & 1 \leq i \leq n-1, \quad i \neq m, \quad j = i+1, \\ q^{\alpha_{m+1}} \cdot r^{\beta_{m+1}-1}, & i = m, \quad j = i+1, \\ p_{i-1} \cdot q^{\alpha_i} \cdot r^{\beta_i}, & i = n, \quad 1 \leq j \leq m, \\ p_m \cdot q^{\alpha_{m+1}} \cdot r^{\beta_{m+1}-1}, & i = n, \quad j = m+1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Q^{-1}PQ = (b_{ij})_1^n, \quad b_{ij} = \begin{cases} q^{\alpha_{i+1}-\alpha_i} \cdot r^{\beta_{i+1}-\beta_i}, & 1 \leq i \leq n-1, i \neq m, j=i+1, \\ q^{\alpha_{m+1}-\alpha_m} \cdot r^{\beta_{m+1}-\beta_m-1}, & i=m, j=i+1, \\ p_{i-1} \cdot q^{\alpha_i-\alpha_n} \cdot r^{\beta_i-\beta_n}, & i=n, 1 \leq j \leq m, \\ p_m \cdot q^{\alpha_{m+1}-\alpha_n} \cdot r^{\beta_{m+1}-\beta_n-1}, & i=n, j=m+1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Q^{-1}Q = \frac{q'}{q} \cdot D_1 + \frac{r'}{r} \cdot D_2, \quad D_1 = \text{diag} [\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad D_2 = \text{diag} [\beta_1, \dots, \beta_n]$$

Оберемо  $\alpha_i$  та  $\beta_i$  таким чином, щоб

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \dots = \alpha_{m+1} - \alpha_m = \alpha_n - \alpha_{n-1} = 1 + \alpha_1 - \alpha_n = \tau_\alpha,$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \beta_3 - \beta_2 = \dots = \beta_{m+1} - \beta_m - 1 = \beta_n - \beta_{n-1} = \beta_1 - \beta_n = \tau_\beta,$$

З останніх рівностей випливає, що  $\tau_\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $\tau_\beta = -\frac{1}{n}$ .

Тоді

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_n = \frac{1}{n} - 1, \\ \alpha_2 - \alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}, \\ \dots \\ \alpha_{m+1} - \alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{n-m}{n}. \end{cases}$$

Нехай  $Q^{-1}PQ = \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot [K + V]$ , де  $K = (k_{ij})_1^n$ ,  $V = (v_{ij})_1^n$ ,

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, j=i+1, \\ \sigma, & i=n, j=1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad v_{ij} = \begin{cases} \frac{p_0}{q} - \sigma, & i=n, j=1, \\ \frac{p_{i-1}}{q} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{i-1}{n}}, & i=n, 2 \leq j \leq m, \\ \frac{p_m}{q} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{m}{n}}, & i=n, j=m+1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Отже, система (14) перетворюється на наступну систему

$$W' = \left[ \left( \frac{q}{r} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot [K + V] - \frac{q'}{q} \cdot D_1 + \frac{r'}{r} \cdot D_2 \right] \cdot W. \quad (15)$$

До системи (15) застосуємо перетворення

$$h(t) = \int_a^t \left( \frac{q(\varsigma)}{r(\varsigma)} \right)^{\frac{1}{n}} d\varsigma. \quad (16)$$

Нехай також  $g$ - функція, обернена до функції  $h$ , для всіх  $t > a$   $g(h(t)) = t$ . Оскільки виконуються умови (3)-(5) теореми, то  $h(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Також маємо  $W(s) = Z(g(s))$ . У результаті перетворення (16), отримаємо систему

$$W' = [K + V - \alpha(s) \cdot D_1 + \beta(s) \cdot D_2] \cdot W, \quad (17)$$

де

$$\alpha(s) = \left( \frac{q(t)}{r(t)} \right)^{-\frac{1}{n}} \frac{q'}{q}, \quad \beta(s) = \left( \frac{q(t)}{r(t)} \right)^{-\frac{1}{n}} \frac{r'}{r}.$$

З умов (3)-(5) теореми також випливає, що

$$\int_0^{\infty} |\alpha'(s)| ds = \int_a^{\infty} \left| \left( \left( \frac{q(t)}{r(t)} \right)^{-\frac{1}{n}} \frac{q'}{q} \right)' \right| ds < +\infty$$

та

$$\int_0^{\infty} \alpha^2(s) ds = \int_a^{\infty} \left( \left( \frac{q(t)}{r(t)} \right)^{-\frac{2}{n}} \left( \frac{q'}{q} \right)' \right)^2 ds < +\infty.$$

Аналогічні результати є справедливими і для  $\beta(s)$ .

Розглянемо тепер характеристичні числа матриці

$$[K + V - \alpha(s) \cdot D_1 - \beta(s) \cdot D_2] \quad (18).$$

Позначимо їх як  $\lambda_{\tau} + \gamma_{\tau}(s)$ ,  $\tau = \overline{1, n}$ , де  $\gamma_{\tau}(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$ ,  $\lambda_{\tau}(\tau = \overline{1, n})$  – корені характеристичного рівняння матриці  $K$ , яке має вигляд (8):

$$\lambda^n = \sigma.$$

Самі корені мають вигляд

$$\lambda_{\tau} = \begin{cases} \exp\left[\frac{i\Pi(2\tau - 1)}{n}\right], & \sigma = -1, \\ \exp\left[\frac{2\Pi \cdot i(\tau - 1)}{n}\right], & \sigma = 1. \end{cases}$$

З означення  $\gamma_\tau(s)$  випливає, що

$$\begin{aligned}
 0 &= \det [K + V - \alpha(s) \cdot D_1 - \beta(s) \cdot D_2 - (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s)) \cdot I] = \\
 &= \frac{p_0}{q} + \sum_{k=1}^m \frac{p_k}{q} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{k}{n}} \prod_{i=1}^k (\alpha_i \alpha(s) + \beta_i \beta(s) + (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))) + \\
 &\quad + \prod_{i=1}^n (\alpha_i \alpha(s) + \beta_i \beta(s) + (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))). \tag{19}
 \end{aligned}$$

У результаті розкладання правої частини рівняння (19), маємо

$$\begin{aligned}
 \sigma &= (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))^n - (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))^{n-1} \sum_{k=1}^n (\alpha_k \alpha(s) + \beta_k \beta(s)) + \\
 &\quad + \dots + (-1)^n \prod_{k=1}^n (\alpha_k \alpha(s) + \beta_k \beta(s)) + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{p_k}{q} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{k}{n}} \prod_{i=1}^k (\alpha_i \alpha(s) + \beta_i \beta(s) + (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))) + \frac{p_0}{q} - \sigma \tag{20}
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 0 \tag{21}$$

Оскільки  $\alpha(s) \rightarrow 0$ ,  $\beta(s) \rightarrow 0$ ,  $\gamma_\tau(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow +\infty$  виконується (21) та умови (6) теореми впливає, що існує таке число  $M$ , що

$$|(\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))^n - \sigma| \leq M(|\alpha(s)| + |\beta(s)|)^2 \tag{22}$$

З (22) також випливає, що існує число  $A$ , що

$$|\gamma_\tau(s)| \leq A(|\alpha(s)| + |\beta(s)|)^2. \tag{22}$$

Отже,  $\tau(s) \in L([a; +\infty[))$  та виконуються умови теореми 8.1 з роботи [1]) та наслідку 6.5 з роботи [3]).

Отже, рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків  $u_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), які допускають асимптотичні зображення (7). Теорему повністю доведено.

**ВИСНОВКИ**

Шляхом заміни рівняння (1) зводиться до еквівалентної системи квазі-лінійних диференціальних рівнянь, завдяки чому побудовано асимптотичне зображення розв'язків рівняння(1) при  $t \rightarrow +\infty$ .

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. **Coddington E. A.** Theory of Ordinary Differential Equations / E. A. Coddington, N. Levinson. – McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1955.
2. **Hinton Don B.** Asymptotic behavior of solutions of  $(ry^{(m)})^{(k)} \pm qy = 0$ . / Don B. Hinton // Journal of Differential Equations. –1968. – Vol. 4, No. 5. – P. 590–596
3. **Кігурадзе І.Т.** Деякі сингулярні крайові завдання звичайних диференціальних рівнянь / І. Т. Кігурадзе. – Тбілісі: Вид-во Тбіліс. ун-ту, 1975. – 352 с.

Karapetrov V. V.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF THE SOLUTIONS OF SOME TYPE  $n$ -TH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Summary*

In this work there is considered the  $n$  order differential equation  $(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} = \sum_{k=0}^m p_k u^{(k)}$ , for which the existence conditions and asymptotic representations of solutions under certain conditions on the function  $p_k$  and the function  $r$  are found. Solutions of this type of equation for  $m = 0$  were considered in the work of Hinton, and for  $s \equiv 1$  and  $m = n - 1$  were considered in the work of I.T. Kiguradze. The results obtained in this work for the indicated equation in some sense generalize the results obtained in the works of Hinton and I. T. Kiguradze. For obtaining asymptotic images using substitutions, the equation is transformed into an equivalent system of quasi-linear differential equations for which the well-known Levinson results are satisfied, the equation is in some sense asymptotically equivalent to the corresponding binomial differential equation of the  $n$ th order.

*Key words:*  $n$ -th order differential equations, asymptotic representations of solutions, systems of quasi-linear differential equations, quasiderivatives.

## REFERENCES

1. Coddington E. A. and Levinson N. (1955). Theory of Ordinary Differential Equations *McGraw-Hill, New York-Toronto-London*.
2. Hinton Don B. (1968). Asymptotic behavior of solutions of  $(ry^{(m)})^{(k)} \pm qy = 0$ . *Journal of Differential Equations*, Vol. 4, No. 5, P. 590-596.
3. Kiguradze I.T. (1975). Deyaki synhulyarni krayovi zavdannya zvychnykh dyferentsial'nykh rivnyan'. [Some singular boundary value problems for ordinary differential equations]. *Tbilisi: Tbilisi University Publishing House*. 325 p.



УДК 517.929.8

**А. О. Латиш**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

**УСЕРЕДНЕННЯ В ЛІНІЙНИХ ЗА КЕРУВАННЯМ ЗАДАЧАХ  
ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ В  
ДИСКРЕТНОМУ ЧАСІ ІЗ ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ**

Для дискретних рівнянь керованого руху із змінним запізненням у стані системи та з параметром керування, що входить лінійно, обґрунтовано можливість застосування методу усереднення. Для задачі оптимального керування на траєкторіях такої системи з термінальним критерієм доведено теорему про близькість значень критерія неусередненої задачі оптимального керування на оптимальному керуванні усередненої задачі з оптимальним значенням критерія неусередненої (вихідної) задачі. Тобто, оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним керуванням для вихідної задачі. Розроблено числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою в дискретному часі, яка містить змінне запізнення в стані та лінійно залежить від параметра керування.

*MSC: 4637563475835.*

*Ключові слова: метод усереднення, рівняння керованого руху, задача оптимального керування, запізнення, дискретні рівняння.*

*DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294142*

**Вступ**

Метод усереднення широко застосовується до дослідження різноманітних систем. М.М.Крилов і М.М. Боголобов в першій половині минулого століття розробили асимптотичний метод, який знайшов своє застосування не тільки в нелінійній механіці, а й до різних галузей прикладних наук. Книга [2] присвячена огляду асимптотичних методів неланайної механіки. Різницеві рівняння є моделями систем у дискретному часі. Для таких рівнянь також було обґрунтовано можливість застосування методу усереднення [1], для дискретних систем із запізненням метод усереднення обґрунтовано в [6]. Про можливість застосування методу усереднення до задач оптимального керування вперше наголосив М.М. Моїсєєв. В роботах В.О. Плотнікова та учнів його наукової школи метод усереднення застосовується до нових класів задач керування [3], [5], [7], [8]. В згаданих

роботах пропонується усереднювати рівняння керованого руху та спеціальним чином будувати керування усередненої системи. Тобто, керування вихідної та усередненої систем мають різну вимірність, різну природу. Для дискретних керованих систем та для дискретних керованих систем із запізненням такого роду метод усереднення запропоновано в [4], [9]. В даній роботі пропонується обґрунтування методу усереднення для дискретних керованих систем, які лінійно залежать від параметра керування та містять змінне запізнення в стані, пропонується обґрунтування методу усереднення, коли керування вихідної і усередненої системи обираються із однієї множини допустимих керувань. Для задачі оптимального керування на траєкторіях такої системи з термінальним критерієм доведено теорему про близькість значень критерія неусередненої задачі оптимального керування на оптимальному керуванні усередненої задачі з оптимальним значенням критерія неусередненої (вихідної) задачі. Розроблено числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою в дискретному часі, яка містить змінне запізнення в стані та лінійно залежить від параметра керування.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

### 1. Постановка лінійної за керуванням задачі оптимального керування системами в дискретному часі зі змінним запізненням.

Розглянемо лінійну за керуванням задачу оптимального керування зі змінним запізненням відносно стану, яка лінійно залежить від керування та описується системою рівнянь в дискретному часі

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot [f(i, x_i, x_{s(i)}) + A(i, x_i, x_{s(i)}) \cdot u_i], x_0 = x^0, \quad (1)$$

і термінальним критерієм якості

$$J(u) = \Phi(x_N) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (2)$$

де ціле значення  $i$  - поточний момент дискретного часу, що належить множині  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , так як  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ ,  $L = \text{const}$ ,  $\varepsilon > 0$  - малий параметр,  $\lfloor c \rfloor$  - ціла частина числа  $c$ ;  $x_i \in D \subset (R^n)$  - поточний  $n$ -вимірний стан системи, який належить множині  $D$ ;  $u_i \in U \subset \text{comp}(R^r)$  - поточне  $r$ -вимірне керування, яке обирається з компактної множини  $U$ , задана цілозначна функція  $s(i) \in I_s = \{0, 1, 2, \dots, i\}$  визначає момент дискретного

часу впливу змінного запізнення на поточний  $i$ -ий стан системи, очевидно, що  $s(i) \leq i$  для будь-якого  $i \in I$ ;  $f(i, x_i, x_{s(i)})$  - задана  $n$ -вимірна функція,  $A(i, x_i, x_{s(i)})$  - задана  $n \times r$ -матриці;  $\Phi(x_i)$  - задана скалярна функція;  $x^0$  - заданий початковий стан системи.

**Означення 1.** Допустимими керуваннями системи (1) назвемо функції  $u = \{u_i \in U, i \in I\}$  із компактної множини  $U$ , для яких знайдеться значення  $\varepsilon_0 > 0$ , не залежне від  $u \in U$ , таке, що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  відповідний розв'язок  $x = \{x_i, i \in I\}$  системи рівнянь (1) визначений для будь-якого  $i \in I$  та належить замкнутій множині  $D$ .

**Означення 2.** Оптимальним керуванням задачі (1), (2) назвемо таке допустиме керування  $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$ , на якому критерій якості (1) приймає мінімальне значення  $J(u^*) = \min_{u \in U} J(u)$ .

Потрібно знайти таке допустиме керування  $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$  і відповідну йому траєкторію  $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$ , яка є розв'язком системи рівнянь (4.1), при цьому критерій якості (4.2) приймає мінімальне значення  $J(u^*) = \min_{u \in U} J(u)$ .

## 2. Усереднення в лінійних за керуванням задачах керування системами в дискретному часі зі змінним запізненням.

Для розв'язання задачі керування системою (1) застосуємо метод усереднення. Припустимо, що рівномірно відносно цілого  $q \geq 0$  та  $w^1, w^2 \in D$  існують функції  $f_0(w^1, w^2)$ ,  $A_0(w^1, w^2)$ , які задовольняють умови

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f(j, w^1, w^2) - f_0(w^1, w^2) \right\| = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} A(j, w^1, w^2) - A_0(w^1, w^2) \right\| = 0 \quad (4)$$

Системі (1) поставимо у відповідність усереднену систему

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon \cdot [f_0(y_i, y_{s(i)}) + A_0(y_i, y_{s(i)}) \cdot \nu_i], y_0 = x^0, \quad (5)$$

де  $y_i \in D \subset R^n$  - поточний  $n$ -вимірний стан системи;  $\nu_i \in U \subset \text{comp}(R^r)$  - поточне  $r$ -вимірне керування усередненої задачі, що обирається із тієї ж компактної множини  $U$ .

Доведемо, що для будь-якого допустимого керування системи (1) або будь-якого допустимого керування усередненої системи (5), що відповідає обраному керуванню, траєкторії обох задач будуть близькі на скінченному асимптотично великому проміжку дискретного часу.

**Теорема 1.** Нехай в області  $Q = \{i \in I; x_i \in D; u_i \in U\}$  для систем (1) і (5) виконані наступні умови:

1) функція  $f(i, w^1, w^2)$  та матричнозначна функція  $A(i, w^1, w^2)$  рівномірно обмежені сталою  $M > 0$  і для всіх  $i \in I$  задовольняють умову Ліпшиця за  $w^1, w^2$  зі сталою  $\lambda > 0$ ;

2) рівномірно відносно цілого значення  $q \geq 0$  та  $w^1, w^2 \in D$  існують функції  $f_0(w^1, w^2), A_0(w^1, w^2)$ , які задовольняють відношення (3), (4);

3) функція  $s(i)$  приймає цілі значення із множини  $I_s = \{0, 1, 2, \dots, i\}$  для будь-якого  $i \in I$  та задовольняє умову Ліпшиця зі сталою  $\lambda > 0$ ;

4) для будь-якого керування  $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$  усередненої системи (5) відповідний йому розв'язок  $y = \{y_i, i \in I\}$ ,  $y_0 = x^0 \in D' \subset D$  визначений для будь-якого  $i \in I$  та разом зі своїм  $p$ -околом належить області  $D$ .

Тоді для будь-якого  $\eta > 0$  і  $L > 0$  існує таке  $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ , що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  і будь-якого  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$  справедливі наступні твердження:

1) будь-яке допустиме керування  $u = \{u_i \in U, i \in I\}$  системи (1) є допустимим керуванням усередненої системи (5), при цьому для відповідних цьому керуванню розв'язків  $x = \{x_i, i \in I\}$  системи (1) і  $y = \{y_i, i \in I\}$  усередненої системи (5) із спільною початковою умовою  $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$  справедлива оцінка:

$$\|x_i - y_i\| \leq \eta; \quad (6)$$

2) будь-яке допустиме керування  $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$  усередненої системи (5) є допустимим керуванням системи (1), при цьому для відповідних цьому керуванню розв'язків  $y = \{y_i, i \in I\}$  усередненої системи (5) і  $x = \{x_i, i \in I\}$  вихідної системи (1) із загальною початковою умовою  $y_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$  справедлива оцінка (6).

**Доведення.** Доведемо перше твердження теореми. Нехай  $u = \{u_i \in U, i \in I\}$  довільне допустиме керування системи (1),  $x = \{x_i, i \in I\}$  - відповідний розв'язок цієї системи, який визначений для всіх  $i \in I$  і належить

замкнутій множині  $D$ . Нехай  $y = \{y_i, i \in I\}$  - відповідний цьому ж керуванню розв'язок усередненої системи (5) із спільною початковою умовою  $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$ , та який за умовою 4) теореми визначений для всіх  $i \in I$  і разом зі своїм  $p$ -околом належить області  $D$ . Це означає, що керування  $u = \{u_i \in U, i \in I\}$  є допустимим і для усередненої системи.

Визначимо властивості функцій  $f_0(w^1, w^2), A_0(w^1, w^2)$ , що входять в усереднену систему (5). Із побудови (3),(4) при виконанні умови 1) теореми виходить, що всі вони обмежені сталою  $M > 0$  і задовольняють умову Ліпшиця за  $w^1, w^2$  зі сталою  $\lambda > 0$ .

Оберемо довільне значення  $\eta > 0$  і зафіксуємо його. Оцінимо різницю між розв'язками початкової системи (1) і відповідної усередненої системи (5) в довільний момент дискретного часу  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}, N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ . Для цього оберемо ціле значення  $T(\varepsilon)$ , яке має такі властивості

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot T(\varepsilon) = 0, \quad (7)$$

На множині  $I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  зафіксуємо моменти часу  $kh$ , віддалені один від одного на відстані  $T(\varepsilon)$ . При цьому отримаємо час, який повільно змінюється

$$k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}, \quad N_k = \lfloor L/\varepsilon T \rfloor. \quad (8)$$

Для довільного значення дискретного часу  $i \in I$  знайдеться момент повільного часу  $k \in I_k$  такий, що  $i \in [kh, (k+1)h - 1)$  і буде справедлива нерівність

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \|x_{i+1} - x_{kh}\| + \|x_{kh} - y_{kh}\| + \|y_{kh} - y_{i+1}\|. \quad (9)$$

В отриманій нерівності оцінимо кожен доданок окремо. Для першого доданку в (9) при виконанні умов 1) теореми отримаємо

$$\begin{aligned} & \|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \\ & \leq \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^i [f(j, x_j, x_{s(j)}) + A(j, x_j, x_{s(j)}) \cdot u_j] \right\| \leq \\ & \leq \varepsilon \sum_{j=kh}^i (M + M \|u_j\|). \end{aligned}$$

Значення  $u_i \in U$  допустимого керування  $u = \{u_i \in U, i \in I\}$  системи (1) обираються із компактної множини  $U$ , тому знайдеться така стала  $K \geq 0$ , що для будь-якого  $i \in I$  буде справедлива оцінка

$$\|u_i\| \leq K, \quad (10)$$

звідси для першого доданку в (9) виходить, що

$$\|x_{i+1} - x_{kh}\| \leq \varepsilon h M (1 + K). \quad (11)$$

Аналогічно для третього доданку в (9) при виконанні умови 1) теореми і властивостей функцій, що входять в усереднену систему, отримуємо

$$\begin{aligned} & \|y_{i+1} - y_{kh}\| \leq \\ & \leq \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^i [f_0(y_j, y_{s(j)}) + A_0(y_j, y_{s(j)}) \cdot u_j] \right\| \leq \\ & \leq \varepsilon h M (1 + K). \end{aligned} \quad (12)$$

У нерівності (9) залишилось оцінити другий доданок. Для цього системи (1) і (5) при  $k \in I_k$  представимо у виді

$$\begin{aligned} x_{(k+1)h} &= x_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [f(j, x_j, x_{s(j)}) + A(j, x_j, x_{s(j)}) \cdot u_j] \\ y_{(k+1)h} &= y_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [f_0(y_j, y_{s(j)}) + A_0(y_j, y_{s(j)}) \cdot u_j] \end{aligned}$$

Розглянемо відповідну різницю і перетворимо її з урахуванням обмеження (10) наступним чином

$$\begin{aligned} & \|x_{(k+1)h} - y_{(k+1)h}\| \leq \|x_{kh} - y_{kh}\| + \\ & + \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [f(j, x_j, x_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| + \\ & + \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [A(j, x_j, x_{s(j)}) \cdot u_j - A_0(y_j, y_{s(j)}) \cdot u_j] \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x_{kh} - y_{kh}\| + \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [f(j, x_j, x_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| + \\
&\quad + \varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|A(j, x_j, x_{s(j)}) - A_0(y_j, y_{s(j)})\| \quad (13)
\end{aligned}$$

У відношенні (13) оцінимо кожен доданок. Для другого доданку з урахуванням виконання умови 1) теореми при всіх  $k \in I_k$  отримаємо

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [f(j, x_j, x_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| \leq \\
&\leq \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|f(j, x_j, x_{s(j)}) - f(j, x_{kh}, x_{s(kh)})\| + \\
&\quad + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|f(j, x_{kh}, x_{s(kh)}) - f(j, y_{kh}, y_{s(kh)})\| + \\
&\quad + \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [f(j, y_{kh}, y_{s(kh)}) - f_0(y_{kh}, y_{s(kh)})] \right\| + \\
&\quad + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|f_0(y_{kh}, y_{s(kh)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})\| \leq \\
&\leq \varepsilon \lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|x_j - x_{kh}\| + \|x_{s(j)} - x_{s(kh)}\|) + \\
&\quad + \varepsilon \lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|) + \\
&\quad + \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f(j, y_{kh}, y_{s(kh)}) - h \cdot f_0(y_{kh}, y_{s(kh)}) \right\| + \\
&\quad + \varepsilon \lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|y_{kh} - y_j\| + \|y_{s(kh)} - y_{s(j)}\|). \quad (14)
\end{aligned}$$

Оцінимо окремо деякі вирази, що входять в (14). При виконанні умов 1), 3) теореми та обмеження (10) для будь-якого  $s(j) \leq j, j \in [kh, (k+1)h), k \in I_k$  отримаємо

$$\begin{aligned} & \|x_{s(j)} - x_{s(kh)}\| \leq \\ & \leq \varepsilon \left\| \sum_{\min(s(j), s(kh)) \leq t < \max(s(j), s(kh))} [f(t, x_t, x_{s(t)}) + A(t, x_t, x_{s(t)}) \cdot u_t] \right\| \leq \\ & \leq \varepsilon M (1 + K) \cdot \|s(j) - s(kh)\| = \\ & = \varepsilon \lambda_s M (1 + K) \cdot \|j - kh\| \leq \varepsilon h \lambda_s M (1 + K). \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогічно отримуємо оцінку для виразу

$$\begin{aligned} & \|y_{s(j)} - y_{s(kh)}\| \leq \\ & \leq \varepsilon \left\| \sum_{\min(s(j), s(kh)) \leq t < \max(s(j), s(kh))} [f_0(y_t, y_{s(t)}) + A_0(y_t, y_{s(t)}) \cdot u_t] \right\| \leq \\ & \leq \varepsilon M (1 + K) \cdot \|s(j) - s(kh)\| = \\ & = \varepsilon \lambda_s M (1 + K) \cdot \|j - kh\| \leq \varepsilon h \lambda_s M (1 + K). \end{aligned} \quad (16)$$

При виконанні умови 2) теореми маємо існування границі (3), а це означає, що знайдеться монотонно спадна функція  $\psi(h)$ , яка задовольняє відношення  $\lim_{h \rightarrow \infty} \psi(h) = 0$  і така, що для третього доданку в (14) при будь-якому  $k \in I_k$  виконується нерівність

$$\varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f(j, y_{kh}, y_{s(kh)}) - h \cdot f_0(y_{kh}, y_{s(kh)}) \right\| \leq \varepsilon h \psi(h). \quad (17)$$

Враховуючи отримані оцінки (11), (12), (15) - (17), із нерівності (14) при всіх  $k \in I_k$  буде слідувати оцінка другого доданку в (13) у виді

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} [f(j, x_j, x_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| \leq \\ & \leq 2\varepsilon \lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\varepsilon h M (1 + K) + \varepsilon h \lambda_s M (1 + K)) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|) + \varepsilon\lambda\psi(h) \leq \\
& \leq 2\varepsilon h\lambda\varepsilon hM(1+K)(1+\lambda_s) + \varepsilon h\psi(h) + \\
& +\varepsilon h\lambda (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|). \tag{18}
\end{aligned}$$

У відношенні (13) оцінимо третій доданок. При виконанні умов 1), 2) теореми, з урахуванням оцінок (11), (12), (15), (16) і існування границі (4), для будь-якого  $k \in I_k$  отримаємо

$$\begin{aligned}
& \varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|A(j, x_j, x_{s(j)}) - A_0(y_j, y_{s(j)})\| \leq \\
& \leq \varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|A(j, x_j, x_{s(j)}) - A(j, x_{kh}, x_{s(kh)})\| + \\
& +\varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|A(j, x_{kh}, x_{s(kh)}) - A(j, y_{kh}, y_{s(kh)})\| + \\
& +\varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|A(j, y_{kh}, y_{s(kh)}) - A_0(y_{kh}, y_{s(kh)})\| + \\
& +\varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|A_0(y_{kh}, y_{s(kh)}) - A_0(y_j, y_{s(j)})\| \leq \\
& \leq \varepsilon\lambda K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|x_j - x_{kh}\| + \|x_{s(j)} - x_{s(kh)}\|) + \\
& +\varepsilon\lambda K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|) + \\
& +\varepsilon h K \cdot \frac{1}{h} \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|A(j, y_{kh}, y_{s(kh)}) - A_0(y_{kh}, y_{s(kh)})\| + \\
& +\varepsilon\lambda K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|y_{kh} - y_j\| + \|y_{s(kh)} - y_{s(j)}\|) \leq \\
& \leq 2\varepsilon h\lambda K\varepsilon hM(1+K)(1+\lambda_s) + \varepsilon h K\psi(h) +
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon h \lambda K (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|). \quad (19)$$

Отже, виходячи з оцінок (18) - (19) для доданків в (13), отримаємо

$$\begin{aligned} & \|x_{(k+1)h} - y_{(k+1)h}\| \leq \|x_{kh} - y_{kh}\| + \\ & + 2\varepsilon h \lambda K \varepsilon h M (1 + 2K) (1 + \lambda) + \varepsilon h \psi(h) + \\ & + \varepsilon h \lambda (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|) + \\ & + 4\varepsilon h \lambda K \varepsilon h M (1 + 2K) (1 + \lambda_s) + 2\varepsilon h K \psi(h) + \\ & + 2\varepsilon h \lambda K (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|) \leq \\ & \leq \|x_{kh} - y_{kh}\| + 2\varepsilon h \lambda \varepsilon h M (1 + 2K)^2 (1 + \lambda_s) + \varepsilon h (1 + 2K) \psi(h) + \\ & + \varepsilon h \lambda (1 + 2K) (\|x_{kh} - y_{kh}\| + \|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\|). \end{aligned} \quad (20)$$

Введемо позначення

$$\delta_k = \max_{0 \leq j \leq kh} \|x_j - y_j\|, \quad (21)$$

тоді нерівність (20) можна представити у вигляді нерівності

$$\begin{aligned} & \|x_{(k+1)h} - y_{(k+1)h}\| \leq \\ & \leq (1 + 2\varepsilon h \lambda (1 + 2K)) \cdot \delta_k + 2\varepsilon h \lambda \varepsilon h M (1 + 2K)^2 (1 + \lambda_s) + \varepsilon h (1 + K) \psi(h), \end{aligned}$$

яка виконується для будь-якого  $k \in \{0, 1, \dots, N_k - 1\}$ , отже

$$\begin{aligned} \delta_{N_k} & \leq (1 + 2\varepsilon h \lambda (1 + 2K)) \cdot \delta_{N_{k-1}} + \\ & + \varepsilon h (1 + 2K) \cdot [2\varepsilon h \lambda M (1 + 2K) (1 + \lambda_s) + \psi(h)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Далі отримаємо

$$\begin{aligned} \delta_{N_k} & \leq \varepsilon h (1 + 2K) \cdot [2\varepsilon h \lambda M (1 + K) (1 + \lambda_s) + \psi(h)] \times \\ & \times \frac{(1 + 2\varepsilon h \lambda (1 + K))^{N_k - 1} - 1}{(1 + 2\varepsilon h \lambda (1 + K)) - 1} \leq \\ & \leq \left[ \varepsilon h M (1 + K) (1 + \lambda_s) + \frac{\psi(h)}{2\lambda} \right] \left( e^{2\lambda L(1+K)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (23)$$

З урахуванням оцінок (11), (12), (23) для доданків, що входять в праву частину нерівності (9), і позначення (21) для всіх  $i \in [kh, (k+1)h - 1)$ ,  $k \in I_k$  справедливим є

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq 2\varepsilon h M (1 + K) + \left[ \varepsilon h M (1 + K) (1 + \lambda_s) + \frac{\psi(h)}{2\lambda} \right] \left( e^{2\lambda L(1+K)} - 1 \right). \quad (24)$$

Враховуючи поведінку функції  $\psi(h)$ ,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \psi(h) = 0$ , і властивості (7), для правої частини отриманої нерівності буде справедливе співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2\varepsilon h M (1 + K) + \left[ \varepsilon h M (1 + K) (1 + \lambda_s) + \frac{\psi(h)}{2\lambda} \right] \left( e^{2\lambda L(1+K)} - 1 \right) \right) = 0.$$

Це означає, що для довільно обраних  $\eta > 0$  і  $L > 0$  знайдеться таке  $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ , що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  і будь-якого  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$  із нерівності (24) буде впливати оцінка (6). За умовою теореми розв'язок  $y = \{y_i, i \in I\}$  усередненої системи (5) разом зі своїм  $p$ -околом належить області  $D$ . Вимагатимемо, щоб розв'язок  $x = \{x_i, i \in I\}$  системи (1) знаходився в тому самому  $p$ -околі розв'язку усередненої системи  $\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \eta < p$ , а значить також належав області  $D$ , не виходячи за її межі.

Перша частина теореми доведена.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай  $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$  - допустиме керування усередненої системи (5), а  $y = \{y_i, i \in I\}$  - відповідний йому розв'язок, який за умовою теореми разом із своїм  $p$ -околом належить області  $D$ . Нехай  $x = \{x_i, i \in I\}$  - відповідний цьому ж керуванню розв'язок системи (1), який задовольняє спільну початкову умову  $y_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$ . Оцінка різниці для розв'язків початкової системи (1) і усередненої системи (5), що відповідають допустимому керуванню  $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$  для усередненої системи, проводиться так само, як і в першій частині доведення. Вимога  $\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \eta < p$  для будь-якого  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$  означає, що розв'язок  $x = \{x_i, i \in I\}$  початкової системи (1) знаходиться в  $p$ -околі розв'язку  $y = \{y_i, i \in I\}$  усередненої системи (5) і за умовою 4) теореми не виходить за межу області  $D$  для жодного моменту дискретного часу  $i \in I$ . Це означає, що керування  $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$  усередненої системи (5) дійсно є допустимим і для

початкової системи (1), а для відповідних розв'язків цих систем справедлива оцінка (6) теореми. Тим самим доведено друге твердження теореми. Теорема доведена.

### 3. Усереднення в лінійних за керуванням задачах оптимального керування в дискретному часі зі змінним запізненням.

Для задачі оптимального керування (1), (2), в яку керування входить лінійно, розглянемо відповідну усереднену задачу оптимального керування. Задача описується автономною системою рівнянь (5) в дискретному часі  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ , яка містить змінне запізнення в стані, і термінальний критерій якості

$$J_0(\nu) = \Phi(y_N) \rightarrow \min_{\nu \subset U}. \quad (25)$$

Через  $\nu^* = \{\nu_i^* \in U, i \in I\}$  позначимо оптимальне керування задачі (5), (25), на якому критерій якості (25) приймає мінімальне значення  $J_0(\nu^*) = \min_{\nu \subset U} J_0(\nu)$ . Встановимо відношення між оптимальним розв'язком вихідної задачі (1), (2) і оптимальним розв'язком усередненої задачі (5), (25).

**Теорема 2.** *Нехай в області  $Q = \{i \in I; x_i \in D; u_i \in U\}$  для задач оптимального керування (1), (2) і (5), (25) виконані умови теореми 1. Крім того: 5) функція  $\Phi(x)$  задовольняє умови Ліпшица зі сталою  $\lambda > 0$ . Тоді оптимальний розв'язок усередненої задачі (5), (25) є асимптотично оптимальним розв'язком задачі (1), (2), тобто для будь-яких  $\eta > 0$  і  $L > 0$  знайдеться таке  $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ , що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  справедливі оцінки*

$$|J^* - J_0^*| \leq \eta, \quad J(\nu^*) - J^* \leq \eta \quad (26)$$

де  $J^* = J(u^*)$  і  $J_0^* = J_0(\nu^*)$  - оптимальне значення критеріїв якості задачі (1), (2) і усередненої задачі (5), (25) відповідно,  $J(\nu^*)$  - значення критерія якості задачі (1), (2) на оптимальному керуванні усередненої задачі (5), (25).

**Доведення.** Із постановки задач виходить, що множина допустимих керувань  $U$  вихідної системи (1) є не пустою компактною множиною, а множина відповідних розв'язків  $D$  системи (1) є замкненою. При виконанні умови 1) теореми виходить, що множина  $D$  є обмеженою, а значить

також компактною, і для задачі оптимального керування виду (1), (2) в дискретному часі  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$  завжди існує оптимальне керування  $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$  і відповідний оптимальний розв'язок  $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$  для будь-якого початкового стану системи. При цьому критерій якості (2) на оптимальному керуванні приймає скінченне значення  $J^* = J(u^*) = \min_{u \in U} J(u)$ . Аналогічно, для усередненої задачі оптимального керування виду (5), (25) в дискретному часі  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$  існує оптимальне керування  $\nu^* = \{\nu_i^* \in U, i \in I\}$  і відповідний розв'язок  $y^* = \{y_i^*, i \in I\}$  і відповідне скінченне значення критерія якості  $J_0^* = J_0(\nu^*) = \min_{\nu \in U} J_0(\nu)$ . Виконання умов теореми для будь-якого допустимого значення керування  $u = \{u_i \in U, i \in I\}$  вихідної системи (1) означає, що умови теореми виконуються і для оптимального керування  $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$  з відповідним оптимальним розв'язком  $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$  задачі (1), (2). Отже, на підставі теореми 1, для обраних  $\eta_0 > 0$  і  $L > 0$  знайдеться  $\varepsilon_0(\eta_0, L) > 0$ , таке, що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  і будь-якого  $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$  оптимальне керування  $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$  вихідної задачі (1), (2) є допустимим керуванням усередненої задачі (5), (25), а для відповідних йому розв'язків  $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$  вихідної задачі (1), (2) і  $\bar{y} = \{\bar{y}_i, i \in I\}$  усередненої задачі (5), (25) із спільною початковою умовою  $x_0^* = \bar{y}_0 = x^0 \in D' \subset D$  справедлива оцінка

$$\|x_i^* - \bar{y}_i\| \leq \eta_0$$

Нерівність виконується для будь-якого  $i \in I$ , значить і для  $i = N$ , тому при виконанні умови 5) теореми отримаємо

$$|J(u^*) - J_0(u^*)| = |\Phi(x_N^*) - \Phi(\bar{y}_N)| \leq \lambda \cdot \|x_N^* - \bar{y}_N\| \leq \lambda \eta_0 = \eta. \quad (27)$$

Аналогічно, оптимальне керування  $\nu^* = \{\nu_i^* \in U, i \in I\}$  усередненої задачі (5), (25) є допустимим керуванням задачі (1), (2), а для відповідних йому розв'язків  $y^* = \{y_i^*, i \in I\}$  усередненої задачі (5), (25) і  $\bar{x} = \{\bar{x}_i, i \in I\}$  задачі (1), (2) із спільною початковою умовою  $y_0^* = \bar{x}_0 = x^0 \in D' \subset D$  справедливі оцінки

$$\|y_i^* - \bar{x}_i\| \leq \eta_0,$$

$$|J_0(\nu^*) - J(\nu^*)| = |\Phi(y_N^*) - \Phi(\bar{x}_N)| \leq \lambda \cdot \|y_N^* - \bar{x}_N\| \leq \lambda \eta_0 = \eta. \quad (28)$$

На оптимальному керуванні критерій якості приймає мінімальне значення, тому для будь-якого іншого допустимого керування відповідних задач виконуються нерівності

$$J(\nu^*) \geq J(u^*), \quad J_0(u^*) \geq J_0(\nu^*). \quad (29)$$

Для оптимальних значень критеріїв якості задачі (1), (2) і усередненої задачі (5), (25) може виконуватись одна із двох нерівностей

$$J(u^*) \geq J_0(\nu^*) \quad \text{або} \quad J(u^*) < J_0(\nu^*)$$

У першому випадку із (29), (28) маємо

$$J(\nu^*) \geq J(u^*) \geq J_0(\nu^*) \geq J(\nu^*) - \eta, \quad \text{звідси} \quad |J(u^*) - J_0(\nu^*)| \leq \eta.$$

У другому випадку із (29), (28) маємо

$$J_0(u^*) \geq J_0(\nu^*) > J(u^*) \geq J_0(u^*) - \eta, \quad \text{звідси} \quad |J_0(\nu^*) - J(u^*)| \leq \eta.$$

Отже, в обох випадках справедлива перша нерівність в (26), із якої з урахуванням нерівності (29) випливає друга нерівність в (26).

Теорема доведена.

Отже оптимальне керування усередненої системи є асимптотично оптимальним для вихідної системи.

**4. Числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою в дискретному часі із змінним запізненням та такою, що лінійно залежить від параметра керування.**

Таким чином, доведені теореми обґрунтовують числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою в дискретному часі із змінним запізненням та такою, що лінійно залежить від параметра керування (1), (2), реалізація якого здійснюється наступним чином:

1. Для керованої функціонально-диференціальної системи (1) будемо усереднену систему (5).
2. Розв'язуємо усереднену задачу оптимального керування (5),(25), знаходимо оптимальне керування  $\nu^*$  усередненої задачі.

3. Будуємо траєкторію  $x(t, \nu^*)$  вихідної системи (1), яка відповідає керуванню  $\nu^*$ .
4. Для асимптотично оптимального керування  $\nu^*$  знаходимо значення функціоналу якості (2), яке згідно з теоремою 2 відрізняється від оптимального значення на малу величину  $\eta$ .

## Висновки

Отже, в роботі доведено можливість застосування методу усереднення для задачі оптимального керування системою у дискретному часі, що лінійно залежить від керування та містить змінне апізнєння стані. Розроблено числово асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування такою системою.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данилов В. И., Мартынюк Д. И., Паньков В. Г. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений / В. И. Данилов, Д. И. Мартынюк, В. Г. Паньков // Украинский математический журнал. – 1996. – Т. 48, № 4. – С. 464–475. doi: 10.1007/BF02390612
2. Митропольський Ю. О. Методи нелінійної механіки / Ю. О. Митропольський. – К.: Наукова думка, 2005. – 527 с.
3. Плотников В. А. Метод усреднения в задачах управления. / В. А. Плотников. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
4. Плотников В. А., Плотникова Л. И., Яровой А. Т. Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелінійні коливання. – 2004. – Т.7, №2. – С.241–254.
5. Dashkovskiy S., Kichmarenko O., Sapozhnikova K. Approximation of Solutions to the Optimal Control Problems for Systems with Maximum / S. Dashkovskiy, O. Kichmarenko, K. Sapozhnikova // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 243, № 2. – P.192–203. doi: 10.1007/s10958-019-04535-z
6. Kichmarenko O. D., Karpycheva M. L. General averaging scheme for discrete equations with variable delay / O. D. Kichmarenko, M. L. Karpycheva // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. – 226, No. 3. – P.270–284. doi: 10.1007/s10958-017-3533-y
7. Kichmarenko O. D. Schemes of Complete Averaging in the Problem of Optimal Control Over a Functional-Differential System / O. D. Kichmarenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 243, No. 3. – P.421-432. doi: 10.1007/s10958-019-04548-8

8. **Kichmarenko O. D.** Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters / O. D. Kichmarenko // *Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2017. – 115, No. 1. – P. 93–114, doi: 10.12732/ijpam.v115i1.8.
9. **Kichmarenko O., Karpycheva M.** Averaging method for controlled discrete systems with variable delays. / O. Kichmarenko, M. Karpycheva // *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*. – 2016. – Vol. 4, No. 1. – P. 41–47.
10. **Kolmanovskii V. B., Shaikhet L. E.** Control of systems with after-effect. / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet. – Amer. Math. Society., Providence, 1992. – 157 p.



*Latysh A.*

AN AVERAGING IN LINEAR BY CONTROL OPTIMAL CONTROL PROBLEM ON DISCRET TIME WITH VARIABLE DELAY

*Summary*

For discrete equations of controlled motion with a varying delay in the state of the system and with a linearly input control parameter, the possibility of applying the averaging method has been proved. For the optimal control problem on the trajectories of such a system with a terminal criterion, the theorem on the proximity of the values of the criterion of the non-averaged optimal control problem on the optimal control of the averaged problem with the optimal value of the criterion of the non-averaged (initial) problem has been proved. That is, the optimal control of the averaged problem is asymptotically optimal control for the original problem. A numerically asymptotic method for solving the optimal control problem of a system in discrete time, which contains a varying delay in the state and linearly depends on the control parameter, has been developed.

*Key words: averaging method, equations of controlled motion, optimal control problem, delay, discrete equations.*

## REFERENCES

1. Martynyuk, D. I., Danilov, V. Y. & Pan'kov, V.G. (1996). Vtoraya teorema N.N. Bogolyubova dlya sistem raznostnykh uravneniy [Second Bogolyubov theorem for systems of difference equations]. *Ukr Math J.* Vol. 48, No. 4, P. 516–529. doi: 10.1007/BF02390612
2. Mytropolskiy, Yu. O. (2005). *Metody nelineynoy mehaniki [Methods in Nonlinear Mechanics]*. Kyiv: Naukova Dumka, 527 p.
3. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usredneniya v zadachakh upravleniya [Averaging Method in Problems of Control]*. Kiev: Lybid, 188 p.
4. Plotnikov, V. A., Plotnikova, L. I., Yarovoi, A. T. (2004). Metod usredneniya diskretnykh sistem i ego prilozheniye k zadacham upravleniya [Averaging method for discrete systems and its application to controlproblems]. *Nonlinear Oscillations*, Vol. 7, No. 2, P. 240–253.
5. Dashkovskiy, S., Kichmarenko, O., Sapozhnikova, K. (2019). Approximation of Solutions to the Optimal Control Problems for Systems with Maximum. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 243, No. 2, P. 192–203. doi: 10.1007/s10958-019-04535-z

6. Kichmarenko, O. D., Karpycheva, M. L. (2017). General averaging scheme for discrete equations with variable delay. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 226, No. 3, P. 270–284. doi: 10.1007/s10958-017-3533-y
7. Kichmarenko, O. D. (2019). Schemes of Complete Averaging in the Problem of Optimal Control Over a Functional-Differential System *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 243, No. 3, P. 421–432. doi: 10.1007/s10958-019-04548-8
8. Kichmarenko, O. D. (2017). Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters. *Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 115, No. 1, P. 93–114. doi: 10.12732/ijpam.v115i1.8.
9. Kichmarenko, O., Karpycheva, M. (2016). Averaging method for controlled discrete systems with variable delays. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, Vol. 4, No. 1, P. 41–47.
10. Kolmanovskii, V.B. and Shaikhet, L.E. (1992). *Control of systems with after-effect*. Providence: Amer. Math. Society, 157 p.

УДК 517.925

Г. Є. Самкова, Д. Є. Ліманська

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## ДЕЯКІ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРЯМОКУТНИМИ МАТРИЦЯМИ, ЯКІ ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНИХ, НАВКОЛО ПОЛЮСА.

Стаття містить результати досліджень, виконаних за підтримки Національного Фонду Досліджень України, проект Ф81/41743

У сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь та систем рівнянь з невідомою комплекснозначною функцією комплексної змінної чільне місце займають системи рівнянь, які не розв'язані або частково розв'язані відносно похідних. Вивчається система звичайних диференціальних рівнянь, які частково розв'язні відносно похідних, з прямокутними матрицями навколо полюса. У статті наведені умови приведення системи звичайних диференціальних рівнянь, яка частково розв'язна відносно похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь спеціального вигляду. Доведена теорема з достатніми умовами існування хоча б одного розв'язку задачі Коші, у якого частина компонентів є аналітичними функціями у областях з нерухомою особливою на межі, а решта компонентів є функціями вибраними з певного класу функцій.

MSC: 39A45.

Ключові слова: система звичайних диференціальних рівнянь, яка частково розв'язна відносно похідних, задача Коші, нерухомою особлива точка, ізолювана особлива точка, полюс.

DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294144

### Вступ

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$A(z)Y' = B(z)Y + f(z, Y, Y'), \quad (1)$$

де матриці  $A : D_1 \rightarrow \mathbb{C}^{p \times n}$ ,  $B : D_{10} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times n}$ ,  $p < n$ ,  $D_1 = \{z : |z| < R_1, R_1 > 0, D_{10} = D_1 \setminus \{0\}$ , матриця  $A = A(z)$  – аналітична в області  $D_1$ , а матриця  $B = B(z)$  – аналітична в області  $D_{10}$ . Вектор-функція  $f : D_1 \times G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}^p$ , де області  $G_k \subset \mathbb{C}^n$ ,  $0 \in G_k$ ,  $k = 1, 2$ , вектор-функція  $f = f(z, Y, Y')$  є аналітичною в області  $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$ ,  $G_{k0} = G_k \setminus \{0\}$ ,  $k = 1; 2$ , та має в точці  $(0, 0, 0)$  ізолювану особливу точку, а отже, точка  $(0, 0, 0)$  є усупною особливою точкою для функції багатьох змінних  $f = f(z, Y, Y')$

[1]. Довизначимо вектор-функцію  $f$  у точці  $(0, 0, 0)$  так, що б вона стала аналітичною функцією в області  $D_1 \times G_1 \times G_2$ . Нехай розклад вектор-функції  $f = f(z, Y, Y')$  у збіжний степеневий ряд в околі точки  $(0, 0, 0)$  не має вільних та лінійних членів.

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Систему (1) досліджуємо у припущенні, що  $\text{rang} A(z) = p$  при  $z \in D_1$ .

Введемо функцію  $Y = \text{col}((Y_1 \ Y_2)), Y_1 = \text{col}(Y_{11}(z), \dots, Y_{1p}(z)), Y_2 = \text{col}(Y_{21}(z), \dots, \dots, Y_{2n-p}(z)), Y_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{C}^p, Y_2 : D_{10} \rightarrow \mathbb{C}^{n-p}$ . Без обмеження спільності, будемо вважати, що матриці  $A(z), B(z)$  та вектор-функція  $f = f(z, Y, Y')$  мають вигляд

$$A(z) = (A_1(z) \ A_2(z)),$$

$$B(z) = (B_1(z) \ B_2(z)),$$

$$f(z, Y, Y') = f^*(z, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2),$$

$$A_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p},$$

$$A_2 : D_{10} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times (n-p)},$$

$$B_1 : D_{10} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p},$$

$$B_2 : D_{10} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times (n-p)},$$

$\det A_1(z) \neq 0$  при  $z \in D_1$ ,

$$f^* : D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22} \rightarrow \mathbb{C}^p,$$

$$G_{j1} \times G_{j2} = G_j, G_{j1} \subset \mathbb{C}^p, G_{j2} \subset \mathbb{C}^{n-p}, j = 1, 2,$$

та розвинення вектор-функції  $f^* = f^*(z, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2)$  у збіжний степеневий ряд в околі точки  $(0, 0, 0, 0, 0)$  не має вільних та лінійних членів.

Позначимо

$$\begin{aligned} A_1^{-1}(z)B_2(z)Y_2 - A_1^{-1}(z)A_2(z)Y'_2 + A_1^{-1}(z)f^*(z, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2) = \\ = F^*(z, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2). \end{aligned}$$

Тоді система (1) набуде вигляду

$$Y'_1 = A_1^{-1}(z)B_1(z)Y_1 + F^*(z, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2). \quad (2)$$

За умовою вектор-функція  $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$  є аналітичною в області  $D_1 \times G_{110} \times G_{120} \times G_{210} \times G_{220}$ ,  $G_{jk0} = G_{jk} \setminus \{0\}$ ,  $j, k = 1, 2$ , тобто, у точці  $(0, 0, 0, 0, 0)$  має ізольовану особливу точку, отже, точка  $(0, 0, 0, 0, 0)$  є усунутою особливою точкою для функції  $F^*$  [1]. Довизначимо вектор-функцію  $F^*$  у точці  $(0, 0, 0, 0, 0)$  так, що б вона стала аналітичною функцією в області  $D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22}$ . Не обмежуючи спільності, будемо вважати, що  $F^*(0, 0, 0, 0, 0) = 0$ .

Під  $H_u^{n-p}$  будемо розуміти клас  $(n-p)$ -вимірних аналітичних в області  $D_{10}$  функцій, що мають в точці  $z = 0$  полюс порядку  $u$ ,  $u \in \mathbb{N}$ .

Розглянемо випадок, коли  $A_1^{-1}(z)B_1(z)$  – аналітична матриця в області  $D_{10}$  та у точці  $z = 0$  має полюс порядку  $r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , а вектор-функція  $Y_2 \in H_u^{n-p}$ . Тоді функція  $Y_2 = Y_2(z)$  може бути зображена у вигляді збіжного ряду Лорана при  $z \in D_{10}$ .

$$Y_2(z) = z^{-u} Y_2^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^{k-u},$$

де  $B_k \in \mathbb{C}^{n-p}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $Y_2^*(z)$  – аналітична вектор-функція в області  $D_1$  така, що  $Y_2^*(0) = B_0 \neq 0$ . Оскільки,  $B_0 \neq 0$ , то вектор-функція  $Y_2^*(z)$  у точці  $z = 0$  має полюс порядку  $u + 1$ .

Оскільки, вектор-функція  $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$  – аналітична в області  $D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22}$ , то  $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$  можна уявити в околі точки  $(0, 0, 0, 0, 0)$  у вигляді збіжного степеневого ряду

$$\begin{aligned} F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2') &= \\ &= \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=1, |k|+|d| \neq 0} C_{ajkbd} z^a Y_1^j Y_2^k (Y_1')^b (Y_2')^d + \\ &+ \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=2}^{\infty} C_{ajkbd} z^a Y_1^j Y_2^k (Y_1')^b (Y_2')^d, \end{aligned}$$

де  $C_{ajkbd} \in \mathbb{C}^p$ , де  $j = (j_1, \dots, j_p)$ ,  $|j| = j_1 + \dots + j_p$ ,  $(Y_1)^j = (Y_{11})^{j_1} \dots (Y_{1p})^{j_p}$ ,  $b = (b_1, \dots, b_p)$ ,  $|b| = b_1 + \dots + b_p$ ,  $(Y_1')^b = (Y_{11}')^{b_1} \dots (Y_{1p}')^{b_p}$ ,  $k = (k_1, \dots, k_{n-p})$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_{n-p}$ ,  $(Y_2)^k = (Y_{21})^{k_1} \dots (Y_{2n-p})^{k_{n-p}}$ ,  $d = (d_1, \dots, d_{n-p})$ ,  $|d| = d_1 + \dots + d_{n-p}$ ,  $(Y_2')^d = (Y_{21}')^{d_1} \dots (Y_{2n-p}')^{d_{n-p}}$ .

Припустимо, що існують  $q \in \mathbb{N}$  та  $s \in \mathbb{N}$  такі, що

- для деяких  $a_0 \in \mathbb{N}$ ,  $j_0 = (j_{01}, \dots, j_{0p})$ ,  $j_{0h} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $h = (1, p)$ ,  $b_0 = (b_{01}, \dots, b_{0p})$ ,  $b_{0h} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $h = \overline{1, p}$ , що при  $|k| = q$ ,  $|d| = s$ ,  $C_{a_0 j_0 k b_0 d} \neq 0$ ;
- для будь-яких  $h, m \in \mathbb{N}$ , та  $\mu = 1, 2, \dots, n - p$ ,  $c = 1, 2, \dots, n - p$ ,  $C_{aj(k+he_\mu)b(d+me_c)} = 0$ , якщо  $|k| = q$ ,  $|d| = s$ ,  $e_\mu - (n - p)$ -вимірний  $\mu$ -тий одиничний орт.

Отже, елементи розкладання функції  $F^*$  в околі точки  $(0, 0, 0, 0, 0)$  в степеневий ряд, який містить максимальні ступені вектор-функцій  $Y_2$  та  $Y_2'$  з відмінними від нуля коефіцієнтами, матимуть вигляд

$$C_{ajkbd} z^a Y_1^j Y_2^k (Y_1')^b (Y_2')^d = C_{ajkbd} z^{a-ug-(u+1)s} Y_1^j (Y_2^*)^k (Y_1')^b (z Y_2^{*'} - u Y_2^*)^d,$$

при  $a = 0, 1, 2, \dots$ ,  $|j| = 0, 1, 2, \dots$ ,  $|b| = 0, 1, 2, \dots$ ,  $|k| = q$ ,  $|d| = s$ . Принаймні, такі складові будуть при  $a = a_0$ ,  $j = j_0$ ,  $b = b_0$ . Позначимо, через  $l = uq + (u + 1)s$ , та

$$\tilde{a}_0 = \min_{\{a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} : C_{a_0 j_0 k b_0 d} \neq 0\}} a_0.$$

У такому випадку можливі дві логічні ситуації:

1)  $\tilde{a}_0 - l \geq 0$ . Тоді для довільної фіксованої функції  $Y_2 \in H_r^{n-p}$ ,  $F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2') = F^{(5)}(z, Y_1, Y_1')$ , де  $F^{(5)} = F^{(5)}(z, Y_1, Y_1')$  – аналітична функція у точці  $(0, 0, 0)$ , і система (2) приводиться до системи

$$z^r Y_1' = \check{P}^{(5)}(z) Y_1 + z^r H^{(5)}(z, Y_1, Y_1'),$$

де  $\check{P}^{(5)}(z)$  – аналітична матриця у області  $D_1$ ,  $H^{(5)} = H^{(5)}(z, Y_1, Y_1')$  – аналітична вектор-функція у області  $D_1 \times G_{11} \times G_{21}$ . Цей випадок розглянуто у роботі [3, ст. 33].

2)  $\tilde{a}_0 - l < 0$ , тоді вектор-функція  $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$  може бути зображена у вигляді

$$\begin{aligned} & F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2') = \\ & = z^{-l} \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=1, |k|+|d| \neq 0} C_{ajkbd} z^a Y_1^j (Y_2^*)^k (Y_1')^b (z Y_2^{*'} - r Y_2^*)^d + \\ & + \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=2}^{\infty} C_{ajkbd} z^a Y_1^j (Y_2^*)^k (Y_1')^b (z Y_2^{*'} - r Y_2^*)^d = z^{-l} F^{**}(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2^{*'}), \end{aligned}$$

де  $F^{**}$  – аналітична в області  $D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22}$  вектор-функція. Без обмеження спільності, при  $Y_2 \in H_u^{n-p}$ , та функціях  $Y_2^*(z), Y_2'^*(z)$  аналітичних в області  $D_1$ , позначимо  $F^{**}(z, Y_1, Y_2^*, Y_1', Y_2'^*) = H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$ , причому  $H^{(6)}(0, 0, 0) = 0$ . Система (2) при  $r_0 = \max(l, r)$  приводиться до системи вигляду

$$z^{r_0} Y_1' = z^{r_0-r} \check{P}^{(6)}(z) Y_1 + z^{r_0-l} H^{(6)}(z, Y_1, Y_1'), \quad (3)$$

де матриця  $A_1^{-1}(z) B_1(z) = z^{-r} \check{P}^{(6)}(z), \check{P}^{(6)}(z)$  – аналітична у області  $D_1$ , вектор-функція  $H^{(6)} : D_1 \times G_{11} \times G_{12} \rightarrow \mathbb{C}^p, H^{(6)} = H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$  – аналітична у області  $D_1 \times G_{11} \times G_{21}, H^{(6)} = \text{col}(H_1^{(6)}, \dots, H_p^{(6)})$ .

Таким чином, у даному випадку будемо досліджувати питання існування аналітичних розв'язків системи (3) з початковою умовою

$$Y_1(z) \rightarrow 0, z \rightarrow 0, z \in D_{10}, \quad (4)$$

та які задовольняють додатковій умові

$$Y_1'(z) \rightarrow 0, z \rightarrow 0, z \in D_{10}. \quad (5)$$

### 1. Допоміжна лема про зведення системи (3) до системи спеціального вигляду.

**Означення 1.** Говоримо, що вектор-функція  $z^{r_0-l} H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$  має властивість  $V_3$  в околі точки  $(0, 0, 0)$ , якщо у цій області компоненти вектор-функції  $z^{r_0-l} H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$  можливо розкласти у збіжні ряди вигляду

$$z^{r_0-l} H_j^{(6)}(z, Y_1, Y_1') = z^{r_0-l} \sum_{s+|d|+|q|=2}^{\infty} C_{sdq}^{(6,j)} z^s Y_1^d (z^{r_0} Y_1')^q, j = \overline{1, p},$$

де  $C_{sdq}^{(6,j)} \in \mathbb{C}, C_{sdq}^{(6)} = \text{col}(C_{sdq}^{(6,1)}, \dots, C_{sdq}^{(6,p)})$ .

**Лема.** Якщо у системі (3) вектор-функція  $z^{r_0-l} H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$  має властивість  $V_3$  в околі точки  $(0, 0, 0)$ , то система (3) може бути однозначно приведена до системи вигляду

$$z^{r_0} Y_1' = z^{r_0-r} P^{(6)}(z) Y_1 + z^{r_0-l} F^{(6)}(z, Y_1), \quad (6)$$

де  $P^{(6)} = P^{(6)}(z)$  – аналітична матриця в області  $\tilde{D}_1 \subseteq D_1, 0 \in \tilde{D}_1, F^{(6)} = F^{(6)}(z, Y_1)$  – аналітична вектор-функція в області  $\tilde{D}_1 \times \tilde{G}_{11} \subseteq D_1 \times G_{11}, (0, 0) \in D_1 \times \tilde{G}_{11}, F^{(6)}(0, 0) = 0$ .

## 2. Система (6) вздовж відрізка.

Згідно з методом аналітичного продовження розв'язків [5] систему (6) вивчимо вздовж двох сімей кривих, а потім виконаємо аналітичне продовження розв'язків з кривої однієї сім'ї за допомогою кривих другої сім'ї на деяку область.

Для довільних фіксованих  $t_1 \in (0, R_1], v_1, v_2 \in \mathbb{R}, v_1 < v_2$ , вводиться множина  $\tilde{I}(t_1) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, t_1), v \in (v_1, v_2)\}$ . При  $z = z(t, v) = te^{iv}$ , множина  $\tilde{I}(t_1) \subset \mathbb{R}^2$  ставиться у відповідність до множини  $I(t_1) \subset \mathbb{C}$  :  
 $I(t_1) =$   
 $= \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t \in (0, t_1), v \in (v_1, v_2)\}.$

**Означення 2.** Нехай  $p, g : \tilde{I}(t_1) \rightarrow [0, +\infty)$ . Говоримо, що функція  $p$  має властивість  $Q_1$  відносно функції  $g$  при  $v = v_0 \in (v_1, v_2)$ , якщо функція  $p = p(t, v_0) \in$  функцією вищого порядку малості відносно функції  $g = g(t, v_0)$  при  $t \rightarrow +0$ .

**Означення 3.** Нехай  $p, g : \tilde{I}(t_1) \rightarrow [0, +\infty)$ . Говоримо, що функція  $p$  має властивість  $Q_2$  відносно функції  $g$  на множині  $\tilde{I}(t_1)$ , якщо існують такі  $C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$ , що на множині  $\tilde{I}(t_1)$  виконуються нерівності

$$C_1 \cdot g(t, v) \leq p(t, v) \leq C_2 \cdot g(t, v).$$

Вводяться допоміжні вектор-функції  $\varphi(z) = \text{col}(\varphi_1(z), \dots, \varphi_p(z)), \varphi : I(t_1) \rightarrow \mathbb{C}^p$ , та  $\psi(t, v) = \text{col}(\psi_1(t, v), \dots, \psi_p(t, v)), \psi_j : \tilde{I}(t_1) \rightarrow [0; +\infty), j = \overline{1, p}$ , при  $z = z(t, v) = te^{iv}, \psi_j(t, v) = |\varphi_j(z(t, v))|, j = \overline{1, p}$ , функції  $\psi_j, j = \overline{1, p}$  – дійснозначними функціями дійсних змінних  $t, v$ . Розглядається аналітична на множині  $I(t_1)$  вектор-функція  $\varphi = \varphi(z)$  така, що для будь-яких  $z \in I(t_1)$  для відповідних функцій  $\psi_j = \psi_j(t, v), j = \overline{1, p}$ , при  $(t, v) \in \tilde{I}(t_1)$  виконано умови:

$$\psi_j(t, v) > 0, (\psi_j(t, v))'_t > 0, (\psi_j(t, v))'_v \geq 0,$$

та рівномірно відносно  $v \in (v_1, v_2)$  виконано умови:

$$\psi_j(+0, v) = 0, (\psi_j(+0, v))'_t = 0, j = \overline{1, p}.$$

Розглянемо комплексну змінну  $z = te^{iv}$ , де  $t > 0, t, v \in \mathbb{R}$ . Зафіксуємо  $v = v_0, v_0 \in (v_1, v_2)$ , і розглянемо систему (6) на відрізку  $L_{v_0}(t_1) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, t_1), v = v_0 \in (v_1, v_2)\}, v_0$  – фіксоване число.



Позначимо  $Y_1(z(t, v_0)) = \tilde{Y}_1(t)$ ,  $\tilde{Y}_1(t) = \tilde{Y}_{11}(t) + i\tilde{Y}_{12}(t)$ ,  $\tilde{Y}_{1j}(t) = \text{col}(\tilde{Y}_{1j1}(t), \dots, \tilde{Y}_{1jp}(t))$ ,  $j = 1, 2$ , функції  $\tilde{Y}_{11}(t)$ ,  $\tilde{Y}_{12}(t)$  – є дійснозначними функціями дійсної змінної  $t$ .  $P^{(6)}(z(t, v_0)) = [\tilde{p}_{jk}^{(6)}(t)]_{j,k=1}^p = \tilde{P}_1^{(6)}(t) + i\tilde{P}_2^{(6)}(t)$ ,  $\tilde{P}_s^{(6)}(t) = [\tilde{p}_{jks}^{(6)}(t)]_{j,k=1}^p$ ,  $s = 1, 2$ , де  $\tilde{p}_{jk}^{(6)}(t) = \tilde{p}_{jk1}^{(6)}(t) + i\tilde{p}_{jk2}^{(6)}(t)$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ , функції  $\tilde{p}_{jks}^{(6)}(t)$ ,  $j, k = \overline{1, p}$  – є дійснозначними функціями дійсної змінної  $t$  та елементами матриць  $\tilde{P}_s^{(6)}(t)$ ,  $s = 1, 2$ .

При фіксованому  $v = v_0$ ,  $v_0 \in (v_1, v_2)$  вектор-функцію  $F^{(6)} = F^{(6)}(z(t, v), Y_1(z(t, v)))$  уявимо як  $F^{(6)}(z(t, v_0), Y_1(z(t, v_0))) = \tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12})$ ,  $\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_1) = \text{col}(\tilde{F}_1^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}), \dots, \tilde{F}_p^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}))$ ,  $\tilde{F}_j^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) = \tilde{F}_{1j}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) + i\tilde{F}_{2j}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12})$ ,  $j = \overline{1, p}$ , де  $\tilde{F}_{1j}^{(6)}$ ,  $\tilde{F}_{2j}^{(6)}$ ,  $j = \overline{1, p}$  – є дійснозначними функціями дійсних змінних.

Система (6) буде зведена до вигляду

$$t^{r_0}(\tilde{Y}'_{11} + i\tilde{Y}'_{12}) = t^{r_0-r}(\tilde{P}_1^{(6)} + i\tilde{P}_2^{(6)})(\tilde{Y}_{11} + i\tilde{Y}_{12})e^{(1-r)iv_0} + t^{r_0-l}e^{(1-l)iv_0} \cdot (\text{Re}\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) + i\text{Im}\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12})). \quad (7)$$

Дорівнюємо ліворуч і праворуч в системі (7) дійсні та уявні частини вектор-функцій, отримуємо систему  $2p$  рівнянь та введемо такі матриці та вектор-функцію

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(6)}(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{P}_1^{(6)}(t) & -\tilde{P}_2^{(6)}(t) \\ \tilde{P}_2^{(6)}(t) & \tilde{P}_1^{(6)}(t) \end{pmatrix}; \\ \tilde{f}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) &= \begin{pmatrix} \text{Re}\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) \\ \text{Im}\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) \end{pmatrix}; \\ \tilde{Q}_5(v_0) &= \begin{pmatrix} \cos((r-1)v_0)E & \sin((r-1)v_0)E \\ -\sin((r-1)v_0)E & \cos((r-1)v_0)E \end{pmatrix}; \\ \tilde{Q}_6(v_0) &= \begin{pmatrix} \cos((l-1)v_0)E & \sin((l-1)v_0)E \\ -\sin((l-1)v_0)E & \cos((l-1)v_0)E \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

де  $E$  – одинична матриця  $p \times p$ .

Тоді система (7) зведеться до системи

$$t^{r_0} \begin{pmatrix} \tilde{Y}'_{11}(t) \\ \tilde{Y}'_{12}(t) \end{pmatrix} = t^{r_0-r} \tilde{P}^{(6)}(t) \tilde{Q}_5(v_0) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_{11}(t) \\ \tilde{Y}_{12}(t) \end{pmatrix} + t^{r_0-l} \tilde{Q}_6(v_0) \tilde{f}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}). \quad (8)$$

Таким чином, система (6) вздовж відрізка  $L_{v_0}(t_1)$  при довільному фіксованому  $v_0 \in (v_1, v_2)$  зведеться до системи дійсних диференціальних рівнянь (8).

### 3. Система (6) вздовж дуги кола.

Розглянемо комплексну змінну  $z = te^{iv}$ , де  $t > 0, t, v \in \mathbb{R}$ . Зафіксуємо  $t = t_0, t_0 \in (0, t_1)$  і розглянемо систему (6) вздовж дуги кола  $O_{t_1}(t_0) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t = t_0, v \in (v_1, v_2)\}$ , при фіксованому  $t_0 \in (0, t_1)$ .

Позначимо  $Y_1(z(t_0, v)) = \hat{Y}_1(v), \hat{Y}_1(v) = \hat{Y}_{11}(v) + i\hat{Y}_{12}(v), \hat{Y}_{1j}(v) = \text{col}(\hat{Y}_{1j1}(v), \dots, \hat{Y}_{1jp}(v)), j = 1, 2$ , функції  $\hat{Y}_{11}(v), \hat{Y}_{12}(v)$  – є дійснозначними функціями дійсної змінної  $v$ .  $P^{(6)}(z(t_0, v)) = [\hat{p}_{jk}^{(6)}(v)]_{j,k=1}^p = \hat{P}_1^{(6)}(v) + i\hat{P}_2^{(6)}(v), \hat{P}_s^{(6)}(v) = [\hat{p}_{jks}^{(6)}(v)]_{j,k=1}^p, s = 1, 2$ , де  $\hat{p}_{jk}^{(6)}(v) = \hat{p}_{jk1}^{(6)}(v) + i\hat{p}_{jk2}^{(6)}(v), j, k = \overline{1, p}$ , функції  $\hat{p}_{jks}^{(6)}(v), j, k = \overline{1, p}$  – є дійснозначними функціями дійсної змінної  $v$  та елементами матриць  $\hat{P}_s^{(6)}(v), s = 1, 2$ .

Вектор-функцію  $F^{(6)}(z(t, v), Y_1(z(t, v)))$  при фіксованому  $t = t_0, t_0 \in (0, t_1)$  уявимо як  $F^{(6)}(z(t_0, v), Y_1(z(t_0, v))) = \hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}), \hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) = \text{col}(\hat{F}_1^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}), \dots, \hat{F}_p^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12})), \hat{F}_j^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) = \hat{F}_{1j}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) + i\hat{F}_{2j}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}), j = \overline{1, p}$ , де  $\hat{F}_{1j}^{(6)}, \hat{F}_{2j}^{(6)}, j = \overline{1, p}$  – є дійснозначними функціями дійсних змінних.

Система (6) буде зведена до вигляду

$$\begin{aligned} t_0^{r_0-1}(\hat{Y}'_{11} + i\hat{Y}'_{12}) &= it_0^{r_0-r}(\hat{P}_1^{(6)}(v) + i\hat{P}_2^{(6)}(v))(\hat{Y}_{11} + i\hat{Y}_{12})e^{(1-r)iv} + \\ &+ it_0^{r_0-l}e^{(1-l)iv}(\text{Re}\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) + i\text{Im}\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12})). \end{aligned} \quad (9)$$

Дорівнюємо ліворуч і праворуч в системі (9) дійсні та уявні частини вектор-функцій, отримаємо систему  $2p$  рівнянь та введемо такі матриці та вектор-функцію

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(6)}(v) &= \begin{pmatrix} \hat{P}_1^{(6)}(v) & -\hat{P}_2^{(6)}(v) \\ \hat{P}_2^{(6)}(v) & \hat{P}_1^{(6)}(v) \end{pmatrix}; \\ \hat{f}^{(6)}(t, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) &= \begin{pmatrix} \text{Re}\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) \\ \text{Im}\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) \end{pmatrix}; \\ \hat{Q}_5(v) &= \begin{pmatrix} \sin((r-1)v)E & -\cos((r-1)v)E \\ \cos((r-1)v)E & \sin((r-1)v)E \end{pmatrix}; \\ \hat{Q}_6(v) &= \begin{pmatrix} \sin((l-1)v)E & -\cos((l-1)v)E \\ \cos((l-1)v)E & \sin((l-1)v)E \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Тоді система (9) зведеться до системи

$$t_0^{r_0-1} \begin{pmatrix} \hat{Y}'_{11}(v) \\ \hat{Y}'_{12}(v) \end{pmatrix} = t_0^{r_0-r} \hat{P}^{(6)}(v) \hat{Q}_5(v) \begin{pmatrix} \hat{Y}_{11}(v) \\ \hat{Y}_{12}(v) \end{pmatrix} + t_0^{r_0-1} \hat{Q}_6(v) \hat{f}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}). \quad (10)$$

Таким чином, система (6) вздовж дуги кола  $O_{t_1}(t_0)$  при довільному фіксованому  $t_0 \in (0, t_1)$  зведеться до системи дійсних диференціальних рівнянь (10).

Введено допоміжні властивості  $S_6, M_6$  відносно аналітичної вектор-функції  $\varphi = \varphi(z)$ , де  $\varphi(z) = \text{col}(\varphi_1(z), \dots, \varphi_p(z))$ ,  $\psi_j(t, v) = |\varphi_j(z(t, v))|$ ,  $j = \overline{1, p}$ .

**Означення 4.** Говоримо, що матриця  $P^{(6)}(z)$  має властивість  $S_6$  відносно вектор-функції  $\varphi = \varphi(z)$ , якщо виконуються умови:

1. Для кожного  $v_0 \in (v_1, v_2)$  функції  $t^{r_0}(\psi_j(z(t, v)))'_t$  мають властивість  $Q_1$  відповідно відносно функцій  $t^{r_0-r}|\tilde{p}_{jj}^{(6)}(t)|\psi_j(z(t, v))$ ,  $j = \overline{1, p}$  при  $v = v_0$ ;

2. Функції  $t^{r_0-1}(\psi_j(t, v))'_v$  мають властивість  $Q_2$  відповідно відносно функцій  $t^{r_0-r}|\hat{p}_{jj}^{(6)}(v)|\psi_j(t, v)$ ,  $j = \overline{1, p}$ , на множині  $\tilde{I}(t_2)$  для деякого  $t_2 \in (0, t_1)$ ;

3. Для кожного  $v_0 \in (v_1, v_2)$  функції  $t^{r_0-r}|\tilde{p}_{jk}^{(6)}(t)|\psi_k(t, v)$  мають властивість  $Q_1$  відповідно відносно функцій  $t^{r_0}(\psi_j(t, v))'_t$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ ,  $j \neq k$ , при  $v = v_0$ ;

4. Функції  $t^{r_0-r}|\hat{p}_{jk}^{(6)}(v)|\psi_k(t, v)$  мають властивість  $Q_2$  відповідно відносно функцій  $t^{r_0-1}(\psi_j(t, v))'_v$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ ,  $j \neq k$  на множині  $\tilde{I}(t_2)$  для деякого  $t_2 \in (0, t_1)$ .

Позначимо множини  $\tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0))) = \{(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) : \tilde{Y}_{11j}^2 + \tilde{Y}_{12j}^2 < \delta_j^2(\psi_j(t, v_0))^2, t \in (0, t_1)\}$ ,  $j = \overline{1, p}$ . Множина  $\tilde{\Omega}(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$  може бути розглянута як перетин множин  $\tilde{\Omega}_j$ ,  $\tilde{\Omega}(\delta, \varphi(z(t, v_0))) = \bigcap_{j=1}^p \tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$ . Частину межі множин  $\tilde{\Omega}_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  будемо позначати як

$$\partial\tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0))) = \{(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) : \tilde{Y}_{11j}^2 + \tilde{Y}_{12j}^2 = \delta_j^2(\psi_j(t, v_0))^2, \tilde{Y}_{11k}^2 + \tilde{Y}_{12k}^2 < \delta_k^2(\psi_k(t, v_0))^2, k = \overline{1, p}, k \neq j, t \in (0, t_1)\}.$$

$$\hat{\Omega}_j(\tau, \varphi(z(t_0, v))) = \{(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) : \hat{Y}_{11j}^2 + \hat{Y}_{12j}^2 < \tau_j^2(\psi_j(t_0, v))^2, v \in (v_1, v_2)\}, \\ j = \overline{1, p}.$$

Множина  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v)))$  може бути розглянута як перетин множин  $\hat{\Omega}_j$ ,  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v))) = \bigcap_{j=1}^p \hat{\Omega}_j(\tau, \varphi(z(t_0, v)))$ . Частину межі множин  $\hat{\Omega}_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  будемо позначати як

$$\begin{aligned} \partial\hat{\Omega}_j(\tau, \varphi(z(t_0, v))) &= \{(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) : \hat{Y}_{11j}^2 + \hat{Y}_{12j}^2 = \\ &= \tau_j^2(\psi_j(t_0, v))^2, \hat{Y}_{11k}^2 + \hat{Y}_{12k}^2 < \\ &< \tau_k^2(\psi_k(t_0, v))^2, k = \overline{1, p}, k \neq j, v \in (v_1, v_2)\}. \end{aligned}$$

**Означення 5.** Говоримо, що вектор-функція  $F^{(6)} = F^{(6)}(z, Y_1)$  має властивість  $M_6$  відносно вектор-функції  $\varphi = \varphi(z)$ , якщо виконуються умови:

1. Для кожного  $v_0 \in (v_1, v_2)$  при  $(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) \in \tilde{\Omega}(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$  функції  $t^{r_0-l} \tilde{F}_{kj}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12})$  мають властивість  $Q_1$  відповідно відносно функцій

$t^{r_0-r} |\tilde{p}_{jj}^{(6)}(t)| \psi_j(t, v)$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = 1, 2$  при  $v = v_0$ ;

2. Для будь-яких  $(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) \in \hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v)))$  функції  $t^{r_0-l} \hat{F}_{kj}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12})$  мають властивість  $Q_2$  відповідно відносно функцій  $t^{r_0-r} |\hat{p}_{jj}^{(6)}(v)| \psi_j(t, v)$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = 1, 2$  на множині  $\tilde{I}(t_2)$  для деякого  $t_2 \in (0, t_1)$ .

Введемо області  $\Lambda_{+.k}^{(6)}(t_2)$ ,  $k \in \{+, -\}$ , які визначаються наступним чином

$$\Lambda_{+.+}^{(6)}(t_2) = \{(t, v) : \cos((r-1)v - \tilde{\alpha}_{jj}^{(6)}(t)) > 0, \sin((r-1)v - \hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v)) > 0, j = \overline{1, p},$$

$$t \in (0, t_2), v \in (v_1, v_2)\};$$

$$\Lambda_{+.-}^{(6)}(t_2) = \{(t, v) : \cos((r-1)v - \tilde{\alpha}_{jj}^{(6)}(t)) > 0, \sin((r-1)v - \hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v)) < 0, j = \overline{1, p},$$

$$t \in (0, t_2), v \in (v_1, v_2)\};$$

де функції  $\tilde{\alpha}_{jj}^{(6)}(t)$ ,  $\hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v)$ ,  $j = \overline{1, p}$  визначені у [3].

Не обмежуючи спільності будемо вважати, що  $\Lambda_{+.k}^{(6)}(t_2) \neq \emptyset$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

**Означення 6.** Говоримо, що система (6) належить класу  $C_{+.k}^{(6)}$ ,  $k \in \{+, -\}$ , якщо матриця  $P^{(6)}(z) = P^{(6)}(te^{iv})$  така, що  $(t, v) \in \Lambda_{+.k}^{(6)}(t_2)$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

#### 4. Формулювання основних результатів.

Введемо області

$$G_{+.k}^{(6)}(t_2) = \{z = z(t, v) : 0 < |z| < t_2, (t, v) \in \Lambda_{+.k}^{(6)}(t_2)\}, k \in \{+, -\}.$$

**Теорема 1.** Нехай  $p < n$ ,  $A(z)$  – аналітична матриця в області  $D_1$  та  $\text{rang} A(z) = p$  при  $z \in D_1$ . Нехай систему (1) можливо привести до вигляду (2). Система (2) при  $Y_2 \in H_u^{n-p}$  може бути приведена до системи (3). Вектор-функція  $z^{r_0-l} H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$  має властивість  $V_3$  в околі точки  $(0, 0, 0)$ . Крім того, для системи (6) виконуються умови :

1. Матриця  $P^{(6)}(z)$  – аналітична матриця в області  $D_1$  і має властивість  $S_6$  відносно аналітичної вектор-функції  $\varphi = \varphi(z)$ ;

2. Вектор-функція  $F^{(6)} = F^{(6)}(z, Y_1)$  – аналітична в області  $D_1 \times G_1$ ,  $F^{(6)}(0, 0) = 0$  і має властивість  $M_6$  відносно вектор-функції  $\varphi = \varphi(z)$ ;

3. Система (6) належить одному з класів  $C_{+,k}^{(6)}$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

Тоді для кожного  $k \in \{+, -\}$ , для деякого  $t^* \in (0, t_2)$  і для кожного  $Y_2 \in H_u^{n-p}$  існують розв'язки системи (1)  $Y(z)$ , перші компонент котрих задовольняють початковим умовам  $Y_1(z_0) = Y_{10}$  при  $z_0 \in G_{+,k}^{(6)}(t^*)$ ,  $Y_{10} \in \{Y_1 : |Y_{1j}(z_0)| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|, \delta_j > 0, j = \overline{1, p}\}$ , аналітичні в області  $G_{+,k}^{(6)}(t^*)$  і для цих  $p$  компонент розв'язків у зазначеній області справедливі оцінки

$$|Y_{1j}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2, j = \overline{1, p}. \quad (11)$$

**Доведення.** За умовою систему (1) можливо привести до вигляду (3). Вектор-функція  $z^{r_0-l} H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$  має властивість  $V_3$  в околі точки  $(0, 0, 0)$ . Застосуємо Лему 1, згідно якої система (3) може бути однозначно приведена до системи (6).

1. Розглянемо систему (6) на відріжку  $L_{v_0}(t_1)$  при фіксованому значенні  $v_0 \in (v_1, v_2)$ . Нехай  $\tilde{T}^{(6)}$  – вектор поля напрямків системи (8) в довільній фіксованій точці  $(t, \tilde{Y}_{11}(t), \tilde{Y}_{12}(t)) \in \partial \tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ .

$$\begin{aligned} \left( t^{r_0} \tilde{T}^{(6)}, \frac{\tilde{N}_j}{2} \right) &= -t^{r_0} \delta_j^2 \psi_j(t, v_0) (\psi_j(t, v_0))'_t + t^{r_0-r} (\tilde{p}_{jj1}^{(6)}(t) \cos((r-1)v_0) + \\ &+ \tilde{p}_{jj2}^{(6)}(t) \sin((r-1)v_0)) \delta_j^2 (\psi_j(t, v_0))^2 + t^{r_0-r} \sum_{k=1, k \neq j}^p ((\tilde{p}_{jk1}^{(6)}(t) \cos((r-1)v_0) + \\ &+ \tilde{p}_{jk2}^{(6)}(t) \sin((r-1)v_0)) \times (\tilde{Y}_{11k} \tilde{Y}_{11j} + \tilde{Y}_{12k} \tilde{Y}_{12j}) + t^{r_0-r} \sum_{k=1}^p ((\tilde{p}_{jk1}^{(6)}(t) \sin((r-1)v_0) - \\ &- \tilde{p}_{jk2}^{(6)}(t) \cos((r-1)v_0)) \times (\tilde{Y}_{12k} \tilde{Y}_{11j} - \tilde{Y}_{11k} \tilde{Y}_{12j}) + t^{r_0-l} (\tilde{F}_{1j}^{(6)} \cos((l-1)v_0) + \tilde{F}_{2j}^{(6)} \cdot \\ &\cdot \sin((l-1)v_0)) \tilde{Y}_{11j} + t^{r_0-l} (-\tilde{F}_{1j}^{(6)} \sin((l-1)v_0) + \tilde{F}_{2j}^{(6)} \cos((l-1)v_0)) \tilde{Y}_{12j}, j = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Оскільки, за умовою, матриця  $P^{(6)}$  має властивість  $S_6$ , а вектор-функція  $F^{(6)} = F^{(6)}(z, Y_1)$  має властивість  $M_6$  відносно вектор-функції  $\varphi = \varphi(z)$ , то

$$\left( t^{r_0} \tilde{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2} \right) \rightarrow \sqrt{(\tilde{p}_{jj1}^{(6)}(t))^2 + (\tilde{p}_{jj2}^{(6)}(t))^2} (\cos((r-1)v_0 - \tilde{\alpha}_{jj}^{(6)}(t))),$$

$$j = \overline{1, p}, t \rightarrow +0.$$

Оскільки, система (6) належить одному з класів  $C_{+,k}^{(6)}$ ,  $k \in \{+, -\}$ , то існує таке  $t^*$ , що при  $t \in (0, t^*)$  справедливо  $(t^{r_0} \tilde{T}^{(6)}, \bar{N}_j/2) > 0$ ,  $j = \overline{1, p}$ . Отже, при  $t \in (0, t^*)$  поверхня  $\partial \tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$  є поверхнею без контакту для системи (8), причому при спаданні змінної  $t$  інтегральна крива входить в область  $\tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$ .

Згідно з топологічним принципом Важевського [6], через кожен точку множини  $\tilde{\Omega}(\delta, \varphi(z(t, v_0))) \cup \partial \tilde{\Omega}(\delta, \varphi(z(t, v_0))) \cap (t = t^{**}), t^{**} \in (0, t^*)$  проходить хоча б одна гладка інтегральна крива системи (8), і все інтегральні криві даної системи, що проходять через точки  $\tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0))) \cup \partial \tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0))) \cap (t = t^{**}), t^{**} \in (0, t^*)$  залишаються в області  $\tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$  при  $(t, v_0) \in \Lambda_{+,k}^{(6)}(t^*), k \in \{+, -\}, v_0 \in (v_1, v_2)$ . Причому, виконані нерівності

$$|Y_{1sj}(z(t, v_0))|^2 < \delta_j^2 (\psi_j(t, v_0))^2, j = \overline{1, p}, s = 1, 2, \quad (12)$$

при  $(t, v_0) \in \Lambda_{+,k}^{(6)}(t^*), k \in \{+, -\}$ .

**2.** Розглянемо систему (6) вздовж дуги кола  $O_{t_1}(t_0)$  при фіксованому значенні  $t_0 \in (0, t_1)$ . Нехай  $\hat{T}^{(6)}$  – вектор поля напрямків системи (10) в довільній фіксованій точці  $(t, \hat{Y}_{11}(t), \hat{Y}_{12}(t)) \in \partial \hat{\Omega}_j(\tau, \varphi(z(t_0, v))), j \in \{1, \dots, p\}$ .

Розглянемо скалярний добуток

$$\begin{aligned} \left( t^{r_0-1} \hat{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2} \right) &= -t_0^{r_0-1} \tau_j^2 \psi_j(t_0, v) (\psi_j(t_0, v))'_v + t_0^{r_0-r} (\hat{p}_{jj1}^{(6)}(v) \sin((r-1)v) - \\ &- \hat{p}_{jj2}^{(6)}(v) \cos((r-1)v)) \tau_j^2 (\psi_j(t_0, v))^2 + t_0^{r_0-r} \sum_{k=1, k \neq j}^p (\hat{p}_{jk1}^{(6)}(v) \sin((r-1)v) - \hat{p}_{jk2}^{(6)}(v) \cdot \\ &\cdot \cos((r-1)v)) \times (\hat{Y}_{11k} \hat{Y}_{11j} + \hat{Y}_{12k} \hat{Y}_{12j}) + \\ &+ t_0^{r_0-r} \sum_{k=1}^p (\hat{p}_{jk1}^{(6)}(v) \cos((l-1)v) + \hat{p}_{jk2}^{(6)}(v) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sin((l-1)v) \times (\hat{Y}_{11k}\hat{Y}_{12j} - \hat{Y}_{12k}\hat{Y}_{11j}) + t^{r_0-l}(\hat{F}_{1j}^{(6)} \sin((l-1)v) - \\ & - \hat{F}_{2j}^{(6)} \cos((l-1)v))\hat{Y}_{11j} + t^{r_0-l}(\hat{F}_{1j}^{(6)} \cos((l-1)v) + \\ & + \hat{F}_{2j}^{(6)} \sin((l-1)v))\hat{Y}_{12j}, j = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Оскільки, за умовою, матриця  $P^{(6)}$  має властивість  $S_6$ , а вектор-функція  $F^{(6)} = F^{(6)}(z, Y_1)$  має властивість  $M_6$  відносно вектор-функції  $\varphi = \varphi(z)$ , то

$$\left( t^{r_0-1}\hat{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2} \right) \rightarrow \sqrt{(\hat{p}_{jj1}^{(6)}(v))^2 + (\hat{p}_{jj2}^{(6)}(v))^2} \sin((r-1)v - \hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v)),$$

$j = \overline{1, p}$ , при  $t_0 \rightarrow +0, v \in (v_1, v_2)$ . Отже,  $\text{sign}\left(t^{r_0-1}\hat{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right) = \text{sign}(\sin((r-1)v - \hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v))), j = \overline{1, p}, v \in (v_1, v_2)$ . Без обмеження спільності, для кожного фіксованого  $t_0 \in (0, t^*)$  поверхня  $\partial\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v))) \in \Lambda_{+,k}^{(6)}(t^*), k \in \{+, -\}$  є поверхнею без контакту для системи (10).

Оскільки, система (6) належить одному з класів  $C_{+,k}^{(6)}, k \in \{+, -\}$ , то будь-яка інтегральна крива системи (10), що проходить через точку множини  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v))) \cap (v = v_0), v_0 \in (v_1, v_2)$ , якщо  $(t_0, v_0) \in \Lambda_{+,+}^{(6)}(t^*)$ , залишається в області  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v)))$  при спаданні  $v$ , а якщо  $(t_0, v_0) \in \Lambda_{+,-}^{(6)}(t^*)$ , залишається в області  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v)))$  при зростанні  $v$ .

Понад того, виконані нерівності

$$|Y_{1sj}(z(t_0, v))|^2 < \tau_j^2 |\psi_j(t_0, v)|^2, j = \overline{1, p}, s = 1, 2, \quad (13)$$

при  $(t_0, v) \in \Lambda_{+,k}^{(6)}(t^*), k \in \{+, -\}$ .

**3.** Аналогічно доведенню Теорема 1.1 [2] припустимо, що виконуються нерівність  $\delta_j^2 < \tau_j^2, j = \overline{1, p}$ .

В першому етапі доведення цієї теореми отримано, що вздовж кривої  $L_{v_0}(t), v_0 \in (v_1, v_2)$  при  $t \in (0, t^*)$  існує хоча б один неперервний диференційовний розв'язок системи

$$|Y_{1sj}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2, j = \overline{1, p}, s = 1, 2,$$

який задовольняє оцінкам (12). Позначимо множину таких розв'язків  $\{Y_{1.v_0}(z(t, v))\}$ .

Виберемо розв'язок  $Y_{1.v_0}(z(t, v))$  з множини  $\{Y_{1.v_0}(z(t, v))\}$  та здійснимо його аналітичне продовження з  $L_{v_0}(t^*), (t, v) \in \Lambda_{+,k}^{(6)}(t^*)$ , при фіксованому  $v_0 \in (v_1, v_2)$  на область, яка містить  $L_{v_0}(t^*)$ , зі збереженням оцінки (12).

З другого етапу доказу цієї теореми випливає, що при виконанні нерівності (13), розв'язок  $Y_{1.v_0}(z(t, v))$  при фіксованому  $v_0$  можна продовжити з відрізка  $L_v(t^*)$  вздовж кривих  $O_{t_0}$  на множину  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v))) \cap (v = v^*)$ , при  $t \in (0, t^*)$ , при цьому, аналітичне продовження позначимо  $Y_1(z)$ . Отримаємо множину розв'язків  $\{Y_1(z)\}$ .

У підсумку, будь-який розв'язок  $Y_1(z)$  може бути аналітично продовжити в області  $G_{+,k}^{(6)}(t^*) \times \{Y : |Y_{rj}| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1, p}, s = 1, 2\}$ , причому в даній області виконано нерівність (11).

А значить, для кожного  $Y_2 \in H_u^{n-p}$  система (1) має хоча б один розв'язок  $Y(z)$ , перші  $p$  компонент якого є аналітичними функціями в області  $G_{+,k}^{(6)}(t^*)$  і для цих  $p$  компонент розв'язка у зазначеній області виконуються оцінки (11).

Теорема доведена.

## Висновки

Таким чином, було детально вивчено систему (1) у припущенні, що матриці  $A(z), B(z)$  – прямокутні матриці розмірності  $p \times n, p < n$ , і  $\text{rang} A(z) = p$  при  $z \in D_1$ . Тоді система (1) буде приведена до вигляду (2). Розглянуті випадки, коли матриця  $A_1^{-1}(z)B_1(z)$  – аналітична в області  $D_{10}$  та у точці  $z = 0$  має полюс порядку  $r$ , а  $Y_2$  взято з класу функцій  $H_u^{n-p}$  та доведено теорему про існування розв'язків для задачі Коші (2), (4) у припущенні, що виконується додаткова умова (5). А саме, коли матриця  $A_1^{-1}(z)B_1(z)$  – аналітична в області  $D_{10}$  та у точці  $z = 0$  має полюс, а  $Y_2$  взято з класу функцій  $H_u^{n-p}$ , а матриця  $A_1^{-1}(z)B_1(z)$  – аналітична в області  $D_{10}$  та у точці  $z = 0$  має полюс, знайдено достатні умови існування хоча б одного розв'язку задачі Коші (2)-(4), перші компонент якого є аналітичними функціями у областях  $G_{+,k}^{(6)}(t^*), k \in \{+, -\}$ , у припущенні, що виконується додаткова умова (5).

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Gunning R.** Analytic functions of several complex variables / R. Gunning, H. Rossi. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1965. – 318 p.
2. **Limanska D.** On the existence of analytic solutions of certain types of systems, partially resolved relatively to the derivatives in the case of a pole / D. Limanska, G. Samkova



- // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2018. – Vol. 74. – P. 113–124.
3. **Limanska D.** The asymptotic behavior of solutions of certain types of the differential equations partially solved relatively to the derivatives with a singularity in the zero-point / D. Limanska, G. Samkova // Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. – 2018. – Vol. 53 – P. 21–40.
  4. **Samkova G.** Об исследовании некоторой полуживной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц / Г. Самкова, Н. Шарай // Нелінійні коливання. – 2002. – Vol. 5. – P. 224–236.
  5. **Vladimirov V.** Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables / V. Vladimirov. – New York: Dover Publications, Inc, 2007. – 384 p.
  6. **Wazewski T.** (1947). Une method topologique de l'examen du phenomene asymtoti quereletivement aux equations differenti elle sordinaires / T. Wazewski // Attidella academia zarionaledei lincei.Rediconti. – 1947. – Vol. 3. – P. 210–215.

Samkova G., Limanska D.

THE SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL QUESTIONS WITH RECTANGULAR MATRICES THAT IS PARTIALLY SOLVED TO THE DERIVATIVES NEAR THE POLE.

*Summary*

In modern theory of ordinary differential equations and systems of equations with an unknown complex-valued function of a complex variable, a prominent place is occupied by systems of equations that are either unsolved or partially solved with respect to derivatives. The system of ordinary differential equations, which is partially solved with respect to the derivatives, with rectangular matrices around the pole has been studied. The article presents conditions for transforming a system of ordinary differential equations, which is partially solvable with respect to derivatives, to a system of ordinary differential equations with a special form. The theorem with sufficient conditions of the existence at least one solution of the Cauchy problem is proven, some components of the solution are analytic functions in domains with the fixed singularity on the boundary, and the remaining components are functions chosen from a certain class of functions.

*Key words:* system of ordinary differential equations, that is partially resolved relatively to the derivatives, Cauchy's problem, fixed singularity, isolated singularity, pole.

**REFERENCES**

1. Gunning R., Rossi H. (1965). *Analytic functions of several complex variables*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 318 p.
2. Limanska D., Samkova G. (2018). On the existence of analytic solutions of certain types of systems, partially resolved relatively to the derivatives in the case of a pole. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, Vol. 74, P. 113–124.
3. Limanska D., Samkova G. (2018). The asymptotic behavior of solutions of certain types of the differential equations partially solved relatively to the derivatives with a singularity in the zero-point. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, Vol. 53, P. 21–40.
4. Samkova G., Sharay N. (2002). Ob isledovanii nekotoryy poluyavnoy sistemy differentsialnykh uravneniy v sluchae peremennogo puchka matric [On the study of some semi-explicit system of differential equations in the case of a variable matrices pencil]. *Нелінійні коливання*, Vol. 5, P. 224–236.

5. Vladimirov V. (2007). *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*. New York: Dover Publications, Inc., 384 p.
6. Wazewski T. (1947). Une method topologique de l'examen du phenomene asymptotiquement aux equations differentielles ordinaires. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti*, Vol. 3, P. 210–215.

УДК 517.925

**О. О. Чепок**

Державний заклад "Південноукраїнський національний педагогічний  
університет імені К.Д. Ушинського"

**АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -РОЗВ'ЯЗКІВ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКЕ  
МІСТИТЬ ДОБУТОК РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ ВІД  
НЕВІДОМОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНОЇ**

Дослідження асимптотичних зображень розв'язків диференціальних рівняння, зокрема, другого порядку, які містять у правій частині нелінійності різних видів грають важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. У даній роботі розглянуто тип диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток правильно змінної функції від невідомої функції та швидко змінної функції від похідної невідомої функції при прямуванні відповідних аргументів до нуля або нескінченності. Отримано необхідні та достатні умови існування повільно змінних  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків таких рівнянь. Також отримані асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Зауважимо, що при накладанні додаткових умов на коефіцієнти характеристичного рівняння, таких  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків рівняння існує однопараметрична сім'я. Подібні результати були отримані раніше при розгляді рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток швидко змінної функції від невідомої функції та правильно змінної функції від похідної невідомої функції при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності. Для рівнянь, які розглядаються у даній роботі, подібні результати є новими.

MSC: 34A34, 34C41, 34E99.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення розв'язків,  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язки, швидко змінні функції, правильно змінні функції, повільно змінні перші похідні.

DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294309

## Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y') \varphi_1(y), \quad (1)$$

де  $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ),  $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) є неперервними функціями,  $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ ,  $\Delta_{Y_i}$  — або проміжок  $[y_i^0, Y_i[*$ , або  $]Y_i, y_i^0]$ .

Крім того, будемо вважати, що функція  $\varphi_1: \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$  є правильно змінною (див. [1], с. 17) порядку  $\sigma_1$  при прямуванні аргументу до  $Y_0$ , а функція  $\varphi_0: \Delta_{Y_1} \rightarrow ]0, +\infty[$  двічі неперервно диференційовна на  $\Delta_{Y_1}$  та така, що,

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_1 \\ y \in \Delta_{Y_1}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi_0'(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_1}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_1 \\ y \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{(\varphi_0'(y))^2} = 1, \quad (2)$$

З умов (2) випливає, що функція  $\varphi_0$  та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до  $Y_1$  (див. [6], С. 91-92).

У силу властивостей функції  $\varphi_0$  та теореми 3.10.8 з роботи [1] функція  $\varphi_0$  та її похідна першого порядку належать класу функцій  $\Gamma$  який був введений Л. Ханом (див., наприклад, [1], С. 75), а також класу  $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ , який був введений у роботі [3] як узагальнення класу  $\Gamma$ .

Для рівнянь типу (1) розглянемо наступний клас рів'язків.

**Означення 1** ([5]). Розв'язок  $y$  рівняння (1), визначений на  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$ , називається  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком ( $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ ), якщо справедливи є наступні твердження

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

У роботі [2] було встановлено умови існування у рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків у випадку  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, а також асимптотичних зображень при  $t \uparrow \omega$  для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

Зауважимо, що у роботі [5] встановлено наступні апріорні асимптотичні співвідношення  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків, що розглядаються:

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = [1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (4)$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Наведемо наступні означення.

\*При  $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$  вважаємо, що  $y_i^0 > 0 (y_i^0 < 0)$  відповідно.

**Означення 2.** Нехай  $Y \in \{0, \infty\}$ ,  $\Delta_Y$  — деякий однобічний окіл  $Y$ . Неперервно диференційовна функція  $L : \Delta_Y \rightarrow ]0; +\infty[$  називається нормалізованою повільно змінною функцією при  $y \rightarrow Y$  ( $y \in \Delta_Y$ ) ([6], с.2-3), якщо

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

**Означення 3.** Говорять, що повільно змінна при  $y \rightarrow Y$  ( $y \in \Delta_Y$ ) функція  $\theta : \Delta_Y \rightarrow ]0; +\infty[$  задовільняє умову  $S$  при прямуванні аргументу до  $Y$  (див., наприклад, у [5]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при  $y \rightarrow Y$  ( $y \in \Delta_Y$ ) функції  $L : \Delta_Y \rightarrow ]0; +\infty[$  має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Отримано наступну теорему.

**Теорема 1.** Нехай  $\sigma_1 \neq 1$ , функція  $\varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$  задовільняє умову  $S$  при  $y' \rightarrow Y_1$  ( $y' \in \Delta_{Y_1}$ ). Тоді, кожен  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$  – розв'язок диференціального рівняння (1) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \tag{5}$$

де  $L : [t_0, \omega[ \rightarrow R$  – двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$y_0^0 \pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[ \quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \tag{6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \tag{7}$$

При цьому, у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}, \tag{8}$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[ \quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \tag{9}$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left( L(t) \left[ 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + o(1)]$$

при  $t \uparrow \omega$ . (10)

**Доведення.** Нехай функція  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0} P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$  є розв'язком рівняння (1). Тоді даний розв'язок та його похідні першого та другого порядків зберігають знак на деякому проміжку  $[t_1, \omega[(t_0 \leq t_1 < \omega)$  та виконуються умови (4). У силу першої з умов (4) існує ([7], с.15) така нормалізована повільно змінна при  $t \uparrow \omega$  функція  $L(t) : [t_0, \omega[ \rightarrow R$ , яка задовольняє першу з умов (6) та останню з умов (7), а також, для якої має місце рівність (5).

З (4) та (5) випливає, що

$$y'(t) = L(t) \left[ 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] = L(t)[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (11)$$

звідки, зважаючи на (3), виконуються перша та друга умови (7) теореми.

З (5), (11) та, оскільки,  $y$  є розв'язком рівняння (1), то має місце рівність

$$2L'(t) + \pi_\omega(t)L''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(y'(t)). \quad (12)$$

У випадку існування скінченної або нескінченної границі (8), використовуючи правило Лопітала у формі Штольца, з урахуванням умов (6) та (7), маємо

$$0 = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 1 + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega L''(t)}{L'(t)}, \quad (13)$$

звідки випливає перша з умов (9). З (12) та (13), маємо при  $t \uparrow \omega$

$$\begin{aligned} \alpha_0 p(t)\varphi_0 \left( L(t) \left[ 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right) \varphi_1(\pi_\omega(t)L(t)) &= L'(t) \left[ 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} \right] = \\ &= L'(t)[1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Оскільки функція  $\theta_1(y') = \varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$  задовольняє умову  $S$  та виконується (11), то

$$\begin{aligned} \alpha_0 p(t)\varphi_0 \left( L(t) \left[ 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right) |\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) &= \\ &= L'(t)[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Отже, справедливими є друга з умов (9) та асимптотичне зображення (10). Теорема доведена.

**Означення 4.** Будемо говорити, що виконується умова  $N$ , якщо для деякої неперервно диференційовної функції  $L(t) : [t_0, \omega[ \rightarrow R(t_0 \in [a, \omega[)$ , яка задовольняє умови (5)-(7) та (9), має місце зображення

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left( L(t) \left[ 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + r(t)], \quad (14)$$

де  $r(t) : [t_0, \omega[ \rightarrow ] - 1; +\infty[ -$  неперервна функція, яка прямує до нуля при  $t \uparrow \omega$ .

Введемо наступні позначення

$$\mu_0 = \text{sign} \varphi_0'(y'), \quad \theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1}, \quad X(t) = L(t) \cdot e_1(t),$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi_0'(X(t))}{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi_0(X(t))}, \quad q_1(t) = \frac{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2} \Big|_{y=X(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Для цих функцій, у силу (2) та (7) виконуються наступні твердження:

1)

$$\lim_{t \uparrow \omega} e_1(t) = \lim_{t \uparrow \omega} e_2(t) = 1 \quad (15)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} H(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q_1(t) = 0, \quad (16)$$

2) якщо існує границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}},$$

тоді

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (17)$$

Дійсно, в твердження (15) безпосередньо впливають з умов (7) та (9).

Твердження (16) впливають зі справедливості тверджень:

$$H(t) = \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} \cdot \frac{X(t)\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \cdot \frac{1}{e_1(t)},$$



$$\frac{\varphi_0(X(t))\varphi_0''(X(t))}{(\varphi_0'(X(t)))^2} = 1 + \frac{\left(\frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))}\right)'}{\frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))}}.$$

Твердження (17) доводиться аналогічно до відповідного твердження, наведеного у роботі Євтухова В.М. та Чернікової А.Г. [3].

Справедливою є наступна теорема

**Теорема 2.** *Нехай  $\sigma_1 \neq 1$ , функція  $\theta_1$  задовольняє умову  $S$ , виконується умова  $N$  та*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}} = \gamma_0, \quad 0 < \gamma_0 < \infty. \quad (18)$$

Тоді за умови

$$\alpha_0 \mu_0 \gamma_0 > 0 \quad (19)$$

диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, для кожного з яких мають місце наступні асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$ :

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t)(1 + o(1)), \quad (20)$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot o(1). \quad (21)$$

**Доведення.** До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)],$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2(t).$$

Отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$z_1' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \cdot [-e_1 z_1 + 1 + K(t)e_1(t)z_2], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} z_2' &= L'(t) \cdot e_2(t) \cdot \frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \times \\ &\times \left[ \frac{\alpha_0 p(t) \pi_\omega(t) \cdot L(t) |\sigma_1 \theta_1(\pi_\omega(t)) \varphi_0(Y_2(t, z_2)) \cdot N(t, z_1)}{L'(t)} \times \right. \\ &\left. \times [1 + z_1]^{\sigma_1} - 1 + z_2 \cdot q_1(t) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

де

$$K(t) = \frac{\varphi_0(X(t))}{X(t)\varphi_0'(X(t))}, \quad N(t, z_1) = \frac{\theta_1(Y_1(t, z_1))}{\theta_1(\pi_\omega(t))},$$

$$Y_1(t, z_1) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)], \quad Y_2(t, z_2) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2(t).$$

Оскільки функція  $Y_1(t, z_1)$  є правильно змінною порядку 1, функція  $\theta_1$  задовольняє умову  $S$ , то

$$\lim_{t \uparrow \omega} N(t, z_1) = 1 \text{ рівномірно за } z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (24)$$

У силу умови  $N$

$$\frac{\alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t) L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \varphi_0(Y_2(t, z_2))}{L'(t)} = \frac{\varphi_0(Y_2(t, z_2))}{\varphi_0(X(t))} [1 + r(t)]. \quad (25)$$

Розкладаючи праву частину (25) при фіксованому  $t \in [t_1; \omega[$  за формулою Маклорена з залишком у формі Лагранжа, маємо,

$$\frac{\varphi_0(Y_1(t, z_1))}{\varphi_0(X(t))} \cdot [1 + r(t)] = [1 + r(t)] \cdot (1 + z_2) + R(t, z_2),$$

де

$$R(t, z_2) = [1 + r(t)] \cdot \frac{\varphi_0'' \left( X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) \varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2^2,$$

$$|\xi| < |z_2|.$$

Оскільки,

$$Y(t, z_1) = X(t) \left[ 1 + \frac{1}{\frac{X(t)\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))}} \xi \right],$$

то з умов (2) та (7) випливає, що

$$\varphi_0'' \left( X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'' \left( X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right)}{\varphi_0 \left( X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right)} \cdot [1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

За лемою 1.2. з [3] так, як  $\varphi_0, \varphi'_0 \in \Gamma_{Y_1}(Z_1)$  з додатковою функцією  $g = \frac{\varphi_0}{\varphi'_0}$ , то справедливою є рівність

$$\varphi_0'' \left( X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'^2(X(t))}{\varphi_0(X(t))} e^\xi [1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } z_2 \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Отже, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існують такі  $t_1 \in [t_0; \omega[$  та  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ , що

$$|R(t, z_2)| \leq (1 + \varepsilon)|z_2|^2 \text{ при } t \in [t_1; \omega[, |z_1| \leq \delta. \quad (26)$$

Вибираємо довільним чином число  $\varepsilon > 0$  та розглянемо систему (22)-(23) на множині

$$\Omega = [t_1; \omega[ \times D, \text{ де } D = \{(z_1; z_2) \in R^2, |z_1| \leq \delta, |z_2| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Система (22)-(23) на  $\Omega$  має вид

$$z_1' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \cdot [A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + 1], \quad (27)$$

$$z_2' = L'(t)e_2(t) \cdot \frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \times \\ \times [A_{21}(t)z_1 + A_{22}(t)z_2 + R_1(t, z_1, z_2) + R_2(t, z_1, z_2)], \quad (28)$$

де

$$A_{11}(t) = -e_1(t), \quad A_{12} = K(t)e_1(t), \quad A_{21}(t) = \sigma_1, \quad A_{22}(t) = 1,$$

$$R_1(t, z_1, z_2) = \left( \frac{(1 + r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} - 1 \right) (1 + \sigma_1 z_1 + z_2) + q_1 z_2,$$

$$R_2(t, z_1, z_2) = \frac{(1 + r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} (\sigma_1 z_1 z_2 + (1 + z_2) ((1 + z_1)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_1)) + \\ + R(t, z_2) \cdot \frac{(1 + z_2)(1 + z_1)^{\sigma_1} N(t, z_1)}{e_2(t)}.$$

Зауважимо, що з урахуванням (2) та (15),

$$\lim_{t \uparrow \omega} A_{11} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} A_{12} = 0.$$

Крім того,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_1(t; z_1; z_2) = 0 \text{ рівномірно за } z_1, z_2 : |z_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R_2(t; z_1; z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0.$$

Застосуємо до системи (27)-(28) додаткове перетворення

$$z_1(t) = v_1(t) \tag{29},$$

$$z_2(t) = |H(t)|^{\frac{1}{2}} v_2(t) \tag{30}.$$

У результаті отримаємо

$$v_1' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \cdot [c_{11}(t)v_1 + c_{12}v_2 + 1], \tag{31}$$

$$v_2' = h(t) \left[ c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)\text{sign}H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} v_2 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \cdot R_1(t, v_1, |H(t)|^{\frac{1}{2}}v_2(t)) + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \cdot R_2(t, v_1, |H(t)|^{\frac{1}{2}}v_2(t)) \right], \tag{32}$$

де

$$h(t) = \frac{L'(t)e_2(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{11} = -e_1(t), \quad c_{12} = K(t)e_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} \tag{33}$$

$$c_{21} = \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} A_{21}, \quad c_{22} = \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot A_{22}$$

З (6),(7) маємо

$$\int_{t_1}^t h(\tau) d\tau = \pm\infty. \tag{33}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} K(t)e_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} &= \frac{\varphi_0(X(t))}{L(t)\varphi_0'(X(t))} |H(t)|^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{2}}}{H(t)} \cdot \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} = \frac{1}{|H(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}H(t)} \cdot \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{t \uparrow \omega} c_{11}(t) = -1.$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} c_{12} = \lim_{t \uparrow \omega} K(t)e_1(t)\text{sign}H(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_0\mu_0}{\gamma_0}$$

З (14)-(16), (22) та (23) маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} c_{22} = \alpha_0\mu_0\gamma_0 \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_{21} = 0 \quad (34)$$

З(17) маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{1}{2} \cdot \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)\text{sign}H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (35)$$

Отже, характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів при  $v_1$  та  $v_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\alpha_0\mu_0}{\gamma_0} \\ 0 & \alpha_0\mu_0\gamma_0 \end{pmatrix}$$

має вид

$$(\rho - \alpha_0\mu_0\gamma_0)(\rho + 1) = 0.$$

З умов теореми випливає, що у цього рівняння рівно два дійсних коренів різних знаків.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь(31)-(32) виконано всі умови теореми 2.2 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (31)-(32) має однопараметричну сім'ю розв'язків  $\{v_i\}_{i=1}^2 : [t^*, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $t^* \geq t_1$ ), які прямують до нуля при  $t \uparrow \omega$ . Цим розв'язкам відповідають розв'язки  $y : [t^*, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t^* \geq t_1$ ) рівняння (1), що допускають при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення (20)-(21).

З виду цих зображень маємо, що отримані розв'язки  $\in P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язками рівняння (1). Теорема повністю доведена.

## Висновки

Отже, для диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток правильно змінної функції від невідомої функції та швидко змінної функції від похідної невідомої функції при аргументах, що прямують, відповідно, до нуля або нескінченності, побудовано асимптотичні зображення розв'язків та їх похідних першого порядку. Отриманно необхідні та достатні умови існування повільно змінних  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bingham N. H.** Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. / N. H. Bingham, Goldie C.M., Teugels J.L. – Cambridge university press. Cambridge, 1987. – 494 p.
2. **Чепок О.О.** Асимптотичні зображення правильно змінних  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ –розв'язків диференціального рівняння другого порядку, яке містить добуток різного типу нелінійностей від невідомої функції та її похідної. / О.О. Чепок // Нелінійні коливання. – 2022. – Т. 25, №1. – С. 133–144. ISSN 1562-3076.
3. **Evtukhov V.** Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity / V. Evtukhov, A. Chernikova // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 236. – P. 284–299. doi: 10.1007/s10958-018-4111-7.
4. **Evtukhov V.** Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point / V. Evtukhov, A. Samoilenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 62. – P. 56–86. doi: 10.1007/s11253-010-0333-7.
5. **Evtukhov V.** Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities / V. Evtukhov, A. Samoilenko // Differential Equations. – 2011. – Vol. 47, No. 5. – P. 627–649.
6. **Maric V.** Regular Variation and differential equations / V. Maric. – Springer (Lecture notes in mathematics, 1726), 2000. – 127 p.
7. **Seneta E.** Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics / E. Seneta. – Berlin: Springer-Verlag, 1976. – VIII, 116 p. doi: 10.1007/BFb0079658

*Chepok O.O.*

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF THE  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -SOLUTIONS OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION, WHICH CONTAINS THE PRODUCT OF DIFFERENT TYPES OF NONLINEARITIES FROM AN UNKNOWN FUNCTION AND ITS DERIVATIVE

*Summary*

The study of asymptotic representations of solutions of differential equations, in particular, of the second order differential equations, which contain nonlinearities of various types in the right-hand side, play an important role in the development of the qualitative theory of differential equations. This paper considers the type of differential equations of the second order, which contain in the right part the product of a regularly varying function from an unknown function and a rapidly varying function from the derivative of an unknown function when the corresponding arguments tend to zero or infinity. Necessary and sufficient conditions for the existence of slowly varying  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$  solutions of such equations have been obtained. Asymptotic representations of such solutions and their first-order derivatives are also obtained. Note that when additional conditions are imposed on the coefficients of the characteristic equation, such  $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the equation exist as a one-parameter family. Similar results were obtained earlier when considering second-order equations, which contain in the right-hand side the product of a rapidly varying function from an unknown function and a regularly varying function from the derivative of an unknown function when the arguments tend to zero or infinity. For the equations considered in this paper, similar results are new.

*Key words: nonlinear second-order differential equations, asymptotic representations of solutions,  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions, slowly varying first-order derivatives.*

## REFERENCES

1. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. (1987). *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge: Cambridge university press, 494 p.
2. Chepok, O. (2022). Asymptotychni zobrazhennia pravylno zminnykh  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -rozv'iazkiv dyferentsialnoho rivniannia druhoho poriadku, yake mistyt

- dobutok riznoho typu nelineinosti vid nevidomoi funktsii ta yii pokhidnoi.[Asymptotic representations of regularly varying  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions of a differential equation of the second order containing the product of different types of nonlinearities of the unknown function and its derivative] *Nelineini Kolyvannya*, Vol. 25, No. 1, P. 133–144.
3. Evtukhov, V., Chernikova, A. (2019). Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 236, P. 284–299. doi: 10.1007/s10958-018-4111-7.
  4. Evtukhov, V., Samoilenko, A. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 62, P. 56–86. doi: 10.1007/s11253-010-0333-7.
  5. Evtukhov, V., Samoilenko, A. (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities. *Differential Equations*, Vol. 47, No. 5, P. 627–649
  6. Maric V. (2000). *Regular Variation and differential equations*. Springer (Lecture notes in mathematics, 1726), 127 p.
  7. Seneta E. (1976). *Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, VIII, 116 p. doi: 10.1007/BFb0079658



УДК 517.928

**Н. В. Шарай, В. М. Шинкаренко**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Одеський національний економічний університет

## **АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ**

Встановлюються умови існування одного класу розв'язків у двочленного неавтономного диференціального рівняння третього порядку з нелінійністю, близькою у деякому сенсі до лінійної. Із застосуванням априорних властивостей так званих  $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків, отримано асимптотичні при  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) зображення для таких розв'язків та їх похідних першого та другого порядку у випадку  $\lambda_0 = 0$ . Твердження, що доведені для нелінійного рівняння, перенесено на лінійні диференціальні рівняння третього порядку з асимптотично малими коефіцієнтами. Зазначене дозволило, в деякій мірі, доповнити відомі результати щодо асимптотичних властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь третього порядку.

*MSC: 34D05, 34E05.*

*Ключові слова: рівняння третього порядку, асимптотичні зображення, помірно змінна нелінійність, існування розв'язків.*

*DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294310*

### **Вступ**

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t)y |\ln |y||^\sigma, \quad (1.1)$$

де  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  - неперервна функція,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty^*$ .

Проблема отримання умов існування розв'язків з певними властивостями для деяких класів диференціальних рівнянь третього порядку неодноразово піднімалась у роботах дослідників у галузі якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь. Основні результати досліджень понад три десятиліття назад сформульовано у монографіях І. Кігурадзе та Т. Чантурії

---

\*Вважаємо, що  $a > 1$  при  $\omega = +\infty$  и  $\omega - a < 1$  при  $\omega < +\infty$ .

[1] та М. Грегуша [2]. Зважаючи на прикладні застосування та різноманітність проблематики, дослідження звичайних диференціальних рівнянь третього порядку є актуальним і в наш час.

Розв'язок  $y$  рівняння (1.1), який заданий і відмінний від нуля на проміжку  $[t_y, \omega[ \subset [a, \omega[$ , будемо називати  $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язком, якщо він задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm \infty \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y''(t))^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0. \quad (1.2)$$

В роботах [3 – 5] для рівняння (1.1) були встановлені умови існування  $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків у випадку, якщо  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , а також були одержані асимптотичні подання для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно. При цьому встановлена кількість розв'язків із знайденим асимптотичним зображенням.

В роботі [6] для диференціального рівняння другого порядку вигляду (1.1) отримані умови існування та асимптотика  $P_\omega(0)$ -розв'язків.

Метою даної роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування у диференціального рівняння (1.1)  $P_\omega(0)$ -розв'язків, а також асимптотичного зображення при  $t \uparrow \omega$  для всіх таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно.

## 2. Допоміжні твердження

Для отримання результатів щодо асимптотичного поведіння розв'язків диференціального рівняння (1.1), сформулюємо дві леми, перша з яких пов'язана з апіорними асимптотичними властивостями  $P_\omega(0)$ -розв'язків, друга лема – з існуванням зникаючих в околі особливої точки розв'язків квазілінійних систем диференціальних рівнянь. Введемо необхідну у подальшому функцію

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

На підставі леми 10.6., яка доведена в роботі [7] (Глава 3, §10, стор. 143-144), можливо отримати наступне твердження

**Лема 1.** *Для кожного  $P_\omega(0)$ -розв'язку диференціального рівняння (1.1) мають місце при  $t \uparrow \omega$  наступні асимптотичні співвідношення*

$$y(t) \sim \pi_\omega(t)y'(t), \quad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}\right). \quad (2.1)$$

У випадку існування скінченної або рівної  $\pm\infty$  границі  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$  має місце співвідношення

$$y'''(t) \sim -\frac{y''(t)}{\pi_\omega(t)} \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.2)$$

Далі, розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v'_k = h(t) \left[ f_k(t, v_1, v_2, v_3) + \sum_{i=1}^3 c_{ki}v_i + V_k(v_1, v_2, v_3) \right] & (k = 1, 2), \\ v'_3 = H(t) \left[ f_3(t, v_1, v_2, v_3) + \sum_{i=1}^3 c_{3i}v_i + V_n(v_1, v_2, v_3) \right], \end{cases} \quad (2.3)$$

в якій  $c_{ki} \in \mathbb{R}$  ( $k, i = 1, 2, 3$ ),  $h, H : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  – неперервно диференційовані функції,  $f_k : [t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – неперервні функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_k(t, v_1, v_2, v_3) = 0 \quad \text{рівномірно по } (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3, \quad (2.4)$$

де

$$\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3 = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \leq \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, 3) \right\},$$

а  $V_k : \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – неперервно диференційовані функції такі, що

$$V_k(0, \dots, 0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial V_k(t, 0, 0, 0)}{\partial v_i} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2.5)$$

У відповідності з теоремою 2.6 з роботи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [8] для системи диференціальних рівнянь вигляду (2.3) має місце наступне твердження.

**Лема 2.** *Нехай функції  $h$  і  $H$  задовольняють умовам*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{H(t)}{h(t)} = 0, \quad \int_{t_0}^{\omega} H(\tau) d\tau = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{1}{H(t)} \left( \frac{H(t)}{h(t)} \right)' = 0. \quad (2.6)$$

*Нехай, окрім того, для матриць  $C_3 = (c_{ki})_{k,i=1}^3$  і  $C_2 = (c_{ki})_{k,i=1}^2$  виконуються наступні умови:  $\det C_3 \neq 0$ , а  $C_2$  не має власних значень з нульового*

дійсною частиною. Тоді система диференціальних рівнянь (2.3) має принаймі один розв'язок  $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  ( $t_0 \leq t_1 \leq \omega$ ), який прямує до нуля при  $t \uparrow \omega$ . Більш того, якщо серед власних значень матриці  $C_2$  є  $m$  власних значень (з урахуванням кратних), дійсні частини яких містять знак, протилежний знаку функції  $h(t)$  на проміжку  $[t_0, \omega[$ , то при виконанні на проміжку  $[t_0, \omega[$  нерівності  $H(t) (\det C_3) (\det C_2) > 0$  таких розв'язків у системі (2.3) існує  $m$ -параметрична сім'я, а при виконанні протилежної нерівності  $-(m+1)$ -параметрична сім'я.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для формулювання основного результату введемо допоміжні функції

$$P_1(t) = \int_{A_1}^t p(\tau) d\tau, \quad P_2(t) = \int_{A_2}^t P_1(\tau) d\tau,$$

$$J_A(t) = \int_A^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau, \quad I(t) = \int_a^t J_A(\tau) d\tau,$$

де

$$A_1 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega |P_1(\tau)| d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega |P_1(\tau)| d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)| p(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)| p(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau < +\infty, \end{cases}$$

**Теорема 1.** Припустимо, що існує (скінчений або рівний  $\pm\infty$ )

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_A(t)}{J_A(t)} \quad (3.1)$$

Диференціальне рівняння (1.1) має  $P_\omega(0)$ -розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) J_A(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_A(t)}{J_A(t)} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = \pm \infty. \quad (3.2)$$

При цьому кожен із таких розв'язків допускає наступні асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$ :

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \pi_\omega(t)[1 + o(1)], \quad (3.3)$$

$$\ln |y'(t)| = \alpha_0 I(t)[1 + o(1)] \quad (3.4)$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 J_A(t)[1 + o(1)]. \quad (3.5)$$

Більш того, якщо умови (3.2) виконані, тоді диференціальне рівняння (1.1) має дво-параметричну сім'ю розв'язків, яка має асимптотичні розвинення (3.3) – (3.5) при  $t \uparrow \omega$  як у випадку  $\omega = +\infty$ , так і  $\omega < +\infty$ .

**Доведення. Необхідність.** Нехай  $y : [t_y, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  довільний  $P_\omega(0)$ -розв'язок диференціального рівняння (1.1). Тоді, в відповідності з означенням  $P_\omega(0)$ -розв'язку існує  $t_0 \in [t_y, \omega[$  таке, що  $\ln |y(t)| \neq 0$  на проміжку  $[t_0, \omega[$ , і за лемою 2.1 виконуються асимптотичні співвідношення (2.1). Відповідно до першого із асимптотичних співвідношень (2.1) маємо асимптотичні зображення (3.3), з яких, зокрема, маємо

$$y(t) \sim \pi_\omega(t) y'(t), \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Це означає, що виконується зображення

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{1}{\pi_\omega(t)} \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

Дане зображення, коли  $\omega = +\infty$  (за означенням  $\pi_\omega(t) = t$ ), суперечить останньому співвідношенню (2.1). При  $\omega < +\infty$  якщо проінтегрувати, одержуємо

$$\ln |y(t)| \sim \ln |\pi_\omega(t)| \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

В силу цих асимптотичних співвідношень з (1.1) отримаємо

$$y'''(t) = \alpha_0 p(t) \pi_\omega(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma y'(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

тоді

$$\frac{y'''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 p(t) \pi_\omega(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.6)$$

Оскільки

$$\left( \frac{y''(t)}{y'(t)} \right)' = \frac{y'''(t)}{y'(t)} \left[ 1 - \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} \right],$$

і з означення  $P_\omega(0)$ -розв'язку

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} = 0,$$

Звідки

$$\left( \frac{y''(t)}{y'(t)} \right)' \sim \frac{y'''(t)}{y'(t)} \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Тому асимптотичне співвідношення (3.6) можна записати у вигляді

$$\left( \frac{y''(t)}{y'(t)} \right)' = \alpha_0 p(t) \pi_\omega(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Інтегруючи дане співвідношення від  $t_0$  до  $t$ , одержуємо

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = c_0 + \alpha_0 \int_{t_0}^t p(\tau) \pi_\omega(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma [1 + o(1)] d\tau, \quad (3.7)$$

де  $c_0$  стала, або з урахуванням вибору границі інтегрування  $A$  в функції  $J_A$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = c + \alpha_0 J_A(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

де

$$c = c_0 + \alpha_0 \int_{t_0}^A p(\tau) \pi_\omega(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma [1 + o(1)] d\tau.$$

У випадку, коли  $A = a$ , інтеграл у правій частині (3.7) прямує до  $\pm\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , і тоді (3.7) може бути переписано в вигляді

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 J_A(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.8)$$

Покажемо, що у випадку, коли інтеграл у правій частині (3.7) прямує до нуля при  $t \uparrow \omega$ , тоді також виконується співвідношення (3.8), тобто ми маємо

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = c + o(1) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Це зображення, коли  $\omega = +\infty$  (тобто  $\pi_\omega(t) = t$ ), суперечить останньому співвідношенню (2.1), а якщо  $\pi_\omega(t) < +\infty$ , то шляхом інтегрування одержуємо

$$\ln |y'(t)| = c_1 + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \quad (c_1 = \text{const}),$$

що суперечить першій умові (2.1). Тому в кожному з двох можливих розглянутих випадків виконується асимптотичне співвідношення (3.8), тобто виконується (3.5), і за допомогою останнього з асимптотичних співвідношень із (2.1) виконується перша умова (3.2).

Крім того, з (3.7) та (3.5) випливає, що

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} = \frac{J'_A(t)}{J_A(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тоді

$$\frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)} = \frac{\pi_\omega(t)J'_A(t)}{J_A(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \quad (3.9)$$

і в силу існування границі (3.1) (скінченої або рівної  $\pm\infty$ ) та користуючись лемою 2.1, приходимо до висновку, що з урахуванням (2.2), із (3.9) випливає справедливність другої з умов (3.2).

Крім того, інтегруючи співвідношення (3.8) на проміжку від  $t_0$  до  $t$ , отримуємо

$$\ln |y'(t)| = c + \alpha_0 \int_{t_0}^t J_A(\tau) [1 + o(1)] d\tau.$$

Оскільки, за означенням  $P_\omega(0)$ -розв'язків,  $\lim_{t \uparrow \omega} \ln |y'(t)| = \pm\infty$ , тоді третя з умов (3.2) виконана і це співвідношення може бути записано як (3.4).

*Достатність* Нехай умови (3.2) виконані. Покажемо, що у цьому випадку диференціальне рівняння (1.1) має  $P_\omega(0)$ -розв'язки, що допускають при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення (3.3)-(3.5) і дамо відповідь на питання про кількість розв'язків з такими властивостями.

Оскільки виконується тотожність

$$\pi_\omega(t)J_A(t) = \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)} I(t),$$

тоді з умов (3.2) випливає, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)} = 0. \quad (3.10)$$

Крім того, за правилом Лопітала

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) J_A(t) = 0. \quad (3.11)$$

Застосовуючи до рівняння (1.1) перетворення

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{y'(t)} &= \pi_\omega(t)[1 + v_1(t)] \quad , \\ \frac{y''(t)}{y'(t)} &= \alpha_0 J_A(t)[1 + v_2(t)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\ln |y'(t)| = \alpha_0 I(t)[1 + v_3(t)],$$

одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = -\frac{v_1}{\pi_\omega(t)} - \alpha_0 J_A(t)(1 + v_1)(1 + v_2), \\ v_2' = -\frac{J_A'(t)}{J_A(t)}(1 + v_2) - \alpha_0 J_A(t)(1 + v_2)^2 + \\ + \frac{J_A'(t)}{J_A(t)}(1 + v_1) \frac{|\ln |\pi_\omega(t)(1+v_1)||^\sigma}{|\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma} |1 + \alpha_0 \frac{I(t)(1+v_3)}{\ln |\pi_\omega(t)(1+v_1)|} |^\sigma, \\ v_3' = \frac{J_A(t)}{I(t)}(1 + v_2) - \frac{J_A(t)}{I(t)}(1 + v_3). \end{cases}$$

Позначимо

$$h(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)}, \quad H(t) = \frac{J_A(t)}{I(t)}, \quad \delta_1(t) = \alpha_0 \pi_\omega(t) J_A(t),$$

$$\delta_2(t) = \frac{\pi_\omega(t) J_A'(t)}{J_A(t)} + 1, \quad \delta_3(t) = -\frac{\alpha_0 I(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|}, \quad \delta_4(t, v_1) = \frac{\ln |1 + v_1|}{\ln |\pi_\omega(t)|}$$

та перепишемо одержану систему диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} v_1' = h(t) [f_1(t, v_1, v_2, v_3) - v_1] \quad , \\ v_2' = h(t) [f_2(t, v_1, v_2, v_3) - v_1 + v_2], \\ v_3' = H(t) [v_2 - v_3], \end{cases} \quad (3.13)$$

де функції  $f_1(t, v_1, v_2, v_3)$ ,  $f_2(t, v_1, v_2, v_3)$  мають вигляд

$$f_1(t, v_1, v_2, v_3) = \delta_1(t)(1 + v_2)^2 - \delta_2(t)(1 + v_2),$$



$$f_2(t, v_1, v_2, v_3) = \delta_1(t)(1 + v_2)^2 - \delta_2(t)(1 + v_2) + (1 + v_1) \cdot \left[ 1 + \frac{\pi_\omega(t)J'_A(t)}{J_A(t)} |1 + \delta_4(t, v_1)|^\sigma |1 + \frac{\delta_3(t)(1 + v_3)}{1 + \delta_4(t, v_1)}|^\sigma \right].$$

Оскільки виконуються умови (3.2) та (3.11), для функцій  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \delta_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.14)$$

і

$$\lim_{t \uparrow \omega} \delta_4(t, v_1) = 0 \quad \text{рівномірно при } v_1 \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \quad (3.15)$$

Зважаючи на отримані граничні співвідношення, ми вибираємо число  $t_0 \in ]a, \omega[$ , таким чином, що для  $t \in [t_0, \omega[$  та  $|v_1| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|v_3| \leq \frac{1}{2}$  виконуються наступні нерівності

$$|\delta_4(t, v_1)| \leq \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{\delta_3(t)(1 + v_3)}{1 + \delta_4(t, v_1)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Далі розглянемо систему рівнянь на множині

$$\Omega = [t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3, \quad \text{де } \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3 = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3 \right\}$$

і  $t_0$ — деяке число з проміжка  $[a, \omega[$ .

Праві частини системи неперервні на цій множині, функції  $h, H$  неперервно-диференційовані на інтервалі  $[t_0, \omega)$ , а за умовами (3.14), (3.15)

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_k(t, v_1, \dots, v_3) = 0 \quad \text{рівномірно при } (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3 \quad (k = 1, 2).$$

Таким чином, система диференціальних рівнянь (3.13) є квазілінійною системою диференціальних рівнянь типу (2.3). Покажемо, що для цієї системи виконується всі умови леми 2.2. Враховуючи вигляд функцій  $I$  та  $J_A$

$$\int_{t_0}^t H(\tau) d\tau \sim \ln |J_A(t)| \longrightarrow \pm \infty \quad \text{коли } t \uparrow \omega.$$

Окрім того,

$$\frac{H(t)}{h(t)} = \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)}, \quad \frac{1}{H(t)} \left( \frac{H(t)}{h(t)} \right)' = 1 + \frac{\pi_\omega(t)J'_A(t)}{J_A(t)} - \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)}$$

і тому, враховуючи другу з умов (3.2) і умову (3.10), отримуємо співвідношення

$$\frac{H(t)}{h(t)} = \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)}, \quad \frac{1}{H(t)} \left( \frac{H(t)}{h(t)} \right)' = 1 + \frac{\pi_\omega(t)J'_A(t)}{J_A(t)} - \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)}$$

тобто для системи (3.13) виконуються умови (2.4) леми 2.2.

Помітимо, що матриці  $C_2$  та  $C_3$  розміру  $2 \times 2$  та  $3 \times 3$  (відповідно) з леми 2.2 у випадку системи диференціальних рівнянь (3.13) мають вигляд

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Власними значеннями матриці  $C_2$  є корені алгебраїчного рівняння

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0,$$

тобто числа  $\lambda_1 = 1 > 0$ ,  $\lambda_2 = -1 < 0$ . Крім того,

$$\det C_2 = -1, \quad \det C_3 = 1.$$

Таким чином, для системи диференціальних рівнянь (3.13) виконуються всі умови леми 2.2. Згідно цієї леми система диференціальних рівнянь (3.13) має принаймі один розв'язок  $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega[ \rightarrow R^3$  ( $t_1 \in [t_0, \omega[$ ), який прямує до нуля при  $t \uparrow \omega$ .

Більш того, оскільки серед власних значень матриці  $C_2$  є одне від'ємне і одне додатне число та  $\det C_2 = -1$ ,  $\det C_3 = 1$ , то згідно твердженням леми 2.2, якщо виконується нерівність  $h(t) > 0$  ( $h(t) < 0$ ) на проміжку  $[t_0, \omega[$ , тоді система диференціальних рівнянь (3.13) має однопараметричну сім'ю розв'язків, які зникають при  $t \rightarrow \omega$  у випадку, коли  $H(t) < 0$  на  $[t_0, \omega[$ , і двопараметричну сім'ю розв'язків, у випадку, коли  $H(t) > 0$  на  $[t_0, \omega[$ .

Для остаточного вирішення питання про кількість зникаючих при  $t \uparrow \omega$  розв'язків у системи (3.13) необхідно визначити знаки функцій  $h$  и  $H$  на проміжку  $[t_0, \omega[$ .

Оскільки  $h(t) = \pi_\omega^{-1}(t)$ , тоді з визначення функції  $\pi_\omega$  маємо

$$\text{sign } h(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для функції  $H$  у відповідності з означенням функції  $I$  маємо

$$H(t) = \frac{J_A(t)}{I(t)} = \frac{|J_A(t)|}{\int_a^t |J_A(\tau)| d\tau} \text{ якщо } t \in [t_0, \omega).$$

Користуючись одержаними умовами для функцій  $h$  та  $H$ , отримаємо наступні фінальні висновки щодо кількості зникаючих при  $t \uparrow \omega$  розв'язків у системи диференціальних рівнянь (3.13):

1) якщо  $\omega = +\infty$ , то при  $\sigma < 1$  система диференціальних рівнянь (3.13) має однопараметричну сім'ю зникаючих при  $t \uparrow \omega$  розв'язків, а при  $\sigma > 1$  – принаймні один такий розв'язок;

2) якщо  $\omega < +\infty$ , то при  $\sigma < 1$  система диференціальних рівнянь (3.13) має трипараметричну сім'ю зникаючих при  $t \uparrow \omega$  розв'язків, а при  $\sigma > 1$  – двопараметричну сім'ю таких розв'язків.

Користуючись перетвореннями (3.12), кожному розв'язку  $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  системи диференціальних рівнянь (3.13), який прямує до нуля, відповідає розв'язок  $y : [t_1, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  диференціального рівняння (1.1), який при  $t \uparrow \omega$  має асимптотичні зображення (3.3)-(3.5). Користуючись цими зображеннями та умовою (3.2), неважко довести, що кожний такий розв'язок є  $P_\omega(0)$  – розв'язком диференціального рівняння (1.1).

Теорему повністю доведено.

**Зауваження** При перевірці виконання умов (3.2) можливо вважати, що в силу першої з цих умов, друга та третя умови еквівалентні відповідно умовам

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma = 0, \quad \int_a^\omega \pi_\omega(\tau) p(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau = +\infty.$$

Наведемо приклад застосування доведеної теореми для рівнянь більш загального виду. Звернемо увагу на те, що теорема 3.1 охоплює випадок  $\sigma = 0$ , тобто коли диференціальне рівняння (1.1) є лінійним диференціальним рівнянням вигляду

$$y''' = \alpha_0 p(t) y. \quad (3.16)$$

Для рівняння (3.16) із теореми 3.1 з урахуванням зауваження має місце наступний наслідок.

**Наслідок 1.** *Припустимо, що існує (скінчена або рівна  $\pm\infty$ ) границя (3.1). Для існування у диференціального рівняння (3.16)  $P_\omega(0)$ -розв'язків необхідно і достатньо виконання умов*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega^2(t)p(t)}{\int_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau) d\tau} = -1, \quad \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^2 p(\tau) d\tau = +\infty,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega^3(t)p(t) = 0. \quad (3.17)$$

При цьому, кожний з таких  $P_\omega(0)$ -розв'язків допускає наступні асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$ :

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \pi_\omega(t)[1 + o(1)], \quad (3.18)$$

$$\ln |y'(t)| = \alpha_0 \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^2 p(\tau) d\tau [1 + o(1)] \quad (3.19)$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 p(t) \pi_\omega^2(t) [1 + o(1)]. \quad (3.20)$$

Більш того, якщо умови (3.17) виконані, тоді диференціальне рівняння (3.16) має двопараметричну сім'ю розв'язків, яка має асимптотичні зображення (3.18) – (3.20) при  $t \uparrow \omega$  у випадках  $\omega = +\infty$ , а також коли  $\omega < +\infty$ .

## Висновки

У роботі встановлено необхідні та достатні умови існування у диференціального рівняння (1.1)  $P_\omega(0)$ -розв'язків, а також асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$  для всіх таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно.

Результати, сформульовані у Наслідку 3.1. у випадку  $\omega = +\infty$  доповнюють результати для лінійних диференціальних рівнянь з асимптотично малими коефіцієнтами, що наведені в роботі [1] (дивись [1], Розділ 1).

Актуальність подальших досліджень вбачаємо у встановленні умов існування та асимптотиці  $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків для рівнянь з узагальненим виглядом нелінійності.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Kiguradze I.** Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations / I. Kiguradze, T. A. Chanturia. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993. – 331 p.
2. **Gregus M.** Third order linear differential equations / M. Gregus. – Boston: Reidel Publ., 1987.
3. **Sharai N.** Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // J. Math. Sci. (N.Y.). – 2016. – Vol. 215, No. 3. – P. 408–420.
4. **Шарай Н. В.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, близких к линейным / Н. В. Шарай // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2010. – Т. 15, №18. – С. 88–101.
5. **Sharai N.** Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1-3. – 2018. – P. 165–169.
6. **Mousa Jaber Abu Elshour** Asymptotic representations of the solutions of a class of second order nonautonomous differential equations / Abu Elshour Mousa Jaber // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 44, P. 59–68.
7. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов. – Диссертация д-ра физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Дифференциальные уравнения. Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. – 295 с.
8. **Evtukhov V. M.** Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point / V. M. Evtukhov, A. M. Samoilenko // Ukrainian Math. J. – 2010. – Vol. 62, No. 1, P. 56–86.

Sharai N.V., Shinkarenko V.M.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF SOME CLASSES OF SOLUTIONS THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

*Summary*

The conditions for the existence of one class of solutions of a binomial non-autonomous differential equation of the third order with a nonlinearity close in some sense to a linear one are established. Using the a priori properties of the so-called  $P_\omega(\lambda_0)$ -solutions, asymptotic at  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) images were obtained for such solutions connections and their derivatives of the first and second order in the case  $\lambda_0 = 0$ . The propositions proved for the nonlinear equation are transferred to linear differential equations of the third order with asymptotically small coefficients. This made it possible, to some extent, to supplement the known results regarding the asymptotic properties of solutions of linear differential equations of the third order.

*Key words: equations of the third order, asymptotic images, moderately variable nonlinearity, existence of solutions .*

**REFERENCES**

1. Kiguradze I., Chanturia T. (1993). *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 331 p.
2. Gregus M. (1987). *Third order linear differential equations*. Boston: Reidel Publ.
3. Sharai N., Shinkarenko V. (2016). Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, Vol. 215, No. 3, P. 408–420.
4. Sharai N.V. (2010). Asimptoticheskoe povedenie reshenij obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij tret'ego porjadka, blizkih k linejnym. [Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations of third order]. *Vestn. Odessk. Nac. Un., Mat. i Meh.* Vol.15, No. 18, P. 88–101.
5. Sharai N., Shinkarenko V. (2018). Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. *QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1-3*, P. 165–169.
6. Mousa Jaber Abu Elshour (2008). Asymptotic representations of the solutions of a class of second order nonautonomous differential equations. *Memoris on Differential Equations and Mathematical Physics*. Vol. 44, P. 59–68.
7. Evtukhov V. M. (1998). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of

non-autonomous ordinary differential equations.] (*D.Sc. Thesis*) *Differential equations*. Kyiv: institute of Mathematics of NASU.

8. Evtukhov V. M., Samoilenko A. M. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukrainian Math. J.* Vol. 62, No. 1, P. 56–86.

УДК 519.171:510.28

**Н. А. Якімова, М. Є. Клішин**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## **МАТРИЧНЕ ПОДАННЯ ОПЕРАЦІЙ НАД ГРАФАМИ**

Теорія графів має широке розповсюдження з практичної точки зору. Графи оточують нас у повсякденному житті (наприклад, карти доріг та шляхів), а також відіграють важливу роль в наукових дослідженнях (наприклад, електросхеми). Для побутового застосування, безумовно, найзручнішим є геометричний спосіб подання графів. Але для комп'ютерної обробки інформації це не є раціональним. В цих випадках використовується матричне подання графів у вигляді матриць суміжності або матриць інцидентності. Тому все більшого значення набувають дослідження, присвячені саме цій темі. В даній статті розглядається можливість виконання операцій над матрицями, якими подано графи. Ці методи мають свої особливості та обмеження. Вони також розглянуті в даній статті. Для кожної операцій запропонований варіант обробки як матриці суміжності, так і матриці інцидентності для орієнтованих та неорієнтованих графів, показано відмінності такої обробки в залежності від виду графу.

*MSC: 03G05, 03G25, 03F52, 06E25, 15B34.*

*Ключові слова: орієнтований та неорієнтований граф, матриця суміжності, матриця інцидентності, операції над графами, елементарні логічні операції, булева матриця, багатозначна логіка.*

*DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294314*

### **Вступ**

Сьогодні ставить перед наукою все більшу кількість задач, пов'язаних із комп'ютеризацією. Саме потреби комп'ютерної обробки інформації потребують дослідження можливостей матричного подання графів і, як наслідок, матричного подання усіх можливих перетворень графів. Операції над графами – це перший важливий крок на шляху таких перетворень. Матричне подання цих операцій має свої особливості в залежності від виду кожного конкретного графу, тому процедура їх виконання не є повністю універсальною. Різні види графів потребують своїх індивідуальних підходів до їх розглядання. За матрицями суміжності та інцидентності можна повністю охарактеризувати граф та відновити його геометричну реалізацію. Для простих неорієнтованих графів ці матриці є булевими. Якщо граф не має кратних ребер, то його матриця суміжності є булевою незалежно



від того, орієнтований цей граф чи ні. Матриця інцидентності є булевою лише для неорієнтованого графу. Тому для матричного виконання операцій над графами треба залучати не лише апарат булевих матриць [1], а й апарат багатозначної логіки та апарат звичайних арифметичних операцій.

**ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ.** Однією з важливіших алгебраїчних моделей є апарат матриць, який може бути застосований в багатьох як теоретичних, так і прикладних галузях математики.

**Означення.** Матриця називається булевою, якщо її елементами є логічні скаляри із поля  $K=\{0,1\}$  [1].

Тобто елементами булевої матриці є нулі та одиниці. Наприклад, булевою буде матриця [2]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці є булевими, то з ними можна виконувати як звичайні алгебраїчні операції над матрицями, так і операції двозначної логіки, описані в [1]. Якщо матриці не є булевими, то для виконання з ними логічних операцій диз'юнкції та кон'юнкції треба застосовувати апарат багатозначної логіки. В цьому випадку операції диз'юнкції та кон'юнкції матриць виконуються за наступними правилами [3]

$$x \vee y = \max\{x, y\} \quad (1)$$

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \quad (2)$$

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Можливість матричного виконання основних операцій над графами можна показати на прикладах. Розглянемо два орієнтовані графи, зображені на рис. 1.

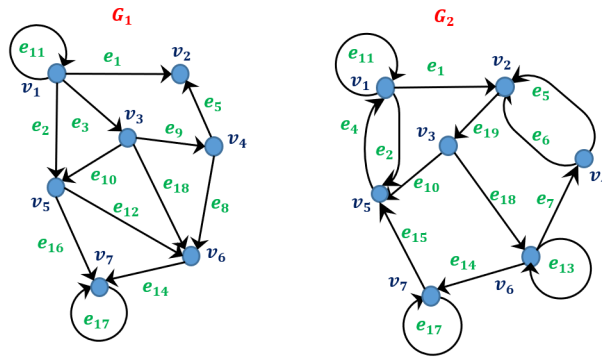


Рис. 1: Орієнтовані графи.

Для обох цих графів можна побудувати матриці суміжності:

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ці матриці побудовано виходячи з того, що номер рядка відповідає початковій вершині, а номер стовпця – кінцевій вершині кожного ребра. Але ці графи можуть бути від самого початку задані цими матрицями. Виконання операцій над такими графами не потребує відтворення їх геометричної реалізації.

Граф  $G_1$  не містить кратних ребер, тому його матриця суміжності є булевою. Граф  $G_2$  містить суворо паралельні ребра  $e_5(v_4, v_2)$  і  $e_6(v_4, v_2)$ . Тому його матриця суміжності містить елемент  $a_{42} = 2$ , тобто булевою не є. Але якщо врахувати, що операція диз'юнкції для багатозначної логіки виконується за правилом (1), то диз'юнкція для цих матриць набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 A(G_1) \vee A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_U.
 \end{aligned}$$

Якщо операцію об'єднання вказаних графів виконати графічно, то отримаємо граф, зображений на рис. 2.

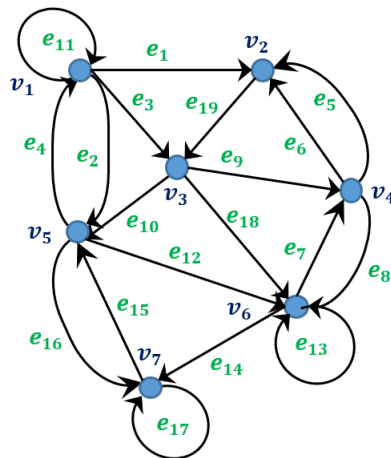


Рис. 2: Граф  $G_1 \cup G_2$ .

Легко побачити, що цьому графу відповідає матриця суміжності  $A_U$ .

Якщо врахувати, що для багатозначної логіки операція кон'юнкції виконується за правилом (2), то кон'юнкція для матриць  $A(G_1)$  і  $A(G_2)$  набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 A(G_1) \wedge A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{\cap}.
 \end{aligned}$$

Якщо операцію перетину вказаних графів виконати графічно, то отримаємо граф, зображений на рис. 3.

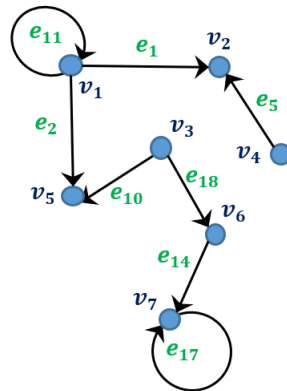


Рис. 3: Граф  $G_1 \cap G_2$ .

Легко побачити, що цьому графу відповідає матриця суміжності  $A_{\cap}$ .

Виконаємо тепер з матрицями  $A(G_1)$  і  $A(G_2)$  операцію суми за модулем 2, маючи на увазі її загальне означення як залишку від ділення відповідної суми на 2:

$$\begin{aligned}
 A(G_1) \oplus A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\oplus}.
 \end{aligned}$$

Якщо виконати графічно операцію кільцевої суми графів  $G_1$  і  $G_2$ , то отримаємо граф, зображений на рис. 4.

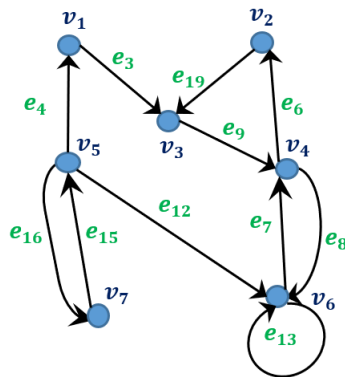


Рис. 4: Граф  $G_1 \oplus G_2$ .

Для цього графу також легко побачити, що йому відповідає матриця суміжності  $A_{\oplus}$ .

В цих графах кожному ребру наданий порядковий номер. В практичному застосуванні ці номери можуть означати якесь певне змістовне навантаження. Але при матричному відображенні цей зміст може втрачатися. Матриця відображає наявність або відсутність ребра, тобто наявність або відсутність зв'язку між об'єктами. Тому, якщо в двох графах між двома вершинами одне й те саме ребро має різне змістовне навантаження (наприклад, автомобільна та ґрунтова дороги), то матриця суміжності покаже лише наявність або відсутність цього зв'язку без пояснення його характеру. Але зазвичай в практичних застосунках інформації про наявність зв'язку буває досить, тому для бінарних операцій над орієнтованими графами [4] застосування елементарних операцій багатозначної логіки над матрицями суміжності є ефективним математичним апаратом.

Застосуємо тепер означення кільцевої суми графів. Згідно до нього, множина ребер кільцевої суми графів визначається із співвідношення  $E_{\oplus} = \{(E_{G_1} \cup E_{G_2}) \setminus (E_{G_1} \cap E_{G_2})\}$  [4]. Виходячи з цього співвідношення, виконаємо арифметичну операцію віднімання матриці  $A_{\wedge}$  від матриці  $A_{\vee}$ :

$$\begin{aligned}
 A_{\cup} - A_{\cap} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ця матриця збігається з матрицею  $A_{\oplus}$  для кільцевої суми графів  $G_1$  і  $G_2$ , тобто матриця суміжності графа, отриманого в результаті кільцевої суми двох графів, може бути обчисленою і в такий спосіб. Цей приклад наочно показує, що для матричного виконання операцій над графами одночасне застосування і арифметичних, і логічних операцій є припустимим. Для програмної реалізації перетворень матриць це також не є перешкодою. Однак слід зазначити, що як арифметичні, так і логічні операції над матрицями висувають певні вимоги до розмірності цих матриць: операції арифметичного додавання і віднімання, а також логічні операції диз'юнкції, кон'юнкції та суми за модулем 2 можна виконувати лише з матрицями однакової розмірності [1]. З цього випливає, що в описаний спосіб можна виконувати операції в матричному поданні лише для графів, у яких збігаються множини вершин, причому не лише за кількістю, а й за змістом.

Слід також зазначити, що кільцева сума графів не може містити ізольованих вершин. Якщо при виконанні цієї операції такі вершини утворюються, то їх треба видаляти з графа.

Видалення вершини з графу тягне за собою видалення всіх інцидентних до неї ребер, тобто видалення всіх зв'язків цього об'єкту або вузла з іншими об'єктами або вузлами. Це означає, що при видаленні вершини  $v_i$  з матриці суміжності треба видалити  $i$ -й рядок та  $i$ -й стовпець. В зв'язку з цим алгоритм виконання операції видалення вершини  $v_i$  з графа в матричному поданні аналогічний алгоритму побудови мінору  $M_{ii}$  для матриці суміжності цього графу. Нехай, наприклад, з графу  $G_1$  треба видалити вершину  $v_4$ . Побудуємо для матриці  $A(G_1)$  мінор  $M_{44}$  [5]:

$$M_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отже, новому графу  $G'_1 = G_1 \setminus \{v_4\}$  буде відповідати матриця суміжності

$$A(G'_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм видалення з матриці рядків та стовпців вже комп'ютеризований. В даному випадку програмна реалізація буде передбачати виконання двох зсувів: для рядків та стовпців. Для графа без ізольованих вершин доцільно проводити цю операцію саме з використанням матриці суміжності.

В матриці суміжності ознакою ізольованої вершини є наявність одиниць у рядку і стовпці. В матриці інцидентності ознакою ізольованої вершини є наявність нульового рядку. Отже, якщо вершина, яку треба видалити з графу, є ізольованою, то в цьому єдиному випадку зручніше проводити цю операцію з використанням матриці інцидентності. При видаленні нульового рядку з матриці інцидентності жодний зв'язок між іншими вершинами (об'єктами або вузлами) не порушується. Тому не потрібно відслідковувати появу стовпців, які після видалення цього рядку будуть містити лише одну одиницю, що не є припустимим для матриці інцидентності [4]. Використання матриці інцидентності при видаленні ізольованої вершини скорочує вдвічі програмну реалізацію (не треба одночасно видаляти ще й стовпець, до того ж зсув буде теж лише один). Нехай, наприклад, граф  $G_3$  заданий своєю матрицею суміжності  $A(G_3)$ :

$$A(G_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A(G_3)$  містить повністю нульові 4-й рядок та 4-й стовпець. Це свідчить про ізольованість вершини  $v_4$ . Ця матриця повністю симетрична, тому граф  $G_3$  є неорієнтованим. Його можна вважати повністю заданим верхньотрикутною частиною матриці  $A(G_3)$ . У відповідності з алгоритмом, описаним в [4], за цією матрицею можна побудувати матрицю



інцидентності  $I(G_3)$  графа  $G_3$  без відновлення його геометричної реалізації. Таким чином, неорієнтованому графу  $G_3$  відповідає матриця інцидентності

$$I(G_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матриці інцидентності  $I(G_3)$  ізольованій вершині  $v_4$  відповідає нульовий 4-й рядок. Щоб видалити з графа  $G_3$  цю ізольовану вершину треба із матриці  $I(G_3)$  видалити лише 4-й рядок без подальшого додаткового видалення низки стовпців. Таким чином, для графа  $G'_3 = G_3 \setminus \{v_4\}$  маємо матрицю інцидентності

$$I(G'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За потреби за цією матрицею можна відновити геометричну реалізацію графа  $G'_3$  або його матрицю суміжності [4].

Операція видалення одного ребра передбачає зникнення із графу якогось одного ребра (зв'язку або відношення) зі збереженням всіх вершин (об'єктів або вузлів) та решти зв'язків між об'єктами [6]. Таким чином, в матриці суміжності змін зазнають лише ті елементи, які відповідають ребрам, що видаляються. Решта елементів матриці суміжності зберігають свої значення. Порядок матриці також залишається тим самим, бо ніяка вершина внаслідок видалення ребра із графа не зникає. При видаленні орієнтованого ребра зменшується лише один елемент матриці суміжності. При видаленні неорієнтованого ребра однакових змін зазнає пара симетричних елементів матриці суміжності. Нехай між вершинами  $v_i$  і  $v_j$  необхідно видалити певну кількість  $l_{ij}^-$  ребер. Отже, для виконання цієї операції треба виконати операцію арифметичного віднімання матриці  $A_e^-$  від матриці суміжності початкового графу. В матриці-від'ємнику  $A_e^-$  елементи,

що відповідають ребрам, які видаляються, будуть дорівнювати  $l_{ij}^-$ . Решта елементи цієї матриці будуть нульовими.

Розглянемо, наприклад, граф  $G_1 \cup G_2$ , якому відповідає матриця суміжності  $A_{\cup}$ . В цій матриці є пара симетричних елементів  $a_{46}=a_{64}=1$ . Ці елементи відповідають парі протилежно спрямованих ребер, яку можна замінити одним неорієнтованим ребром. Нехай з цього графу треба видалити це неорієнтоване ребро. Нехай до того ж з цього графа треба видалити також одне з суворо паралельних орієнтованих ребер від вершини  $v_4$  до вершини  $v_2$ . Це означає, що в матриці  $A_e^-$  відмінними від нуля будуть лише елементи  $l_{42}^- = 1$  і  $l_{46} = l_{64} = 1$ . Отже, щоб обчислити матрицю суміжності графа

$$(G_1 \cup G_2)' = (G_1 \cup G_2) \setminus \{ \vec{e}(v_4, v_2) \} \setminus \{ e(v_4, v_6) \}$$

(запис  $\vec{e}$  означає, що дане ребро є орієнтованим) можна отримати, виконавши наступне арифметичне віднімання:

$$\begin{aligned} A_{\cup} - A_e^- &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A((G_1 \cup G_2)'). \end{aligned}$$

Програмна реалізація цієї операції значно простіша, ніж її алгебраїчне обґрунтування. Для її виконання достатньо зменшити на величини  $l_{ij}^-$  відповідні елементи матриці суміжності початкового графа.

Операція доповнення визначається для неорієнтованих графів. Тому, якщо граф є орієнтованим або змішаним, спочатку треба побудувати для нього асоційований (або співвіднесений) граф [4], а потім вже для цього нового графу виконувати операцію доповнення. З матриці суміжності  $A(G)$  початкового графа обчислюємо нову матрицю  $A^s(G)$  за наступним правилом:

$$a_{ij}^s = a_{ji}^s = \min \{1, \max \{a_{ij}, a_{ji}\}\}. \quad (3)$$

Отримана матриця буде булевою. Але вона може містити одиниці на головній діагоналі, тобто відображати граф з петлями. Співвіднесений граф, який не може містити петлі, використовується в цих обчисленнях лише як проміжний результат. Тому позбутися цих петель можна один раз вже на останньому кроці, а не щоразу для всіх проміжних матриць. Наступним кроком для отримання матриці суміжності доповнення графа  $G$  треба виконати логічну операцію заперечення [1] матриці  $A^s(G)$ , тобто обчислити матрицю  $\overline{A^s(G)}$ .

Для прикладу знайдемо матрицю суміжності доповнення орієнтованого графа  $G_2$ . Побудуємо для цього графа матрицю  $A^s(G_2)$ :

$$A^s(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо заперечення цієї матриці, тобто матрицю  $\overline{A^s(G)}$ :

$$\overline{A^s(G_2)} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер треба позбутися петель в отриманому графі, тобто одиниць на головній діагоналі отриманої матриці. Для цього треба виконати її кон'юнкцію із запереченням одиничної матриці. В результаті буде отримано матрицю суміжності графа-доповнення:

$$\begin{aligned} \overline{A^s(G_2)} \wedge \overline{E} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A(\overline{G_2}). \end{aligned}$$

Для неорієнтованих графів формула (3) набуває вигляду

$$a_{ij}^s = a_{ji}^s = \min \{1, a_{ij}\}. \quad (4)$$

Для неорієнтованих графів без кратних ребер матрицю суміжності графа-доповнення можна отримати відразу кон'юнкцією заперечення матриці суміжності початкового графа з матрицею  $\overline{E}$ .

В булевій алгебрі кон'юнкція з одиницею не впливає на результат. Тому в програмній реалізації на останньому кроці побудови матриці  $A(\overline{G})$  можна просто присвоїти нульове значення усім елементам головної діагоналі, тобто всім елементам, для яких збігаються номер стовпця і номер рядка ( $i = j$ ).

Операція введення ребра є зворотною до операції видалення ребра. При введенні орієнтованого ребра передбачається збільшення одного елемента

матриці суміжності. При введенні неорієнтованого ребра однакових змін зазнає пара симетричних елементів матриці суміжності. Нехай між вершинами  $v_i$  і  $v_j$  необхідно додати певну кількість  $l_{ij}^+$  ребер. При програмній реалізації відбувається збільшення відповідних елементів матриці суміжності початкового графа на вказану величину. Алгебраїчна реалізація цієї операції передбачає арифметичну суму двох матриць. Одним з доданків є матриця суміжності початкового графа. В другому доданку  $A_e^+$  елементи, що відповідають новим ребрам, дорівнюють  $l_{ij}^+$ . Решта елементи другого доданку є нульовими.

Нехай, наприклад, до графу  $G_1$  необхідно ввести два суворо паралельних орієнтованих ребра від вершини  $v_2$  до вершини  $v_4$  і одне неорієнтоване ребро між вершинами  $v_3$  і  $v_7$ . Це означає, що в даному випадку  $l_{24}^+ = 2$  і  $l_{37}^+ = l_{73}^+ = 1$ . Тоді матрицю суміжності графа  $G_1'' = G_1 + 2 \cdot \{\vec{e}(v_2, v_4)\} + \{e(v_3, v_7)\}$  можна отримати, виконавши наступну арифметичну суму:

$$\begin{aligned}
 A(G_1) + A_e^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(G_1'').
 \end{aligned}$$

Операцію введення вершини в ребро розглянемо також на прикладі графа  $G_1$ . Її зручніше виконувати з матрицею інцидентності. Цю матрицю для графа  $G_1$  можна отримати із його матриці суміжності або безпосередньо із

геометричної реалізації. Для зручності в матриці інцидентності було збережено ту нумерацію ребер, яку подано для цього графа на рис. 1. Для наочності запишемо цю матрицю у вигляді таблиці.

$$I(G_1) =$$

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{14}$	$e_{16}$	$e_{17}$	$e_{18}$
$v_1$	1	1	1	0	0	0	0	±1	0	0	0	0	0
$v_2$	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_3$	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
$v_4$	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
$v_5$	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	0	0
$v_6$	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0	-1
$v_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	±1	0

Нехай треба ввести вершину  $w'$  в ребро  $e_2(v_1, v_5)$  і вершину  $w''$  в ребро  $e_{14}(v_6, v_7)$ . Обидва ці ребра є орієнтованими. При введенні вершини в ребро напрямком руху новими ребрами має збігатися з напрямком, який був у старого ребра. Схему алгоритму перетворення матриці інцидентності для виконання цієї операції подано на рис. 5.

	$e_1$	$e_2$	$e'_2$	$e''_2$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{14}$	$e'_{14}$	$e''_{14}$	$e_{16}$	$e_{17}$	$e_{18}$
$v_1$	1	1	1	0	1	0	0	0	0	±1	0	0	0	0	0	0	0
$w'$	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_2$	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_3$	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$v_4$	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_5$	0	-1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0
$v_6$	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	-1
$w''$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
$v_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	±1	0

Рис. 5: Схema перетворення матриці інцидентності при введенні вершини в ребро.

При введенні вершини  $w'$  ребро  $e_2(v_1, v_5)$  з графа видаляється. Аналогічно при введенні вершини  $w''$  видаляється ребро  $e_{14}(v_6, v_7)$ . На схемі відповідні цим ребрам стовпці матриці інцидентності зафарбовано чорним кольором. Замість ребра  $e_2(v_1, v_5)$  з'являються 2 нові ребра (два нові стовпці  $e'_2$  і  $e''_2$  в матриці). Рух цими ребрами має повторювати напрямок руху ребром  $e_2$ . Тому початкова вершина ребра  $e'_2$  має збігатися з початковою

вершиною ребра  $e_2$ . З кінцевою вершиною ребра  $e_2$  має збігатися кінцева вершина ребра  $e_2''$ . Таким чином, нова вершина  $w'$  є транзитною при русі від вершини  $v_1$  до вершини  $v_5$ . Тобто вона є кінцевою для нового ребра  $e_2'$  і початковою для нового ребра  $e_2''$ . Рядок для нової вершини в матриці має з'явитися в проміжку між рядками, що відповідають граничним вершинам старого ребра. Зручніше додавати його відразу після початкової вершини, тобто в даному випадку після вершини  $v_1$ . При цьому елементи « $-1$ » в стовпці  $e_2'$  і елемент « $1$ » в стовпці  $e_2''$  будуть єдиними елементами в рядку цієї вершини.

Аналогічно замість ребра  $e_{14}(v_6, v_7)$  також з'являються два нові ребра (нові стовпці  $e_{14}'$  і  $e_{14}''$  в матриці). Вершина  $v_6$  є початковою для старого ребра  $e_{14}$  і нового ребра  $e_{14}'$ . Вершина  $v_7$  є кінцевою для старого ребра  $e_{14}$  і нового ребра  $e_{14}''$ . Рядок для нової транзитної вершини  $w''$  буде містити лише два ненульові елементи: « $-1$ » в стовпці  $e_{14}'$  і « $1$ » в стовпці  $e_{14}''$ . Цей новий рядок буде розташований між рядками  $v_6$  і  $v_7$ . Рядки нових вершин на схемі рис. 5 зафарбовано зеленим кольором, а стовпці нових ребер – сірим. Таким чином, матриця інцидентності нового графа буде мати наступний вигляд:

$$I(G_1''') =$$

	$e_1$	$e_2'$	$e_2''$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{14}'$	$e_{14}''$	$e_{16}$	$e_{17}$	$e_{18}$
$v_1$	<b>1</b>	<b>1</b>	0	<b>1</b>	0	0	0	0	<b>±1</b>	0	0	0	0	0	0
$w'$	0	<b>-1</b>	<b>1</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_2$	<b>-1</b>	0	0	0	<b>-1</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_3$	0	0	0	<b>-1</b>	0	0	<b>1</b>	<b>1</b>	0	0	0	0	0	0	<b>1</b>
$v_4$	0	0	0	0	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_5$	0	0	<b>-1</b>	0	0	0	0	<b>-1</b>	0	<b>1</b>	0	0	<b>1</b>	0	0
$v_6$	0	0	0	0	0	<b>-1</b>	0	0	0	<b>-1</b>	<b>1</b>	0	0	0	<b>-1</b>
$w''$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<b>-1</b>	<b>1</b>	0	0	0
$v_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<b>-1</b>	<b>-1</b>	<b>±1</b>	0

За потреби від цієї матриці можна перейти до матриці суміжності  $A(G_1''')$  або геометричної реалізації графа  $G_1'''$ .

У випадку, коли нова вершина вводиться до неорієнтованого ребра, алгоритм перетворення матриці інцидентності буде таким самим. Відмінність буде полягати лише в тому, що нові ребра будуть також неорієнтованими. Тому всі ненульові елементи нових стовпців будуть додатними, тобто дорівнювати « $+1$ ».

Використаємо матрицю інцидентності  $I(G_1)$ , щоб дослідити алгоритм iii

перетворення при виконанні операції замикання (ототожнення) вершин. Ця операція можлива лише для суміжних вершин. В графі  $G_1$  такими вершинами, наприклад, є вершини  $v_1$  і  $v_5$  (їх зв'язує ребро  $e_2$ ), а також вершини  $v_2$  і  $v_4$  (їх зв'язує ребро  $e_5$ ). Ототожнимо кожну з цих пар вершин. Згідно з означенням цієї операції [4], усі вершини, суміжні хоча б з однією з ототожнюваних вершин, будуть суміжні з новою вершиною. Це означає, що усі ребра, інцидентні хоча б з однією з ототожнюваних вершин, зберігаються в графі і будуть інцидентні новій вершині. Ребро, що зв'язує ототожнювані вершини, перетворюється на петлю. Таким чином, в матриці  $I(G_1)$  має з'явитися новий рядок, що відповідає новій вершині. Його елементи є арифметичною сумою відповідних елементів рядків тих вершин, для яких проводиться операція замикання. Рядки пари ототожнюваних вершин при цьому з матриці видаляються. Схему цих перетворень показано на рис. 6.

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{14}$	$e_{16}$	$e_{17}$	$e_{18}$	
$v_{1,5}$	1	±1	1	0	0	0	-1	±1	1	0	1	0	0	$v_1 + v_5$
$v_{2,4}$	-1	0	0	±1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	$v_2 + v_4$
$v_1$	1	1	1	0	0	0	0	±1	0	0	0	0	0	
$v_2$	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$v_3$	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	
$v_4$	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	
$v_5$	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	0	0	
$v_6$	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0	-1	
$v_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	±1	0	

Рис. 6: Схема перетворення матриці інцидентності при замиканні вершин.

Ребра  $e_2$  і  $e_5$  перетворилися на петлі (на схемі відповідні стовпці зафарбовано рожевим). Рядки, що відповідають вершинам, які було замкнено ( $v_1$  з  $v_5$  і  $v_2$  з  $v_4$ ) з матриці інцидентності видаляються (на схемі ці рядки зафарбовано чорним). В матриці з'являються нові рядки, що відповідають новим вершинам – результатам замикання. На схемі ці рядки зафарбовано зеленим. Елементи рядку  $v_{1,5}$  дорівнюють арифметичній сумі відповідних елементів рядків  $v_1$  і  $v_5$ , а елементи рядку  $v_{2,4}$  дорівнюють арифметичній сумі відповідних елементів рядків  $v_2$  і  $v_4$ . Таким чином, матриця інцидентності нового графа  $G_1^{v^+}$  має наступний вигляд:



$$I(G_1^{v^+}) =$$

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_5$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{14}$	$e_{16}$	$e_{17}$	$e_{18}$
$v_{1,5}$	<b>1</b>	$\pm 1$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	$\pm 1$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$v_{2,4}$	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$\pm 1$	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$v_3$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
$v_6$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>
$v_7$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>-1</b>	$\pm 1$	<b>0</b>

У разі, якщо граф є неорієнтованим, то схема перетворення його матриці інцидентності залишається такою ж самою, але замість арифметичної суми елементів ототожнених вершин виконується операція суми за модулем 2 цих елементів. Як і при виконанні попередніх операцій, за потреби від отриманої матриці інцидентності можна перейти до матриці суміжності досліджуваного графа або відновити його геометричну реалізацію.

Операція стягування ребра відбувається за тим самим алгоритмом, що й операція замикання вершин, але з подальшим видаленням з графа отриманих петель. Таким чином, при стягуванні ребра спочатку відбувається ототожнення вершин, що є граничними для цього ребра. Отже, якщо для графа  $G_1$  стоїть задача стягнути ребра  $e_2$  і  $e_5$ , то можна також скористатися схемою на рис. 6. Спочатку за цією схемою замикаються пари вершин  $v_1$  і  $v_5$  (є граничними для ребра  $e_2$ ), а також  $v_2$  і  $v_4$  (є граничними для ребра  $e_5$ ). В результаті цього замикання утворюються дві петлі (рожеві стовпці на схемі), які треба видалити з графа. Як наслідок, із матриці інцидентності треба видалити стовпці  $e_2$  і  $e_5$ . Петлі, що не мають відношення до жодної з ототожнених вершин, в графі залишаються. Тому в матриці ці стовпці також залишаються без змін (стовпці  $e_{11}$  і  $e_{17}$ ). В результаті буде отримана матриця інцидентності нового графа  $G_1^{e^+}$ :

$$I(G_1^{e^+}) =$$

	$e_1$	$e_3$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{14}$	$e_{16}$	$e_{17}$	$e_{18}$
$v_{1,5}$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	$\pm 1$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$v_{2,4}$	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$v_3$	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
$v_6$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>
$v_7$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>-1</b>	$\pm 1$	<b>0</b>

## Висновки

Деякі операції зручніше виконувати з матрицями суміжності, а деякі – з матрицями інцидентності. Одні й ті самі алгоритми мають відмінності в залежності від того, орієнтовані чи вільні графи беруть участь у розглянутих операціях. В залежності від видів графів також є обмеження на відображення змістовної інформації матрицями цих графів. Але в практичних застосунках ці обмеження, як правило, несуттєві. Отже, для кожної операції над графами та кожного виду графів можна запропонувати комбінацію алгебраїчних операцій (арифметичних та логічних), що дозволяють отримати матрицю нового графа, або чіткий легко програмований алгоритм перетворення матриць початкових графів. Жодна з розглянутих операцій над графами не є неможливою в матричному виконанні. Запропоновані алгоритми можуть значно спростити комп'ютерну обробку графів.

## Список літератури

1. **Гвоздинская Н. А.** О логических матрицах / Н. А. Гвоздинская, З. В. Дударь, С. А. Пославский, Ю. П. Шабанов-Кушнарченко // Проблемы бионики. – 1998. – Т. 48, – С. 12–22.
2. **Якімова Н. А.** Предикатні логічні матриці / Н.А. Якімова // Вісник Одеського національного університету ім.І.І.Мечнікова. Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – С. 67–74.
3. **Шаповров С. Д.** Математическая логика. Курс лекций и практических занятий / С. Д. Шаповров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
4. **Якімова Н. А.** Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів. (Курс лекцій) / Н. А. Якімова. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2022. – 102 с.
5. **Зиков О. О.** Лекції з алгебри / О. О. Зиков. – Одеса: «Астропринт», 2007. – 400 с.
6. **Капітонова Ю. В.** Основи дискретної математики / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський, Г. М. Луцький, М. К. Печурін. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.

*Yakimova N.A., Klishyn M.E.*

## MATRIX REPRESENTATION OF OPERATIONS ON GRAPHS

### *Summary*

This article considers the possibility of matrix execution of both unary and binary operations on graphs. Graphs, as an abstract mathematical construction, have a very wide range of practical applications. First of all, it is algorithmization and computer processing of information, electrical engineering, etc. Therefore, it is important to have a mathematical apparatus that allows you to transform the graphical presentation of information about objects into algebraic models for their further research using purely mathematical methods. If necessary, it is always possible to return from such an algebraic model to a graphical representation of the object (for example, to a graphical representation of a circuit diagram in electronics). For each of the considered operations on graphs, either a combination of algebraic operations or an easily programmable matrix processing algorithm is proposed, which can be used to represent any graph. Attention is also paid to the differences in such processing depending on the type of graphs involved in the considered operations. Some operations are more convenient to perform with adjacency matrices, and some - with incidence matrices. This article also considers these features of matrix execution of operations on graphs. All the proposed algorithms are illustrated with specific detailed examples. Thus, it is shown that for all operations on graphically presented objects, their matrix interpretation is possible. This result greatly facilitates the possibility of software implementation of work with such graphic objects.

*Key words: directed and undirected graph, adjacency matrix, incidence matrix, operations on graphs, elementary logical operations, Boolean matrix, multivalued logic.*

### REFERENCES

1. Gvozdinskaya, N. A., Dudar, Z.V., Poplavskiy, S.A. and Shabanov-Kushnarenko, Y. P. (1998). O logicheskikh matritsakh [On logical matrix]. *Problemy bioniki*, Vol. 48, P. 12–22.
2. Yakimova, N. A. (2019). Predykatni logichni matritzi [Predicative logical matrices]. *Visnyk Odes'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 24, No. 2(34), P. 67–74.

3. Shaporev, S. D. (2005). *Matematicheskaya logika [Mathematical logic]*. St-Peterburg: BHV-Peterburg, 416 p.
4. Yakimova, N. A. (2021). *Dyskretna matematyka. Chastyna 1. Teoriya mnozhin. Teoriya grafiv [Discrete Math. Part 1. Set theory. Graf theory]*. Odessa: ONU im. I. I. Mechnikova, 102 p.
5. Zykov, A. A. (2007). *Lektzii z algebry [Lectures on algebra]*. Odessa: Astroprint, 400 p.
6. Kapitonova, Yu. V., Kryvyy, S. L., Letychevskiy, O. A., Lutzkiy, G. M. and Pechurin, M. K. (2002). *Osnovy dyskretnoi matematyky [Foundation of Discrete Mathematics]*. Kyiv: Naukova dumka, 578 p.

UDC 519

**G. S. Belozarov, A. V. Vorobiova**

Odesa I. I. Mechnikov National University

**ON NUMBERS OF THE TYPE  $n = (u^2 + dv^2)w$  IN ARITHMETIC PROGRESSION**

Let us  $R(n)$  denotes the number of representations of positive integers  $n$  by form  $n = (u^2 + v^2)w$ ,  $u, v \in \mathbb{Z}$ ,  $w \in \mathbb{N}$ . The function  $R(n)$  is an analogue of the divisor function  $d_3(n)$ . Summarize the Heath-Brown results on distribution of value of the divisor function  $d_3(n)$  on an arithmetical progression  $n \equiv a \pmod{q}$ ,  $(a, q) = 1$ , with increasing the arithmetical ratio together with  $x$ , an asymptotic formula for summatory function for  $R(n)$  was being construct, which is a non-trivial for  $q \rightarrow \infty$ . The proof of this result use the truncated functional equation on the line  $\text{Res} = \frac{1}{2} + \Delta$ ,  $|\Delta| < \frac{1}{2}$  of the Hecke Zeta function with transport of an imaginary quadratic field  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ .

MSC: 99A99, 88B88, 77C77, 66D66.

Key words: imaginary quadratic field, Hecke zeta-function, Dirichlet series, functional equation, summatory function.

DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294316

**INTRODUCTION**

**Definition.** Let denotes by  $R(n)$  the number representations a positive integer  $n$  in the form  $n = (u^2 + dv^2)w$ ,  $u, v \in \mathbb{Z}$ ,  $w \in \mathbb{N}$ ,  $d$  is a free square positive integer. The function  $R(n)$  you can consider as an analogue the arithmetic function  $d_3(n)$  (a number of representations of  $n$  as a product of three natural numbers:  $d_3(n) = \sum_{n=n_1 n_2 n_3} 1$ ).

We denote

$$K(d) = \left\{ u + i\sqrt{d}v \mid u, v \in \mathbb{Z} \right\}.$$

For  $\alpha \in K(d)$  we put  $N(\alpha) = u^2 + dv^2$ ,  $S_p(\alpha) = \lambda u = \lambda \text{Re}(\alpha)$ . Our aim deduce an a asymptotic formula for summatory functions

$$F(x) = \sum_{n \leq x} R(n);$$

$$F(x, a, q) = \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{q} \\ n \leq x}} R(n).$$

**NOTATION.** We will use the following notations:

- $G := \left\{ a + b\sqrt{d}i \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1 \right\}$  is the ring of integer elements of the field  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ;
- $G_\gamma$  is the ring of residues of  $G$  module  $\gamma$ ;
- $G_\gamma^* = \{w \in G_\gamma, (w, \gamma) = 1\}$ ;
- $s \in \mathbb{C}, s = \sigma + Res, t = Im s$ ;
- $\Gamma(z)$  is the Euler gamma function;
- by  $f \ll g$  (or  $f = O(g)$ ) for  $x \in X$ , where  $X$  is an arbitrary set on which  $f$  and  $g$  defined, we mean that exists a constant  $C > 0$  such that  $|f(x)| \leq cg(x)$  for all  $x \in X$ .

Let us denote shifting the Hecke function

$$Z_m(s; \delta_1, \delta_2) := \sum_{w \in G} e^{gm \operatorname{arg}(w + \delta_1)} \cdot e^{2\pi i \operatorname{Re}(\delta_2 w)},$$

$Res > 1, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{-d}), d$  is a free-square,  $d > 0$ ; (the pair  $(\delta_1, \delta_2)$  we call a shift of  $w$ ).

In the domain  $Res > 1$  the series for  $Z_m(s; \delta_1, \delta_2)$  is defined by an absolutely convergent Dirichlet series.

## 1. AUXILIARY ARGUMENTS

**Lemma 1.** *The shifting Hecke zeta-function of the field  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  satisfies the functional equation*

$$\begin{aligned} \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{g|m|}{2} + s\right) Z_m(s; \delta_1, \delta_2) &= \\ &= \pi^{-(1-s)} \Gamma\left(\frac{g|m|}{2} + 1 - s\right) Z_m(1 - s; -\delta_2, \delta_1) e^{-2\pi i \operatorname{Re}(\delta_2 \delta_1)}. \end{aligned}$$

Moreover,  $Z_m(s; \delta_1, \delta_2)$  is an entire function if  $m \neq 0$ . If  $m = 0$  the for  $\delta_2$  not integer element from  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  the  $Z_m(s; \delta_1, \delta_2)$  is also entire function. For  $m = 0$  and  $\delta_2$  is an integer element of  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  the Hecke zeta-function is holomorphic except at  $s = 1$ , where it has a simple pole with residue  $\pi$ .

**Proof.** For  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  and  $m = mg$ , where  $g$  is a number of units in the ring  $G$  we get the well-known Hecke zeta-function  $Z_m(s, G)$  of the first kind with the exponent  $m$  (see Hecke [3]). In [1] this lemma has been stated in case  $d = 1$ . But for the completeness of treatment we restore a proof of our statement.

We start from the relation

$$\Gamma(s) \cdot |w + \delta_1|^{-2s} = \int_0^\infty \exp(-x \cdot |w + \delta_1|^2) x^{s-1} dx.$$

For  $\text{Res} > 1$  and  $m \in \mathbb{Z}$  we have

$$\Gamma\left(\frac{g}{2}|m| + s\right) Z_m(s; \delta_1, \delta_2) = \int_0^{\delta_2} \sum_{\substack{w \in G \\ w \neq -\delta_1}} e^{-x|w+\delta_1|^2} x^{s-1} dx.$$

Let us denote  $\delta_j = \delta_{j1} + i\sqrt{d}\delta_{j2}$ ,  $j = 1, 2$ .

Then grountruthing shows that the functions

$$f(v_1, v_2) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{x} [(\delta_{11} + v_1)^2 + d(\delta_{12} + v_2)^2]\right)$$

$$\hat{f}(v_1, v_2) = \frac{\pi}{x} \exp\left(-\frac{\pi^2}{x} [(\delta_{11} + v_1)^2 + d(\delta_{12} + v_2)^2]\right)$$

satisfy the conditions of Poisson summation formula. Hence, putting

$$\begin{aligned} \Theta_m(x, \delta_1, \delta_2) &= \\ &= \sum_{w \in G} \exp(-x(w + \delta_1)^2) \cdot (w + \delta_1)^{gm} \exp(2\pi \text{Re}(\overline{\delta_2} w)) \end{aligned}$$

and applying the Poisson formula, we find

$$\Theta_0(x, \delta_1, \delta_2) = \frac{\pi}{x} \Theta_0\left(\frac{\pi^2}{x}, \delta_2, -\delta_1\right) \exp(-2\pi i \text{Re}(\delta_1 \overline{\delta_2})).$$

Consider the operator

$$\frac{d}{d\delta_1} := \frac{\partial}{\partial \delta_{11}} + i\sqrt{d} \frac{\partial}{\partial \delta_{12}}.$$

Then the following equalities hold for the  $m \geq 0$

$$(-2x)^{gm} \Theta_m(x, \delta_1, -\delta_2) = \frac{d^m}{d\delta_1^m} \Theta_0(x, \delta_1, \delta_2)$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{x} (-2\pi i)^{4m} \Theta_m \left( \frac{\pi^2}{x}, \delta_1, -\delta_2 \right) \exp(-2\pi i(\delta_1 \bar{\delta}_2)) = \\ & = \frac{d^m}{d\delta_1^m} \left( \frac{\pi}{x} \Theta_0 \left( \frac{\pi^2}{x}, \delta_2, -\delta_1 \right) \exp(-2\pi i \operatorname{Re}(\delta_1 \bar{\delta}_2)) \right). \end{aligned}$$

So, for any  $m \in \mathbb{Z}$  the following functional equation

$$\Theta_m(x, \delta_1, \delta_2) = \left( \frac{\pi}{x} \right)^{gm+1} \Theta_m \left( \frac{\pi^2}{x}, \delta_2, \delta_1 \right) \exp(-2\pi i \operatorname{Re}(\delta_1 \bar{\delta}_2)) \quad (1)$$

hold.

Now, applying reasoning used for the proof of functional equation for Riemann zeta-function (see [4]) by the functional equation for a theta-function  $\Theta_m$ , we infer

$$\Gamma \left( \frac{g|m|}{2} + s \right) Z_m(s; \delta_1, \delta_2) = \pi^{-(1-2s)} \exp(-2\pi i \operatorname{Re}(\delta_1 \bar{\delta}_2)) I_m(\delta_1, \delta_2),$$

where

$$\begin{aligned} I_m(\delta_1, \delta_2) &= \\ &= \int_0^\infty \sum_{\substack{w \in G \\ w \neq -\delta_1}} \exp(-x|w + \delta_1|^2) (w + \delta_1)^{gm} \cdot \exp(2\pi i \operatorname{Re}(\bar{\delta}_2 w)) x^{s+2+\frac{1}{2}gm-1} dx = \\ &= \int_0^\pi + \int_\pi^\infty := I_{m1} + I_{m2}. \end{aligned}$$

In integral  $I_m$  we apply the functional equation (1) for  $\Theta_m(x, \delta_1, \delta_2)$  and make substitution  $x = \pi^2 y^{-1}$ . We have

$$\begin{aligned} & \Gamma \left( \frac{1}{2}g|m| + s \right) Z_m(s; \delta_1, \delta_2) = \pi^{2s-1} \exp(-2\pi i \operatorname{Re}(\delta_1 \bar{\delta}_2)) \times \\ & \times \int_\pi^\infty \sum_{\substack{w \in G \\ w \neq -\delta_2}} \exp(-x|w + \delta_1|^2) (w + \delta_2)^{gm} \exp(-2\pi i \operatorname{Re}(\bar{\delta}_1 w)) x^{-s+\frac{1}{2}|gm|} dx + \\ & + \int_\pi^\infty \sum_{\substack{w \in G \\ w \neq -\delta_1}} \exp(-x|w + \delta_1|^2) (w + \delta_1)^{gm} \exp(-2\pi i \operatorname{Re}(\bar{\delta}_2 w)) x^{s-1+\frac{g}{2}|m-1|} dx + \\ & + \varepsilon(m, \delta_2) \frac{\pi^s}{s-1} - \varepsilon(m, \delta_1) \exp(-2\pi i \operatorname{Re}(\delta_1 \bar{\delta}_2)) \cdot \frac{\pi^s}{s}, \quad (2) \end{aligned}$$

where

$$\varepsilon(m, \delta) = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 0 \text{ and } a \in G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



The relation (2) was obtained for  $Res > 1$ . However, the right part of this equality is an analytic function in all-complex s-planes except maybe the points  $s = 0$  and  $s = 1$ , which can be the poles.

Finally multiplying (2) be  $exp(2\pi i Re(\bar{\delta}_1 \delta)) \pi^{-2s+1}$  and making the substitution  $s \rightarrow 1-s$ ,  $\delta_1 \rightarrow \delta_2$ ,  $\delta_2 \rightarrow \delta_1$ , we obtain that the right part doesn't vary, and hence proved the following functional equation for  $m > 0$

$$\begin{aligned} \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{g}{2}|m| + s\right) Z_m(s; \delta_1, \delta_2) &= \\ &= \pi^{-(1-s)} \Gamma\left(\frac{g}{2}|m| + 1 - s\right) Z_{-m}(1-s; -\delta_2, \delta_1) exp(-2\pi i Re(\bar{\delta}_1 \delta_2)). \end{aligned}$$

For  $m = -m'$ ,  $m' > 0$ , we put  $\delta_1 = -\delta'_1$ ,  $\delta_2 = -\delta'_2$ , and then we obtain

$$Z_m(s; \delta_2, \delta_1) = Z_{m'}(s; -\delta_2, -\delta_1) \text{ and } Z_{m'}(1-s; \delta_1, -\delta_2) = Z_m(1-s; -\delta_1, \delta_2).$$

Thus, for any  $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{g|m|}{2} + s\right) Z_m(s; \delta_2, \delta_1) &= \\ &= \pi^{-(1-s)} \Gamma\left(\frac{g|m|}{2} + 1 - s\right) Z_{-m}(1-s; -\delta_1, \delta_2) exp(-2\pi i Re(\bar{\delta}_1 \delta_2)) = \\ &= \pi^{-(1-s)} \Gamma\left(\frac{g|m|}{2} + 1 - s\right) Z_{-m}(1-s; \delta_1, -\delta_2) exp(-2\pi i Re(\bar{\delta}_1 \delta_2)). \quad \square \end{aligned}$$

**Consequence 1.** For  $\delta_2 \notin G$  (but  $\delta_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ), then  $Z_0(0; \delta_1, \delta_2) = 0$ .

**Consequence 2.** In the strip  $\varepsilon \leq Res \leq 1 + \varepsilon$  we have

$$(s-1)Z_m(s; \delta_1, \delta_2) \ll (|t|+3)(t^2+m^2)^{k_1} q^{k_2},$$

where  $k_1 = \frac{(1-2\sigma)(1-\sigma+\varepsilon)}{1+2\varepsilon}$ ,  $k_2 = -\frac{\sigma+\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$  an arbitrary little number, holds.

This follows of once if we employ by the Phragmén–Lindelöf principle and the estimates for  $Z_m(s; \delta_1, \delta_2)$  on the band edge  $-\varepsilon \leq Res \leq 1 + \varepsilon$ .

For  $q \in \mathbb{N}$  let us denote  $\chi$  a multiplicative character of the group  $G_q^*$ :

$\chi(\alpha) := \chi(N(\alpha))$ . We have for  $\delta_1 = \frac{l_1}{q}$ ,  $\delta_2 = \frac{l_2}{q}$ ,  $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_q$ :

$$Z_m\left(s; \chi, \frac{l_2}{q}\right) := \sum_{w \in G} \frac{e^{gmiargw}}{N(w)^s} \chi_2(N(w)) e^{2\pi i Re\left(\frac{l_2}{q} w\right)},$$

$$Z_m \left( s; \frac{l_1}{q}, \frac{l_2}{q} \right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} Z_m \left( s; \chi, \frac{l_2}{q} \right).$$

In [3] we have the following truncated functional equation.

**Lemma 2.** Let  $q \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $d > 0$  be a free-square rational integer,  $R$  is an ideal class of the field  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ;  $s \in \mathbb{C}$ ,  $s = \sigma + it$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $\arg \tau = \text{actg} \frac{t}{\sigma + \frac{g}{2}}$ ,

$$g = \begin{cases} 4 & \text{if } d = 1; \\ 2 & \text{if } d = 3; \\ 1 & \text{in other cases;} \end{cases}$$

$$x = \frac{dq^2 \left( t^2 + \left( \frac{g}{2}|m| + \sigma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2\pi|\tau|}; \quad y = \frac{dq^2 \left( t^2 + \left( \frac{g}{2}|m| + \sigma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2\pi|\tau^{-2}|}$$

$$X = \left( 1 + \frac{2(M+5)}{g|m|} \log x \right); \quad Y = \left( y + \frac{2(M+5)}{g|m|} \right).$$

Then for  $t^2 + gm^2 \geq \text{const}$  the following truncated functional equation for

$$\begin{aligned} & Z_m \left( s; \chi_q, \frac{l_2}{q} \right) = \\ & = \sum_{\substack{w \in R \\ N(w) \leq x}} \frac{e^{gmiargw}}{N(w)^s} \cdot \left( \chi_q(N(w)) e^{2\pi i \text{Re} \left( \frac{l_2}{q} w \right)} \times \Gamma^* \left( s + \frac{g}{2}|m|, \frac{2\pi\tau N(w)}{\sqrt{dq}} \right) \right) + \\ & + \left( \frac{dq^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \left( \frac{\Gamma \left( \frac{g}{2}|m| + 1 - s \right)}{\Gamma \left( s + \frac{g}{2}|m| \right)} \sum_{\substack{w \in \bar{R} \\ N(w) \leq x}} \frac{\overline{\chi_2(N(w))}}{N(w)^{1-s}} e^{-gmiargw} e^{-2\pi i \text{Re} \left( \frac{l}{q} w \right)} \times \right. \\ & \left. \times \Gamma^* \left( 1 - s + \frac{g}{2}|m|, \frac{2\pi\tau^{-1}N(w)}{\sqrt{dq}} \right) \right) + O(X^{-M} + Y^{-M}), \end{aligned}$$

where  $M > 0$  is an arbitrary number.

$$\Gamma^* \left( z + \frac{g}{2}|m|, \frac{2\sigma i N(w)}{\sqrt{dq}} \tau_r \right) = \Gamma \left( z + \frac{g}{2}|m|, \frac{2\pi N(w)}{\sqrt{dq}} \tau_r \right) \cdot \Gamma \left( z + \frac{g}{2}|m| \right)^{-1}.$$

Moreover  $\Gamma^* \left( z + \frac{g}{2}|m|, \frac{2\sigma i N(w)}{\sqrt{dq}} \tau_r \right)$  in all indicated parameters have the

estimation

$$\begin{aligned} &\ll \exp\left(\frac{-N(w) + z}{z} \left(\frac{g}{2}|m| + \sigma\right) \times \right. \\ &\times \left(\frac{N(w)}{z}\right)^{\frac{g}{2}|m| + \operatorname{Re} w} \left(t^2 + \left(\frac{g}{2}|m| + \sigma\right)^2\right) \times \left(t^2 + \left(\frac{g}{2}|m| + \sigma\right)^2\right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\left. + \left(\frac{N(w)}{z} - \left(t^2 + \left(\frac{g}{2}|m| + \sigma\right)^2\right)^{-1}\right)^{\frac{g}{2}}\right). \end{aligned}$$

Similarly truncated equation is true for  $Z_m\left(s; \frac{l_1}{q}, \frac{l_2}{q}\right)$ , where  $l_1, l_2 \in G_q$ .

We shall need

**Lemma 3.** *The zeta-function Gurwits  $\xi(s, u)$  determined by the relation for  $\operatorname{Re} s > 1$*

$$\xi(s, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s}, \quad (0 < u \leq 1)$$

is an analytic for all  $s \in \mathbb{C}$  (except  $s = 1$ ), where it has a prime pole with residue 1. Moreover  $\xi(s, u)$  satisfies the following Gurwits relation

$$\xi(s, u) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi a}{n^{1-s}} + \cos \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi a}{n^{1-s}} \right\}.$$

**Lemma 4.** *Let  $s = \sigma + it$ ,  $|\sigma| \leq 2$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $\arg \tau = \left(\frac{\pi}{2} + |t|^{-1}\right) \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} s)$ . There exists a constant  $t_0 > 1$  such that uniformly at  $|t| > t_0$ ,  $\tau$ , we have the truncated functional equation*

$$\begin{aligned} \xi(s, u) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|n+u| \leq x \log x} \frac{F\left(s; (n+u)\tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right) + a_n F\left(1-s; (n+u)\tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right)}{(n+u)^s} + \\ &+ \pi^{-\frac{1-2s}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} \sum_{|n| \leq y \log y} \frac{F\left(1-s; n\tau^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right) e^{-2\pi i n u}}{u^{1-s}} + \\ &+ \pi^{-\frac{1-2s}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s) + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\right)} \sum_{|n| \leq y \log y} \frac{b_n F\left(-s; n\tau^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right)}{n^{1-s}} + \end{aligned}$$

$$+ O(x^{-M} + y^{-M}),$$

where

$$a_n = \begin{cases} \operatorname{sgn}(n) & \text{if } n \neq 0; \\ 1 & \text{if } n = 0; \end{cases} \quad b_n = -i \operatorname{sign}(n) e^{2\pi i n u},$$

$$x = |t|^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2} |\tau|)^{-1}, \quad y = |t|^{\frac{1}{2}} |\tau| (\sqrt{2})^{-1}, \quad M > 0 - \text{arbitrary constant.}$$

Moreover, uniformly in all parameters

$$F(w, Z) = l + O \left( \exp \left\{ -\frac{|Z|^2}{|t|} \right\} \cdot \left( \frac{|Z|}{|t|^{\frac{1}{2}}} \right)^{\operatorname{Re} w} \times \left( 1 + \left| \frac{1}{2} |t|^{\frac{1}{2}} - \frac{|Z|}{|t|^{\frac{1}{2}}} \right| \right)^{-1} \right)$$

where  $l = 1$  if  $|n + u| \leq x$  and  $|n| \leq y$ , and  $l = 0$  in other cases.

**Lemma 5.** Consider a Dirichlet polynomial

$$P(s; l, q, N) := \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n^s}.$$

For any real values  $T_0$  and  $T_1$  we have

$$\int_{T_0}^{T_0+\tau} |P(s; l, q, N)|^2 dt \ll T + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{N}{q} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l \pmod{q}}}^N |a_n|^2$$

(It is some generalization of Montgomery Theorem for an integrals at the Dirichlet polynomials).

### MAIN RESULTS

Let us  $C$  denotes the following conditions

$$\begin{cases} \delta = \frac{l_1 + il_2 \sqrt{d}}{q}, \quad l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_q, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q > 1; \\ (l_1^2 + l_2 \cdot d) l_0 \equiv a \pmod{q} \\ a, l_0 \in \mathbb{Z}_q, \quad (a, q) = 1. \end{cases}$$

Then the generating series for  $R(mq + a)$  have the form

$$F(s; a, q) = \frac{1}{N(q)} \sum_{(C)} Z_0 \left( s; \frac{\delta}{q}, 0 \right) \xi \left( s, \frac{l_0}{q} \right), \quad \operatorname{Res} > 1, \quad (3)$$

where  $\xi\left(s, \frac{l_0}{q}\right)$  is Gurwits zeta-function.

Thus the Perron formula for an arithmetic progression gives

$$\sum_{\substack{n \equiv a \pmod{q} \\ n \leq x}} R(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-iT}^{C+iT} \left( F(s; a, q) - \sum_{n \in B} \frac{R(n)}{n^s} \right) \cdot \frac{x^s}{s} ds + O_\varepsilon\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{Tq}\right) + O(x^\varepsilon), \quad (4)$$

where  $B := \{a, a(1 \pm qN(w)) | w = \pm 1, \pm i\}$ .

The Gurwits function  $\xi\left(s, \frac{l_0}{q}\right)$  is an analytic on all completely s-plane except at the point  $s = 1$  with residue 1. At a point  $s = 1$  there is expansion in series

$$\xi\left(s, \frac{l_2}{q}\right) = \frac{1}{s-1} + c_0\left(\frac{l_2}{q}\right) + c_1\left(\frac{l_2}{q}\right)(s-1) + \dots, \quad (5)$$

where  $c_0\left(\frac{l_2}{q}\right) = E + \left(\frac{q}{l_2}\right)$ ,  $E$  it Euler constant.

Moreover,  $Z_m(s; \delta_1, \delta_2)$  is an analytic function on all plane of complex numbers except of the case  $m = 0$ ,  $\delta_2 \in G$ , when  $Z_m(s; \delta_1, \delta_2)$  have first polarized:

$$Z_0(s; \delta, 0) = \frac{\pi}{s-1} + a_0(\delta) + a_1(\delta) \cdot (s-1) + \dots, \quad (6)$$

where

$$a_0(\delta) = E + L'(1, \chi_4) + b_0(\delta) + \sum_{\beta \in B} N^{-1}(\delta + \beta), \quad \delta \neq 0, \quad (7)$$

$E$  is the Euler constant,  $B = \{0, \pm 1, \pm i\}$ ;

$\chi_4$  is the Dirichlet L-function with the non-principal character module 4;

$|b_0(\delta)| \leq$  an absolute constant,  $b_0(\delta) = 4 + O\left(N^{\frac{1}{2}}(\delta)\right)$ . (see [3], [6])

Applying the Phragmén–Lindelöf principal and the estimations  $\xi\left(s, \frac{b}{q}\right)$  and  $Z\left(s; \frac{\delta}{q}, 0\right)$  on the boundary of the strip  $-\varepsilon \leq \text{Res} \leq 1 + \varepsilon$  may be calculated for  $\text{Im}s = t$ ,  $|t| \geq t_0 > 3$

$$F(s; a, q) \ll \left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} |t|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)^{\frac{1+\varepsilon-\delta}{1+2\varepsilon}} (q^{-1+\varepsilon})^{\frac{\sigma+\varepsilon}{1+2\varepsilon}} \quad (8)$$

(with constant in symbol " $\ll$ " is an absolute constant).

Let us calculate  $\operatorname{res}_{s=1} \left\{ F(s; a, q) \cdot \frac{x^s}{s} \right\}$ . We have use the expanding (5) and (6):

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=1} \left\{ F(s; a, q) \frac{x^s}{s} \right\} &= \frac{\pi \chi \rho(a, q)}{q^2} \left( \log \frac{x}{q^2} + E - 1 \right) + \\ &+ \frac{x}{q^2} \sum_{\substack{\alpha_0 \in G_q^* \\ N(\alpha_0) \equiv a \pmod{q}}} a_0 \left( \frac{\alpha_0}{q} \right) - \frac{x r(a)}{a}, \quad (9) \end{aligned}$$

where  $\rho(a, q)$  is the number of solutions of the congruence  $u^2 + v^2 \equiv a \pmod{q}$ ,  $(a, q) = 1$ , and  $a_0 \left( \frac{\alpha_0}{q} \right)$  from (7) for  $\delta = \frac{\alpha_0}{q}$ .

Hence (7) gives

$$\begin{aligned} \frac{x}{q^2} \sum_{\substack{\alpha_0 \in G_q \\ N(\alpha_0) \equiv a \pmod{q}}} a_0 \left( \frac{\alpha_0}{q} \right) &= \frac{\chi \rho(a, q)}{q^2} (\pi E + L'(1, \chi_4) + O(1)) + \\ &+ \frac{x}{q^2} \sum_{\substack{\alpha_0 \in G_q \\ N(\alpha_0) \equiv a \pmod{q}}} \sum_{\beta \in B} N^{-1} \left( \beta + \frac{\alpha_0}{q} \right). \quad (10) \end{aligned}$$

Next,

$$\frac{x}{q^2} \sum_{\substack{\alpha_0 \in G_q \\ N(\alpha_0) \equiv a \pmod{q}}} \sum_{\beta \in B} N^{-1} \left( \beta + \frac{\alpha_0}{q} \right) = O \left( \frac{x}{q^{\frac{3}{2}}} \log x \right) \quad (11)$$

$$\rho(a, q) = c(a, q) q \prod_{p|q} \left( 1 - \frac{\chi_4(p)}{p} \right), \quad 0 < c(a, q) \leq 2$$

(see [2]).

So,

$$\operatorname{res}_{s=1} \left\{ F(s; a, q) \frac{x^s}{s} \right\} = \frac{\pi \chi \rho(a, q)}{q^2} \left( \log \frac{x}{q^2} + E - 1 \right) + O \left( \frac{x}{q^{\frac{3}{2}}} \log x \right) \quad (12)$$

Now we are in a position to prove the main theorem.

**Theorem.** *Let us  $a, q \in \mathbb{N}$ ,  $(a, q) = 1$ . Then the asymptotic formula*

$$\sum_{\substack{n \equiv a \pmod{q} \\ n \leq x}} R(n) = c(a, q) \frac{x}{q} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right) \left(\log \frac{x}{q^2} + E - 1\right) + \\ + O\left(\frac{x^{\frac{3}{5}}}{q^{\frac{1}{5}}} \log^3 x\right),$$

holds.

**Proof.** Consider the rectangle with the vertexes in points

$$c - iT, c + iT, \frac{1}{2} + iT, \frac{1}{2} - iT$$

( $T > 1$  and its precise meaning be determined).

We have

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(F(s; a, q) - \sum_{n \in B} \frac{R(n)}{n^s}\right) \frac{x^s}{s} ds = \operatorname{res} \left\{ \left(F(s; a, q) - \sum_{n \in B} \frac{R(n)}{n^s}\right) \frac{x^s}{s} \right\} + \\ + \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{c-iT} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT} \right\} \left(F(s; a, q) - \sum_{n \in B} \frac{R(n)}{n^s}\right) \frac{x^s}{s} ds = \\ = \operatorname{res}_{s=1} \left\{ \left(F(s; a, q) - \sum_{n \in B} \frac{R(n)}{n^s}\right) \frac{x^s}{s} \right\} + I_1 - I_2 - I_3 \quad (13)$$

is say.

In the integrals  $I_1$  and  $I_3$  we apply an estimate under the integral function by (8). So we have

$$I_1, I_2 \ll \frac{x^c}{Tq} + \frac{x^{\frac{1}{2}} T^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{1}{2}}}. \quad (14)$$

Next

$$I_3 \ll \left| \int_{-T_0}^{T_0} \right| + \left| \int_{T_0}^T \right| + \left| \int_{-T}^{-T_0} \right| := J_0 + J_1 + J_2. \quad (15)$$

We put  $T_0 = q^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  an arbitrary constant.

The integral  $J_1$  and  $J_2$  estimate in the same manner.

We shall estimate  $J_1$ .

It is well known that

$$\int_{T_0}^T \left| \xi \left( \frac{1}{2} + it, u \right) - \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+it}} \right|^2 dt \ll T \log^2(qT). \tag{16}$$

The truncated functional equation for  $Z_m(s, \delta_1, 0)$  for  $m = 0$ . We can write (for  $\frac{\alpha}{q}$ ,  $\alpha \in G_q$ ,  $s = \frac{1}{2} + it$ ):

$$\begin{aligned} Z_0(s; \delta_1, 0) &:= Z(s; \delta_1, 0) = N(q)^s \left\{ \sum_{\substack{w \equiv a \pmod{q} \\ N(w) \leq X_1}} N(w)^{-\frac{1}{2}-it} + \right. \\ &+ \left. \frac{\pi^{-2it}}{N^{\frac{1}{2}+it}(q)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it)} \cdot \sum_{N(w) \leq Y_1} e^{-2\pi i \operatorname{Re}(\frac{\alpha w}{q})} N^{-\frac{1}{2}+it}(w) \right\} + \\ &+ O\left(\frac{\log X_1 Y_1}{N(q)}\right) + O(|t|^{-M+2}) \\ & \quad (X_1 = x, Y_1 = y \text{ in designation of Lemma 2}) = \\ &= \sum_1 + \sum_2 + O\left(\frac{\log X_1 Y_1}{N(q)}\right) + O(|t|^{-M+2}) \tag{17} \end{aligned}$$

its say.

Now using (9), the Cauchy inequality and the relation (16) we obtain

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} F(s; a, q) - \sum_{n \in B} \frac{R(n) x^s}{n^s s} ds \right| \ll \\ &\ll \int_{T_0}^T |\sum_1 + \sum_2| \cdot \left| \xi \left( \frac{1}{2} + it, u \right) - \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+it}} \right| \frac{dt}{t} \ll \\ &\ll \left( \int_{T_0}^T (|\sum_1|^2 + |\sum_2|^2) \frac{dt}{t} \cdot \int_{T_0}^T \left| \xi \left( \frac{1}{2} + it, u \right) - \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+it}} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + O\left(\frac{\log T}{N(q)}\right) + O\left(qT^{\frac{3}{2}} \log^3 T\right) \tag{18} \end{aligned}$$

Hence, putting  $T = \frac{x^{\frac{1}{5}}}{q^{\frac{4}{5}}}$  we from (13), (14), (16), (18) obtain the statement theorem.



## CONCLUSION

Having used  $Z_m(s; \delta_1, 0)$  rather than  $Z_0(s; \delta_1, 0)$  may be achieved the asymptotic formula of distribution of values of the function  $R(n)$  in arithmetic progression and in narrow sectors.

*Белозеров Г. С., Воробйова А. В.*

ЧИСЛА ВИДУ  $n = (u^2 + dv^2)w$  В АРИФМЕТИЧНІЙ ПРОГРЕСІЇ

*Резюме*

Нехай  $R(n)$  означає кількість зображень натурального  $n$  у вигляді  $n = (u^2 + v^2)w$ ,  $u, v \in \mathbb{Z}$ ,  $w \in \mathbb{N}$ . Функція  $R(n)$  є аналогом функції дільників  $d_3(n)$ . Узагальнюючи результат Хіз-Брауна про розподіл значень функції  $d_3(n)$  на арифметичній прогресії  $n \equiv a \pmod{q}$ ,  $(a, q) = 1$ , зі зростаючою разом з  $x$  різницею прогресії  $q$ , побудована асимптотична формула для суматорної функції для  $R(n)$ , яка нетривіальна для  $q \leq x^{\frac{1}{2}} \log^{-3} x$ . При доведенні цього результату використовується скорочене функціональне рівняння дзета-функції Гекке з уявного квадратичного поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  з зсувом на прямій  $\text{Res} = \frac{1}{2} + \Delta$ ,  $|\Delta| < \frac{1}{2}$ .

*Ключові слова:* уявне квадратичне поле, дзета-функція Гекке, ряд Діріхле, функціональне рівняння, суматорна функція.

## REFERENCES

1. Balyas L., Varbanets P. (2016). Quadratic residues of the norm group in the sectorial domains. *Algebra and Discrete Math.*, Vol. 22, No. 2, P. 153–170.
2. Belozеров G. S. (1991). Asymptotic formulas for numbers of solutions of Diophantine equations. *Odessa: Dissertation.*
3. Hecke E. (1920). Über eine neue Art von Zeta-funktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. *Math.Z.*, Vol. 6, P. 11–51.
4. Lavrik A. F. (1968). Approximate function equation for the Dirichlet L-functions. *Trudy Moskov.: Mat. Obschch.*, Vol. 18, P. 91–104 (in Russian).
5. Tichmarsh E. (1986). *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Oxford.
6. Varbanets P., Zarzycki P. (1989). Divisors of the Gaussian Integers in an Arithmetic Progression. *Journ. Number Theory*, Vol. 33, P. 152–169.

UDC 539.3

**A. A. Fesenko, K. S. Bondarenko**

Odesa I. I. Mechnikov National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies

## **THE DYNAMICAL PROBLEM ON ACTING DISTRIBUTED LOAD ON THE ELASTIC LAYER**

The wave field of an elastic half-layer is constructed, when a dynamic normal load distributed over a rectangular area acts on upper face at the initial moment of time. The lower face of the half-layer is rigidly fixed to the foundation, and the side border is in the conditions of a smooth contact. The method of decomposing the system of motion equations into a system of equations and an independently solvable equation is used, this approach was proposed by Popov G. Ya. Laplace and Fourier integral transformations are applied directly to the motion equations and boundary conditions, which reduces the problem to a vector one-dimensional boundary value problem, which is solved by the matrix differential calculus method. The output displacements are obtained using inverse integral transformations. The case of steady oscillations was considered and the amplitude of vertical displacement occurring in the layer was analyzed depending on the shape of the distributed load section, the material of the layer medium and the values of the natural frequency of the layer oscillations.

*MSC: 74B10, 74H05, 74H45.*

*Key words: exact solution, elastic layer, dynamic load, integral transform.*

*DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).293955*

### **INTRODUCTION**

Dynamic problems of the elasticity theory are solved for during construction to obtain the displacements in elastic bodies. Displacements lead to damage or deformation of the structure. Therefore, in mathematical physics, many authors solve the problems of the elasticity theory. Popov G. Ya. developed the method of presenting the Lamé equations through two jointly and one separately solved equations in his work [7]. The exact solution for the mixed problem of the elasticity theory was found in [8]. Also, Popov G. Ya., in collaboration with Vaysfeld N. D [10]., found a solution to the Lamb problem using this method. In [15], a solution was found for semi-homogeneous and non-homogeneous problems of the elasticity theory for a semi-infinite layer in a static formulation. Dynamical problem for an elastic quarter space was found

by Fesenko A. A., Bondarenko K. S. in [3]. Dynamical stresses in elastic half-space were analysed in [16] by Winfried Schepers. Plane contact problem on the pressure of a stamp with a rectangular base on a rough elastic halfspace was considered in [12]. Also, solution methods of dynamic problems have been described at book [11]. Some problems of the elasticity theory for an elastic layer were solved in [1; 5; 6]. Also, a solution was found for the dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity by Fesenko A. A. in [2].

The aim of this work is to obtain the exact formulas for displacements that appear in a elastic layer when a dynamic compressive load acts on upper faces.

## MAIN RESULTS

**1. Statement of the problem.** Consider the elastic layer  $x > 0$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < h$ . The dynamic normal load is acting on the boundary of the layer  $z = h$  along the rectangular zone  $0 \leq x \leq A$ ,  $-B \leq y \leq B$ . The smooth contact conditions are set at the side boundary  $x = 0$ . The boundary  $z = 0$  is rigidly fixed. It is necessary to find displacements of the points of the layer  $U(x, y, z, t)$ ,  $V(x, y, z, t)$ ,  $W(x, y, z, t)$  with zero initial conditions. The statement, leads to the following boundary conditions

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, h, t) &= -p(x, y)P(t), \quad 0 \leq x \leq A; \quad -B \leq y \leq B \\ \tau_{zx}(x, y, h, t) &= 0, \quad \tau_{zy}(x, y, h, t) = 0 \\ U(x, y, 0, t) &= V(x, y, 0, t) = W(x, y, 0, t) = 0 \\ U(0, y, z, t) &= \frac{\partial V(0, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial W(0, y, z, t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

The motion equations in vector form have the form [7]

$$\Delta(U, V, W) + \frac{2}{\kappa - 1} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{G} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) \quad (2)$$

Where  $\Delta$  "— Laplace operator,  $\kappa = 3 - 4\mu$ ,  $\mu$  "— Poisson's ratio,  $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  "— volume expansion,  $\rho$  "— material density,  $G$  "— shear modulus.

To obtain a solution to the given problem, it is necessary to obtain a solution for the dynamic force concentrated at an arbitrary point on the boundary  $z = h$

$$p(x, y) = -\delta(x - a)\delta(y - b)$$

where  $\delta$  – Dirac function, and then distribute it over the required area.

Let's introduce new functions [7]

$$\begin{aligned} Z(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z) \\ \tilde{Z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) \end{aligned}$$

Then the system of motion equations (2) and boundary conditions (1) taking into account the new functions will be rewritten in the form:

$$\begin{cases} \Delta W + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial}{\partial z} \left( Z + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{(\kappa - 1) \rho}{(\kappa + 1) G} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ \Delta Z + \frac{2}{\kappa - 1} \nabla_{xy} \left( Z + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta \tilde{Z} = \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xy} W(x, y, h, t) + \frac{\partial}{\partial z} Z(x, y, h, t) &= 0 \\ (3 - \kappa) Z(x, y, h, t) + (1 + \kappa) \frac{\partial}{\partial z} W(x, y, h, t) &= -\frac{\kappa - 1}{G} \delta(x - a) \delta(y - b) P(t) \\ Z(x, y, 0, t) = \tilde{Z}(x, y, 0, t) = W(x, y, 0, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{Z}(x, y, h, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} Z(0, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} W(0, y, z, t) = \tilde{Z}(0, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

The initial boundary value problem takes the form (3)-(5) under the initial conditions

$$\left[ W, Z, \tilde{Z} \right] \Big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ W, Z, \tilde{Z} \right] \Big|_{t=0} = 0$$

After finding the functions  $W, Z, \tilde{Z}$  to find the displacements  $U$  and  $V$  the Poisson equation should be solved

$$\nabla_{xy} U = \frac{\partial}{\partial x} Z - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{Z}, \quad \nabla_{xy} V = \frac{\partial}{\partial y} Z + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{Z} \quad (6)$$

## 2. Reduction the problem to a vector one-dimensional problem.

The  $\cos$  - Fourier transform with respect to the variable  $x$ , the Fourier transform with respect to the variable  $y$  and the Laplace transform of the variable  $t$

with parameters  $\alpha, \beta$  and  $p$ , respectively are successively applied to the (3)-(4).

$$\begin{bmatrix} W_{\alpha\beta p}(z) \\ Z_{\alpha\beta p}(z) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} W(x, y, z, t) \\ Z(x, y, z, t) \end{bmatrix} e^{i\beta y} \cos \alpha x e^{-pt} dy dx dt$$

where  $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

The function  $\tilde{Z}_{\alpha\beta p}(z)$  satisfies the homogeneous problem

$$\tilde{Z}_{\alpha\beta p}''(z) - (N^2 + p^2)\tilde{Z}_{\alpha\beta p}(z) = 0, \quad 0 < z < h, \quad \tilde{Z}_{\alpha\beta p}'(h) = 0, \quad \tilde{Z}_{\alpha\beta p}(0) = 0 \quad (7)$$

and therefore  $\tilde{Z}(x, y, z, t) \equiv 0$ .

**3. A case of steady-state oscillations.** To consider a steady-state oscillations suppose that load applied across the area  $0 < x < A$ ;  $-B < y < B$  over the plane  $XOY$  changes according to the harmonic law  $P(t) = e^{i\omega t}$  and  $p(x, y) = P$ , where  $P$  – constant intensity of the load,  $\omega$  – is a natural frequency of vibrations. In this case, substituting into the system of equations and boundary conditions  $p = i\omega$  according to the [4].

Let's introduce the values

$$k_1^2 = \frac{\omega^2 \rho}{G}, \quad k_2^2 = \frac{(\kappa - 1) \omega^2 \rho}{\kappa + 1 G} \quad (8)$$

where  $k_1, k_2$  – the wave numbers.

The system of equations (3) and boundary conditions (5) take the form

$$\begin{cases} W_{\alpha\beta}''(z; k_1, k_2) + \frac{2}{\kappa + 1} Z_{\alpha\beta}'(z; k_1, k_2) - N^2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} W_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) + \\ \quad + k_2^2 W_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) = 0 \\ Z_{\alpha\beta}''(z; k_1, k_2) - \frac{2}{\kappa - 1} N^2 W_{\alpha\beta}'(z; k_1, k_2) - N^2 \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} Z_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) + \\ \quad + k_1^2 Z_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$-N^2 W_{\alpha\beta}(h; k_1, k_2) + Z_{\alpha\beta}'(h; k_1, k_2) = 0$$

$$(3 - \kappa) Z_{\alpha\beta}(h; k_1, k_2) + (\kappa + 1) W_{\alpha\beta}'(h; k_1, k_2) = -\frac{\kappa - 1}{G} \cdot \cos \alpha a e^{i\beta b} \cdot P \quad (10)$$

$$Z_{\alpha\beta}(0; k_1, k_2) = W_{\alpha\beta}(0; k_1, k_2) = 0$$

$$N^2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

To reduce problems (9) (10) to a vector one-dimensional one, an unknown transform vector of displacements is introduced

$$\vec{\mathbf{y}}(z; k_1, k_2) = \begin{pmatrix} W_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) \\ Z_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) \end{pmatrix}$$

as well as matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\kappa+1} \\ \frac{-2N^2}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} k_2^2 & 0 \\ 0 & k_1^2 \end{pmatrix}$$

So, the system (9) and boundary conditions (10) takes the form

$$\begin{cases} L_2 \vec{\mathbf{y}}(z; k_1, k_2) = 0, & 0 < z < h \\ \mathbf{U}_0[\vec{\mathbf{y}}(0; k_1, k_2)] = \mathbf{\Theta}_0 \\ \mathbf{U}_1[\vec{\mathbf{y}}(h; k_1, k_2)] = \mathbf{\Theta}_1 \end{cases} \quad (11)$$

where the differential operator  $L_2$  has the form

$$L_2 \vec{\mathbf{y}}(z; k_1, k_2) = \mathbf{I} \vec{\mathbf{y}}''(z; k_1, k_2) + \mathbf{Q} \vec{\mathbf{y}}'(z; k_1, k_2) - N^2 \mathbf{P} \vec{\mathbf{y}}(z; k_1, k_2) + \mathbf{T} \vec{\mathbf{y}}(z; k_1, k_2)$$

Let's enter matrices and vectors

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -N^2 & 0 \\ 0 & (3 - \kappa) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1 + \kappa) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Theta}_0 = (0, 0)^T, \quad \mathbf{\Theta}_1 = \left(0, -\frac{P(\kappa-1)}{G} \cos \alpha a e^{ib\beta}\right)^T$$

where symbol T means transported vector. Edge functionals are

$$\mathbf{U}_0[\vec{\mathbf{y}}] = \mathbf{I} \vec{\mathbf{y}}(0; k_1, k_2)$$

$$\mathbf{U}_1[\vec{\mathbf{y}}] = \mathbf{A} \vec{\mathbf{y}}(h; k_1, k_2) + \mathbf{B} \vec{\mathbf{y}}'(h; k_1, k_2)$$

The solution of the vector equation (11) is built on the basis of the solution of the matrix equation  $L_2 [\mathbf{Y}(z)] = 0$ . Substitution  $\mathbf{Y}(z) = e^{Nz} \mathbf{I}$  is made to form the characteristic matrix  $\mathbf{M}(s) = \mathbf{I} s^2 + \mathbf{Q} s - N^2 \mathbf{P} + \mathbf{T}$ . The inverse matrix has the form

$$\mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} \begin{pmatrix} s^2 - N^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + k_2^1 & -\frac{2s}{\kappa+1} \\ \frac{2s}{\kappa-1} N^2 & s^2 - N^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + k_2^2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \sqrt{N^2 - k_2^2}, \quad s_2 = -\sqrt{N^2 - k_2^2}, \quad s_3 = \sqrt{N^2 - k_1^2}, \quad s_4 = -\sqrt{N^2 - k_1^2}$$

Here  $s_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) are the roots of the characteristic equation  $\det[\mathbf{M}(s)] = 0$ . The solution of the matrix equation is constructed according to the formula [9]

$$\mathbf{Y}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sz} \mathbf{M}^{-1}(s) ds$$

where  $C$  is a closed loop covering all zeros of the determinant of the matrix  $\mathbf{M}(s)$ . The residues at the poles  $s_1$  and  $s_3$  give an increasing solution that has the form

$$\mathbf{Y}_+(z; k_1, k_2) = -\frac{1}{2k_1^2} e^{\Delta_1 z} \begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & \Delta_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k_1^2} e^{\Delta_2 z} \begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)\Delta_2}{(\kappa-1)} & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix}$$

The residuals at the poles  $s_2$  and  $s_4$  give a solution that descends.

$$\mathbf{Y}_-(z; k_1, k_2) = -\frac{1}{2k_1^2} e^{-\Delta_1 z} \begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\Delta_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k_1^2} e^{-\Delta_2 z} \begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)\Delta_2}{(\kappa-1)} & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & \frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix}$$

where  $\Delta_1 = \sqrt{N^2 - k_1^2}$ ,  $\Delta_2 = \sqrt{N^2 - k_2^2}$

The solution of the vector equation (11) is constructed in the form

$$\vec{y}(z) = \Psi_0 \Theta_0 + \Psi_1 \Theta_1$$

where  $\Psi_i$ ,  $i = 0, 1$  - the fundamental basis matrices of the solutions,  $\Theta_i$ ,  $i = 0, 1$  - the right-hand parts of the boundary conditions.

The fundamental basis matrices is constructed through the fundamental system of solutions of the homogeneous differential equation (11), using the formulas  $\Psi_i = \mathbf{Y}_-(z) \mathbf{C}_i^0 + \mathbf{Y}_+(z) \mathbf{C}_i^1$ ,  $i = 0, 1$ .  $\mathbf{C}_i^{0,1}$ , - are matrices of unknown constants [9]. The matrices of unknown constants can be found from the relations by satisfying the boundary conditions  $\mathbf{U}_i[\Psi] = \delta_{ij} \mathbf{I}$   $i, j = 0, 1$

$$\mathbf{C}_1^1 = (\mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_+(z)] - \mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_-(z)] \cdot (\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)])^{-1} \cdot \mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)])^{-1}$$

$$\mathbf{C}_1^0 = -(\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)])^{-1} \cdot \mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_+(z)] \cdot \mathbf{C}_1^1$$

$$\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_+(z)] = -\frac{1}{2k_1^2} \left( \begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & \Delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)\Delta_2}{(\kappa-1)} & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)] &= -\frac{1}{2k_1^2} \left( \left( \begin{array}{cc} \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\Delta_1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc} -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}\Delta_2 & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}N^2 & \frac{N^2}{\Delta_2} \end{array} \right) \right) \\ \mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_+(z)] &= -\frac{1}{2k_1^2} \left( \begin{array}{c} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}N^2 \left( \left( \frac{N^2}{\Delta_1} + \Delta_1 \right) e^{\Delta_1 h} - 2\Delta_2 e^{\Delta_2 h} \right) \\ (\kappa+1) \left( -2N^2 e^{\Delta_1 h} + (2N^2 - k_1^2) e^{\Delta_2 h} \right) \\ (2N^2 - k_1^2) e^{\Delta_1 h} - 2N^2 e^{\Delta_2 h} \\ (\kappa-1) \left( -2\Delta_1 e^{\Delta_1 h} + \frac{1}{\Delta_2} (2N^2 - k_1^2) e^{\Delta_2 h} \right) \end{array} \right) \\ \mathbf{U}_1[\mathbf{Y}_-(z)] &= -\frac{1}{2k_1^2} \left( \begin{array}{c} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}N^2 \left( 2\Delta_2 e^{-\Delta_2 h} - \left( \frac{N^2}{-\Delta_1} + \Delta_1 \right) e^{-\Delta_1 h} \right) \\ (\kappa+1) \left( -2N^2 e^{-\Delta_1 h} + (2N^2 - k_1^2) e^{-\Delta_2 h} \right) \\ (2N^2 - k_1^2) e^{-\Delta_1 h} - 2N^2 e^{-\Delta_2 h} \\ (\kappa-1) \left( 2\Delta_1 e^{-\Delta_1 h} - \frac{1}{\Delta_2} (2N^2 - k_1^2) e^{-\Delta_2 h} \right) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Taking into account that  $\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_-(z)]^{-1}\mathbf{U}_0[\mathbf{Y}_+(z)] = -\mathbf{I}$  we get that  $\mathbf{C}_1^1 = \mathbf{C}_1^0$ . Since  $\Theta_0 = (0, 0)^T$  then  $\Psi_0$  is not of interest. Matrix  $\Psi_1$  has a form

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{1}{2k_1^2} \left( \begin{array}{c} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left( \Delta_2 \sinh \Delta_2 z - \frac{N^2}{\Delta_1} \sinh \Delta_1 z \right) \\ \cosh \Delta_2 z - \cosh \Delta_1 z \\ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} N^2 (\cosh \Delta_1 z - \cosh \Delta_2 z) \\ \Delta_1 \sinh \Delta_1 z - \frac{N^2}{\Delta_2} \sinh \Delta_2 z \end{array} \right) \cdot \mathbf{C}_1^1 \end{aligned}$$

After simplification, expressions for the transformants were found

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) &= -\frac{\cos \alpha a e^{i b \beta}}{G} \cdot P \frac{\Delta_2}{\tilde{\Delta}} \left[ (\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_2 z - N^2 \sinh \Delta_1 z) \times \right. \\ &\quad \times (2N^2 \cosh \Delta_2 h - (2N^2 - k_1^2) \cosh \Delta_1 h) + \\ &\quad \left. + N^2 (\cosh \Delta_2 z - \cosh \Delta_1 z) \times \right. \\ &\quad \left. \times ((2N^2 - k_1^2) \sinh \Delta_1 h - 2\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_2 h) \right] \\ Z_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) &= -\frac{\cos \alpha a e^{i b \beta}}{G} \cdot P \frac{N^2}{\tilde{\Delta}} \left[ \Delta_1 \Delta_2 (\cosh \Delta_1 z - \cosh \Delta_2 z) \times \right. \\ &\quad \times (2N^2 \cosh \Delta_2 h - (2N^2 - k_1^2) \cosh \Delta_1 h) + \\ &\quad \left. + (\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_1 z - N^2 \sinh \Delta_2 z) \times \right. \\ &\quad \left. \times ((2N^2 - k_1^2) \sinh \Delta_1 h - 2\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_2 h) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{\Delta} = 4N^2 \Delta_1 \Delta_2 (2N^2 - k_1^2) - (8N^4 - 4N^2 k_1^2 + k_1^4) \Delta_1 \Delta_2 \cosh \Delta_1 h \cosh \Delta_2 h$$



$$+ N^2(8N^4 - 4N^2k_1^2 \frac{3\kappa + 1}{\kappa + 1} + k_1^4 \frac{5\kappa - 3}{\kappa + 1}) \sinh \Delta_1 k \sinh \Delta_2 k$$

Based on the formulas (6), (7), the transformants of the remaining displacement were found

$$U_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) = \frac{\alpha}{N^2} Z_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2), \quad V_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2) = \frac{i\beta}{N^2} Z_{\alpha\beta}(z; k_1, k_2)$$

Thus, an exact solution of the vector problem (9) (10) in the space of transformants was obtained.

#### 4. Construction of original solutions.

Let's introduce functions dependent on  $N$

$$\begin{aligned} F_W(N, z; k_1, k_2) = & [(\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_2 z - N^2 \sinh \Delta_1 z) \times \\ & \times (2N^2 \cosh \Delta_2 h - (2N^2 - k_1^2) \cosh \Delta_1 h) + N^2 (\cosh \Delta_2 z - \cosh \Delta_1 z) \times \\ & \times ((2N^2 - k_1^2) \sinh \Delta_1 h - 2\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_2 h)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Z(N, z; k_1, k_2) = & [\Delta_1 \Delta_2 (\cosh \Delta_1 z - \cosh \Delta_2 z) \times \\ & \times (2N^2 \cosh \Delta_2 h - (2N^2 - k_1^2) \cosh \Delta_1 h) + (\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_1 z - N^2 \sinh \Delta_2 z) \times \\ & \times ((2N^2 - k_1^2) \sinh \Delta_1 h - 2\Delta_1 \Delta_2 \sinh \Delta_2 h)] \end{aligned}$$

After applying inverse integral transformations to the solution of (12), the original displacements were obtained

$$W(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_2}{\Delta} F_W(N, z) \cos \alpha a e^{-i\beta(y-b)} \cos \alpha x d\beta d\alpha$$

$$V(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{G\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{N^2}{\Delta} F_Z(N, z) \cos \alpha a e^{-i\beta(y-b)} \cos \alpha x d\beta d\alpha$$

$$U(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{G\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{N^2}{\Delta} F_Z(N, z) \cos \alpha a e^{-i\beta(y-b)} \cos \alpha x d\beta d\alpha$$

Using the parity of the function related to the variable  $\alpha$  under the integral and applying Euler's formula, the displacements are rewritten in the form

$$W(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{4G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_2}{\Delta} F_W(N, z) e^{-i\alpha(a-x) - i\beta(y-b)} d\beta d\alpha$$

$$V(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{4G\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N^2}{\Delta} F_Z(N, z) e^{-i\alpha(a-x)-i\beta(y-b)} d\beta d\alpha$$

$$U(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{4G\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N^2}{\Delta} F_Z(N, z) e^{-i\alpha(a-x)-i\beta(y-b)} d\beta d\alpha$$

In order to get rid of the double integral by the parameters of the Fourier transforms, the relation connecting the Fourier and Hankel transforms was used [13]

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \chi_i^2}\right) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = \int_0^{\infty} s F(\sqrt{s^2 + \chi_i^2}) \times \\ \times J_0(s\sqrt{x^2 + y^2}) ds$$

where  $J_0(s)$  is the Bessel function,  $\chi_1 = k_1$ ,  $\chi_2 = k_2$ . After simplification, the displacement formula takes the form

$$W(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{\pi G} \int_0^{\infty} \frac{F_W(s, z)}{\Delta_s} \cdot s \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + \right. \\ \left. + J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] ds$$

$$V(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{\pi G} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} \frac{F_Z(s, z)}{\Delta_s} \cdot s \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + \right. \\ \left. + J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] ds$$

$$U(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \frac{F_Z(s, z)}{\Delta_s} \cdot s \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + \right. \\ \left. + J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] ds$$

$$F_W(s, z) = \delta_2 \left[ (\delta_1 \delta_2 \sinh \delta_2 z - s^2 \sinh \delta_1 z) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (2s^2 \cosh \delta_2 h - (2s^2 - k_1^2) \cosh \delta_1 h) + \\ & + s^2 (\cosh \delta_2 z - \cosh \delta_1 z) ((2s^2 - k_1^2) \sinh \delta_1 h - 2\delta_1 \delta_2 \sinh \delta_2 h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Z(s, z) = N^2 & [\delta_1 \delta_2 (\cosh \delta_1 z - \cosh \delta_2 z) \times \\ & \times (2s^2 \cosh \delta_2 h - (2s^2 - k_1^2) \cosh \delta_1 h) + \\ & + (\delta_1 \delta_2 \sinh \delta_1 z - s^2 \sinh \delta_2 z) ((2s^2 - k_1^2) \sinh \delta_1 h - 2\delta_1 \delta_2 \sinh \delta_2 h)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_s = 4s^2 \delta_1 \delta_2 (2s^2 - k_1^2) - (8s^4 - 4s^2 k_1^2 + k_1^4) \delta_1 \delta_2 \cosh \delta_1 h \cosh \delta_2 h + \\ + s^2 \left( 8s^4 - 4s^2 k_1^2 \frac{3\kappa + 1}{\kappa + 1} + k_1^4 \frac{5\kappa - 3}{\kappa + 1} \right) \sinh \delta_1 h \sinh \delta_2 h \end{aligned}$$

where  $\delta_1 = \sqrt{s^2 - k_1^2}$ ,  $\delta_2 = \sqrt{s^2 - k_2^2}$

Using the parity of the Bessel function  $J_0(s)$ , we will continue the integration in an odd way to the interval  $(-\infty, 0)$ , we will find the displacement from the load distributed over a rectangular area

$$\begin{aligned} W^{AB}(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{\pi G} \int_0^A \int_{-B}^B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_W(s, z)}{\Delta_s} \cdot s \times \\ \times \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] ds da db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^{AB}(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{\pi G} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^A \int_{-B}^B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_Z(s, z)}{\Delta_s} \cdot s \times \\ \times \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] ds da db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^{AB}(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{P}{\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^A \int_{-B}^B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_Z(s, z)}{\Delta_s} \cdot s \times \\ \times \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] ds da db \end{aligned}$$

Using the results of the works [14], [3] and integral representation of the Bessel function, on the transformation of the integral, write the displacements in the forms

$$W^{AB}(x, y, z; k_1, k_2) = -\frac{4P}{\pi GN} \int_0^\infty \frac{F_W(s, z)}{\Delta_s} \times \\ \sum_{k=1}^N \frac{\cos sx \sqrt{1 - \tau_k^2} \sin sA \sqrt{1 - \tau_k^2} \cos sy \tau_k \sin sB \tau_k}{s \tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} ds \quad (13)$$

$$V^{AB}(x, y, z; k_1, k_2) = \frac{4P}{\pi GN} \int_0^\infty \frac{F_Z(s, z)}{\Delta_s} \times \\ \sum_{k=1}^N \frac{\cos sx \sqrt{1 - \tau_k^2} \sin sA \sqrt{1 - \tau_k^2} \sin sy \tau_k \sin sB \tau_k}{s \sqrt{1 - \tau_k^2}} ds$$

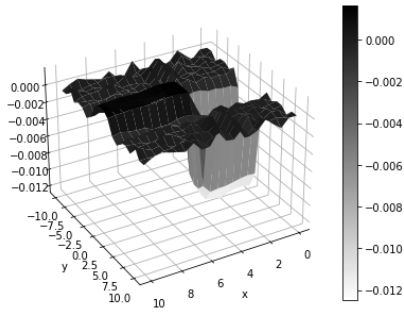
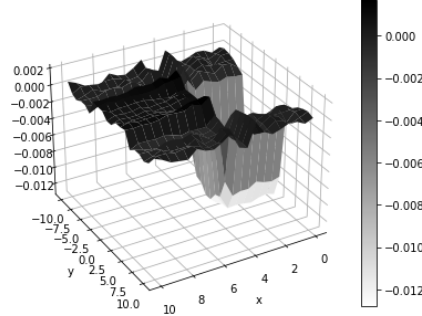
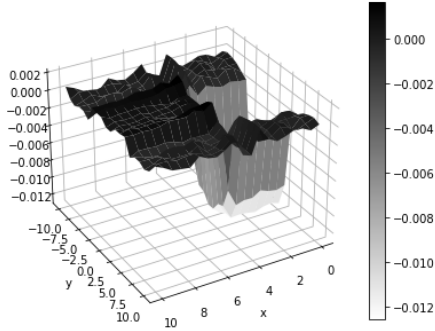
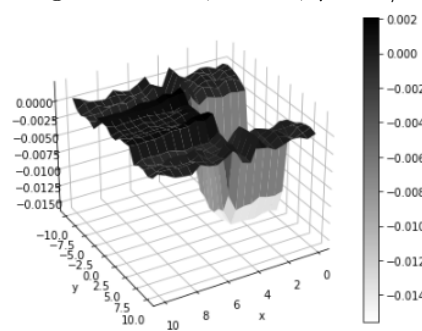
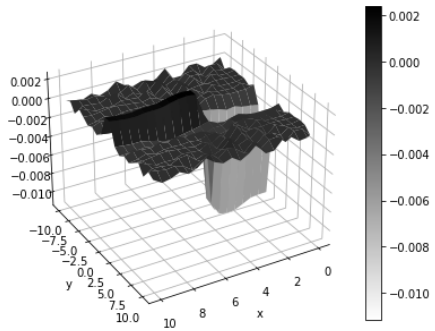
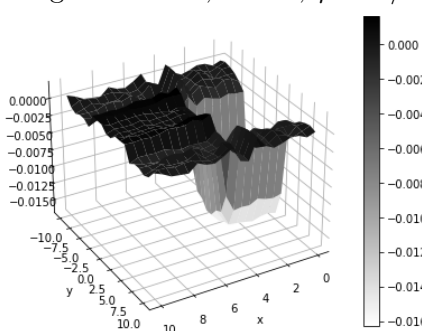
$$U^{AB}(x, y, z; k_1, k_2) = \frac{4P}{\pi GN} \int_0^\infty \frac{F_Z(s, z)}{\Delta_s} \times \\ \sum_{k=1}^N \frac{\sin sx \tau_k \sin sA \tau_k \cos sy \sqrt{1 - \tau_k^2} \sin sB \tau_k}{s \sqrt{1 - \tau_k^2}} ds$$

where  $\tau_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$  – zeros of the Chebyshev polynomial of the 1st kind.

**5. Results of numerical calculations.** The graphs represented below are distribution for vertical displacement on the upper face  $W^{AB}(x, y, h; k_1, k_2)$  from (13) for the values of Poisson's ratio  $\mu = \frac{1}{3}$  and  $\mu = \frac{1}{4}$  for frequencies, using formulas (8)  $\omega = 0.3; 1; 3$ ,  $\rho = 8.5$ ,  $G = 40$ ,  $h = 1$ . Three forms of the load distribution section along the face  $z = h$  are considered

1.  $B = A/2$  the load is distributed across the square;
2.  $B = A$  - the load is distributed along a rectangle stretched along the  $Oy$  axis;
3.  $B = A/4$  - the load is distributed over a rectangle stretched along the  $Ox$  axis.

Comparing the values of vertical displacements for different values of Poisson's ratio, it can be seen that the behavior of the graph is similar, but for values

Fig. 1.  $B = A/2$ ,  $\omega = 0.3$ ,  $\mu = 1/3$ Fig. 2.  $B = A$ ,  $\omega = 1$ ,  $\mu = 1/3$ Fig. 3.  $B = A$ ,  $\omega = 0.3$ ,  $\mu = 1/3$ Fig. 4.  $B = A$ ,  $\omega = 3$ ,  $\mu = 1/3$ Fig. 5.  $B = A/4$ ,  $\omega = 0.3$ ,  $\mu = 1/3$ Fig. 6.  $B = A$ ,  $\omega = 0.3$ ,  $\mu = 1/4$ 

$\mu = 1/4$  the amplitude of oscillations is larger (Fig. 3, Fig. 6)). Comparing the graphs of vertical displacements for the same frequency  $\omega = 0.3$  and Poisson's ratio  $\mu = 1/3$  under different sections of the load distribution (Fig. 1, Fig. 3, Fig. 5), it can be seen that the maximum absolute values achieved with the shape of the section  $B = A$ , which corresponds to a rectangle elongated along the y-axis. In the case when the load is distributed over a rectangle

elongated along the x-axis, the displacement has a minimum amplitude and its maximum displacement is about  $-0.01$  units (Fig. 5). In the case when the load is distributed over the rectangle  $B = A$ , with an increase in the vibration frequency (Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4), the amplitude of displacement grows. Positive displacements are observed, which means the lifting of the face of the elastic layer. The maximum absolute values achieved with  $\omega = 3$  (Fig. 4).

## CONCLUSION

The dynamical problem's solution of the elasticity for the elastic layer was derived, when the lower face of the layer is rigidly fixed to the foundation, the side border is in the smooth contact, and upper face is under the influence of the normal dynamic compressive load, applied at the initial moment of time and distributed across a rectangular section. Application of the integral transform method directly to the movement equations reduced the initial problem to the one-dimensional vector problem. The last one was solved exactly using the matrix differential calculus. The proposed approach makes it possible to obtain an exact solution of the problem in the transform's space.

In the future, it is possible to consider different cases of boundary conditions and evaluate the influence of the defect inside the layer on displacements and stresses.

*Фесенко Г. О. Бондаренко К. С.*

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ПРО ДІЮ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПРУЖНИЙ ШАР

*Резюме*

Побудовано хвильове поле пружного півшару, коли на одній грані у початковий момент часу діє динамічне нормальне навантаження, розподілене за прямокутною ділянкою. Нижня границя півшару жорстко зачеплена з основою, а торець знаходиться в умовах гладкого контакту. Використовується метод розвалу системи рівнянь руху на систему рівнянь та незалежно розв'язуване рівняння, цей підхід був запропонований Поповим Г.Я. Застосовуються інтегральні перетворення Лапласа та Фур'є безпосередньо до рівнянь руху та крайових умов, що зводить задачу до векторної одновимірної крайової задачі, яку розв'язано методом матричного диференційного числення. Вихідні переміщення отримано застосуванням обернених інтегральних перетворень. Розглянуто випадок усталених коливань та проаналізовано амплітуду вертикальних переміщень, що виникають у шарі в залежності від форми ділянки розподіленого навантаження, матеріалу середовища шару та значень власної частоти коливань шару.

Ключові слова: точний розв'язок, динамічне навантаження, пружний шар, інтегральні перетворення.

## REFERENCES

1. Batra, R. C., Jiang, W. (2008). Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, No. 22-23, P. 5814–5830.
2. Fesenko, A. A. (2019). An exact solution of the dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 24, No. 2(34), P. 75–87.
3. Fesenko, A. A., Bondarenko, K. S. (2020). The dynamical problem on acting concentrated load on the elastic quarter space. *Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 25, No. 2(36), P. 7–26.
4. Grinchenko, V. T. (1981). *Harmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah [Harmonic vibrations and waves in elastic bodies]* Kiev: Naukova Dumka, p. 284.
5. Kuznetsova, E. L., Tarlakovskii, D. V. and Fedotenkov, G. V. (2011). Propagation of unsteady waves in an elastic layer. *Mechanics of solids*, Vol. 46, P. 779–787.
6. Miroshnikov V. Y. (2020). Stress state of an elastic layer with a cylindrical cavity on a rigid foundation *International Applied Mechanics*, Vol. 56, No. 3, P. 372–381.
7. Popov, G. Ya. (2002). O privedenii uravneniy dvizheniya uprugoy sredy k odnomu nezavisimomu i k dvum sovместno reshaemym uravneniyam [On reducing the equations of motion of an elastic medium to one independent and to two jointly solvable equations]. *DAN*, Vol. 384(2), P. 193–196.
8. Popov, G. Ya., (2003). Tochnoe reshenie smeshannoy zadachi teorii uprugosti dlya chetvert'prostranstva [An exact solution to the mixed problem of the elasticity theory for a quarter-space]. *Izvestia RUN. Rigid body mechanics*, Vol. 6, P. 31–39.
9. Popov, G. Ya., Abdimanapov, S. A. and Efimov, V. V. (1999). *Functii i matriti Greena odnomernyh kraevah zadach [Green's functions and matrix of onedimensional boundary value problems.]* Almati: Rauan, 113 p.
10. Popov, G. Ya., Vaysfeld, N. D. (2010). Ob odnom podhode k resheniyu zadachi Lamba [One new approach to solving the Lamb problem]. *Doclady RUN*, Vol. 432, No. 3, P. 337–342.
11. Poruchnikov, V. B. (1986). *Methods of dynamic theory of elasticity*, Moscow: Nauka, p. 328.
12. Rabinovich, A. S. (1974). Plane contact problem on the pressure of a stamp with a rectangular base on a rough elastic half-space. *Izv. Akad. Nauk. ArmSSR, Mekhanika*. Vol. 27, No. 4.
13. Sneddon, I. N. (1955). *Preobrazovanie Furie [Fourier transforms]*, Moscow: Izdat. Inostr. Lit., p. 667.

14. Sonin, N. Y. (1954). *Issledovanie tsilindricheskikh funktsiy i specialnih polinomov [Research on cylindrical functions and special polynomials]*. Moscow: Gostechizdat.
15. Vaysfeld, N. & Fesenko, A. (2019). *Zmishani zadachi teorii pruzhnosti dlya pivneskinchennogo sharu [The mixed partial elasticity problems for a semi-infinite layer]*. Odesa: Astroprint, p. 120.
16. Winfried Schepers, Stavros Savidis and Eduardo Kausel. (2010). *Dynamic stresses in an elastic half-space*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 30(9), P. 833–843.



UDC 517.925

**L. I. Kusik**

Odesa National Maritime University

**NECESSARY EXISTENCE CONDITIONS OF  
 $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -SOLUTIONS OF SECOND - ORDER DIFFERENTIAL  
EQUATION WITH RAPIDLY VARYING NONLINEARITY**

We consider a differential equation of the second order of the general form  $y'' = f(t, y, y')$ , where  $f : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbf{R}$  a continuous function,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\Delta_{Y_i}$  – one-side neighborhood of  $Y_i$ ,  $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$  ( $i \in \{0, 1\}$ ). Under certain conditions for the function  $f$ , this equation can be represented close to the two-term differential equation, namely  $y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_1(y')(1 + o(1))$  at  $t \uparrow \omega$ , where  $\varphi_1$  is a rapidly varying function at  $y' \rightarrow Y_1$ . Found the necessary conditions for the existence of solutions for which  $\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i$  ( $i \in \{0, 1\}$ ),

$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0$ , so called  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions. This type of solution was previously presented in works by Evtukhov V.M., Belozerova M.O. when studying the two-term equation  $y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y')$ , where  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  – continuous function,  $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $i = 0, 1$ ) – continuous regularly variables for  $z \rightarrow Y_i$  ( $i = 0, 1$ ) functions of orders  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1$ ), and  $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ . Further, in the studies of V.M. Evtukhov, A.G. Chernikova for equation  $y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y)$  necessary and sufficient conditions are established existence, as well as asymptotic at  $t \uparrow \omega$  representations  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions in the case when  $\varphi_0$  is a rapidly varying function at  $y \rightarrow Y_0$ .

*MSC: 34A34, 34E99.*

*Key words: two-term differential equation,  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, asymptotic representations of solutions, rapidly varying function, one-, two-parameter family of solutions.*

*DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294318*

**INTRODUCTION**

Consider the differential equation

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

where  $f : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbf{R}$  is continuous function,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\Delta_{Y_i}$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) is a one-side neighborhood of  $Y_i$  and  $Y_i$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) is either 0

or  $\pm\infty$ . We assume that the numbers  $\mu_i$  ( $i = 0, 1$ ) given by the formula

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{if either } Y_i = +\infty, \text{ or } Y_i = 0 \\ & \text{and } \Delta_{Y_i} \text{ is right neighborhood of the point } 0, \\ -1 & \text{if either } Y_i = -\infty, \text{ or } Y_i = 0 \\ & \text{and } \Delta_{Y_i} \text{ is left neighborhood of the point } 0, \end{cases}$$

satisfy the relations

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \text{for } Y_0 = \pm\infty \quad \text{and} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \text{for } Y_0 = 0. \quad (2)$$

Conditions (2) are necessary for the existence of solutions of Eq. (1) defined in a left neighborhood of  $\omega$  and satisfying the conditions

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{for } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1). \quad (3)$$

One of the classes of Eq. (1) solutions with properties (3) that admits some asymptotic representations is the class of  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions.

**Definition 1.** A solution  $y$  of Eq. (1) on interval  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  is called  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solution, where  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , if, in addition to (3), it satisfies the condition

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Depending on  $\lambda_0$  these solutions have different asymptotic properties. In [1] such ratios

$$\begin{aligned} \text{for } \lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} & \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \\ \text{for } \lambda_0 = 1 & \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \pm\infty, \\ \text{for } \lambda_0 = \pm\infty & \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = 0, \end{aligned}$$

where

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{if } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{if } \omega < +\infty, \end{cases}$$

are established.

Now consider a case  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . We impose a condition on the function  $f$  so that it becomes a two-term of a special form.

**Definition 2.** We say that a function  $f$  satisfies condition  $(FN1)_{\lambda_0}$  for  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  if there exist a number  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ , a continuous function

$p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  and twice continuously differentiable function  $\varphi_1 : \Delta_{Y_1} \rightarrow ]0, +\infty[$ , satisfying the conditions

$$\varphi_1'(w) \neq 0, \quad \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \varphi_1(w) = \varphi_1 \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\varphi_1(w)\varphi_1''(w)}{(\varphi_1'(w))^2} = 1, \quad (4)$$

such that, for arbitrary continuously differentiable functions  $z_i : [a, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_i}$  ( $i = 0, 1$ ), satisfying the conditions

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1},$$

one has representation

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_1(z_1(t)) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega \quad (5)$$

Moreover, under condition  $(FN)_{\lambda_0}$  sign of second derivative of any  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solution of Eq. (1) in a left neighborhood of  $\omega$  coincides with the value  $\alpha_0$ . Then taking into account (2), we have

$$\alpha_0 \mu_1 > 0 \quad \text{for } Y_1 = \pm\infty \quad \text{and} \quad \alpha_0 \mu_1 < 0 \quad \text{for } Y_1 = 0. \quad (6)$$

## MAIN RESULTS

### 1. Auxiliary statements

We choose a number  $b \in \Delta_{Y_0}$  such that the inequality

$$|b| < 1 \quad \text{for } Y_1 = 0, \quad b > 1 \quad (b < -1) \quad \text{for } Y_1 = +\infty \quad (Y_1 = -\infty)$$

is respected and put

$$\Delta_{Y_1}(b) = [b, Y_1[ \quad \text{if } \Delta_{Y_1} \text{ is a left neighborhood of } Y_1,$$

$$\Delta_{Y_1}(b) = ]Y_1, b] \quad \text{if } \Delta_{Y_1} \text{ is a right neighborhood of } Y_1.$$

$$\Phi_1 : \Delta_{Y_1}(b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_1(w) = \int_B^w \frac{ds}{\varphi_1(s)}, \quad B = \begin{cases} b & \text{if } \int_b^{Y_1} \frac{ds}{\varphi_1(s)} = \pm\infty, \\ Y_1 & \text{if } \int_b^{Y_1} \frac{ds}{\varphi_1(s)} = \text{const}, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int_A^t p(\tau) d\tau, \quad A = \begin{cases} a & \text{if } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = \pm\infty, \\ \omega & \text{if } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = \text{const}, \end{cases}$$

$$Y^{[1]}(t) = \Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)), \quad \mu_3 = \text{sign } \varphi_1(w) \quad \text{for } w \in \Delta_{Y_1}.$$

Note that the function  $\Phi_1$  retains its sign on  $\Delta_{Y_1}$ , tends either to 0 or to  $\pm\infty$  as  $w \rightarrow Y_1$ , and increases on  $\Delta_{Y_1}$  due to  $\Phi_1'(w) > 0$ . Therefore, it has an inverse function  $\Phi_1^{-1} : \Delta_{Z_1} \rightarrow \Delta_{Y_1}$ , where, due to the second of conditions (4) and the increase  $\Phi_1^{-1}$

$$Z_1 = \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \Phi_1(w) \in \{0, \pm\infty\}, \tag{7}$$

$$\Delta_{Z_1} = \begin{cases} [z_1, Z_1[ & \text{if } \Delta_{Y_1} \text{ is a left neighborhood of } Y_1, \\ ]Z_1, z_1] & \text{if } \Delta_{Y_1} \text{ is a right neighborhood of } Y_1, \end{cases} \quad z_1 = \Phi_1(b).$$

**Definition 3.** Let  $f : \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  be a twice continuously differentiable function. We will say that  $f \in \Gamma(Y_1, Z_1)$  if it satisfies the following conditions

$$f'(w) \neq 0, \quad \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} f(w) = Z_1, \quad Z_1 = \begin{cases} \text{or } 0, \\ \text{either } \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f''(w)f(w)}{(f'(w))^2} = 1.$$

First of all, we note that, by virtue of definition 3, any function from  $\Gamma(Y_1, Z_1)$ -class is rapidly varying as  $w \rightarrow Y_1$ .

In [2] using the properties of functions from the class  $\Gamma$  introduced and studied in detail in the monograph Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. [3] (Chapter 3, item 3.10), the following auxiliary assertions about the properties of functions from the class  $\Gamma(Y_1, Z_1)$  were established.

**Lemma 1.** If  $f \in \Gamma(Y_1, Z_1)$  then there exists a continuous function  $g : \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , called complementary to  $f$ , such that

$$\lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(w + ug(w))}{f(w)} = e^u \quad \text{for any } u \in \mathbb{R},$$

moreover, the complementary function is uniquely determined up to functions equivalent as  $w \rightarrow Y_1$ , for which, for example, one of the following functions

$$\frac{\int_W^w \left( \int_W^t f(u) du \right) dt}{\int_W^w f(x) dx} \sim \frac{\int_W^w f(x) dx}{f(w)} \sim \frac{f(w)}{f'(w)} \sim \frac{f'(w)}{f''(w)} \quad \text{as } w \rightarrow Y_1,$$

where

$$W = \begin{cases} z_1 & \text{if } \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} f(w) = \pm\infty, \\ Y_1 & \text{if } \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} f(w) = 0, \end{cases}$$

can be chosen.

**Lemma 2.**

1. If  $f \in \Gamma(Y_1, Z_1)$  with complementary function  $g$  then  $\lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{g(w)}{w} = 0$ .
2. If  $f \in \Gamma(Y_1, Z_1)$  with complementary function  $g$  then for any continuous function  $u : \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbb{R}$  that satisfies the conditions

$$\lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} u(w) = u_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} f(w + u(w)g(w)) = Z_1,$$

there is a limit relation

$$\lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(w + u(w)g(w))}{f(w)} = e^{u_0}.$$

**Lemma 3.** If  $f \in \Gamma(Y_1, Z_1)$  strictly monotone with complementary function  $g$  then its inverse function  $f^{-1} : \Delta_{Z_1} \rightarrow \Delta_{Y_1}$  is slowly varying at  $z \rightarrow Z_1$  and satisfies the limit relation

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_1 \\ z \in \Delta_{Z_1}}} \frac{f^{-1}(\lambda z) - f^{-1}(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln \lambda \quad \text{for any } \lambda > 0,$$

moreover for any given  $\Lambda > 1$  limit relation is satisfied uniformly in  $\lambda \in \left[\frac{1}{\Lambda}, \Lambda\right]$ .

Note also, it follows from the Representation Theorem for  $\Gamma$  ([3], Chapter 3, item 3.10, position d) that for a function  $f \in \Gamma(Y_1, Z_1)$  there exists a

continuously differentiable function  $f_1 \in \Gamma(Y_1, Z_1)$  such that

$$\lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{f(w)}{f_1(w)} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{wf_1(w)}{f_1(w)} = \pm\infty.$$

## 2. Main results

**Theorem 1.** *Let  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  and let the function  $f$  satisfies condition  $(FN1)_{\lambda_0}$ . Then, for the existence of  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions of the differential equation (1), it is necessary that the conditions (2), (6),*

$$\mu_0\mu_1\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \quad \alpha_0\mu_3I_1(t) < 0 \quad \text{for } t \in [a, \omega[ \tag{8}$$

$$\alpha_0 \lim_{t \uparrow \omega} I_1(t) = Z_1, \tag{9}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1'(t)\pi_\omega(t)}{I_1(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)\varphi_1(Y^{[1]}(t))}{Y^{[1]}(t)} = \frac{\alpha_0}{\lambda_0 - 1} \tag{10}$$

are hold.

Moreover, each solution of this kind admits the asymptotic representations as  $t \uparrow \omega$

$$y(t) = \frac{(\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0)} Y^{[1]}(t)\pi_\omega(t)(1 + o(1)), \quad y'(t) = Y^{[1]}(t)[1 + o(1)]. \tag{11}$$

**Proof of Theorem 1.** Let  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  and  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0}$  be an arbitrary  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solution of Eq. (1.1). Then there is a number  $t_1 \in [t_0, \omega[$  such that  $y^{(k)}(t) \neq 0$  ( $k = 0, 1, 2$ ),  $\text{sign } y^{(k)}(t) = \mu_k$  ( $k = 0, 1$ ) for  $t \in [t_1, \omega[$ . Moreover, from the equality

$$\left( \frac{y(t)}{y'(t)} \right)' = 1 - \frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2}$$

and conditions (3), the definition of the  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solution immediately implies that

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{12}$$

From this, in particular, it follows that the first of the sign representations (8) holds. Due to (12) and the condition  $(FN1)_{\lambda_0}$  which the function  $f$  satisfies from (1) we have

$$y''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi_1(y'(t))[1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega \tag{13}$$

or

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0 p(t)[1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (14)$$

Integration of (14) on the interval from  $t_1$  to  $t$  leads to the limiting equality

$$\int_{t_1}^t \frac{y''(\tau) d\tau}{\varphi_1(y'(\tau))} = \alpha_0 \int_{t_1}^t p(\tau) d\tau [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega$$

or by virtue of the definition of the limits of integration  $A$  and  $B$

$$\Phi_1(y'(t)) = \alpha_0 I_1(t)[1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (15)$$

It follows from condition (4) that the function  $\varphi_1$  together with its derivative of the first order are rapidly varying as  $y' \rightarrow Y_1$ , because

$$\lim_{\substack{y' \rightarrow Y_1 \\ y' \in \Delta_{Y_1}}} \frac{y' \varphi_1'(y')}{\varphi_1(y')} = \pm\infty, \quad \lim_{\substack{y' \rightarrow Y_1 \\ y' \in \Delta_{Y_1}}} \frac{y' \varphi_1''(y')}{\varphi_1'(y')} = \pm\infty. \quad (16)$$

Also from (4) as  $y' \rightarrow Y_1$  the equivalence  $\frac{\varphi_1'(y')}{\varphi_1(y')} \sim \frac{\varphi_1''(y')}{\varphi_1'(y')}$  follows. In addition, taking to account the L'Hopital rule in the form of Stolz, we can assert that

$$\lim_{\substack{y' \rightarrow Y_1 \\ y' \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\Phi_1(y')}{\frac{1}{\varphi_1'(y')}} = \lim_{\substack{y' \rightarrow Y_1 \\ y' \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\frac{1}{\varphi_1(y')}}{-\frac{\varphi_1''(y')}{(\varphi_1'(y'))^2}} = - \lim_{\substack{y' \rightarrow Y_1 \\ y' \in \Delta_{Y_1}}} \frac{(\varphi_1(y'))^2}{\varphi_1''(y')\varphi_1(y')}, \quad (17)$$

hence

$$\Phi_1(y') \sim -\frac{1}{\varphi_1'(y')} \quad \text{as } y' \rightarrow Y_1, \quad (18)$$

$$\Phi_1(y')\varphi_1'(y') < 0 \quad \text{for } y' \in \Delta_{Y_1}.$$

A consequence of conditions (18), (15) is the second of the inequalities (8). Condition (17) implies as  $y' \rightarrow Y_1$  fulfillment of the equivalences

$$\frac{\Phi_1'(y')}{\Phi_1(y')} = \frac{1}{\varphi_1(y')} \sim -\frac{\varphi_1'(y')}{\varphi_1(y')}, \quad \frac{\Phi_1''(y')\Phi_1(y')}{(\Phi_1'(y'))^2} = \frac{-\frac{\varphi_1'(y')}{\varphi_1^2(y')}\Phi_1(y')}{\frac{1}{\varphi_1^2(y')}} \sim 1. \quad (19)$$

Hence taking into account the lemma 2.14 (see [2], Chap. II, Sec. 2.3., P. 54) it follows that the function  $\Phi_1$  belongs to the class  $\Gamma(Y_1, Z_1)$  with a

complementary function  $g$ , for which one can choose one of the equivalent functions

$$\frac{\Phi_1'(y')}{\Phi_1''(y')} \sim \frac{\Phi_1(y')}{\Phi_1'(y')} \sim -\frac{\varphi_1(y')}{\varphi_1'(y')} \quad \text{as } y' \rightarrow Y_1.$$

Further from (14), (15), (18) by virtue of (9) and (16) the first of the conditions (10) follows.

Because the function  $\Phi_1$  belongs to the class  $\Gamma(Y_1, Z_1)$  and complementary to it can be chosen as  $g(y') = -\frac{\varphi_1(y')}{\varphi_1'(y')}$ . From the definition of  $Z_1$ ,  $\mu_3$ , the second of sign conditions (8)  $\Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)) \in \Delta_{Y_1}$  as  $t \in [t_0, \omega[$  and (9) follow. Therefore, based on the lemma 3 we have the limit equality

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)[1 + o(1)]) - \Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t))}{\frac{\varphi_1(\Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)))}{\varphi_1'(\Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)))}} &= \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow Z_1 \\ z \in \Delta_{Z_1}}} \frac{\Phi_1^{-1}(z[1 + o(1)]) - \Phi_1^{-1}(z)}{-\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_1'(z)}} = 0, \end{aligned}$$

which we can rewrite in the form

$$\Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)[1 + o(1)]) = \Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)) + \frac{\varphi_1(\Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)))}{\varphi_1'(\Phi_1^{-1}(\alpha_0 I_1(t)))} o(1) \quad \text{as } t \uparrow \omega.$$

Thus, the second of (11) is established, since

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y^{[1]}(t) \varphi_1'(Y^{[1]}(t))}{\varphi_1(Y^{[1]}(t))} = \lim_{\substack{y' \rightarrow Y_1 \\ y' \in \Delta_{Y_1}}} \frac{y' \varphi_1'(y')}{\varphi_1(y')} = \pm \infty.$$

Invoking the first of (11) from (12), we obtain the first of the relations (11).

Now we write (13) in the form

$$y''(t) = \alpha_0 p(t) \varphi_1 \left( Y^{[1]}(t) + \frac{\varphi_1(Y^{[1]}(t))}{\varphi_1'(Y^{[1]}(t))} \right) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (20)$$

Then, as a complementary to the function  $\varphi_1 \in \Gamma(Y_1, Z_1)$ , we choose  $g(y') = \frac{\varphi_1(y')}{\varphi_1'(y')}$ . Then, taking into account that  $\lim_{t \uparrow \omega} Y^{[1]}(t) = Y_1$ ,  $Y^{[1]}(t) \in \Delta_{Y_1}$  at  $t \in [t_0, \omega]$ , we obtain

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\varphi_1 \left( Y^{[1]}(t) + \frac{\varphi_1(Y^{[1]}(t))}{\varphi_1'(Y^{[1]}(t))} o(1) \right)}{\varphi_1(Y^{[1]}(t))} = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_1 \\ y' \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\varphi_1 \left( y' + \frac{\varphi_1(y')}{\varphi_1'(y')} o(1) \right)}{\varphi_1(y')} = 1,$$



which in turn leads to

$$\varphi_1 \left( Y^{[1]}(t) + \frac{\varphi_1(Y^{[1]}(t))}{\varphi_1'(Y^{[1]}(t))} o(1) \right) = \varphi_1 \left( Y^{[1]}(t) \right) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega.$$

Therefore, relation (20) takes the form

$$y''(t) = \alpha_0 p(t) \varphi_1 \left( Y^{[1]}(t) \right) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega.$$

From the last representation, taking into account the second of the limit equalities (12), we obtain the second of conditions (10).

The theorem is proved.

## CONCLUSION

In this paper, we consider the differential equation of the second order, which is asymptotically close as  $t \uparrow \omega$  to a two-term equation with rapidly varying with respect to the derivative component. Received necessary conditions for the existence of  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, as well as asymptotic representations for such solutions and their derivatives. To obtain sufficient conditions for existence solutions of this class, it is required to involve the results of the work [4]. It is also possible to refine the asymptotics of  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions in terms of functions  $\varphi_1, Y^{[1]}, \pi_\omega$ .

*Кусік Л. І.*

НЕОБХІДНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ШВИДКО ЗМІННОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

*Резюме*

Розглядаємо диференціальне рівняння другого порядку загального виду  $y'' = f(t, y, y')$ , де  $f : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbf{R}$  - неперервна функція,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\Delta_{Y_i}$  - односторонній окіл  $Y_i$ ,  $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$  ( $i \in \{0, 1\}$ ). При певних умовах на функцію  $f$  це рівняння може бути подане близьким до двочленного, а саме  $y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_1(y')(1 + o(1))$  при  $t \uparrow \omega$ , де  $\varphi_1$  - швидко змінна при  $y' \rightarrow Y_1$  функція. Знайдено необхідні умови існування розв'язків, для яких  $\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i$  ( $i \in \{0, 1\}$ ),  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0$ , т. з.  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків. Такого типу розв'язки раніше було ведено в роботах Євтухова В.М., Белозерової М.О. при вивченні двочленного рівняння  $y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y')$ , де  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  - неперервна функція,  $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $i = 0, 1$ ) - неперервні правильно змінні при  $z \rightarrow Y_i$  ( $i = 0, 1$ ) функції порядків  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1$ ), причому  $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ . Далі, у дослідженнях Євтухова В.М., Чернікової А.Г. для рівняння

$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y)$  встановлено необхідні, достатні умови існування, а також асимптотичні при  $t \uparrow \omega$  зображення  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків у випадку, коли  $\varphi_0$  - швидко змінна при  $y \rightarrow Y_0$  функція.

*Ключові слова:* двочленне диференціальне рівняння,  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язок, асимптотичні зображення розв'язків, швидко змінна функція, одно-, двопараметрична сім'я розв'язків.

## REFERENCES

1. Evtukhov V. M. (1998). Asimptoticheskoye povedeniye resheniy odnogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka tipa Emdena - Faulera [The asymptotic behavior of the solutions of one nonlinear second-order differential equation of the Emden - Fowler type]. *dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02* . Odessa, 154 p.
2. Chernikova A. G. (2019). Asimptotichna povedinka roz'vyazkiv zvychnykh dyferentsial'nykh rivnyan'zi shvydko zminnymy nelineynostyamy [Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations with rapidly varying nonlinearities]. *dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02* . Odesa, 156 p.
3. Bingham N. H., Goldic C. M., Teugels J. L. (1987). *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 494 p.
4. Evtukhov V.M., Samoylenko A.M. (2010). Usloviya sushchestvovaniya ischezayushchikh v osoboy toчке resheniy u veshchestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsial'nykh uravneniy [Existence conditions solutions vanishing at a singular point for real non-autonomous systems quasilinear differential equations]. *Ukr. Mat. Zh.*, Vol. 62, No. 1. – P. 52–80.

## ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською або англійською мовою.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

[rmm-journal@onu.edu.ua](mailto:rmm-journal@onu.edu.ua)

або завантажувати через сайт журналу

[www.rmm-journal.onu.edu.ua](http://www.rmm-journal.onu.edu.ua)

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного  $\text{\TeX}$ -файла,
- 2) PDF-файла,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи  $\text{\LaTeX}$  відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);

- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;
- список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);
- анотація іншою мовою повинна містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;
- додатково, якщо стаття написана українською мовою, після анотації англійською мовою додається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

*Редакційна колегія журналу*  
*«Дослідження в математиці і механіці»*  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
вул. Дворянська, 2  
м. Одеса, 65082

*Українською та англійською мовами*

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою  
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова  
Протокол № 12 від 31 травня 2021 р.

Відповідальний за випуск *К. С. Бондаренко*  
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*  
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 330(68).

Адреса редколегії:  
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»  
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21  
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855  
astro\_print@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, вип. 1-2(39-40). —  
С. 1–172.