Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 7–22

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.9

И. А. Бойцова
Одесский государственный экологический университет

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В СИСТЕМАХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Бойцова І. А. Метод усереднення у системах дискретних рівнянь з швидкими і повільними змінними. Пропонуються й обгрунтовуються схеми повного і часткового усереднення систем дискретних рівнянь, що містять швидкі і повільні змінні. Одержано відповідні оцінки для повільних змінних для заданих і усереднених систем.
Ключові слова: система дискретних рівнянь, повільні змінні, швидкі змінні, малий параметр, метод усереднення, вироджена задача, усереднена система, збурена задача.

Бойцова И. А. Метод усреднения в системах дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными. Предлагаются и обосновываются схемы полного и частичного усреднения систем дискретных уравнений, содержащих быстрые и медленные переменные. Получены соответствующие оценки для медленных переменных для заданных и усредненных систем.
Ключевые слова: система дискретных уравнений, медленные переменные, быстрые переменные, малый параметр, метод усреднения, вырожденная задача, усредненная система, возмущенная задача .

Boitsova I. A. Averaging method in systems of discrete equations with fast and slow variables. Presented and justified the scheme of full and partial averaging of systems of discrete equations containing fast and slow variables. Defined the corresponding estimates for the slow variables for original and the averaged systems.
Key words: system of discrete equations, the slow variables, the fast variables, the small parameter, the method of averaging, the degenerate system, the averaged system, the perturbed problem .

При решении систем дифференциальных уравнений, содержащих быстрые и медленные переменные, обычно применяется метод полного или частичного усреднения. Метод позволяет упростить решение системы, разделив быстрые и медленные переменные. Доказано [1, 2], что решение усредненной системы при определенных условиях близко к решению заданной системы.

Численное интегрирование систем дифференциальных уравнений приводит к решению соответствующих систем дискретных уравнений. Интересен вопрос о близости решений заданной дискретной и соответствующей усредненной систем. Для дискретных систем стандартного вида метод усреднения обоснован в [3].

Рассмотрим систему дискретных уравнений вида

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \varepsilon \cdot X(i, x_i, y_i, \varepsilon), \quad && x_0 = x^0, \\ y_{i+1} &= Y(i, x_i, y_i, \varepsilon), && y_0 = y^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_i \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ — медленные переменные, $y_i \in D_y \subset \mathbb{R}^m$ — быстрые переменные, ε — малый параметр, $X(i, x_i, y_i, \varepsilon)$, $Y(i, x_i, y_i, \varepsilon)$ — заданные вектор-функции, $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E(L\,\varepsilon^{-1})$, $L = const$, $E(s)$ — целая часть числа s, значения x^0, y^0 — заданные начальные условия системы.

Рассмотрим соответствующую вырожденную систему уравнений, которая получается из системы (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i, & x_0 &= x^0, \\ y_{i+1} &= Y(i, x_i, y_i, 0), & y_0 &= y^0. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение вырожденной системы (2) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x &= const, \\ y_i &= y(i, x, y^0, 0). \end{aligned} \tag{3}$$

Предположим, что равномерно относительно $q \geq 0, x \in D_x$, $y^0 \in D_y$ существует предел

$$\overline{X}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=q}^{q+n-1} X(i, x, y(i, x, y^0, 0), 0). \tag{4}$$

Среднее значение функции $\overline{X}(x)$ в (4) вычисляется вдоль решения (3) вырожденной задачи (2).

Используя функцию (4), системе (1) поставим в соответствие усредненную систему уравнений для медленных переменных, рассматриваемую вдоль решений вырожденной системы

$$z_{i+1} = z_i + \varepsilon \cdot \overline{X}(z_i), \quad z_0 = x^0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть существуют постоянные $M > 0, H_1 > 0$ и неубывающие функции $\psi_j(\alpha)$, $j = \overline{1,5}$, $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \psi_j(\alpha) = 0$, такие, что в области $Q = \{i \in I; x \in \in D_x; y \in D_y; \varepsilon \geq 0\}$ выполнены следующие условия:*

I) $\|X(i, x^1, y^1, \varepsilon) - X(i, x^2, y^2, 0)\| \leq \psi_1(\|x^1 - x^2\|) + \psi_2(\|y^1 - y^2\|) + \psi_3(\varepsilon)$;

II) $\|Y(i, x^1, y^1, \varepsilon) - Y(i, x^2, y^2, 0)\| \leq \psi_4(\|x^1 - x^2\|) + H_1 \cdot \|y^1 - y^2\| + \psi_5(\varepsilon)$;

III) $\|X(i, x_i, y_i, \varepsilon)\| \leq M$;

IV) равномерно относительно значений $q \geq 0, x \in D_x, y^0 \in D_y$ существует предел (4);

V) функция $\overline{X}(x)$ удовлетворяет условию Липшица, если $H_2 > 0$:

$$\|\overline{X}(x^1) - \overline{X}(x^2)\| \leq H_2 \cdot \|x^1 - x^2\|;$$

VI) решение $z = z_i, i = 0, 1, ...$ усредненной системы (5) с начальным условием $z_0 = x^0 \in D_x$ определено и лежит вместе со своей ρ-окрестностью в области D_x.

Тогда для любого $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ справедливо неравенство

$$\|x_i - z_i\| \leq \eta. \tag{6}$$

Доказательство. Представим уравнения (1) и (5) для медленных переменных в виде

$$x_{i+1} = x^0 + \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y_j, \varepsilon),$$

$$z_{i+1} = x^0 + \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{i} \overline{X}(z_j)$$

и оценим разность между соответствующими решениями исходной системы (1) и усредненной системы (5).

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| = \left\| \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y_j, \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{i} \overline{X}(z_j) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y_j, \varepsilon) - \sum_{j=0}^{i} \overline{X}(x_j) \right\| + \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{i} \left\| \overline{X}(x_j) - \overline{X}(z_j) \right\|.$$

С учетом условия V) теоремы неравенство примет вид

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y_j, \varepsilon) - \sum_{j=0}^{i} \overline{X}(x_j) \right\| + \varepsilon \cdot H_2 \cdot \sum_{j=0}^{i} \|x_j - z_j\|. \qquad (7)$$

Для дальнейших преобразований неравенства (7) потребуется выбрать целочисленное значение $h(\varepsilon)$, обладающее следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} h(\varepsilon) = +\infty, \\ r(h, \varepsilon) = (\psi_4(\varepsilon h M) + \psi_5(\varepsilon)) \cdot h \cdot e^{H_1 \cdot h}, \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} r(h(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \end{gathered} \qquad (8)$$

Такое $h(\varepsilon)$ можно выбрать, например, как целую часть решения уравнения

$$r(h, \varepsilon) = C\varepsilon^{1-\alpha}, \;\; C > 0, \;\; \alpha \in (0, 1).$$

Функция $r(h, \varepsilon)$ является монотонно возрастающей по $h > 0$, следовательно, решение $h(\varepsilon)$ уравнения всегда существует, причем $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} h(\varepsilon) = +\infty$, а из (8) следует, что $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon \cdot h(\varepsilon) = 0$.

Разобьем множество $I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ на отрезки длиной $h(\varepsilon)$ точками $k \cdot h(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2, ...$, выбор значений k ограничивается выполнением условия

$$k \cdot h \leq \frac{L}{\varepsilon}. \qquad (9)$$

Рассмотрим произвольный промежуток $[kh, (k+1)h] \subset I$. Согласно неравенству треугольника для любых $i \in [kh, (k+1)h - 1)$ можно получить соотношение

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \|x_{i+1} - x_{kh}\| + \|x_{kh} - z_{kh}\| + \|z_{kh} - z_{i+1}\|. \qquad (10)$$

Для оценки первого и третьего слагаемых в неравенстве треугольника (10) представим рассматриваемые системы на выбранном промежутке в виде

$$x_{i+1} = x_{kh} + \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{i} X(j, x_j, y_j, \varepsilon),$$

$$z_{i+1} = z_{kh} + \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{i} \overline{X}(z_j),$$

тогда

$$\begin{gathered} \|x_{i+1} - x_{kh}\| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{i} \|X(j, x_j, y_j, \varepsilon)\| \leq \varepsilon M h, \\ \|z_{kh} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{i} \left\|\overline{X}(z_j)\right\| \leq \varepsilon M h. \end{gathered} \tag{11}$$

Из неравенства треугольника (10) получаем

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq 2\varepsilon h M + \|x_{kh} - z_{kh}\|, \;\; i \in [kh, (k+1)h - 1). \tag{12}$$

Согласно неравенству (12), оценку первого слагаемого в неравенстве (7) можно получить на промежутке $[kh, (k+1)h]$. Для этого воспользуемся следующим представлением систем:

$$x_{(k+1)h} = x_{kh} + \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_j, y_j, \varepsilon),$$

$$z_{(k+1)h} = z_{kh} + \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(z_j).$$

Первое слагаемое в неравенстве (7) на промежутке $[kh, (k+1)h]$ преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_j, y_j, \varepsilon) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_j) \right\| \leq \\ \leq \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_j, y_j, \varepsilon) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) \right\| + \\ + \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_{kh}) \right\| + \\ + \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_{kh}) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_j) \right\|. \end{gathered} \tag{13}$$

Оценим последовательно каждое слагаемое полученного неравенства.

Для оценки первого слагаемого потребуется оценка разности быстрых решений исходной системы (1) и вырожденной системы (2) на промежутке $[kh,(k+1)h]$. С учетом условий II) и III) теоремы для $x_{kh} \in D_x$, $y_{kh} \in D_y$, при каждом $i \in [kh,(k+1)h-1)$ получим

$$\|y(i+1,x^0,y^0,\varepsilon)-y(i+1,x_{kh},y_{kh},0)\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=kh}^{i} Y(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon),\varepsilon) - \sum_{j=kh}^{i} Y(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},0),0) \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=kh}^{i} \left\| Y(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon),\varepsilon) - Y(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},0),0) \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=kh}^{i} \left(\psi_4\left(\|x_j-x_{kh}\|\right) + H_1 \cdot \left\| y(j,x^0,y^0,\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0) \right\| + \psi_5(\varepsilon) \right) \le$$

$$\le \sum_{j=kh}^{i} \psi_4\left(\varepsilon h M\right) + H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{i} \left\| y(j,x^0,y^0,\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0) \right\| + \sum_{j=kh}^{i} \psi_5(\varepsilon) \le$$

$$\le h \cdot \psi_4\left(\varepsilon h M\right) + H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{i} \left\| y(j,x^0,y^0,\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0) \right\| + h \cdot \psi_5(\varepsilon).$$

Учитывая лемму Гронуолла–Беллмана, получим оценку для быстрых решений при $i \in [kh,(k+1)h-1)$

$$\begin{gathered} \left\| y(i+1,x^0,y^0,\varepsilon) - y(i+1,x_{kh},y_{kh},0) \right\| \le \\ \le \left(\psi_4\left(\varepsilon h M\right) + \psi_5(\varepsilon) \right) \cdot h e^{H_1 h} = r(h,\varepsilon), \end{gathered} \tag{14}$$

где функция $r(h,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (8).

Для оценки первого слагаемого в неравенстве (13) воспользуемся условием I) теоремы и оценкой (14).

$$\varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j,x_j,y_j,\varepsilon) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j,x_{kh},y_{kh},0) \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|X(j,x_j,y_j,\varepsilon) - X(j,x_{kh},y_{kh},0)\| \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\psi_1\left(\|x_j-x_{kh}\|\right) + \psi_2\left(\left\| y(j,x^0,y^0,\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0) \right\|\right) + \psi_3(\varepsilon) \right) \le$$

$$\le \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\psi_1(\varepsilon h M) + \psi_2(r(h,\varepsilon)) + \psi_3(\varepsilon) \right) \le$$

$$\le \varepsilon h \left(\psi_1(\varepsilon h M) + \psi_2(r(h,\varepsilon)) + \psi_3(\varepsilon) \right). \tag{15}$$

Оценка второго слагаемого в (13) следует из условия IV) теоремы. Из существования равномерного относительно $kh \geq 0$, $x_{kh} \in D_x$, $y_{kh} \in D_y$ предела следует, что существует монотонно убывающая функция $\varphi(h)$, такая, что $\lim\limits_{h\longrightarrow\infty} \varphi(h) = 0$, и справедлива оценка

$$\varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_{kh}) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) - h \cdot \overline{X}(x_{kh}) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon h \cdot \left\| \frac{1}{h} \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) - \overline{X}(x_{kh}) \right\| \leq \varepsilon h \varphi(h). \tag{16}$$

Для оценки третьего слагаемого воспользуемся условиями V) и III) теоремы и оценкой (11).

$$\varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_{kh}) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_j) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| \overline{X}(x_{kh}) - \overline{X}(x_j) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon H_2 \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|x_{kh} - x_j\| \leq \varepsilon H_2 \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \varepsilon M h \leq (\varepsilon h)^2 H_2 M. \tag{17}$$

С учетом полученных оценок (15)–(17) неравенство (13) принимает вид

$$\varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_j, y_j, \varepsilon) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{X}(x_j) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon h \left(\psi_1(\varepsilon h M) + \psi_2(r(h, \varepsilon)) + \psi_3(\varepsilon)\right) + \varepsilon h \varphi(h) + (\varepsilon h)^2 H_2 M = \varepsilon h \cdot D,$$

где $D = const$.

Подставляя полученную оценку в неравенство (7) с учетом неравенства треугольника (12), получим

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon h D + 2\varepsilon h M + \varepsilon H_2 \cdot \sum_{j=0}^{i} \|x_j - z_j\|.$$

После применения леммы Гроноулла–Беллмана получаем

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon h (D + 2M) \cdot e^{LH_2}. \tag{18}$$

В силу (8) для любого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ из неравенства (18) следует искомая оценка

$$\|x_i - z_i\| \le \eta.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. *В доказательстве теоремы величину $h(\varepsilon)$ можно выбирать не обязательно целочисленной. Тогда суммирование вида* $\sum\limits_{j=kh}^{(k+1)h-1}$ *следует заменить суммированием вида* $\sum\limits_{kh \le j < (k+1)h}$ *и проводить его по всем целым значениям j, принадлежащим указанному промежутку.*

Пусть функция $X(i, x_i, y_i, \varepsilon)$ в системе (1) является функцией периодической по i с периодом p, то есть для любого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ выполняется равенство $X(i + p, x_i, y_i, \varepsilon) = X(i, x_i, y_i, \varepsilon)$.

Предположим, что вместо предела (4) равномерно относительно значений $q \ge 0$, $x \in D_x$, $y^0 \in D_y$ существует функция

$$X_0(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=q}^{q+p-1} X(j, x, y(j, x, y^0, 0), 0).$$

Тогда системе (1) можно поставить в соответствие усредненную систему уравнений для медленных переменных вдоль решений вырожденной системы

$$z_{i+1} = z_i + \varepsilon \cdot X_0(z_i), \quad z_0 = x^0.$$

Доказательство близости решений исходной и усредненной систем проводится аналогично доказательству теоремы 1 в предположении, что $h(\varepsilon) \equiv p = const$. Тогда оценка в неравенстве (16) примет вид

$$\varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) - \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X_0(x_{kh}) \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) - h \cdot X_0(x_{kh}) \right\| \le$$

$$\le \varepsilon h \cdot \left\| \frac{1}{h} \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j, x_{kh}, y_{kh}, 0) - X_0(x_{kh}) \right\| = 0.$$

А близость решений исходной и усредненной систем по медленным переменным будет определяться величиной

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \le C_1 \varepsilon h,$$

следующей из оценки (18). Окончательно получим

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \le C\varepsilon,$$

где постоянная $C = C_1 h$ не зависит от ε.

Рассмотрим схему частичного усреднения для систем с быстрыми и медленными переменными вида

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \varepsilon \cdot X(i, x_i, y_i), \qquad x_0 = x^0,\\ y_{i+1} &= Y(i, x_i, y_i), \qquad\quad y_0 = y^0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $x_i \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ — медленные переменные, $y_i \in D_y \subset \mathbb{R}^m$ — быстрые переменные, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(i, x_i, y_i)$, $Y(i, x_i, y_i)$ — заданные вектор-функции, $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, $L = const$, $E(s)$ — целая часть числа s, значения x^0, y^0 — заданные начальные условия системы.

Для системы (19) запишем соответствующую вырожденную систему

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i, \qquad x_0 = x^0,\\ y_{i+1} &= Y(i, x_i, y_i), \qquad y_0 = y^0. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение вырожденной системы представим в виде

$$\begin{aligned} x &= const,\\ y_i &= y(i, x_i, y^0, 0). \end{aligned} \tag{21}$$

Наряду с системой (19) будем рассматривать дискретную систему уравнений для медленных переменных вида

$$\widetilde{x}_{i+1} = \widetilde{x}_i + \varepsilon \cdot X(i, \widetilde{x}_i, y(i, \widetilde{x}_i, y^0, 0)), \quad \widetilde{x}_0 = x^0. \tag{22}$$

Исследуем вопрос о близости решений систем (19) и (22).

Теорема 2. *Пусть существуют положительные постоянные M, H_1, H_2, H_3, такие, что в области $Q = \{i \in I; x \in D_x; y \in D_y\}$ выполнены следующие условия:*

I) $\|X(i, x^1, y^1) - X(i, x^2, y^2)\| \le H_1 \cdot (\|x^1 - x^2\| + \|y^1 - y^2\|)$*;*

II) $\|Y(i, x^1, y^1) - Y(i, x^2, y^2)\| \le H_2 \cdot (\|x^1 - x^2\| + \|y^1 - y^2\|)$*;*

III) $\|X(i, x_i, y_i)\| \le M$*;*

IV) решение (21) вырожденной системы (20) существует и удовлетворяет условию Липшица по x:

$$\|y(i, x^1, y^0, 0) - y(i, x^2, y^0, 0)\| \le H_3 \cdot \|x^1 - x^2\|;$$

V) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=q}^{q+n-1} (X(i, x, y(i, x, y^{01}, 0)) - X(i, x, y(i, x, y^{02}, 0))) = 0$ *равномерно относительно $q \ge 0$, $x \in D_x$, $y^{01}, y^{02} \in D_y$;*

VI) решение $\widetilde{x} = \widetilde{x}_i$, $i = 0, 1, \ldots$ системы (22) с начальным условием $\widetilde{x}_0 = x^0 \in D_x$ определено и лежит вместе со своей ρ-окрестностью в области D_x.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ справедливо неравенство

$$\|x_i - \widetilde{x}_i\| \le \eta. \tag{23}$$

Доказательство. Решение исходной системы уравнений (19) обозначим через $x_i = x(i, x^0, y^0, \varepsilon)$, $y_i = y(i, x^0, y^0, \varepsilon)$, а решение вырожденной системы для быстрых переменных через $y_i = y(i, x, y^0, 0)$. Запишем уравнения (19) и (22) для медленных переменных в виде

$$x_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y(j, x^0, y^0, \varepsilon)),$$

$$\widetilde{x}_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} X(j, \widetilde{x}_j, y(j, \widetilde{x}_j, y^0, 0))$$

и оценим разность между медленными решениями исходной (19) и частично усредненной (22) систем уравнений

$$\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| =$$

$$= \left\| \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y(j, x^0, y^0, \varepsilon)) - \varepsilon \sum_{j=0}^{i} X(j, \widetilde{x}_j, y(j, \widetilde{x}_j, y^0, 0)) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y(j, x^0, y^0, \varepsilon)) - \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y(j, x_j, y^0, 0)) \right\| +$$

$$+ \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=0}^{i} X(j, x_j, y(j, x_j, y^0, 0)) - \sum_{j=0}^{i} X(j, \widetilde{x}_j, y(j, \widetilde{x}_j, y^0, 0)) \right\|.$$

С учетом условий I) и IV) теоремы получим

$$\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \left\| \sum_{j=0}^{i} (X(j, x_j, y(j, x^0, y^0, \varepsilon)) - X(j, x_j, y(j, x_j, y^0, 0))) \right\| +$$

$$+ \varepsilon \cdot H_1 \cdot \sum_{j=0}^{i} \left(\|x_j - \widetilde{x}_j\| + \left\| y(j, x_j, y^0, 0) - y(j, \widetilde{x}_j, y^0, 0) \right\| \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{i} \left\| X(j, x_j, y(j, x^0, y^0, \varepsilon)) - X(j, x_j, y(j, x_j, y^0, 0)) \right\| +$$

$$+ \varepsilon \cdot H_1 \cdot (1 + H_3) \cdot \sum_{j=0}^{i} \|x_j - \widetilde{x}_j\|. \tag{24}$$

Выберем целочисленное значение $h(\varepsilon)$, обладающее свойствами

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} h(\varepsilon) = +\infty,$$
$$r(h, \varepsilon) = H_2 M \varepsilon h^2 \cdot e^{H_2 h}, \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} r(h, \varepsilon) = 0. \tag{25}$$

Такое $h(\varepsilon)$ можно выбрать, например, как целую часть решения уравнения

$$h^2(\varepsilon)\cdot e^{H_2 h(\varepsilon)} = C\varepsilon^{-\alpha},\;\; C>0,\;\; \alpha\in(0,1).$$

Функция $r(h,\varepsilon)$ является монотонно возрастающей по $h>0$, следовательно, решение $h(\varepsilon)$ уравнения существует, причем $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} h(\varepsilon)=+\infty$. Кроме того

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon h(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{r(h,\varepsilon)}{H_2 M h\cdot e^{H_2 h}} = 0. \tag{26}$$

Разобьем множество $I=\{0,1,2,...,N\}$ на отрезки длиной $h(\varepsilon)$ точками $k\cdot h(\varepsilon)$, $k=0,1,2,...$, выбор значений k ограничивается выполнением условия

$$k\cdot h \le \frac{L}{\varepsilon}. \tag{27}$$

Рассмотрим произвольный промежуток $[kh,(k+1)h]\subset I$. Согласно неравенству треугольника для любых $i\in[kh,(k+1)h-1)$ можно получить соотношение

$$\|x_{i+1}-\widetilde{x}_{i+1}\| \le \|x_{i+1}-x_{kh}\| + \|x_{kh}-\widetilde{x}_{kh}\| + \|\widetilde{x}_{kh}-\widetilde{x}_{i+1}\|. \tag{28}$$

Для оценки первого и третьего слагаемых в неравенстве треугольника (28) представим рассматриваемые системы на выбранном промежутке в виде

$$x_{i+1} = x_{kh} + \varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{i} X(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon)),$$

$$\widetilde{x}_{i+1} = \widetilde{x}_{kh} + \varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{i} X(j,\widetilde{x}_j,y(j,\widetilde{x}_j,y^0,0)),$$

тогда

$$\begin{gathered}\|x_{i+1}-x_{kh}\| \le \varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{i}\|X(j,x_j,y_j)\| \le \varepsilon M h,\\ \|\widetilde{x}_{i+1}-\widetilde{x}_{kh}\| \le \varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{i}\left\|X(j,\widetilde{x}_j,y(j,\widetilde{x}_j,y^0,0))\right\| \le \varepsilon M h.\end{gathered} \tag{29}$$

Из неравенства треугольника (28) получаем

$$\|x_{i+1}-\widetilde{x}_{i+1}\| \le 2\varepsilon h M + \|x_{kh}-\widetilde{x}_{kh}\|,\;\; i\in[kh,(k+1)h-1). \tag{30}$$

Согласно неравенству (30), оценку первого слагаемого в неравенстве (24) можно получить на промежутке $[kh,(k+1)h]$. Для этого воспользуемся следующим представлением систем:

$$x_{(k+1)h} = x_{kh} + \varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon)),$$

$$\widetilde{x}_{(k+1)h} = \widetilde{x}_{kh} + \varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} X(j,\widetilde{x}_j,y(j,\widetilde{x}_j,y^0,0)).$$

Первое слагаемое в неравенстве (24) на промежутке $[kh,(k+1)h]$ преобразуется к виду

$$\varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|X(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon))-X(j,x_j,y(j,x_j,y^0,0))\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|X(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon))-X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon))\right\|+$$

$$+\varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon))-X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},0))\|+$$

$$+\varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},0))-X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y^0,0))\right\|+$$

$$+\varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y^0,0))-X(j,x_j,y(j,x_j,y^0,0))\right\|. \tag{31}$$

Оценим последовательно каждое слагаемое полученного неравенства.

Для оценки первого слагаемого в (31) потребуется оценка разности быстрых решений исходной системы (19) на промежутке $[kh,(k+1)h]$, определяемых разными начальными условиями. Для получения оценки воспользуемся условием II) теоремы

$$\|y(i+1,x^0,y^0,\varepsilon)-y(i+1,x_{kh},y_{kh},\varepsilon)\|\le$$

$$\le\left\|\sum_{j=kh}^{i}Y(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon))-\sum_{j=kh}^{i}Y(j,x_j,y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon))\right\|\le$$

$$\le\sum_{j=kh}^{i}\left\|Y(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon))-Y(j,x_j,y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon))\right\|\le$$

$$\le H_2\cdot\sum_{j=kh}^{i}\left\|y(j,x^0,y^0,\varepsilon)-y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon)\right\|.$$

Учитывая лемму Гронуолла–Беллмана, получим следующую оценку при всех $i\in$ $\in[kh,(k+1)h-1]$:

$$\|y(i+1,x^0,y^0,\varepsilon)-y(i+1,x_{kh},y_{kh},\varepsilon)\|\le 0\cdot e^{H_2h}=0. \tag{32}$$

Это означает, что быстрые решения исходной системы (19) не зависят от момента, с которого начинается их рассмотрение.

Оценка первого слагаемого в (31) с учетом полученной оценки быстрых решений (32) и выполнения условий I), III) теоремы примет вид

$$\varepsilon\cdot\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|X(j,x_j,y(j,x^0,y^0,\varepsilon))-X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon))\right\|\le$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \big(\|x_j - x_{kh}\| + \|y(j,x^0,y^0,\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon)\|\big) \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|x_j - x_{kh}\| + \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \big\|y(j,x^0,y^0,\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon)\big\| \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \varepsilon M h + 0 \leq (\varepsilon h)^2 H_1 M. \tag{33}$$

Для оценки второго слагаемого потребуется оценка разности быстрых решений исходной системы (19) и вырожденной системы (20) на промежутке $[kh,(k+1)h]$. Для получения такой оценки воспользуемся условиями II), III) теоремы. Для каждого $i \in [kh,(k+1)h-1)$, $x_{kh} \in D_x$, $y_{kh} \in D_y$ получим

$$\|y(i+1,x_{kh},y_{kh},\varepsilon) - y(i+1,x_{kh},y_{kh},0)\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=kh}^{i} Y(j,x_j,y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon)) - \sum_{j=kh}^{i} Y(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},0)) \right\| \leq$$

$$\leq H_2 \cdot \sum_{j=kh}^{i} (\|x_j - x_{kh}\| + \|y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0)\|) \leq$$

$$\leq H_2 \cdot \sum_{j=kh}^{i} \varepsilon M h + H_2 \cdot \sum_{j=kh}^{i} \|y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0)\| \leq$$

$$\leq H_2 M \varepsilon h^2 + H_2 \cdot \sum_{j=kh}^{i} \|y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0)\|.$$

Учитывая лемму Гронуолла–Беллмана, получим оценку для быстрых решений при $i \in [kh,(k+1)h-1)$

$$\begin{aligned} &\|y(i+1,x_{kh},y_{kh},\varepsilon) - y(i+1,x_{kh},y_{kh},0)\| \leq \\ &\leq H_2 M \varepsilon h^2 e^{H_2 h} = r(h,\varepsilon), \end{aligned} \tag{34}$$

где функция $r(h,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (25).

Оценка второго слагаемого следует из условия I) и оценки (34)

$$\varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon)) - X(j,x_{kh},y(j,x_{kh},y_{kh},0))\| \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|y(j,x_{kh},y_{kh},\varepsilon) - y(j,x_{kh},y_{kh},0)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} r(h,\varepsilon) \leq \varepsilon h H_1 r(h,\varepsilon). \tag{35}$$

Оценка третьего слагаемого в (31) следует из условия V) теоремы. Из существования равномерного относительно $kh \geq 0$, $x_{kh} \in D_x$, $y_{kh}, y^0 \in D_y$ предела следует, что существует монотонно убывающая функция $\varphi(h)$, такая, что $\lim\limits_{h \longrightarrow \infty} \varphi(h) = 0$ и справедлива оценка

$$\begin{gathered}\varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| X(j, x_{kh}, y(j, x_{kh}, y_{kh}, 0)) - X(j, x_{kh}, y(j, x_{kh}, y^0, 0)) \right\| \leq \\ \leq \varepsilon h \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| X(j, x_{kh}, y(j, x_{kh}, y_{kh}, 0)) - X(j, x_{kh}, y(j, x_{kh}, y^0, 0)) \right\| \leq \\ \leq \varepsilon h \varphi(h).\end{gathered} \tag{36}$$

Для оценки последнего слагаемого в (31) воспользуемся условиями I), III) и IV) теоремы:

$$\varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| X(j, x_{kh}, y(j, x_{kh}, y^0, 0)) - X(j, x_j, y(j, x_j, y^0, 0)) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\|x_{kh} - x_j\| + \|y(j, x_{kh}, y^0, 0) - y(j, x_j, y^0, 0)\| \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|x_{kh} - x_j\| + \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| y(j, x_{kh}, y^0, 0) - y(j, x_j, y^0, 0) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|x_{kh} - x_j\| + \varepsilon H_1 \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} H_3 \|x_{kh} - x_j\| \leq$$

$$\leq \varepsilon H_1 (1 + H_3) \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \varepsilon M h \leq (\varepsilon h)^2 H_1 (1 + H_3) M. \tag{37}$$

С учетом полученных оценок (33), (35)–(37) неравенство (31) принимает вид

$$\varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| X(j, x_j, y(j, x^0, y^0, \varepsilon)) - X(j, x_j, y(j, x_j, y^0, 0)) \right\| \leq$$

$$\leq (\varepsilon h)^2 H_1 M + \varepsilon h H_1 r(h, \varepsilon) + \varepsilon h \varphi(h) + (\varepsilon h)^2 H_1 (1 + H_3) M = \varepsilon h D,$$

где $D = const$.

Подставив полученную оценку в неравенство (24) с учетом неравенства треугольника (30), получим

$$\begin{gathered}\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| \leq \\ \leq \varepsilon h D + 2\varepsilon h M + \varepsilon H_1 (1 + H_3) \cdot \sum_{j=0}^{i} \|x_j - \widetilde{x}_j\|.\end{gathered}$$

Применяя лемму Гронуолла–Беллмана, получим

$$\begin{gathered}\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| \le \\ \le \varepsilon h(D + 2M)e^{LH_1(1+H_3)}.\end{gathered} \tag{38}$$

В силу (25) для любого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ из неравенства (38) следует оценка

$$\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| \le \eta.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. *При доказательстве теоремы 2 можно использовать замечание 1 о том, что величину $h(\varepsilon)$ не обязательно выбирать целочисленной.*

Пусть функция $X(i, x_i, y_i)$ в системе (19) является функцией периодической по i с периодом p, то есть для любого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ выполняется равенство $X(i + p, x_i, y_i) = X(i, x_i, y_i)$.

Доказательство близости решений исходной и возмущенной систем проводится аналогично доказательству теоремы 2 в предположении, что $h(\varepsilon) \equiv p = const$. При этом предел из условия V) теоремы 2 преобразуется к выражению, для которого справедлива оценка

$$\left\| \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=q}^{q+p-1} \left(X(i, x, y(i, x, y^{01}, 0)) - X(i, x, y(i, x, y^{02}, 0)) \right) \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=q}^{q+p-1} \left(\|X(i, x, y(i, x, y^{01}, 0))\| + \|X(i, x, y(i, x, y^{02}, 0))\| \right) \le$$

$$\le \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=q}^{q+p-1} 2M = \frac{1}{p} \cdot 2Mp = 2M.$$

Тогда оценка в неравенстве (36) примет вид

$$\varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\| X(j, x_{kh}, y(j, x_{kh}, y_{kh}, 0)) - X(j, x_{kh}, y(j, x_{kh}, y^0, 0)) \right\| = 2M\varepsilon h.$$

А близость решений исходной и возмущенной систем по медленным переменным будет определяться величиной

$$\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| \le C_1 \varepsilon h,$$

следующей из оценки (38). Окончательно получим

$$\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| \le C\varepsilon,$$

где постоянная $C = C_1 h$ не зависит от ε.

Теорема 2 является распространением результатов теоремы 1 на схему частичного усреднения.

Действительно, если для системы (19) выполнены условия I), II) и III) теоремы 2, следовательно, для этой же системы выполнены условия I), II) и III) теоремы 1. Если, кроме того, для системы (19) существует предел (4), удовлетворяющий условию Липшица по переменной x (условия IV), V) теоремы 1), то система (5) является усредненной для системы (19). Если решение усредненной задачи (5) существует и удовлетворяет условию VI) теоремы 1, то оно является близким к решению системы (19), при этом выполняется неравенство

$$\|x_i - z_i\| \leq \eta_1. \tag{39}$$

Однако система (5) при выполнении перечисленных условий является усредненной и для возмущенной системы (22), поэтому и их решения являются близкими, и для них выполняется неравенство

$$\|\widetilde{x}_i - z_i\| \leq \eta_2. \tag{40}$$

Используя полученные результаты (39) и (40), можно получить оценку разности между медленными решениями системы (19) и решениями частично усредненной системы (22):

$$\|x_{i+1} - \widetilde{x}_{i+1}\| \leq \|x_i - z_i\| + \|z_i - \widetilde{x}_i\| \leq \eta_1 + \eta_2 = \eta.$$

Полученный результат совпадает с результатом теоремы 2, однако при доказательстве теоремы не требовалось существование предела (4), не строилась усредненная система (5) и не требовалось существование решения усредненной системы.

Заключение. В работе рассмотрена система дискретных уравнений, содержащая быстрые и медленные переменные. Получены условия, обеспечивающие близость медленных решений заданной системы и соответствующей системы, усредненной вдоль решений вырожденной задачи, на бесконечно большом промежутке изменения индекса. Получена оценка указанных решений в случае периодических функций, входящих в уравнения. Рассмотрена схема частичного усреднения заданной системы дискретных уравнений. Для этого построена соответствующая возмущенная задача, которая получена из заданной системы подстановкой в нее решения вырожденной задачи. Определены условия, обеспечивающие близость медленных решений заданной и возмущенной задач на бесконечно большом промежутке изменения индекса. Получена оценка указанных решений в случае периодических функций, входящих в уравнения. Результат, полученный в теореме 2, является распространением результатов теоремы 1 на схему частичного усреднения. Особенностью является то, что в теореме 2 не используется усредненная система, не учитываются условия, обеспечивающие существование решений усредненной задачи.

1. **Хапаев М. М.** Усреднение в теории устойчивости [текст] / М. М. Хапаев. – М.: Наука. – 1986. – 192 с.

2. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления [текст] / В. А. Плотников. – Киев–Одесса: Лыбидь. – 1992. – 188 с.

3. **Плотников В. А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления [текст] / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелинейные колебания. – 2004. – Т. 7. – № 2. – С. 241–254.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 23–36

УДК 517.95

М. М. Бокало, О. В. Доманська
Львівський національний університет ім. Івана Франка

НЕЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У КВАЗІЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Бокало М. М., Доманська О. В. Нелінійні еліптичні крайові задачі у квазіциліндричних областях без умов на нескінченності. Досліджено крайові задачі для одного класу еліптичних рівнянь в узагальнених анізотропних просторах Лебега–Соболєва. Рівняння задаються в необмежених квазіциліндричних областях. Встановлено однозначну розв'язність таких задач без умов на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності.
Ключові слова: нелінійні еліптичні рівняння, узагальнений розв'язок, узагальнені простори Лебега–Соболєва, квазіциліндрична область.

Бокало Н. П., Доманская А. В. Нелинейные эллиптические краевые задачи в квазицилиндрических областях без условий на бесконечности. Исследованы краевые задачи для одного класса эллиптических уравнений в обобщенных анизотропных пространствах Лебега–Соболева. Уравнения задаются в неограниченных квазицилиндрических областях. Установлена однозначная разрешимость таких задач без условий на поведение решения и рост исходных данных на бесконечности.
Ключевые слова: нелинейные эллиптические уравнения, обобщенное решение, обобщенные пространства Лебега–Соболева, квазицилиндрическая область.

Bokalo M., Domanska O. Nonlinear elliptic boundary problems in quasicylindrical domains without conditions at infinity. We consider the boundary problems for the one class of elliptic equations in general anisotropic Lebesgue–Sobolev spaces. Equations are given in unbounded quasicylindrical domains. It has been established the one-valued solvability of such problems without conditions on solution's behavior and with no restrictions on the growth of initial data at infinity.
Key words: nonlinear elliptic equations, weak solution, general Lebesgue–Sobolev spaces, quasicylindric domain.

Вступ.

У даній роботі досліджується однозначна розв'язність крайових задач для заданих в необмежених областях простору $\mathbb{R}^n$ нелінійних диференціальних рівнянь, які моделюються рівняннями

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i\Big(|u_{x_i}(x)|^{p_i(x)-2}u_{x_i}(x)\Big)_{x_i} + a_0|u(x)|^{p_0(x)-2}u(x) = f(x), \qquad (1)$$

де $a_i > 0$ $(i = \overline{0,n})$ — деякі сталі, $p_i > 1$ $(i = \overline{0,n})$ — вимірні локально обмежені функції (так звані показники нелінійності), f, u — відповідно задана і невідома функції.

В останні десятиліття дуже активно вивчаються нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, прикладами яких є рівняння (1). Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [10, 11].

Як добре відомо, крайові задачі для лінійних еліптичних рівнянь в необмежених областях є коректними, якщо від розв'язків, крім задоволення крайових умов, вимагається певна поведінка при необмеженому зростанні норми їхнього аргументу і на вільні члени накладаються певні обмеження стосовно зростання на нескінченності. Така ж ситуація з крайовими задачами в необмежених областях і для нелінійних еліптичних рівнянь з певних класів [1–9]. Але є рівняння, крайові задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності. У роботі [3] вперше отримано такий результат для рівняння (1) при $p_0 = \mathrm{const} > 2$ і $p_1 = \ldots = p_n = 2$. Розширення цього виду рівнянь були отримані в багатьох працях, серед яких назвемо [4–9]. Зокрема, це було зроблено за рахунок рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Так, у роботі [8] розглянуто крайові задачі для квазілінійних еліптичних рівнянь та їх систем другого порядку, що є узагальненням рівняння (1) з $p_i = 2$ $(i = \overline{1,n})$, $p_0(\cdot) > 2$ і доведено коректність таких задач у класах функцій без умов на нескінченності. У праці [9] такий же результат отримано стосовно узагальнень рівняння (1) з $1 < p_i(\cdot) \leq 2$ $(i = \overline{1,n})$, $p_0(\cdot) \geq 2$. У даній роботі, зробивши додаткові припущення на область, доведено однозначну розв'язність крайових задач без умов на нескінченності для ширшого класу рівнянь, ніж у [9].

Основні результати.

1. Основні позначення.

Під $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\}$, де $m \in \mathbb{N}$, розумітимемо арифметичний простір з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$.

Нехай $n \geq 2$ — натуральне число, Ω — необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$, яка задовольняє умову: існує (з точністю до нумерації змінних $x_1, \ldots, x_n$) натуральне число $k < n$, таке, що множина $\widetilde{\Omega_R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 < R^2\}$ обмежена для будь-яких значень $R > 0$ і для довільного $j \in \{1, \ldots, k\}$ знайдеться значення $R_j > 0$, для якого множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{1 \leq i \leq k, i \neq j} x_i^2 < R_j^2\}$ — необмежена. Область Ω називатимемо *квазіциліндричною*. Зокрема, може бути $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 — необмежена область в $\mathbb{R}^k$, Ω_2 — обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$.

Вважатимемо, що $0 \in \Omega$, і позначимо для будь-якого $R > 0$ через Ω_R зв'язну компоненту множини $\widetilde{\Omega_R}$, що містить 0.

Нехай $\mu > 0$ — найменше число, для якого виконується нерівність

$$\mathrm{mes}_n \Omega_R \leq C_0 R^{\mu}, \quad R > 0, \tag{2}$$

де $\mathrm{mes}_n \Omega_R$ — міра Лебега множини Ω_R в $\mathbb{R}^n$, $C_0 > 0$ — деяка стала.

Припустимо, що межа $\Gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою. Нехай Γ_1 — замикання відкритої на $\partial\Omega$ множини, $\Gamma_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma \setminus \Gamma_1$. Покладемо $S_R \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial\Omega_R \cap \Omega$, $\Gamma_{k,R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma_k \bigcap \partial\Omega_R$, $k \in \{1, 2\}$, $R > 0$. Через $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ позначатимемо одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Нехай $C^1(\mathbb{R}^m)$ — простір неперервно-диференційованих на $\mathbb{R}^m$ функцій, а $C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^m)$ — його підпростір, який складається з функцій, носії яких є компактами. Позначатимемо через $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ лінійний простір звужень на $\overline{\Omega}$ функцій з простору $C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$, а $C^1_c(\overline{\Omega},\Gamma_1)$ — його підпростір, елементами якого є функції, що зануляються в околі Γ_1.

Нехай $R>0$ — довільне число, $r\in L_\infty(\Omega_R)$, причому $r(x)\ge 1$ для майже всіх $x\in\Omega_R$. На просторі $C(\overline{\Omega_R})$ введемо норму

$$\|v\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\inf\{\lambda>0:\rho_{r,R}(v/\lambda)\le 1\},$$

де $\rho_{r,R}(v)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\Omega_R}|v(x)|^{r(x)}\,dx$. Поповнення лінійного простору $C(\overline{\Omega_R})$ за цією нормою позначимо через $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ (див. [12]). Банахів простір $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ є підпростором простору $L_1(\Omega_R)$ і називається *узагальненим простором Лебега.* Звернемо увагу, що коли $r(x)>1$ для майже всіх $x\in\Omega_R$, то спряжений до $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ простір ототожнюється з простором $L_{r^*(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$, де $r^*(x)>1$, $x\in\Omega_R$, — функція, яка визначається рівністю $\frac{1}{r(x)}+\frac{1}{r^*(x)}=1$, $x\in\Omega_R$.

Під $L_{r(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, де $r\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), r(x)\ge 1$ для майже всіх $x\in\Omega$, розумітимемо замикання простору $C(\overline{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$.

Нехай $p=(p_0,p_1,\dots,p_n)$ — векторна функція з компонентами $p_i\in L_\infty(\Omega)$, $p_i(x)>1$ для м. в. $x\in\Omega$. Через $p^*=(p_0^*,p_1^*,\dots,p_n^*)$ позначимо векторну функцію, компоненти якої задовольняють умову: $\frac{1}{p_i(x)}+\frac{1}{p_i^*(x)}=1$ для м. в. $x\in\Omega$ $(i=\overline{0,n})$. Для кожного $R>0$ і звуження на Ω_R векторної функції p під $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ розумітимемо банахів простір, отриманий поповненням простору $C^1(\overline{\Omega_R})$ за нормою

$$\|v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\|v\|_{L_{p_0(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}+\sum_{i=1}^n\|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}.$$

Простір $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ визначимо як замикання простору $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ в топології, породженій системою півнорм: $\|\cdot\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$.

Позначимо через $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$ замикання простору $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$ за топологією простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Під $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_1)$ розумітимемо підпростір простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$, що складається з функцій, носії яких є обмеженими.

2. Формулювання задачі й основних результатів.

Розглянемо задачу

$$-\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}a_i(x,u,\nabla u)+a_0(x,u,\nabla u)=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x)+f_0(x),\qquad x\in\Omega,\tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_1}=0,\qquad \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\nabla u)\nu_i\big|_{\Gamma_2}=0.\tag{4}$$

Зробимо деякі припущення стосовно її вихідних даних. Для цього нам будуть потрібні певні функційні класи, які зараз введемо.

Нехай $p = (p_0, \dots, p_n)$ — векторна функція з компонентами $p_i \in L_\infty(\Omega)$, такими, що:
1) $p_0(x) \geq 2$ для майже всіх $x \in \Omega$; 2) $p_i(x) > 1$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $i \in \{1, \dots, n\}$; 3) $p_i(x) \leq 2$ для майже всіх $x \in \Omega$ і кожного $i \in \{1, \dots, k\}$; 4) $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \big[p_0(x) - p_i(x)\big] > 0$ для будь-якого $i \in \{1, \dots, k\}$.

Позначимо

$$p_i^- \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x), \quad p_i^+ \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x), \quad i = \overline{0, n};$$

$q_j^- \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q_j(x)$, $q_j^+ \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q_j(x)$, де $q_j(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{p_0(x)p_j(x)}{p_0(x)-p_j(x)}$, $x \in \Omega$, $j = \overline{1, k}$.

Припустимо, що існує функція $q \in L_\infty(\Omega)$, така, що: 1) $q(x) \leq p_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$; 2) $q(x) > p_i(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $i \in \{1, \dots, k\}$; 3) для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ $\quad r_i^- \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r_i(x) > \mu$, $r_i^+ \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} r_i(x) < +\infty$, де μ – стала з умови (2), $r_i(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{q(x)p_i(x)}{q(x)-p_i(x)}$, $x \in \Omega$.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, які визначені на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ і задовольняють умови:

1) для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $a_i(x, s, \xi)$, $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x \in \Omega$ функція $a_i(x, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є неперервною, і для будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $a_i(\cdot, s, \xi) : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна;

1′) $a_i(x, 0, 0) = 0$ $(i = \overline{0, n})$ для майже всіх $x \in \overline{\Omega}$;

2) для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$|a_i(x, s, \xi)| \leq h_{1i}^a(x)\big(|s|^{p_0(x)/p_i^*(x)} + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)}\big) + h_{2i}^a(x),$$

де $h_{1i}^a \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $h_{2i}^a \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$;

3) для майже всіх $x \in \Omega$ та довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=k+1}^n (a_i(x, s_1, \xi^1) - a_i(x, s_2, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x, s_1, \xi^1) - a_0(x, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \geq$$

$$\geq K_0 |s_1 - s_2|^{q(x)},$$

де $K_0 > 0$ — деяка стала;

4) для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, s, \xi)\, \xi_i + a_0(x, s, \xi)\, s \geq K_1 \Big(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i(x)} + |s|^{p_0(x)}\Big) - h_3^a(x),$$

де $h_3^a \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$;

5) для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^k |a_i(x, s_1, \xi^1) - a_i(x, s_2, \xi^2)|^{p_i^*(x)} (1 + |x|)^{-\frac{\sigma_i p_i^*(x)}{p_i(x)}} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k}(a_i(x,s_1,\xi^1)-a_i(x,s_2,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2),$$

де $\sigma_i \geq 0$ — сталі, такі, що $\mu - r_i^- + \sigma_i \frac{r_i^+}{p_i^-} < 0$ $(i=\overline{1,k})$.

Зауваження 1. *Умова* **5** *виконується, наприклад, у випадку (див. [9]), коли для кожного $i \in \{1,\dots,k\}$ та майже всіх $x \in \Omega$ маємо $a_i(x,s,\xi) \equiv a_i(x,\xi_i)$, $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, та*

$$A_i|\eta|^{p_i(x)-2} \leq \frac{\partial a_i(x,\eta)}{\partial \eta} \leq \widetilde{A}_i(1+|x|)^{\sigma_i}|\eta|^{p_i(x)-2} \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}, \quad \eta \neq 0,$$

де $A_i, \widetilde{A}_i$ — деякі сталі.

Введемо ще простори

$$\mathbb{F}_p \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f=(f_0,\dots,f_n):\ f_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ i=\overline{0,n} \right\},$$

$$\mathbb{U}_p \stackrel{\text{def}}{=} W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)\,.$$

Означення 1. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_p$. Функція $u \in \mathbb{U}_p$ називається узагальненим розв'язком задачі (3),(4), якщо виконується рівність*

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\nabla u)\, v_{x_i} + a_0(x,u,\nabla u)\, v \Big\}\, dx = \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i\, v_{x_i} + f_0\, v \Big\}\, dx \tag{5}$$

для будь-яких $v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,c}(\Omega,\Gamma_1)$.

Ми розглянемо *задачу* $\mathbf{P}(\mathbb{A}_p,\mathbb{F}_p,\mathbb{U}_p)$: **для кожних** $a \in \mathbb{A}_p$**,** $f \in \mathbb{F}_p$ **знайти множину** $\mathbf{SP}(a,f) \subset \mathbb{U}_p$ **узагальнених розв'язків задачі (3),(4)**.

Задача $\mathbf{P}(\mathbb{A}_p,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{U}_p)$ називається *однозначною* (*розв'язною*, *однозначно розв'язною*), якщо будь-яких $a \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_p$ множина $\mathbf{SP}(a,f)$ *не має більше одного елемента* (*непорожня*, *має тільки один елемент*).

Метою нашої роботи є доведення, що задача $\mathbf{P}(\mathbb{A}_p,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{U}_p)$ є однозначно розв'язною.

Теорема. *Задача $\mathbf{P}(\mathbb{A}_p,\mathbb{F}_p,\mathbb{U}_p)$ є однозначно розв'язна і для будь-яких $a \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_p$ функція $u \in \mathbf{SP}(a,f)$ для довільних $R_0 > 0$, $R \geq 1$ $(R_0 < R)$ задовольняє оцінці*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}(x)|^{p_i(x)} + |u(x)|^{p_0(x)} \Big] dx \leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{s} \Big\{ C_1\, R^{\mu-\theta} + \\
&+ C_2 \int\limits_{\Omega_R} \Big[|f_0(x)|^{p^*_0(x)} + \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^{p^*_i(x)} \Big] dx + \\
&+ C_3 \int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{i=1}^{k} |h^a_{2i}(x)|^{p^*_i(x)} + |h^a_3(x)| \Big] dx \Big\},
\end{aligned} \tag{6}$$

де $\theta = \min\limits_{1\le i\le k} q_i^-$, $s > \max\limits_{1\le i\le k} q_i^+$ *— довільне число,* C_1, C_2, C_3 *— деякі додатні сталі, які залежать тільки від* $n, s, K_1, p_i^-, p_i^+ (i=\overline{0,n}), q_i^-, q_i^+ \ (i=\overline{1,k})$, $C_R^a :=$ $:= \max\limits_{1\le i\le k} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega_R} |h_{1i}^a(x)|$.

3. Допоміжні твердження.

Зауваження 2. *Для довільних* $a\ge 0, b\ge 0, \varepsilon>0, \nu>1$ *з нерівності Юнга [13]* $(a\,b \le \frac{a^\nu}{\nu} + \frac{b^{\nu^*}}{\nu^*},\ \nu^* = \frac{\nu}{\nu-1})$ *випливає нерівність*

$$a\,b \le \varepsilon a^\nu + \varepsilon^{1-\nu^*} b^{\nu^*}, \quad \varepsilon\in(0,1). \tag{7}$$

Зауваження 3. *З нерівності Юнга [13]* $(a\,b\,c \le \frac{a^{\nu_1}}{\nu_1} + \frac{b^{\nu_2}}{\nu_2} + \frac{c^{\nu_3}}{\nu_3}$, $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0, \varepsilon>0, \nu_1>1, \nu_2>1, \nu_3>1,\ \frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}=1)$ *легко отримати нерівність*

$$a\,b\,c \le \varepsilon a^{\nu_1} + \varepsilon b^{\nu_2} + \varepsilon^{1-\nu_3} c^{\nu_3}, \quad \varepsilon\in(0,1). \tag{8}$$

Лема 1. *Нехай* $a\in\mathbb{A}_p$, $f\in\mathbb{F}_p$ *і для кожного* $l\in\{1,2\}$ *функції* $u_l\in\mathbb{U}_p$, *такі, що для деякого числа* $R_*>1$ *виконується рівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big[\sum_{i=1}^n a_i(x,u_l,\nabla u_l)\, v_{x_i} + a_0(x,u_l,\nabla u_l)\, v\Big]\,dx = \int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big[\sum_{i=1}^n f_i(x)\, v_{x_i} + f_0(x)\, v\Big]\,dx \tag{9}$$

для будь-яких $v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_1)$, $\operatorname{supp} v$ *— обмежена множина в* $\overline{\Omega_{R_*}}$.

Тоді для будь-яких чисел $R_0>0, R\ge 1$ $(R_0<R\le R_*)$ *правильна нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_1(x)-u_2(x)|^{q(x)}\,dx \le C_4\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{\mu-\gamma}, \tag{10}$$

де $s > \max\limits_{1\le i\le k} r_i^+$ *— довільне число;* $\gamma = \min\limits_{1\le i\le k}(r_i^- - \sigma_i r_i^+/p_i^-)$; *а* C_4 *— додатна стала, яка від* u_l $(l=1,2)$ *не залежить.*

Доведення. Тут і далі використовуємо позначення

$$a_i(v) \overset{\mathrm{def}}{=} a_i(x,v,\nabla v), \quad i=\overline{0,n}. \tag{11}$$

З інтегральних тотожностей, отриманих з (9) відповідно для $l=1$ і $l=2$, здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_1)-a_i(u_2))\, v_{x_i} + (a_0(u_1)-a_0(u_2))\, v\Big]\,dx = 0 \tag{12}$$

для будь-яких $v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_1)$, $\operatorname{supp} v$ — обмежена множина в $\overline{\Omega_{R_*}}$.

Нехай $R\ge 1$ — яке-небудь число з проміжку $[1;R_*]$. Покладемо в (12) (див. [4, с. 220]) $v=(u_1-u_2)\zeta^s$, де

$$\zeta(x') = \begin{cases} \frac{R^2-(x_1^2+\ldots+x_k^2)}{R}, & x_1^2+\ldots+x_k^2 < R, \\ 0, & x_1^2+\ldots+x_k^2 \ge R, \end{cases} \tag{13}$$

$x' = (x_1, \dots, x_k)$, $s > 1$ — достатньо велике число (значення s уточнимо пізніше). У результаті отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))\,(u_{1,x_i} - u_{2,x_i}) + (a_0(u_1) - a_0(u_2))\,(u_1 - u_2)\Big]\,\zeta^s\,dx = \\ = -s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}(a_i(u_1) - a_i(u_2))\,(u_1 - u_2)\,\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\,dx. \tag{14}$$

Оцінимо члени рівності (14). Згідно з умовою **3** маємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big[\sum_{i=k+1}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))\,(u_{1,x_i} - u_{2,x_i}) + (a_0(u_1) - a_0(u_2))\,(u_1 - u_2)\Big]\zeta^s dx \geq \\ \geq K_0\int\limits_{\Omega_R}|u_1(x) - u_2(x)|^{q(x)}\,\zeta^s\,dx. \tag{15}$$

На підставі нерівності (8), взявши в ній $\nu_1 = p_i^*(x), \nu_2 = q(x), \nu_3 = r_i(x)$, $a = |a_i(u_1) - a_i(u_2)|(1+|x|)^{-\frac{\sigma_i}{p_i(x)}}\zeta^{\frac{s}{p_i^*(x)}}$, $b = |u_1 - u_2|\zeta^{\frac{s}{q(x)}}$, $c = |\zeta_{x_i}|(1+|x|)^{\frac{\sigma_i}{p_i(x)}}\zeta^{\frac{s}{r_i(x)}-1}$ $(x \in \Omega_R,\ i \in \{1, \dots, k\})$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|a_i(u_1) - a_i(u_2)|\,|u_1 - u_2|\,|\zeta_{x_i}|\,\zeta^{s-1}\,dx \leq$$

$$\leq \varepsilon\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|a_i(u_1) - a_i(u_2)|^{p_i^*(x)}(1+|x|)^{-\frac{\sigma_i p_i^*(x)}{p_i(x)}}\,\zeta^s\,dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega_R}|u_1 - u_2|^{q(x)}\zeta^s\,dx +$$

$$+C_5(\varepsilon)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|\zeta_{x_i}|^{r_i(x)}(1+|x|)^{\frac{\sigma_i r_i(x)}{p_i(x)}}\,\zeta^{s-r_i(x)}\,dx, \tag{16}$$

де $\varepsilon \in (0,1)$ — довільне число, $C_5(\varepsilon) > 0$ — деяка додатна стала, яка не залежить від u_1, u_2.

Згідно з умовою **5** маємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|a_i(u_1) - a_i(u_2)|^{p_i^*(x)}(1+|x|)^{-\frac{\sigma_i p_i^*(x)}{p_i(x)}}\,\zeta^s\,dx \leq \\ \leq \int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}(a_i(u_1) - a_i(u_2))\,(u_{1,x_i} - u_{2,x_i})\,\zeta^s\,dx. \tag{17}$$

Узявши до уваги, що $R \geq 1$ і $|\zeta_{x_i}(x')| \leq 2$ $(i = \overline{1,k})$, $|\zeta(x')| \leq R$ для довільних $x' \in \mathbb{R}^k$, матимемо при $s > \max\limits_{1\leq i\leq k} r_i^+$ нерівність

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|\zeta_{x_i}|^{r_i(x)}(1+|x|)^{\frac{\sigma_i r_i(x)}{p_i(x)}}\,\zeta^{s-r_i(x)}\,dx \leq C_6\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}R^{s-r_i(x)+\sigma_i\frac{r_i(x)}{p_i(x)}}\,dx, \tag{18}$$

де C_6 — деяка додатна стала.

З (14), на підставі (15)–(18), при достатньо малому значенні ε отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |u_1(x) - u_2(x)|^{q(x)}\,\zeta^s\,dx \le C_7 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i=1}^{k} R^{s - r_i(x) + \sigma_i \frac{r_i(x)}{p_i(x)}}\,dx, \tag{19}$$

де C_7 — деяка додатна стала.

Зауважимо, що $s - r_i(x) + \sigma_i \frac{r_i(x)}{p_i(x)} \le s - r_i^- + \sigma_i \frac{r_i^+}{p_i^-}$ $(i = \overline{1,k})$ для майже всіх $x \in \Omega$. Легко переконатися, що $0 \le \zeta(x') \le R$, коли $x \in \mathbb{R}^k$, та $\zeta(x') \ge R - R_0$ при $|x'| \le R_0$, де $R_0 \in (0, R)$ — яке-небудь число. Взявши до уваги сказане і, зокрема, те, що $R \ge 1$, з (19) здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_1(x) - u_2(x)|^{q(x)}\,dx \le C_8 \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^s \sum_{i=1}^{k} R^{\mu - r_i^- + \sigma_i \frac{r_i^+}{p_i^-}}, \tag{20}$$

де C_8 — додатна стала, яка не залежить від u_1, u_2.

Урахувавши в (20), що $\mu - r_i^- + \sigma_i \frac{r_i^+}{p_i^-} \le \mu - \gamma$ $(i = \overline{1,k})$, де $\gamma = \min\limits_{1 \le i \le k} \left\{ r_i^- - \sigma_i \frac{r_i^+}{p_i^-} \right\}$, отримаємо нерівність (10). □

Лема 2. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_p$, $u \in \mathbb{U}_p$ такі, що для деякого числа $R_* > 1$ виконується рівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u) v_{x_i} + a_0(x, u, \nabla u) v - f_0(x) v - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) v_{x_i}\Big]\,dx = 0 \tag{21}$$

для будь-яких $v \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega, \Gamma_1)$, $\operatorname{supp} v$ — обмежена множина в $\overline{\Omega_{R_*}}$.

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0, R \ge 1$ $(R_0 < R \le R_*)$ правильна нерівність (6).

Доведення. Нехай $R \ge 1$ — яке-небудь число з проміжку $[1; R_*]$. Покладемо в (21) $v = u\zeta^s$, де ζ визначена в (13). Після простих перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u) u_{x_i} + a_0(u) u\Big]\,\zeta^s\,dx &= \int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{i=1}^{n} f_i u_{x_i} + f_0 u\Big]\,\zeta^s\,dx + \\ +s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i=1}^{k} f_i\,u\,\zeta^{s-1} \zeta_{x_i}\,dx &- s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{i=1}^{k} a_i(u)\,u\,\zeta^{s-1} \zeta_{x_i}\,dx. \end{aligned} \tag{22}$$

Оцінимо доданки рівності (22). Використовуючи умову **4**, здобудемо

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u) u_{x_i} + a_0(u) u\Big]\,\zeta^s\,dx \ge \\ &\ge K_1 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}(x)|^{p_i(x)} + |u(x)|^{p_0(x)}\Big\}\,\zeta^s\,dx - \int\limits_{\Omega_R} h_3^a\,\zeta^s\,dx. \end{aligned} \tag{23}$$

Згідно з нерівністю (7) маємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big[\sum_{i=1}^{n} f_i u_{x_i}+f_0u\Big]\,\zeta^s\,dx\le\varepsilon_1\int\limits_{\Omega_R}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x)|^{p_i(x)}+|u(x)|^{p_0(x)}\Big]\,\zeta^s\,dx+$$
$$+C_9(\varepsilon_1)\int\limits_{\Omega_R}\Big[\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|^{p_i^*(x)}+|f_0(x)|^{p_0^*(x)}\Big]\,\zeta^s\,dx, \tag{24}$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ — довільне число, а $C_9(\varepsilon_1)$ — деяка додатна стала.

Використовуючи нерівність (8) подібно, як при виведенні оцінки (16), отримаємо

$$-s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k} a_i(u)u\,\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\,dx\le\varepsilon_2\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|a_i(u)|^{p_i^*(x)}\,\zeta^s\,dx+$$
$$+\varepsilon_2\int\limits_{\Omega_R}|u(x)|^{p_0(x)}\,\zeta^s\,dx+C_{10}(\varepsilon_2)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|\zeta_{x_i}(x)|^{q_i(x)}\,\zeta^{s-q_i(x)}\,dx, \tag{25}$$

де $\varepsilon_2\in(0,1)$ — довільне число, а $C_{10}(\varepsilon_2)$ — деяка додатна стала.

Аналогічно здобудемо

$$s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k} f_i u\,\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\,dx\le\varepsilon_3\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|f_i(x)|^{p_i^*(x)}\,\zeta^s\,dx+$$
$$+\varepsilon_3\int\limits_{\Omega_R}|u(x)|^{p_0(x)}\,\zeta^s\,dx+C_{11}(\varepsilon_3)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|\zeta_{x_i}(x)|^{q_i(x)}\,\zeta^{s-q_i(x)}\,dx, \tag{26}$$

де $\varepsilon_3\in(0,1)$ — довільне число, а $C_{11}(\varepsilon_3)$ — деяка додатна стала.

Згідно з умовою **2** маємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|a_i(u)|^{p_i^*(x)}\,\zeta^s\,dx\le C_{12}\int\limits_{\Omega_R}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x)|^{p_i(x)}+|u(x)|^{p_0(x)}\Big]\,\zeta^s\,dx+$$
$$+C_{13}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}|h_{2i}^a(x)|^{p_i^*(x)}\,\zeta^s\,dx, \tag{27}$$

де C_{12}, C_{13} — деякі додатні сталі, причому C_{12}, зокрема, залежить від C_R^a.

Оскільки $|\zeta_{x_i}(x')|\le 2\ \ (i=\overline{1,k}),\ |\zeta(x')|\le R$ для будь-яких $x'\in\mathbb{R}^k$, то

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}\zeta^{s-q_i(x)}dx\le\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{k}R^{s-q_i(x)}dx\le C_{14}\sum_{i=1}^{k}R^{\mu+s-q_i^-}, \tag{28}$$

де C_{14} — деяка додатна стала.

З (22) на підставі (23)—(28) при достатньо малих значеннях ε_1, ε_2, ε_3 матимемо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x)|^{p_i(x)}+|u(x)|^{p_0(x)}\Big]\,\zeta^s\,dx\le$$

$$\leq \widehat{C}_1 \sum_{i=1}^{k} R^{\mu+s-q_i^-} + \widehat{C}_2 \int\limits_{\Omega_R} \Big[|f_0(x)|^{p^*_0(x)} + \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^{p^*_i(x)}\Big] \zeta^s d\,x +$$

$$+\widehat{C}_3 \int\limits_{\Omega_R} \Big[|h_3^a(x)| + \sum_{i=1}^{k} |h_{2i}^a(x)|^{p^*_i(x)}\Big] \zeta^s \, d\,x, \tag{29}$$

де $s > \max\limits_{1\leq i\leq k} q_i^+$ — довільна стала; $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \widehat{C}_3$ — додатні сталі, які залежать тільки від $n, p_i^-, p_i^+ (i = \overline{0,n}), q_i^-, q_i^+ (i = \overline{1,k})$.

Далі, міркуючи подібно, як у доведенні леми 1, отримаємо (6). □

4. Доведення теореми.

4.1. Розв'язність задачі $\mathbf{P}\big(\mathbb{A}_p, \mathbb{F}_p, \mathbb{U}_p\big)$. Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_p$ і l – довільне натуральне число. Під U_l розумітимемо підпростір простору $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_l)$, який є поповненням простору функцій з $C^1(\overline{\Omega_l})$, що зануляються в околі $\Gamma_{1,l} \cup S_l$, за нормою простору $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_l)$. Позначимо через U_l^* спряжений до U_l простір, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_l$ — канонічну білінійну форму на $U_l^* \times U_l$.

Визначимо оператор $L_l : U_l \longrightarrow U_l^*$ за правилом

$$\langle L_l u, v\rangle_l \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_l} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u) v_{x_i} + a_0(x, u, \nabla u) v\Big] \, d\,x, \quad u, v \in U_l.$$

Легко переконатися, що оператор $L_l : U_l \longrightarrow U_l^*$ — строго монотонний, обмежений, коерцитивний і семінеперервний. Врахувавши це і використавши метод Гальоркіна (див., наприклад, [14, с. 22]), неважко довести існування функції $u_l \in U_l$, що задовольняє рівність

$$\langle L_l u_l, v\rangle_l = \int\limits_{\Omega_l} \Big[\sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i} + f_0 v\Big] \, d\,x \tag{30}$$

для будь-яких $v \in U_l$. Єдиність такої функції випливає зі строгої монотонності оператора L_l.

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ функцію u_l продовжимо нулем на Ω, залишивши за цим продовженням позначення u_l. Очевидно, що $u_l \in \mathbb{U}_p$. Покажемо, що послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до $u \in \mathbf{SP}(a, f)$.

Нехай l і m — довільні натуральні числа, причому $1 < l < m$; R_0, R — будь-які дійсні числа, такі, що $0 < R_0 < R \leq l-1$, $R \geq 1$. Тоді з леми 1, узявши $R_* = l-1$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_l(x) - u_m(x)|^{q(x)} \, d\,x \leq C_4 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{\mu-\gamma}, \tag{31}$$

де $C_4 > 0$, $s > 0$ – сталі, які від l, m, R_0 та R не залежать, причому значення γ таке, що $\mu - \gamma < 0$ (його можна таким вибрати на підставі умови **5**).

Нехай $\varepsilon > 0$ — яке-небудь число. Зафіксуємо будь-яке значення $R_0 > 0$ і виберемо $R > \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (31) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $l \geq R+1$ і $m > l$ ліва частина нерівності (31) менша за ε. Це означає, що послідовність $\{u_l\big|_{\Omega_{R_0}}\}_{l=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L_{q(\,\cdot\,)}(\Omega_{R_0})$. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{q(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, такої, що

$$u_l \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \qquad L_{q(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \tag{32}$$

Покажемо обмеженість послідовностей $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{a_i(u_l)\}_{l=1}^{\infty}$ відповідно в $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{p^*_i(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{0,n})$. Справді, нехай R_0, R — будь-які дійсні числа, такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geq 1$. На підставі леми 2 для довільного натурального числа $l > R+1$ здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)} + |u_l(x)|^{p_0(x)}\Big]\,dx \leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \Big\{C_1\, R^{\mu-\theta} +$$

$$+C_2 \int\limits_{\Omega_R} \Big[|f_0(x)|^{p^*_0(x)} + \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^{p^*_i(x)}\Big]\,dx +$$

$$+C_3 \int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{i=1}^{k} |h^a_{2i}(x)|^{p^*_i(x)} + |h^a_3(x)|\Big]\,dx\Big\}. \tag{33}$$

Згідно з умовою **2** та оцінкою (33) для кожного $i = \{0,1,\dots,n\}$ маємо

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega_{R_0}} |a_i(u_l)|^{p^*_i(x)}\,dx \leq C_{15} \int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)} + |u_l(x)|^{p_0(x)}\Big]\,dx + \\ &+C_{16} \int\limits_{\Omega_R} |h^a_{2i}(x)|^{p^*_i(x)}\,dx < C_{17}(R_0,R), \end{aligned} \tag{34}$$

де C_{15}, C_{16} —деякі додатні сталі, $C_{17}(R_0,R) > 0$ — стала, яка від l не залежить, але може залежати від R_0 і R.

З (32)—(34) і умови **1**, урахувавши рефлексивність просторів $L_{p^*_i(\,\cdot\,)}(\Omega_{R_0})$ $(R_0 > 0,\ i=\overline{0,n})$, отримаємо існування підпослідовності $\{u_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ та функцій $\chi_i \in L_{p^*_i(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{0,n})$, таких, що

$$u_{l_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабо в} \quad W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{35}$$

$$a_i(u_{l_j}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{слабо в} \quad L_{p^*_i(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i=\overline{0,n}. \tag{36}$$

Покажемо, що

$$\chi_i = a_i(u), \qquad i=\overline{0,n}. \tag{37}$$

Нехай w — довільна функція з $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\psi(x')$, $(x') \in \mathbb{R}^k$, — будь-яка невід'ємна, неперервно диференційована функція з обмеженим носієм. На підставі монотонності оператора L_l для всіх $j \in \mathbb{N}$ маємо

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i(u_{l_j}) - a_i(w))(u_{l_j,x_i} - w_{x_i}) + (a_0(u_{l_j}) - a_0(w))(u_{l_j} - w)\Big]\psi\,dx \geq 0. \tag{38}$$

Тоді

$$-\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j})u_{l_j,x_i}+a_0(u_{l_j})u_{l_j}\Big]\,\psi\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(u_{l_j})w_{x_i}+a_i(w)(u_{l_j,x_i}-w_{x_i})\big)+$$

$$+a_0(u_{l_j})w+a_0(w)(u_{l_j}-w)\Big]\psi dx\le 0 \tag{39}$$

для всіх $j\in\mathbb{N}$.

Нехай m таке, що $\operatorname{supp}\psi\subset\overline{\Omega_{l_j}}$ при $j\ge m$. З означення u_{l_j} випливає, що для будь-якого $v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{c}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$, $\operatorname{supp}v\subset\overline{\Omega_{l_m}}$, і $j\ge m$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_{l_j}}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j})v_{x_i}+a_0(u_{l_j})v-f_0v-\sum_{i=1}^{n} f_iv_{x_i}\Big]\,dx=0. \tag{40}$$

З рівності (40), узявши в ній $v=u_{l_j}\,\psi$, отримаємо

$$\begin{aligned}&-\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j})u_{l_j,x_i}+a_0(u_{l_j})u_{l_j}\Big]\,\psi\,dx=\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{k} a_i(u_{l_j})\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}-f_0\,u_{l_j}\,\psi-\\&-\sum_{i=1}^{n} f_i\,u_{l_j,x_i}\,\psi\;-\sum_{i=1}^{k} f_i\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}\Big]\,dx.\end{aligned} \tag{41}$$

З (39) та (41) для всіх $j\ge m$ здобудемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{k} a_i(u_{l_j})\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}-f_0\,u_{l_j}\,\psi-\sum_{i=1}^{n} f_i\,u_{l_j,x_i}\,\psi\;-\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}\Big]\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(u_{l_j})w_{x_i}+a_i(w)(u_{l_j,x_i}-w_{x_i})\big)+$$

$$+a_0(u_{l_j})w+a_0(w)(u_{l_j}-w)]\psi dx\le 0. \tag{42}$$

Перейдемо в (42) до границі, урахувавши (32), (35) та (36), і те, що $L_{q(\,\cdot\,)}(G)\subset$ $\subset L_{p_i(\,\cdot\,)}(G)$, коли $i\in\{1,\dots,k\}$, G — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, отримаємо

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{k}\chi_i\,u\,\psi_{x_i}-f_0\,u\,\psi-\sum_{i=1}^{n} f_i\,u_{x_i}\,\psi\;-\sum_{i=1}^{k} f_i\,u\,\psi_{x_i}\Big]\,dx+\\&+\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\chi_iw_{x_i}+a_i(w)(u_{x_i}-w_{x_i}))+\chi_0w+a_0(w)(u-w)\Big]\,\psi\,dx\le 0.\end{aligned} \tag{43}$$

Покладемо при $j > m$ в рівності (40) $v = u\psi$ і перейдемо до границі при $j \to \infty$, матимемо

$$-\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n}\chi_i\,u_{x_i}+\chi_0\,u\Big]\,\psi\,dx=\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{k}(\chi_i-f_i)\,u\,\psi_{x_i}-f_0\,u\,\psi-\sum_{i=1}^{n}f_i\,u_{x_i}\,\psi\Big]\,dx. \quad (44)$$

З (43) та (44) здобудемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(w)-\chi_i)(u_{x_i}-w_{x_i})+(a_0(w)-\chi_0)(u-w)\Big]\,\psi\,dx\le 0. \quad (45)$$

Взявши в (45) $w = u - \lambda g$, $\lambda > 0$, $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n}\,(a_i(u-\lambda g)-\chi_i)\,g_{x_i}+(a_0(u-\lambda g)-\chi_0)g\Big]\,\psi\,dx\le 0. \quad (46)$$

В отриманій нерівності спрямуємо λ до 0. У результаті здобудемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\,(a_i(u)-\chi_i)\,g_{x_i}+(a_0(u)-\chi_0)g\Big\}\,\psi\,dx\le 0 \qquad \forall g\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \quad (47)$$

Оскільки (47) виконується для довільної функції $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то вибираючи спочатку $g(x) = 1$, а потім $g(x) = -1$, отримаємо, врахувавши довільність функції ψ, що $\chi_0 = a_0(u)$. Урахувавши цей факт, з (47) одержимо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\,(a_i(u)-\chi_i)\,g_{x_i}\,\psi\,dx\le 0 \qquad \forall g\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \quad (48)$$

Оскільки (48) виконується для довільної $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то вибираючи спочатку $g(x) = x_l$, а потім $g(x) = -x_l$ для кожного $l \in \{1, \ldots, n\}$, здобудемо (37).

Нехай $v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ – довільна функція. Для всіх $j > m$ виконується рівність (40). Перейдемо у ній до границі при $j \to +\infty$, урахувавши (36) та (37). У результаті отримаємо (5) для заданої функції v. В силу довільності функції v і повноти простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ маємо, що $u \in \mathbf{SP}(a, f)$.

4.2. Однозначність задачі $\mathbf{P}(\mathbb{A}_p,\ \mathbb{F}_p\,, \mathbb{U}_p)$. Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_p$. Покажемо, що множина $\mathbf{SP}(a, f)$ містить не більше одного елемента. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 — (різні) елементи множини $\mathbf{SP}(a, f)$. З леми 1 (R_* — будь-яке число) маємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}|u_1(x)-u_2(x)|^{q(x)}\,dx\le C_4\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{s}R^{\mu-\gamma}, \quad (49)$$

де R_0, R — довільні сталі, такі, що $0 < R_0 < R$, $R \ge 1$; $\gamma > 0$ — таке, що $\mu - \gamma < 0$; $C_4 > 0$, s — сталі, які від R_0 і R не залежать. Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (49) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u_1 = u_2$ на Ω_{R_0}.

Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси маємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω. $\square$

Висновки. В роботі доведено існування та єдиність розв'язків крайових задач для заданих в необмежених областях нелінійних еліптичних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. При цьому не накладається жодних обмежень на поведінку розв'язків та зростання вільних членів рівнянь на нескінченності.

1. **Шишков А. Е.** Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности [текст] / А. Е. Шишков // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 2. – С. 277–289.
2. **Доманська О. В.** Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях [текст] / О. В. Доманська // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 104–118.
3. **Brézis H.** Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity [text] / H. Brézis // Appl. Math. Optim. – 1984. – V. 12, № 3. – P. 271–282.
4. **Bernis F.** Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity [text] / F. Bernis // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – V. 106, № 3. – P. 217–241.
5. **Boccardo L.** Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ without growth restrictions on the data [text] / Boccardo L., Gallouët T., Vázquez J. L. // J. Differential Equations. – 1993. – V. 105, № 2. – P. 334–363.
6. **Бокало М. М.** Коректність першої крайової задачі для деяких квазілінійних еліптичних рівнянь в необмежених областях без умов на нескінченості [текст] / М. М. Бокало // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 40–47.
7. **Медвідь I.** Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах [текст] / I. Медвідь // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 149–166.
8. **Бокало М. М.** Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях [текст] / М. М. Бокало, О. В. Кушнір // Математичні студії. – 2005. – Т. 24, № 1. – С. 69–82.
9. **Bokalo M.** On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces [text] / M. Bokalo, O. Domanska // Mathematychni Studii. – 2007. – V. 28, № 1. – P. 77–91.
10. **Růžička M.** Electroreological fluids: modeling and mathematical theory [text] / Růžička M. – Berlin: Springer-Verl., 2000. – 168 p.
11. **Levine S.** Image restoration via nonstandard diffusion [text] / Levine S., Chen Y., and Stanich J. // Technical Report 04-01, Dept. of Mathematics and Computer Science, Duquesne University. – 2004. – P. 765–782.
12. **Kováčik O.** On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$ [text] / O. Kováčik, J. Rákosník // Czechosl. Math. J. – 1991. – V. 41, № 4. – P. 592–618.
13. **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [текст] / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1964. – 539 с.
14. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач [текст] / Лионс Ж.-Л. – М.: Мир, 1972. – 608 с.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 37–44

УДК 517.958

В. М. Євтухов*, П. А. Гілко*, О. М. Яковлєва**
*Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
**Південноукраїнський державний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ЕКСТРЕМАЛЬНОЮ УМОВОЮ

Євтухов В. М., Гілко П. А., Яковлєва О. М. Дослідження початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою. У роботі досліджується початково-крайова задача для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою в середині області.
Ключові слова: крайова задача, рівняння теплопровідності, екстремальна умова, загальний розв'язок.

Евтухов В. М., Гилко П. А., Яковлева О. М. Исследование начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с экстремальным условием. В работе исследуется начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с экстремальным условием в середине области.
Ключевые слова: краевая задача, уравнение теплопроводности, экстремальное условие, общее решение.

Evtukhov V. M., Gilko P. A., Yakovleva O. N. Research of initial-boundary value problem for the heat conductivity equation with an extreme condition. In work the initial-boundary value problem is investigated for the equation of heat conductivity with an extreme condition in the middle areas.
Key words: initial-boundary value problem, the heat conductivity equation, extreme condition, the common decision.

Вступ. Робота присвячена дослідженню початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою в середині області, а саме задачі: *знайти в області $D = \{t > 0, x \in R\}$ обмежену функцію $u(x,t)$, яка задовольняє рівнянню*

$$u_t^{'}(x,t) = u_{tt}^{''}(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

та умовам

$$u(a,t_1) \to inf, \tag{2}$$

$$u_x^{'}(b,t_2) = \sigma, \tag{3}$$

$$u(x,0) \geqslant 0, \tag{4}$$

де $\sigma > 0$ — відома стала; a і b — відомі точки дійсної осі R; t_1 та t_2 — відомі моменти часу; $f(x,t)$ — відома функція, яка обмежена майже скрізь на R по змінній x та інтегрована по змінній t.

Основні результати. Задача (1)–(4) відноситься до класу граничних задач для лінійних рівнянь математичної фізики з екстремальною умовою, початок дослідженню яких покладено в роботах Ю. Й. Черського [1–3]. Потім ці дослідження були продовжені в роботах С. Б. Рухліної [4–6], Малішенко В. П. та Тихоненко М. Я. [7]. При цьому в роботах [4–6] розглядалися крайові задачі для рівнянь математичної фізики з екстремальною умовою на частині границі області, а в роботі [7] — крайові задачі для рівняння Лапласа та бігармонічного рівняння у напівплощині з екстремальною умовою в середині області.

Нижче викладемо метод розв'язання задачі (1)–(4), на підставі якого проведемо повне її дослідження. Застосувавши до рівняння (1) перетворення Фур'є по змінній x та використовуючи його властивості [8], одержимо звичайне диференціальне рівняння по змінній t (k — параметр)

$$U_t^{'}(k,t) + k^2U(k,t) = F(k,t),\ t > 0,\ k \in R, \tag{5}$$

де $U(k,t)$, $F(k,t)$ — перетворення Фур'є по змінній x відповідно функцій $u(x,t)$, $f(x,t)$. Наприклад

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R u(x,t)e^{ikx}dx,\ t > 0,\ k \in R.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (5) має вигляд

$$U(k,t) = c(k)e^{-k^2t}, \tag{6}$$

де $c(k)$ — невідома функція змінної k. Щоб її визначити, використаємо умову (4). Застосувавши до неї перетворення Фур'є і поклавши в (6) $t = 0$, одержимо

$$U(k;0) = c(k),$$

де $U(k;0)$ — перетворення Фур'є функції $u(x;0)$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (5) буде таким:

$$U(k;t) = U(k;0)e^{-k^2t},\ t > 0,\ k \in R. \tag{7}$$

В (7) функція $U(k;0)$ взагалі невідома, оскільки вона являється перетворенням Фур'є функції $u(x,0)$, про яку відомо лише те, що вона приймає невід'ємні значення.

Використовуючи метод варіації сталої, частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5) можна записати у вигляді

$$U(k;t) = e^{-k^2t} \int\limits_0^t F(k;\tau)e^{k^2\tau}d\tau,$$

де $F(k,t)$ — перетворення Фур'є функції $f(x,t)$ по змінній x. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (5) має вигляд

$$U(k;t) = U(k;0)e^{-k^2t} + \int\limits_0^t F(k;\tau)e^{-k^2(t-\tau)}d\tau,\ t > 0,\ k \in R. \tag{8}$$

Застосуємо тепер до (8) обернене перетворення Фур'є. Тоді на підставі його властивостей і властивостей згортки, а також значень інтеграла № 2.3.16.11 [7, с. 334], розв'язок задачі (1)–(4) можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_R u(s,0)e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4(t-\tau)}}dsd\tau, \quad t>0,\ x\in R. \tag{9}$$

Із представлення (9) випливає висновок: якщо буде указано метод визначення функції

$$u(x) = u(x,0), \tag{10}$$

то по формулі (9) можна буде побудувати розв'язок задачі (1)–(4). Для цього використаємо умови (2) і (3). Із умови (2) на підставі (9) і (10) одержимо

$$u(a,t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_1}}\int\limits_R u(s)e^{-\frac{(a-s)^2}{4t_1}}ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}e^{-\frac{(a-s)^2}{4(t_1-\tau)}}dsd\tau \to \inf.$$

Оскільки другий доданок в цьому виразі не залежить від функції $u(x)$ (10), а $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t_1}}$ — додатній множник, то умова (2) буде еквівалентна умові

$$\int\limits_R u(x)\varphi(x)dx \to \inf, \tag{11}$$

де функція $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x) = exp\left\{-\frac{(a-x)^2}{4t_1}\right\}. \tag{12}$$

Нескладними перетвореннями на підставі (9) умова (3) приводиться до умови

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi t_2^3}}\int\limits_R u(s)(s-b)e^{-\frac{(b-s)^2}{4t_2}}ds +$$

$$+\int\limits_0^{t^2}\frac{1}{4\sqrt{\pi(t_2-\tau)^3}}\int\limits_R f(s,\tau)(s-b)e^{-\frac{(b-s)^2}{4t_2-\tau}}dsd\tau = \sigma,$$

яка приводиться до вигляду

$$\int\limits_R u(x)\psi(x)dx = \widetilde{\sigma}, \tag{13}$$

де

$$\psi(x) = (x-b)exp\left\{-\frac{(b-x)^2}{4t^2}\right\}, \tag{14}$$

а

$$\widetilde{\sigma} = 4\sigma\sqrt{\pi t_2^3} - \int\limits_0^{t^2} \left(\frac{t_2}{t_2-\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_R f(s,\tau)(s-b)e^{-\frac{(b-s)^2}{4(t_2-\tau)}}dsd\tau. \qquad (15)$$

Позначимо Γ — множину точок дійсної осі, на якій визначені формулами (12) та (14) відповідно функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ приймають одночасно позитивні значення. Із (12) та (14) випливає, що $\Gamma = (b : +\infty)$. Тоді згідно з роботою [2] на підставі (4), (10), (11), (13) розв'язок задачі про знаходження функції $u(x)$ приводиться до розв'язку "задачі про сингулярне рішення"

$$\begin{cases} \int\limits_\Gamma u(x)\varphi(x)dx \to \inf, \\ \int\limits_\Gamma u(x)\psi(x)dx = \widetilde{\sigma}, \\ u(x) \geqslant 0, \end{cases} \qquad (16)$$

яка на підставі роботи [2, с. 11] має розв'язок

$$u(x) = c\delta(x - x_0), \qquad (17)$$

де c — невідома стала; $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака, а $x_0 \in \Gamma$ — невідома точка.

На підставі роботи [2] "задача про сингулярне рішення" (16) може мати розв'язки, якщо $\widetilde{\sigma} > 0$. Тоді із (15) випливає умова

$$\sigma > \frac{1}{4\sqrt{\pi t_2^3}} \int\limits_0^{t_2} \left(\frac{t_2}{t_2-\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_R f(s,\tau)(s-b)e^{-\frac{(b-s)^2}{4(t_2-\tau)}}dsd\tau, \qquad (18)$$

із якої випливає висновок: якщо задана функція $f(x,t)$ не задовольняє умові (18), то крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Припустивши, що функція $f(x,t)$ задовольняє умові (18), визначимо тепер невідому сталу c та невідому точку $x_0 \in \Gamma$ з (17). Для цього використаємо умови (11) та (13). Підставивши (17) в (13), одержимо

$$c\psi(x_0) = \widetilde{\sigma},$$

звідкіля

$$c = \frac{\widetilde{\sigma}}{\psi(x_0)}. \qquad (19)$$

Із умови (11) з урахуванням (17) одержимо

$$c\varphi_0(x_0) \to \inf.$$

Із цього випливає, що пошук точки $x_0 \in \Gamma$ приводиться до реалізації умови

$$\widetilde{\sigma}\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \to \inf.$$

Оскільки $\widetilde{\sigma} > 0$ — відома стала, то останню умову з урахуванням (12), (14) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{x_0 - b} \exp\left\{\frac{(b-x_0)^2}{4t_2} - \frac{(a-x_0)^2}{4t_1}\right\} \to \inf .$$

Таким чином, побудова розв'язків задачі (1)-(4) приводиться до розв'язку задачі про мінімізацію функції

$$G(x) = \frac{1}{x-b} \exp\left\{\frac{(b-x)^2}{4t_2} - \frac{(a-x)^2}{4t_1}\right\} \tag{20}$$

на множині $\Gamma = (b; +\infty)$.

Легко бачити, що $\lim\limits_{x\to b+0} G(x) = +\infty$. При $b < x < +\infty$ функція $G(x)$ неперервна і значення її ліміту при $x \to +\infty$ залежить від значень a, b, t_1, t_2. Розглянемо випадки.

Випадок I. $t_1 < t_2$. В цьому випадку у формулі (20) в показнику експоненти стоїть квадратичний трьохчлен з від'ємним старшим коефіцієнтом. Значить, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Так як функція $G(x)$ приймає позитивні значення на множині Γ, то з цього випливає, що в скінчених точках множини Γ функція $G(x)$ інфімума не досягає. Це означає, що в цьому випадку крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Випадок II. $t_1 = t_2$, $a < b$. В цьому випадку в показнику експоненти (20) стоїть поліном першого порядку з від'ємним коефіцієнтом при старшому степіню x. Значить, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Із цього слідує, що в скінчених точках множини Γ функція $G(x)$ не досягає інфімума, а значить, в цьому випадку крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Випадок III. $t_1 = t_2$, $a = b$. В цьому випадку функція $G(x)$ має вигляд $G(x) = (x-b)^{-1}$. Очевидно, що ця функція в скінчених точках множини Γ інфімума не досягає, що означає, що в цьому випадку крайова задача (1)–(4) розв'язків не має.

Випадок IV. $t_1 = t_2$, $a > b$. Очевидно, що в цьому випадку $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = = +\infty$. Не важко перевірити, що в цьому випадку функція $G(x)$ досягає інфімума в точці

$$x_0 = b + \frac{2t_2}{b-a}.$$

Тоді в цьому випадку розв'язок "задачі про сингулярне рішення" (16) має вигляд

$$u(x) = c\delta\left(x - b - \frac{2t_2}{a-b}\right),$$

де

$$c = \frac{\widetilde{\sigma}(a-b)}{2t_2} e^{\frac{t_2}{(a-b)^2}}.$$

В зв'язку з цим на підставі (9) в цьому випадку розв'язок крайової задачі буде таким:

$$u(x,t) = \frac{\widetilde{\sigma}(a-b)}{4t_2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{4tt_2 - [(x-b)(a-b)-2t_2]^2}{4t(a-b)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{\frac{(x-s)^2}{4(\tau-t)}} ds d\tau,$$

$$x \in R,\ t > 0.$$

Випадок V. $t_1 > t_2$, $a = b$. Використовуючи похідну функції $G(x)$, в цьому випадку точку x_0 визначаємо із рівняння

$$\frac{1}{(x-b)^2} = \frac{t_1 - t_2}{2t_1 t_2},$$

звідкіля

$$x_0 = b + \sqrt{\frac{2t_1 t_2}{t_1 - t_2}}.$$

Тоді розв'язок "задачі про сингулярне рішення" (16) буде наступним:

$$u(x) = c\delta\left(x - b - \sqrt{\frac{2t_1 t_2}{t_1 - t_2}}\right),$$

де

$$c = \widetilde{\sigma}\sqrt{\frac{t_1 - t_2}{2t_1 t_2}} e^{\frac{t_1}{2(t_1 - t_2)}}.$$

Тепер на підставі (9) неважко буде побудувати в цьому випадку розв'язок крайової задачі (1)–(4).

Випадок VI. $t_1 > t_2$, $a \neq b$. В цьому випадку точка x_0 визначається із рівняння

$$(t_1 - t_2)(x-b)^2 + t_2(a-b)(x-b) - 2t_1 t_2 = 0,$$

звідкіля

$$x_0 = b + \frac{-t_2(a-b) + \sqrt{t_2^2(a-b)^2 + 8t_1 t_2(t_1 - t_2)}}{2(t_1 - t_2)}.$$

Тепер неважко буде побудувати у цьому випадку розв'язок "задачі про сингулярне рішення" (16) і загальний розв'язок крайової задачі (1)–(4).

Задачу (1)–(4) можна розглядати як екстремальну задачу теплопровідності, а функцію $f(x,t)$ — як функцію розподілу джерел тепла. Розглянемо деякі випадки розподілення джерел тепла.

Джерела розподілені по всій осі. Прикладом такої функції розподілу джерел тепла може бути функція $f(x,t) = \dfrac{1}{t^2+1}$. Побудуємо тепер розв'язки крайової задачі (1)–(4) з цією функцією розподілу джерел тепла. Спочатку знайдемо $\widetilde{\sigma}$. Оскільки

$$\int_0^{t_2}\left(\frac{t_2}{t_2-\tau}\right)^{\frac{3}{2}}\int_R \frac{1}{\tau^2+1}(s-b)e^{-\frac{(s-b)^2}{4(t_2-\tau)}}d\tau ds = 0,$$

то згідно з (15)

$$\widetilde{\sigma} = 4\sigma\sqrt{\pi t_2^3} > 0.$$

Визначімо тепер частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1) з заданою функцією джерел. Оскільки

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_R \frac{1}{\sqrt{t-\tau}(1+\tau^2)} e^{-\frac{(s-x)^2}{4(t-\tau)}} ds d\tau = \operatorname{arctg} t,$$

то частковим розв'язком неоднорідного рівняння (1) з функцією джерел $f(x,t) = = \dfrac{1}{t^2+1}$ буде функція $\operatorname{arctg} t$. Тепер, знаючи $\widetilde{\sigma}$ та частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1), можна побудувати у випадках IV–VI розв'язки задачі (1)–(4).

Джерела тепла зосереджені в точці $c \in R$. Тоді функція джерел тепла буде такою: $f(x,t) = \delta(x-c)$. Оскільки

$$\int\limits_0^{t_2} \left(\frac{t_2}{t_2-\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_R \delta(x-c)(s-b)e^{-\frac{(s-b)^2}{4(t_2-\tau)}} d\tau ds = 4\sqrt{\pi t_2^3}\left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{|c-b|}{\sqrt{2t_2}}\right)\right],$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

— функція Лапласа [10, с. 109], то у відповідності з (15)

$$\widetilde{\sigma} = 4\sqrt{\pi t_2^3}\left[\sigma - \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{|c-b|}{\sqrt{2t_2}}\right)\right].$$

Так як стала $\widetilde{\sigma}$ повинна задовольняти умові $\widetilde{\sigma} > 0$, то точка $c \in R$ — точка джерел тепла — повинна бути такою, щоб виконувалась умова

$$\sigma - \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{|c-b|}{\sqrt{2t_2}}\right) > 0.$$

Якщо ця умова не буде виконаною, то крайова задача (1)–(4) не має розв'язків. Будемо припускати, що ця умова виконується. Знайдемо тепер частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1). Оскільки

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \frac{\delta(x-c)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4(t-\tau)}} d\tau ds = \frac{x-c}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-c}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} s^{-2} e^{-s^2} ds,$$

то частковий розв'язок неоднорідного рівняння (1) у цьому випадку має вигляд

$$u_0(x,t) = \frac{x-c}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-c}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} s^{-2} e^{-s^2} ds.$$

Тепер, знаючи $\widetilde{\sigma}$ та функцію $u_0(x,t)$, можна побудувати у випадках IV–VI розв'язки крайової задачі (1)–(4).

Висновки. Таким чином, обгрунтовано метод розв'язування початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності з екстремальною умовою, на базі якого проведено повне дослідження. Побудовані розв'язки екстремальної задачі теплопровідності для різних випадків розподілу джерел тепла.

1. **Черский Ю. И.** Ляпуновские экстремальные задачи и их приложения [текст] / Ю. И. Черский // Препринт № 19-90. – Львів: ІППММ АН УРСР, 1990. – 55 с.
2. **Черский Ю. И.** Аналитическое решение экстремальных задач [текст] / Ю. И. Черский. – Одесса: ОИИМФ. – 1990. – 54 с.
3. **Черский Ю. И.** Экстремальная задача для уравнения Лапласа в полупространстве [текст] / Ю. И. Черский // Сб. "Динамические системы". – Киев: Вища школа. – 1987. – Вып. 6. – С. 101–103.
4. **Рухлина С. Б.** О нетеровости экстремальной задачи для уравнения теплопроводности [текст] / С. Б. Рухлина // Матеріали Міжнар. конф. "Сучасні проблеми математики". – Чернівці–Київ: Ін-т матем. НАН України. 1998. – Ч. 2. – С. 269–272.
5. **Рухлина С. Б.** Об экстремальных задачах для бигармонического уравнения [текст] / С. Б. Рухлина // Сб. "Крайові задачі для диференціальних рівнянь". – Київ: Ін-т матем. НАН України. – 1998. – Вип. 2. – С. 240–249.
6. **Рухлина С. Б.** Исследование одного класса экстремальных задач для уравнений с частными производными [текст] / С. Б. Рухлина // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 102–110.
7. **Малишенко В. П.** Исследование математических моделей экстремальных задач для бигармонического уравнения в полуплоскости [текст] / В. П. Малишенко, Н. Я. Тихоненко // Вісник Кременчуцького державного університету. – 2003. – Вип. 3. – С. 39–43.
8. **Князев П. П.** Интегральные преобразования [текст] / П. П. Князев. – Минск: Вышейшая школа. – 1969. – 197 с.
9. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции [текст] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 794 с.
10. **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [текст] / В. Е. Гмурман. – М.: Наука, 1979. – 400 с.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 45–53

УДК 519.21

О. Л. Изюмцева
Институт математики НАН Украины

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КРАТНЫХ ВРЕМЕНАХ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Ізюмцева О. Л. Деякі зауваження відносно кратних часів самоперетинів. Для перенормованого локального часу самоперетинів кратності k двовимірного вінерівського процесу отримано аналог самоподібності і перевірено інтегрованість. Доведено існування локального часу самоперетинів, "зважених" деякою випадковою мірою. Введено поняття самоперетинів, які відповідають сукупності кратностей.
Ключові слова: самоперетини, самоподібність, самоперетини, які відповідають набору кратностей, самоперетини, "зважені" мірою.

Изюмцева О. Л. Некоторые замечания о кратных временах самопересечений. Для перенормированного локального времени самопересечений кратности k установлен аналог самоподобия и проверена интегрируемость. Доказано существование перенормированного локального времени самопересечений, "взвешенных" некоторой случайной мерой. Определены самопересечения, отвечающие набору кратностей.
Ключевые слова: самопересечения, самоподобие, самопересечения, отвечающие набору кратностей, самопересечения, "взвешенные" мерой.

Izyumtseva O. L. Some remarks about multiple points of self-intersection local time. We prove self-similarity and integrability of local time of self-intersections for planar Wiener process. We show existence of local time of self-intersections, which are "weighted" by random measure and define intersections related to the family of orders.
Key words: self-intersections, self-similarity, self-intersections related to the family of orders, self-intersections "weighted" by measure.

Введение. Пусть $\{w(t), t \in [0,1]\}$ – винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^2$. Согласно теореме Эрдеша–Дворецкого–Какутани, траектория w имеет точки самопересечения произвольной кратности [1]. Для "взвешивания" k-кратных самопересечений процесса w некоторой мерой μ можно было бы использовать следующее выражение:

$$T_k^w(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Delta_k(1)} \delta_0(w(s_1) - x) \prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(w(s_{i+1}) - w(s_i)) d\vec{s}\mu(dx), \qquad (1.1)$$

где $\Delta_k(1) = \{0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_k \le 1\}$, а δ_0 – дельта-функция в точке нуль. Формализовать (1.1) можно приближая дельта-функцию функциями вида

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}, x \in \mathbb{R}^2,\ \varepsilon > 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим

$$T_{\varepsilon,k}^w(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Delta_k(1)} f_\varepsilon(w(s_1) - x) \prod_{i=1}^{k-1} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)) d\vec{s}\mu(dx).$$

Предел в среднем порядка $p \geq 1$ случайных величин $T^w_{\varepsilon,k}(\mu)$ при $\varepsilon \to 0+$ и был бы значением $T^w_k(\mu)$. Однако уже в случае, когда μ – это мера Лебега λ,

$$MT^w_{2,\varepsilon}(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon, \text{ при } \varepsilon \to 0+.$$

Тем самым $T^w_{2,\varepsilon}(\lambda)$ не могут сходиться в среднем. Можно проверить, что аналогичное заключение справедливо и для k-кратных самопересечений w. Данное обстоятельство привело к тому, что из $T^w_{k,\varepsilon}(\lambda)$ вычитают либо линейные комбинации $T^w_{j,\varepsilon}(\lambda), j < k$, либо несколько первых членов разложения Ито–Винера, для того чтобы обеспечить существование предела при $\varepsilon \to 0+$ [2–5]. Такая процедура носит название перенормировки, заимствованное из квантовой физики [6, 7]. В работе [2] для $T^w_{k,\varepsilon}(\lambda)$ Е. Б. Дынкиным была предложена следующая перенормировка:

$$\mathcal{T}^w_{k,\varepsilon}(s) = \sum_{l=1}^{k} C^{l-1}_{k-1} h^{k-l}_\varepsilon \int_{\Delta_l(s)} F^w_{l,\varepsilon}(\vec{s}) d\vec{s},$$

где $h_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon$, а

$$F^w_{l,\varepsilon}(\vec{s}) = \prod_{i=1}^{l-1} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)).$$

В этой же работе было доказано, что существует

$$L_p - \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathcal{T}^w_{k,\varepsilon}(s) := \mathcal{T}^w_k(s),$$

где $\mathcal{T}^w_k(s)$ и есть перенормированное локальное время k-кратных самопересечений для двумерного винеровского процесса.

В настоящей статье продолжено исследование случайной величины $\mathcal{T}^w_k(s)$. Доказан аналог самоподобия и проверена интегрируемость по s на отрезке $[0, 1]$. Кроме того, в данной статье доказано существование перенормированного локального времени самопересечений, “взвешенных” некоторой случайной мерой, и описана перенормировка Дынкина для самопересечений, отвечающих набору кратностей.

Основные результаты.

1. Самопересечения, “взвешенные” случайной мерой.

Пусть w, w' – независимые винеровские процессы в $\mathbb{R}^2$. Основным объектом исследования настоящего пункта является следующее выражение:

$$T^w_{k,\varepsilon}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Delta_{k-1}(s)} \prod_{i=1}^{k-2} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)) f_\varepsilon(x - w(s_{k-1})) d\vec{s} \mu(dx), \tag{2.1}$$

где μ – случайная мера следующего вида:

$$\mu(A) = \int_0^1 1\!\!1_A(w'(s)) ds. \tag{2.2}$$

Перенормировка Дынкина для (2.1) имеет следующий вид:

$$\mathcal{T}^w_{k,\varepsilon} = \sum_{l=1}^{k} C^{l-1}_{k-1} h^{k-l}_\varepsilon T^w_{l,\varepsilon}(\mu),$$

где по-прежнему $h_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon$, а μ имеет вид (2.2). Справедливым является следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует предел по вероятности случайных величин $\mathcal{T}^w_{k,\varepsilon}$, при $\varepsilon \to 0+$.*

Доказательство. Согласно [8], перенормированное локальное время k-кратных самопересечений, "взвешенных" мерой μ, существует в смысле сходимости в среднем квадратическом, если

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}(u^1(x,y))^{2k}\mu(dx)\mu(dy) < +\infty, \tag{2.3}$$

где $u^1(x,y) = \int_0^\infty e^{-t}f_t(x-y)dt$. Проверим, что для случайной меры μ вида (2.2) выполняется условие (2.3). Обозначим $\frac{\|x\|^2}{2} := a > 0$ и исследуем асимптотическое поведение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-t}e^{-\frac{a}{t}}dt, \text{ при } a \to 0+.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-t}e^{-\frac{a}{t}}dt \sim \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{a}{t}}dt$$

при $a \to 0+$. Делая замену переменных под знаком интеграла, получаем

$$\int_0^1 e^{-\frac{a}{t}}\frac{1}{t}dt = -\int_a^\infty e^{-u}\frac{1}{u}du \sim \ln a,\ a \to 0+. \tag{2.4}$$

Проверим, что для функции $\psi(x) = (-\ln x)_+$

$$M\int_0^1\int_0^1 (\psi(\|w(t_2)-w(t_1)\|))^{2k}dt_1dt_2 < +\infty.$$

Действительно,

$$M\int_0^1\int_0^1(\psi(\|w(t_2)-w(t_1)\|))^{2k}dt_1dt_2 =$$

$$= 2\int_{\Delta_2(1)}\int_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\psi(\|x_2-x_1\|))^{2k}\frac{1}{2\pi t_1}e^{-\frac{\|x_1\|^2}{2t_1}}\frac{1}{2\pi(t_2-t_1)}e^{-\frac{\|x_2-x_1\|^2}{2(t_2-t_1)}}dx_1dx_2d\vec{t} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} x_2^1 = \rho\cos\varphi + x_1^1 \\ x_2^2 = \rho\sin\varphi + x_1^2 \\ J = \rho \end{array}\right| = \int_{\Delta_2(1)}\int_0^\infty \rho(\psi(\rho))^{2k}\frac{1}{2\pi(t_2-t_1)}e^{-\frac{\rho^2}{2(t_2-t_1)}}d\rho dt_1dt_2 =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \frac{\rho}{\sqrt{t_2-t_1}} = p \\ d\rho = \sqrt{t_2-t_1}dp \end{array}\right| =$$

$$= \int_{\Delta_2(1)}\int_0^\infty p\sqrt{t_2-t_1}(\psi(\sqrt{t_2-t_1}p))^{2k}\frac{1}{2\pi(t_2-t_1)}e^{-\frac{p^2}{2}}\sqrt{t_2-t_1}dpd\vec{t} \le$$

$$\le c\int_{\Delta_2(1)}\int_0^\infty p(\psi(\sqrt{t_2-t_1}p))^{2k}e^{-\frac{p^2}{2}}dpd\vec{t} < +\infty,\ c > 0.$$

Теорема доказана. □

2. Аналог самоподобия и интегрируемость локального времени самопересечений двумерного винеровского процесса.

Рассмотрим перенормировку Е. Б. Дынкина для локального времени самопересечений кратности k двумерного винеровского процесса:

$$\mathcal{T}^w_{k,\varepsilon}(s) = \sum_{l=1}^{k} h_\varepsilon^{k-l} C_{k-1}^{l-1} \int_{\Delta_l(s)} \prod_{i=1}^{l-1} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)) d\vec{s}. \tag{3.1}$$

Известно [2], что существует

$$L_p - \lim_{\varepsilon\to 0+} \mathcal{T}^w_{k,\varepsilon}(s) := \mathcal{T}^w_k(s).$$

Основная цель настоящего пункта – установить, какими свойствами обладает случайная величина $\mathcal{T}^w_k(s)$. Первое свойство, которое мы установим для $\mathcal{T}^w_k(s)$, – это аналог самоподобия. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.

$$\mathcal{T}^w_n(s) \stackrel{d}{=} s \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2\pi} \ln s\right)^{n-k} \mathcal{T}^w_k.$$

Доказательство. Делая замену переменных в (3.1) и используя принцип самоподобия для винеровского процесса, можем записать следующие равенства:

$$\mathcal{T}^w_{\varepsilon,n}(s) = \sum_{l=1}^{n} h_\varepsilon^{n-l} C_{n-1}^{l-1} \int_{\Delta_l(s)} \prod_{i=1}^{l-1} f_\varepsilon(w(u_{i+1}) - w(u_i)) d\vec{u} \stackrel{d}{=}$$

$$\stackrel{d}{=} \sum_{l=1}^{n} h_\varepsilon^{n-l} C_{n-1}^{l-1} s^l \int_{\Delta_l(1)} \prod_{i=1}^{l-1} f_\varepsilon(\sqrt{s}(w(u_{i+1}) - w(u_i))) d\vec{u} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(h_{\frac{\varepsilon}{s}} + \tfrac{1}{2\pi} \ln s\right)^{n-l} C_{n-1}^{l-1} s \int_{\Delta_l(1)} F^w_{l,\frac{\varepsilon}{s}}(\vec{u}) d\vec{u} =$$

$$= s \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-l} C_{n-l}^{j} h^j_{\frac{\varepsilon}{s}} \left(\tfrac{1}{2\pi} \ln s\right)^{n-l-j} C_{n-1}^{l-1} \int_{\Delta_l(1)} F^w_{l,\frac{\varepsilon}{s}}(\vec{u}) d\vec{u}.$$

Полагая $l + j = k$, где $k = \overline{1,n}$, получаем

$$\mathcal{T}^w_{n,\varepsilon}(s) \stackrel{d}{=} s \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2\pi} \ln s\right)^{n-k} \mathcal{T}^w_{k,\frac{\varepsilon}{s}}. \tag{3.2}$$

Как следствие,

$$\mathcal{T}^w_n(s) \stackrel{d}{=} s \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2\pi} \ln s\right)^{n-k} \mathcal{T}^w_k. \tag{3.3}$$

Лемма доказана. □

Следующее свойство, которым обладает случайная величина $\mathcal{T}^w_k(s)$, – это интегрируемость по s на отрезке $[0, 1]$. Справедливым является следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует*

$$L_p - \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^1 \mathcal{T}^w_{\varepsilon,k}(s)ds := \int_0^1 \mathcal{T}^w_k(s)ds.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы проверим, что

$$\int_0^1 M|\mathcal{T}^w_{\varepsilon,k}(s) - \mathcal{T}^w_k(s)|^p ds \to 0$$

при $\varepsilon \to 0+$.

Найдем интегрируемую мажоранту для $M|\mathcal{T}^w_{\varepsilon,k}(s) - \mathcal{T}^w_k(s)|^p$. Для $\varepsilon \geq s$ справедлива следующая оценка:

$$|\mathcal{T}^w_{\varepsilon,k}(s)|^p \leq c\biggl(\sum_{l=1}^k \frac{1}{\varepsilon^{l-1}} s^l |\ln\varepsilon|^{k-l}\biggr)^p \leq c\biggl(\sum_{l=1}^k \varepsilon|\ln\varepsilon|^{k-l}\biggr)^p,$$

поскольку $T^w_{\varepsilon,k} \leq \frac{c}{\varepsilon^{l-1}}$.

Из ограниченности функции $\varepsilon|\ln\varepsilon|^{k-l}$ на отрезке $[0,1]$ следует, что

$$\sup_{0<s\leq\varepsilon\leq 1} M|\mathcal{T}^w_{\varepsilon,k}(s)|^p < +\infty.$$

Согласно (3.3),

$$\sup_{0<s\leq\varepsilon\leq 1} M|\mathcal{T}^w_k(s)|^p < +\infty.$$

Таким образом, в случае $\varepsilon \geq s$ мы проверили, что

$$\sup_{0<s\leq\varepsilon\leq 1} M|\mathcal{T}^w_{\varepsilon,k} - \mathcal{T}^w_k(s)|^p < +\infty.$$

Рассмотрим случай $0 < \varepsilon \leq s < 1$. Обозначим $\frac{\varepsilon}{s} := \delta$. Согласно [2], существует

$$L_p - \lim_{\delta\to 0+} \mathcal{T}^w_{\delta,n} := \mathcal{T}^w_n,$$

поэтому

$$\lim_{\delta\to 0+} M|\mathcal{T}^w_{\delta,n}|^p = M|\mathcal{T}^w_n|^p,$$

следовательно, функция $f(\delta) := M|\mathcal{T}^w_{\delta,n}|^p, \delta \in [0,1]$ является непрерывной. Из непрерывности функции $f(\delta)$ и равенства (3.2) следует, что

$$\sup_{0<\varepsilon\leq s\leq 1} M|\mathcal{T}^w_{\varepsilon,k}(s)|^p < +\infty.$$

Теорема доказана. □

3. Самопересечения, отвечающие набору кратностей.

Для $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим наборы натуральных чисел $\{i_k\}_{k=1}^n$, $\{j_l\}_{l=1}^n$, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \ldots < i_n < j_n \leq m. \tag{4.1}$$

Обозначим разбиение (4.1) λ. Пусть задана непрерывная на $\Delta_m(1)$ функция g, для которой выполняется следующее условие.

Свойство (1). Если существуют $l = 1, \ldots, n-1$ и $r \in [j_l, i_{l+1}]$, такие, что $s_r = s_{r+1}$, то $g(\vec{s}) = 0$.

Пример. *Пусть* $m = 5$, *функция* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *и* $f(0) = 0$. *Тогда функция*

$$g(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = f(s_2 - s_1) f(s_4 - s_3)$$

обладает свойством (1) относительно набора $i_1 = 1, j_1 = 2, i_2 = 3, j_2 = 4$.

Основным объектом исследования в данном пункте является следующее выражение:

$$T^{w,g}_{\varepsilon,\lambda} = \int_{\Delta_m(1)} g(\vec{s}) \prod_{k=0}^{n} \prod_{i=i_k}^{j_k - 1} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)) d\vec{s}, \tag{4.2}$$

где функция g обладает свойством (1) относительно разбиения λ. В случае $n = 0$ полагаем в (4.2) $g = 1$. Формально $T^{w,g}_{\lambda}$ отвечает за подсчет точек самопересечения кратностей $j_1 - i_1, \ldots, j_n - i_n$ на последовательности непересекающихся интервалов времени из $[0, 1]$ с весом g. Следуя Дынкину [2], запишем перенормировку для (4.2):

$$T^{w,g}_{\varepsilon,\lambda} = \sum_{l=1}^{m} h_\varepsilon^{m-l} \int_{\Delta_m(1)} B_l g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=i_k}^{j_k - 1} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)) d\vec{s}. \tag{4.3}$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

1) $\{i, i+1, \ldots, j\} = [i, j]$.

2) $J_1 = [i_1, j_1],\ I_1 = [j_1, i_2], \ldots, J_n = [i_n, j_n]$,
причем

$$I^m := [1, m] = J_1 \cup I_1 \cup \ldots \cup J_n.$$

3) Для $I = \{k, k+1, \ldots, l\}$ положим

$$F_I(\vec{s}) = \prod_{i=k}^{l-1} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)).$$

4) При действии оператора B_l на $F_I(\vec{s})$ считаем, что $f_\varepsilon(w(s) - w(s)) = 1$ (убирается множитель $\frac{1}{2\pi\varepsilon}$).

В новых обозначениях:

$$g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=i_k}^{j_k - 1} f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i)) = g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}).$$

5) Пусть I, I' – отрезки натуральных чисел, для которых справедливо следующее: $|I'| \le |I|$. Обозначим $M(I, I') = \{\sigma :\ \sigma : I \to I'$ монотонно не убывает $\}$.

6) Для отрезка натуральных чисел $I = [k, l]$ обозначим

$$\Delta_I(s', s'') = \{s' \le s_k \le \ldots \le s_l \le s''\},$$
$$\Delta_I^f(s', s'') = \{f :\ f : \Delta_I(s', s'') \to \mathbb{R}\}.$$

7) Для $\sigma \in M(I, I')$ определим оператор

$$\mathcal{D}_\sigma :\ \Delta_I^f(s', s'') \to \Delta_{I'}^f(s', s'')$$

по следующему правилу:

$$\mathcal{D}_\sigma f(\vec{s}) = f(s_{\sigma(k)}, s_{\sigma(k+1)}, \dots, s_{\sigma(l)}),$$

причем $\mathcal{D}_\sigma$ определен и на Δ_m^f своим действием по координатам $k, \dots, l$. Опишем действие операторов B_l, участвующих в перенормировке (4.3):

$$B_l g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}) = \sum_{\sigma \in M(I^m, I^l)} \mathcal{D}_\sigma g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}).$$

Заметим, что в силу свойства (1) для $\sigma \in M(I^m, I^l)$

$$\mathcal{D}_\sigma g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}) = 0, \text{ если } \exists\, I_r, i, i+1 \in I_r :\ \sigma(i) = \sigma(i+1). \tag{4.4}$$

Отображение σ, для которого не выполняется (4.4), обладает следующими свойствами:

1) σ – инъекция на каждом из отрезков I_k,

2) σ – сюръекция $[1, m]$ на $[1, l]$.

Следовательно, σ – взаимно-однозначно отображает каждый из отрезков I_r на некоторый отрезок I'_r той же длины.

Заметим, что $I^l = J'_1 \cup \ldots \cup J'_n$, где $J'_1, \dots, J'_n$ – образы отрезков $J_1, \dots, J_n$ при отображении σ. Для $k = 1, \dots, n$ определим σ^k как сужение σ на J_k, где $\sigma^k \in M(J_k, J'_k), k = 1, \dots, n$. Обозначим сужение σ на $\cup_{r=0}^n I_r$ как $\sigma_{\text{ост}}$. Тогда справедливо следующее:

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma_{\text{ост}}(i), & i \in \cup_{r=0}^n I_r, \\ \sigma_k(i), & i \in J_k. \end{cases}$$

Заметим, что операторы $\mathcal{D}_{\sigma_{\text{ост}}}, \mathcal{D}_{\sigma_1}, \dots, D_{\sigma_n}$ коммутируют, поскольку они действуют по переменным с разными индексами. Справедливым является следующее равенство:

$$\mathcal{D}_\sigma f(\vec{s}) = \mathcal{D}_{\sigma_{\text{ост}}} \prod_{k=1}^{n} \mathcal{D}_{\sigma_k} f(\vec{s}).$$

Для

$$\begin{gathered} 1 \le |J'_1| = r'_1 \le |J_1| = r_1, \\ \vdots \\ 1 \le |J'_n| = r'_n \le |J_n| = r_n \end{gathered}$$

получаем следующее:

$$\sum_{\sigma \in M(I^m, I^l)} \mathcal{D}_\sigma g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}) =$$

$$= \sum_{\substack{1 \le r'_1 \le r_1 \\ \vdots \\ 1 \le r'_n \le r_n}} \mathcal{D}_{\sigma_{\text{ост}}} \sum_{\sigma^1 \in M(J_1, J'_1)} \mathcal{D}_{\sigma^1} \ \dots \sum_{\sigma^n \in M(J_n, J'_n)} \mathcal{D}_{\sigma^n} g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}).$$

Таким образом,

$$\sum_{l=1}^{m} h_\varepsilon^{m-l} \sum_{\sigma\in M(I^m,I^l)} \mathcal{D}_\sigma g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}) =$$

$$= \sum_{\substack{1\le r_1'\le r_1\\ \vdots \\ 1\le r_n'\le r_n}} h_\varepsilon^{r_1-r_1'}\cdot\ldots\cdot h_\varepsilon^{r_n-r_n'} \mathcal{D}_{\sigma_{\text{ост}}}\mathcal{D}_{\sigma^1}\ldots\mathcal{D}_{\sigma^n} g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}),$$

а следовательно,

$$\int_{\Delta_m(1)} \sum_{l=1}^{m} h_\varepsilon^{m-l} \sum_{\sigma\in M(I^m,I^l)} \mathcal{D}_\sigma g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}) d\vec{s} =$$

$$= \sum_{\substack{1\le r_1'\le r_1\\ \vdots \\ 1\le r_n'\le r_n}} h_\varepsilon^{r_1-r_1'}\cdot\ldots\cdot h_\varepsilon^{r_n-r_n'} \int_{\Delta_m(1)} \mathcal{D}_{\sigma_{\text{ост}}}\mathcal{D}_{\sigma^1}\ldots\mathcal{D}_{\sigma^n} g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}) d\vec{s}.$$

Обозначим

$$\mathcal{T}^w_{J_k,\varepsilon}(s,t)f = \int_{\Delta_{|J_k|}(s,t)} \sum_{1\le r_k'\le r_k} h_\varepsilon^{r_k-r_k'} \mathcal{D}_{\sigma_k} f(\vec{s}) F_{J_k}(\vec{s}) d\vec{s},$$

тогда перенормировка Дынкина для самопересечений, отвечающих набору кратностей, будет иметь следующий вид:

$$\int_{\Delta_m(1)} \sum_{l=1}^{m} h_\varepsilon^{m-l} B_l g(\vec{s}) \prod_{k=1}^{n} F_{J_k}(\vec{s}) d\vec{s} =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_{s_{i_2-1}}^{s_{j_2+1}} \int_0^{s_{i_2-1}} \ldots \int_0^{s_{j_1+2}} \mathcal{T}^w_{J_n,\varepsilon}(s_{i_n-1},1)\ldots\mathcal{T}^w_{J_2,\varepsilon}(s_{i_2-1},s_{j_2+1})\mathcal{T}^w_{J_1,\varepsilon}(0,s_{j_1+1}) g(s) d\vec{s}.$$

Будем говорить,что координаты не зацепляются, если для любого $I_k, k = 1,\ldots,$ $n-1 : |I_k| \ge 4$.

Пример. *Пусть $m = 8$. Тогда для разбиения*

$$\lambda = \{i_1 = 1, j_1 = 2, i_2 = 5, j_2 = 7\}$$

координаты не зацепляются. Перенормировка Дынкина для самопересечений, отвечающих набору кратностей, в этом случае будет иметь вид

$$\int_0^1 \int_{s_3}^1 \mathcal{T}^w_{3,\varepsilon}(s_4,s_8)\mathcal{T}^w_{2,\varepsilon}(0,s_3) g(s) d\vec{s}$$

и, согласно теореме 2, существует

$$L_p - \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^1 \int_{s_3}^1 \mathcal{T}^w_{3,\varepsilon}(s_4,s_8)\mathcal{T}^w_{2,\varepsilon}(0,s_3) g(s) d\vec{s}.$$

Заключение. Таким образом, для перенормированного локального времени самопересечений кратности k установлен аналог самоподобия и проверена интегрируемость. Доказано существование перенормированного локального времени самопересечений, "взвешенных" некоторой случайной мерой. Определены самопересечения, отвечающие набору кратностей.

1. **Леви П.** Стохастические процессы и броуновское движение [текст] / Леви П. – М.: Наука, 1972. – 376 с.
2. **Dynkin E. B.** Regularized self-intersection local time of planar Brownian motion [text] / E. B. Dynkin // The Annals of Probability. – 1988. – № 1. – P. 58–74.
3. **Rosen J.** A renormalized local time for multiple intersection of planar Brownian motion [text] / J. Rosen // Seminaire de Probabilities XX. – 1985. – Vol. 20. – P. 515–531.
4. **Дороговцев А. А.** Обобщенные функционалы от винеровского процесса [текст] / А. А. Дороговцев, В. В. Бакун // Теория вероятностей и ее применение. – 2003. – 48, № 1. – С. 43–61.
5. **Rudenko A.** Local time as an element of the Sobolev space [text] / A. Rudenko // Theory of Stoch. Proc. – 2007. – Vol. 13(29), № 3. – P. 65–79.
6. **Саймон Б.** Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля [текст] / Саймон Б. – М.: Мир, 1976. – 358 с.
7. **Хепп К.** Теория перенормировок [текст] / Хепп К. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
8. **Markus M.** Renormalized self-intersection local times and wick power chaos processes [text] / M. Markus, J. Rosen // Mem. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 142, № 675, VIII. – 125 p.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 54–60

УДК 517.95

С. П. Лавренюк, О. Т. Панат
Львівський національний університет імені Івана Франка

ДЕЯКА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Лавренюк С. П., Панат О. Т. Деяка варіаційна нерівність третього порядку зі змінним степенем нелінійності у необмеженій області. У необмеженій за просторовими змінними області розглянуто нелінійну гіперболічну варіаційну нерівність третього порядку з початковою умовою. Встановлено єдиність розв'язку такої задачі без умов на поведінку вихідних даних, а також самого розв'язку при $|x| \to +\infty$.
Ключові слова: варіаційна нерівність третього порядку, змінний степінь нелінійності, необмежена область.

Лавренюк С. П., Панат О. Т. Некоторое вариационное неравенство третьего порядка со сменным показателем нелинейности в неограниченной области. В неограниченной за пространсвенными переменными области рассмотрено нелинейное гиперболическое вариационное неравенство третьего порядка с начальным условием. Получено единственность решения такой задачи без условий на поведение исходных даных, а также самого решения при $|x| \to +\infty$.
Ключевые слова: вариационное неравенство третьего порядка, сменный показатель нелинейности, неограниченная область.

Lavrenyuk S. P., Panat O. T. Some variational inequality of the third order with variable exponent of nonlinearity in unbounded domain. We consider nonlinear hyperbolic variational inequality of the third order with initial condition in the domain unbounded in spatial variables. The uniqueness of the inequality's solution is proved without any restrictions on solution behavior and the initial data as $|x| \to +\infty$.
Key words: variational inequality of the third order, variable exponent of nonlinearity, unbounded domain.

Вступ. Нелінійним варіаційним нерівностям, зокрема, присвячена монографія [1] та статті [2–4] (див. також бібліографію до цих робіт). У працях [2–3] вивчено нелінійні варіаційні нерівності третього порядку в обмежених областях. Доведено теореми існування та єдиності їхніх розв'язків. Основним результатом роботи [4] є знаходження умов однозначної розв'язності у необмежених за просторовими змінними областях нелінійних гіперболічних варіаційних нерівностей другого порядку. Автори розглядають випадок неперервних коефіцієнтів еліптичного оператора з певною поведінкою їх на нескінченності. При цьому не накладається жодних обмежень на поведінку розв'язку, а також початкових даних задачі при $|x| \to +\infty$. У даній статті розглядається нелінійна гіперболічна варіаційна нерівність третього порядку, степінь нелінійного доданка в якій є функцією від просторових змінних. Задачу досліджено в просторах Соболєва, узагальнених просторах Лебега і отримано умови єдиності її розв'язку.

Нехай $n \in \mathbb{N}, T > 0$ — фіксовані числа; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — необмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$, для кожного $R > 0$ область $\Omega^R = \{x \in \Omega \mid |x| < R\}$ є регулярною за

Кальдероном [5, с. 45]; $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t=\tau\}$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $\Gamma_2^R = \{x \in \partial\Omega^R \mid x \in \operatorname{int}\Omega\}$, $\Gamma_1^R = \partial\Omega^R \setminus \overline{\Gamma}_2^R$, $R>0$, $\tau \in [0,T]$. Розглянемо функцію $p \in L^\infty(\Omega)$, $1 < p_0 \le p(x) \le p^0 < +\infty$, де $p_0 = \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} p(x)$, $p^0 = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} p(x)$. Позначимо $\beta_0 = \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} \frac{2p(x)}{p(x)-2}$, $\beta^0 = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} \frac{2p(x)}{p(x)-2}$.

Введемо функціонал $\rho_p(v,\Omega^R) = \int_{\Omega^R} |v(x)|^{p(x)}\,dx$, де $v = v(x)$ — деяка функція. Нагадаємо, що узагальненим простором Лебега називають множину функцій

$$L^{p(x)}(\Omega^R) = \Big\{ v : \Omega^R \to \mathbb{R}^1 \;\Big|\; v - \text{ вимірна}, \ \rho_p(v,\Omega) < +\infty \Big\}.$$

Ці простори були введені у 1931 році Орлічем В. (Orlicz W.) [6] і вивчалися, зокрема, Орлічем В. [6], Шарапудіновим І. [7], Ковачеком О. (Kovacik O.) та Ракосніком Ю. (Rakosnik J.) [8], Лавренюком С. П. з учнями [9]. У праці [8] доведено, що $L^{p(x)}(\Omega^R)$ є сепарабельним, рефлексивним та банаховим простором, якщо на ньому ввести норму за правилом

$$||v; L^{p(x)}(\Omega^R)|| = \inf\Big\{ \lambda > 0 : \int\limits_{\Omega^R} |v/\lambda|^{p(x)}\,dx \le 1 \Big\}.$$

Введемо також простори:

$$H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) = \Big\{ z \in H^1(\Omega^R) : z|_{\Gamma_1^R} = 0 \Big\}, \ \operatorname{mes}\Gamma_1^R > 0;$$

$V_1(\Omega^R)$ — гільбертів простір такий, що для всіх $R>0$ виконуються вкладення $H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) \subset V_1(\Omega^R) \subset H^1(\Omega^R)$ і, крім того, для довільних R_1, R_2 $(0 < R_1 < R_2)$ з включення $v \in V_1(\Omega^{R_1})$ випливає, що продовжена на $\Omega^{R_2} \backslash \overline{\Omega}^{R_1}$ нулем функція v належить до $V_1(\Omega^{R_2})$;

$$V_{1,0}(\Omega^R) = \big\{ z \in V_1(\Omega^R) : z|_{\Gamma_2^R} = 0 \big\}; \quad V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \big\{ z : z \in V_1(\Omega^R) \ \ \forall R > 0 \big\};$$

$$H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \big\{ z : z \in H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) \ \forall R > 0 \big\};$$

$$H^k_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \big\{ z : z \in H^k(\Omega^R) \ \forall R > 0 \big\}, \ k = 1,2;$$

$$L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \big\{ z : z \in L^{p(x)}(\Omega^R) \ \ \forall R > 0 \big\}.$$

Аналогічно визначаємо простори $L^{p(x)}(Q_T^R)$ та $L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, ввівши замість $\rho_p(\cdot,\Omega^R)$ функціонал $\rho_p(\cdot, Q_T^R)$. Нехай $K \subset V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ — замкнена множина, $0 \in K$.

В області Q_T розглядаємо варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[v_t(v-u_t)\psi(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t} \big((v-u_t)\psi(x)\big)_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} \big((v-u_t)\psi(x)\big)_{x_j} + c(x)|u_t|^{p(x)-2} u_t (v-u_t)\psi(x) -$$

$$-f(x,t)(v-u_t)\psi(x)\Big]\,dxdt \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}(v-u_t)^2\psi(x)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}(v-u_1)^2\psi(x)\,dx, \qquad (1)$$

де v, ψ — пробні функції, $\tau \in (0,T]$, з початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_0. \qquad (2)$$

Означення. *Функцію u, що задовольняє включення $u \in C\big([0,T]; V_{1,loc}(\overline{\Omega})\big)$, $u_t \in C\big([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})\big) \cap L^2\big((0,T); V_{1,loc}(\overline{\Omega})\big) \cap L^{p(x)}_{loc}(\overline{Q}_T)$, $u_t(t) \in K$ для майже всіх $t \in [0,T]$, називатимемо розв'язком задачі (1), (2), якщо вона задовольняє початковій умові (2) та варіаційній нерівності (1) для кожного $\tau \in (0,T]$, всіх функцій $v \in L^2\big((0,T); V_{1,loc}(\overline{\Omega})\big) \cap L^{p(x)}_{loc}(\overline{Q}_T)$, $v_t \in L^2\big((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega})\big)$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in [0,T]$ та довільних $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$.*

Можна показати, що розв'язок задачі (1), (2) задовольняє початкову умову

$$u_t|_{t=0} = u_1.$$

Говоритимемо, що виконуються умови **(A)**, (**B**), (**C**), (**U**), якщо:

(**A**): $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = \overline{1,n}$,
$a_0|\xi|^2 \leq \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та майже всіх $x \in \Omega$, де $a_0 > 0$;

(**B**): $b_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b_{ij} = b_{ji}$, $i,j = \overline{1,n}$,
$b_0|\xi|^2 \leq \sum\limits_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq b^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega$, де $b_0 > 0$;

(**C**): $c \in L^\infty(\Omega)$, $0 < c_0 \leq c(x) \leq c^0 < +\infty$ для майже всіх $x \in \Omega$;

(**U**): $u_0 \in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in K$.

Нехай $A_1 \equiv \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^n a^2_{ij}(x)$; $\quad B_1 \equiv \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^n b^2_{ij}(x)$.

Основні результати. Перед тим як перейти до дослідження задачі (1), (2), доведемо допоміжну лему.

Лема. *Нехай числа* $R_0, R_1, \widetilde{R}_1$ *задовольняють співвідношенню* $0 < R_0 < R_1$, $\widetilde{R}_1 = \sqrt{R_1^2 - R_1}$. *Розглянемо функцію* $\vartheta = \big(\varphi_{R_1}\big)^{\beta}$, *де*

$$\varphi_{R_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{R_1^2 - |x|^2}{R_1}, & |x| \le R_1, \\ 0, & |x| > R_1, \end{cases}$$

a β *— додатне число, що задовольняє умові* $\beta \ge \frac{2p^0}{p_0 - 2} + 1$. *Тоді*

1) $\varphi_{R_1}(x) \le R_1$ *для всіх* $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_{R_1}(x) \ge R_1 - R_0$ *для всіх* $x \in \Omega^{R_0}$;

2) якщо $x \in \Omega^{\widetilde{R}_1}$, *то* $1 < \varphi_{R_1}(x)$; *якщо ж* $x \in \Omega^{R_1} \setminus \Omega^{\widetilde{R}_1}$, *то* $\varphi_{R_1}(x) \le 1$;

3) $|\varphi_{R_1, x_j}| \le 2$ *для всіх* $j = \overline{1,n}$ *та* $x \in \mathbb{R}^n$;

4) при $p_0 > 2$ *виконується оцінка* $\displaystyle\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\vartheta_{x_j}}{\vartheta^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p(x)}}} \right|^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}} dx \le M_0 (R_1^{n+\beta-\beta_0} + R_1^n)$,

де $M_0 = \frac{2^{\beta^0+1} \beta^{\beta^0} \pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$, Γ *— гамма-функція Ейлера.*

Доведення. Очевидно, що $\varphi_{R_1}(x) \le R_1$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$. Оскільки $\frac{R_0}{R_1} < 1$, то $\varphi_{R_1}(x) = R_1 - \dfrac{|x|^2}{R_1} \ge R_1 - R_0 \dfrac{R_0}{R_1} \ge R_1 - R_0$ для $x \in \Omega^{R_0}$. З вигляду φ_{R_1} та рівності $\varphi_{R_1}(x) = \dfrac{R_1^2 - \widetilde{R}_1^2}{R_1} = 1$ при $|x| = \widetilde{R}_1$ отримуємо оцінки пункту 2. Крім того, $|\varphi_{R_1, x_j}| = |-\frac{2x_j}{R_1}| \le 2$ для всіх $x \in \Omega^{R_1}$, $j = \overline{1,n}$. Для одержання нерівності пункту 4 на підставі пункту 3 та рівності $\vartheta_{x_j} = \beta (\varphi_{R_1})^{\beta-1} \varphi_{R_1, x_j}$ запишемо перетворення

$$\left| \frac{\vartheta_{x_j}}{\vartheta^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p(x)}}} \right|^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}} = \left| \beta (\varphi_{R_1})^{\beta - 1 - \beta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p(x)}\right)} \varphi_{R_1, x_j} \right|^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}} \le$$

$$\le \left| 2\beta (\varphi_{R_1})^{\frac{\beta(p(x)-2) - 2p(x)}{2p(x)}} \right|^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}} \le (2\beta)^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}} (\varphi_{R_1})^{\beta - \frac{2p(x)}{p(x)-2}}.$$

Звідси, використовуючи пункти 1, 2, одержимо $\big($нагадаємо, що $\beta - \beta_0 > 1$, $\beta - \beta^0 > 1$, а об'єм кулі радіуса R в $\mathbb{R}^n$ рівний $\frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ $\big)$

$$\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\vartheta_{x_j}}{\vartheta^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p(x)}}} \right|^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}} dx \le (2\beta)^{\beta^0} \int\limits_{\Omega^{R_1}} (\varphi_{R_1})^{\beta - \frac{2p(x)}{p(x)-2}} dx \le$$

$$\le (2\beta)^{\beta^0} \left(\int\limits_{\Omega^{\widetilde{R}_1}} (\varphi_{R_1})^{\beta - \frac{2p(x)}{p(x)-2}} dx + \int\limits_{\Omega^{R_1} \setminus \Omega^{\widetilde{R}_1}} (\varphi_{R_1})^{\beta - \frac{2p(x)}{p(x)-2}} dx \right) \le$$

$$\le (2\beta)^{\beta^0}\left(\int\limits_{\Omega^{\tilde R_1}} (\varphi_{R_1})^{\beta-\beta_0}\,dx + \int\limits_{\Omega^{R_1}\setminus\Omega^{\tilde R_1}} (\varphi_{R_1})^{\beta-\beta^0}\,dx\right) \le$$

$$\le (2\beta)^{\beta^0}\left(\int\limits_{\Omega^{\tilde R_1}} R_1^{\beta-\beta_0}\,dx + \int\limits_{\Omega^{R_1}\setminus\Omega^{\tilde R_1}} dx\right) \le (2\beta)^{\beta^0}\left(R_1^{\beta-\beta_0}\int\limits_{\Omega^{R_1}} dx + \int\limits_{\Omega^{R_1}} dx\right) =$$

$$= M_0\left(R_1^{n+\beta-\beta_0} + R_1^n\right).$$

Лему доведено. □

Одержані нами результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай* $p_0 > 2$, $\beta_0 > n$ *і виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**U**). *Тоді задача (1), (2) не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Використаємо метод від супротивного. Нехай u^1, u^2 — два різні розв'язки задачі (1), (2). Стандартним чином (див. [1, с. 408] і [10, теорема 4]) отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^{1,2}|^2\psi\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_it}^{1,2}(u_t^{1,2}\psi)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}^{1,2}(u_t^{1,2}\psi)_{x_j} + \right.$$
$$\left. + c\Big(|u_t^1|^{p(x)-2}u_t^1 - |u_t^2|^{p(x)-2}u_t^2\Big)u_t^{1,2}\psi\right]dxdt \le 0, \quad \tau\in(0,T], \tag{3}$$

де $u^{1,2} = u^1 - u^2$.

Нехай числа $R_0, R_1, \widetilde{R}_1$ такі, як в лемі. Візьмемо в (3) $\psi = \vartheta$ (див. лему) і оцінимо доданки одержаної нерівності. Запишемо оцінки тих доданків, що містять функцію ϑ_{x_j}. Оскільки $\frac{1}{2} + \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{\frac{2p(x)}{p(x)-2}} = \frac{p(x)+2}{2p(x)} + \frac{p(x)-2}{2p(x)} = 1$, то

$$\left|\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_it}^{1,2}u_t^{1,2}\vartheta_{x_j}\,dxdt\right| \le \int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{A_1 n\kappa_1}{2}|\nabla u_t^{1,2}|^2 + \frac{n\kappa_1}{p_0}|u_t^{1,2}|^{p(x)}\right]\vartheta\,dxdt +$$
$$+\frac{(p^0-2)}{2p_0\kappa_1^{\frac{p^0+2}{p_0-2}}}M_0T\left[R_1^{n+\beta-\beta_0} + R_1^n\right],$$

де $0<\kappa_1<1$, M_0 – стала з леми. Аналогічно отримаємо, що

$$\left|\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}^{1,2}u_t^{1,2}\vartheta_{x_j}\,dxdt\right| \le \int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{B_1 n\kappa_2}{2}|\nabla u^{1,2}|^2 + \frac{n\kappa_2}{p_0}|u_t^{1,2}|^{p(x)}\right]\vartheta\,dxdt +$$
$$+\frac{(p^0-2)}{2p_0\kappa_2^{\frac{p^0+2}{p_0-2}}}M_0T\left[R_1^{n+\beta-\beta_0} + R_1^n\right], \quad 0<\kappa_2<1.$$

Враховуючи одержані оцінки, умови $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$ та рівність $u_1^{1,2} \equiv u_1 - u_1 = 0$, нерівність (3) перепишемо у вигляді

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big(|u_t^{1,2}|^2 + b_0 \left|\nabla u^{1,2}\right|^2 \Big) \vartheta \, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[(2a_0 - A_1 n\kappa_1) \left|\nabla u_t{}^{1,2}\right|^2 + \\ + \Big(\tfrac{2c_0}{2^{p^0-2}} - \tfrac{n(\kappa_1+\kappa_2)}{p_0} \Big) |u_t^{1,2}|^{p(x)} \Big] \vartheta \, dxdt \le B_1 n\kappa_2 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla u|^2 \vartheta \, dxdt + \\ + C_1(\kappa_1, \kappa_2, n) \Big(R_1^{n+\beta-\beta_0} + R_1^n \Big),$$

звідки, після використання леми Гронуола–Белмана і вибору $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ малими, отримуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big(|u_t^{1,2}|^2 + \left|\nabla u^{1,2}\right|^2 \Big) \vartheta \, dx + \\ + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\left|\nabla u_t{}^{1,2}\right|^2 + \left|\nabla u^{1,2}\right|^2 + |u_t^{1,2}|^{p(x)} \Big] \vartheta \, dxdt \le C_2 R_1^{\beta+n-\beta_0}, \tag{4}$$

де стала C_2 не залежить від $R_1 > 1$.

На підставі пункту 1 леми в Ω^{R_0} виконується нерівність $\vartheta(x) \ge (R_1 - R_0)^\beta$. Тоді для довільного $\tau \in (0, T]$ із (4) одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \Big[\left|u_t^{1,2}\right|^2 + \left|\nabla u^{1,2}\right|^2 \Big] dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[\left|\nabla u_t{}^{1,2}\right|^2 + \left|\nabla u^{1,2}\right|^2 + |u_t^{1,2}|^{p(x)} \Big] dxdt \le \\ \le C_2 \Big(\frac{R_1}{R_1 - R_0} \Big)^\beta R_1^{n-\beta_0}. \tag{5}$$

Оскільки $\lim\limits_{R_1 \to +\infty} \frac{R_1}{R_1 - R_0} = 1$ і $n < \beta_0$, то ліва частина нерівності (5) може бути зроблена як завгодно малою при $R_1 \to +\infty$. Враховуючи це, а також довільність $R_0 > 0$, робимо висновок про те, що $u^1 = u^2$ майже скрізь в Q_T. Теорему доведено. $\square$

Зауваження. *Можна показати, що при виконанні умов* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$, $(\mathbf{U})$, $p_0 > 2$, $f \in L^2_{loc}(\overline{Q}_T)$, $\beta_0 > n$, *а також деяких додаткових обмеженнях на множину* K, *розв'язок задачі (1), (2) існує. Для одержання цього результату треба використати метод штрафу (див. с. 425, [1]).*

Висновки. В області $\Omega \times (0, T)$, де Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$, розглянуто задачу з початковою умовою для деякої нелінійної варіаційної нерівності третього порядку. Сформульовано і доведено теорему єдиності розв'язку такої задачі. При цьому на поведінку вихідних даних і самого розв'язку на нескінченності не накладається жодних умов.

1. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач [текст] / Лионс Ж.-Л. – М., 1972. – 587 с.
2. **Глазатов С. Н.** Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка: Препр. № 7 [текст] / С. Н. Глазатов. – Новосибирск, 1992. – 22 с.
3. **Глазатов С. Н.** Нелинейные уравнения третьего порядка и вариационные неравенства [текст] / С. Н. Глазатов // Неклассические уравнения математической физики: международный семинар, посвященный 60-летию со дня рождения проф. В. Н. Врагова, 3–5 окт. 2005 г. : труды семинара. – 2005. – С. 80–93.
4. **Lavrenyuk S.** Variational hyperbolic inequality in the domain unbounded in spatial variables [text] / Serhiy Lavrenyuk, Petro Pukach // International Journal of Evolution Equations. – 2007. – Vol. 3. – № 1. – P. 103–122.
5. **Гаевский Х.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения [текст] / Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. – М., 1978. – 336 с.
6. **Orlicz W.** Über konjugierte Exponentenfolden [text] / Orlicz W. // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – С. 200–211.
7. **Шарапудинов И. И.** О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0,1])$ [текст] / И. И. Шарапудинов // Математические заметки. – 1979. – Т. 26. – № 4. – С. 613–632.
8. **Kovacik O.** On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ [text] / Kovacik O., Rakosnik J. // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41 (116). – P. 592–618.
9. **Бугрій О. М.** Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації [текст] / Бугрій О. М., Лавренюк С. П. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33–43.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 61–73

УДК 517.95

С. В. Орлов
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЛАСТЯХ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ И ТОЧКАМИ СМЕНЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Орлов С. В. Поведінка рішення крайової задачі для бігармонічних операторів в областях з кутовими точками і точками зміни межових умов. Вивчена поведінка розв'язків основних крайових задач для бігармонічного рівняння в областях з кутовими точками та точками зміни граничних умов. Побудовані асимптотичні розклади розв'язків окіл цих точок.
Ключові слова: крайова задача, бігармонічний оператор, межові умови, асимптотіка рішення.

Орлов С. В. Поведение решений краевых задач для бигармонических операторов в областях с угловыми точками и точками смены граничных условий. Изучено поведение решений основных краевых задач для бигармонического уравнения в областях с угловыми точками и точками смены граничных условий. Построены асимптотические разложения решений в окрестности этих точек.
Ключевые слова: краевая задача, бигармонический оператор, граничные условия, асимптотика решения.

Orlov S. V. Behavior solutions boundary problems for biharmonic operators in region with corner pointers and pointers change boundary conditions. Behavior of solutions of main boundary problems for biharmonic equation in domains with corner points and points of boundary conditions change is investigated. Asymptotic decompositions of solutions in environment of these points are built.
Key words: boundary problem, biharmonic operator, boundary conditions, asymptotic solutions.

Введение. Поведение решений эллиптических краевых задач в негладких областях изучается в [1, 2] . Достаточно общий подход к этой проблеме изложен в [3]. Однако ряд краевых задач с особенностями, например для краевой задачи с бигармоническим оператором, не рассмотрены. Кроме того, непосредственное использование на практике полученных в вышеприведенных работах результатов затруднено. Для этого, как минимум, необходимо в явном виде найти асимптотику решения для каждой из краевых задач.

В данной работе исследуется поведение решений краевых задач для бигармонического оператора с угловыми точками и точками смены граничных условий. Рассматривается достаточно широкий спектр особенностей краевых задач. Найдена в явном виде асимптотика решений для всех этих задач [5]. На основании общих теорем [1, 2, 4] и асимптотик решений в данной работе получены точные оценки решений достаточно широкого спектра краевых задач для бигармонических уравнений. Полученные в работе точные априорные оценки поведения решений краевых задач вблизи особенностей можно использовать, например, для построения оптимальной сетки разбиения области при поиске решения задачи. При таком разбиении мы можем гарантировать минимальный размер дискретной системы для получения решения с фиксированной точностью. Краевые задачи для бигармонического уравнения используются в задачах теории упругости. Минимизация размеров дискретной системы даст возможность уменьшить количество операций, необходимых для поиска решений. Например, при поиске напряженно-деформированного состояния некоторой оболочки с гарантированной точностью.

Будем исследовать поведение решения краевых задач:

$$\begin{cases} \triangle^{(2)}u(x) = f(x), x \in \Omega \subset R^2, \\ \quad Bu(x) = g(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Оператор $Bu(x)$ определяет граничные условия краевой задачи, Ω — односвязная или многосвязная ограниченная область плоскости с границей $\partial\Omega$, состоящей из непересекающихся частей $\partial\Omega_1, \ldots, \partial\Omega_n$. Каждая из частей бесконечно дифференцируема всюду, кроме конечного числа угловых точек $Q_1, \cdots, Q_n$.

При этом $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$, где K_i — с границами $\partial\Omega_i$.

В случае гладкой границы гладкость решения зависит только от правой части. Наличие угловых точек и точек смены краевых условий существенно влияет на гладкость решения. Будем в дальнейшем считать правую часть достаточно гладкой, абстрагируясь от ее поведения. В этом случае гладкость решения в каждой из подобластей $\partial\Omega_i$ будет зависеть только от особенности непосредственно в угловой точке или точке смены граничных условий Q_i. Известна следующая теорема об асимптотике решения краевых задачи типа (1) вблизи особых точек.

Теорема 1. Об асимптотике решения краевых задач в ограниченных областях для $\overset{o}{H}{}^{k}_{\beta}(K_i)$ [1, 2]. *Рассмотрим краевую задачу (1) в области K_i. Пусть*

$$u(x) \in \overset{o}{H}{}^{k+4}_{\beta}(K_i), \;\; f(x) \in \overset{o}{H}{}^{k_1}_{\beta_1}(K_i),$$

$$g(x) \in \overset{o}{H}{}^{k_1+4-\overrightarrow{m}-\frac{1}{2}}_{\beta_1}(\partial Q_i),$$

где $k_1 \geq k$, $-\beta_1 + 2k_1 > -\beta + 2k$, $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$ — вектор, определяющий порядок операторов для каждого из граничных условий, и на прямой $h_1 = \frac{1}{2}(2k_1 - \beta_1 + 8 - 2)$ нет полюсов функции $R(\lambda, \omega)$. Тогда решение задачи (1) вблизи особой точки Q_i имеет вид

$$u(x) = \sum_{h < \Im m\,(\lambda_\mu) < h_1} \sum_{\sigma=1}^{J_\mu} \sum_{s=0}^{æ_\mu - 1} c_{\mu\sigma s} r^{-i\lambda_\mu} (ln\ r)^s P_{\mu\sigma sq}(rln^q r) + u_1(x), \tag{2}$$

где $h = \frac{1}{2}(2k - \beta + 6)$, λ_μ — полюса $R(\lambda, \omega)$ кратности $æ_{\sigma\mu}$, J_μ — размерность пространства собственных функций краевой задачи, $R(\lambda, \omega)$ — характеристическая функция краевой задачи, σ — номер собственной функции из ядра задачи, $æ_{\sigma\mu}$ — кратность полюса λ_μ для собственных функций $\varphi_\mu^{(0,\sigma)}(\omega)$, $c_{\mu\sigma s}$ — константа, зависящая от правых частей краевой задачи и от ее жордановых *канонических цепочек,* $P_{\mu\sigma sq}(rln^q r)$ *— полином степени* $[h_1 - \Im m\ (\lambda_\mu)]$ *с коэффициентами* $\varphi_\mu^{(s,\sigma)}(\omega)$, $\varphi_\mu^{(s,\sigma)}(\omega)$ *— бесконечное число раз дифференцируемые функции из жордановой канонической цепочки краевой задачи,* r *— расстояние до особой точки,* $u_1(x) \in H_{\beta_1}^{k_1+4}(K_i)$.

Нам понадобятся следующие теоремы из [2].

Теорема 2. *Функция* $v(r,\omega) = a(r,\omega)r^\lambda(\ln r)^p f(\omega) \in H_\beta^k(K)$, *если*
1) $a(r,\omega), f(\omega)$ *— бесконечно дифференцируемые функции,*
2) $2 + 2Re(\lambda) + \beta - 2k > 0$.

Теорема 3. *Функция* $g(r,\omega) = a(r,\omega)r^\lambda(\ln r)^p f(\omega) \in H_\beta^{k-\frac{1}{2}}(\partial K)$, *если*
1) $f(\omega)$ *— бесконечно дифференцируемая функция,*
2) $a(r,\omega)$ *— такая, что* $\mid r^s D^s a(r,\omega) \mid \leq N < +\infty, s = \overline{0,k}$,
3) $2 + 2Re(\lambda) + \beta - 2k > 0$.

Основные результаты.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать следующие граничные условия для краевых задач с бигармоническим оператором(1):

$$B^{(1)}u(x) = \begin{cases} u(x)\Big|_{\partial Q_+}^{\partial Q_-} \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n}\Big|_{\partial Q_+}^{\partial Q_-} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$B^{(2)}u(x) = \begin{cases} u(x)|\partial Q \\ M_n(x)|\partial Q \end{cases} \tag{3.2}$$

$$B^{(3)}u(x) = \begin{cases} \frac{\partial u(x)}{\partial n}|\partial Q \\ V_n(x)|\partial Q \end{cases} \tag{3.3}$$

$$B^{(4)}u(x) = \begin{cases} M_n(x)|\partial Q \\ V_n(x)|\partial Q \end{cases}, \ H(Q_i) = 0 \tag{3.4}$$

$$B^{(12)}u(x) = \begin{cases} M_n(x) & |\partial Q_+ \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} & |\partial Q_+ \\ u(x) & |\partial Q_- \\ M_n(x) & |\partial Q_- \end{cases} \tag{3.5}$$

$$B^{(13)}u(x) = \begin{cases} M_n(x) & |\partial Q_+ \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} & |\partial Q_+ \\ u(x) & |\partial Q_- \\ V_n(x) & |\partial Q_- \end{cases} \tag{3.6}$$

$$B^{(14)}u(x) = \begin{cases} M_n(x) & |\partial Q_+ \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} & |\partial Q_+ \\ M_n(x) & |\partial Q_- \\ V_n(x) & |\partial Q_- \end{cases}, \ H(Q_i) = 0 \tag{3.7}$$

$$B^{(23)}u(x)=\begin{cases} u(x) & |\partial Q_+\\ M_n(x) & |\partial Q_+\\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} & |\partial Q_-\\ V_n(x) & |\partial Q_-\end{cases} \tag{3.8}$$

$$B^{(24)}u(x)=\begin{cases} u(x) & |\partial Q_+\\ M_n(x) & |\partial Q_+\\ M_n(x) & |\partial Q_-\\ V_n(x) & |\partial Q_-\end{cases},\ H(Q_i)=0 \tag{3.9}$$

$$B^{(34)}u(x)=\begin{cases} \frac{\partial u(x)}{\partial n} & |\partial Q_+\\ V_n(x) & |\partial Q_+\\ M_n(x) & |\partial Q_-\\ V_n(x) & |\partial Q_-\end{cases},\ H(Q_i)=0 \tag{3.10}$$

$M_n(x)=\nu\Delta u(x)+(1-\nu)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial n^2}$ нормальный момент к границе, $V_n(x)=\frac{\partial}{\partial n}(\triangle u(x))+$ $+(1-\nu)\frac{\partial^3 u(x)}{\partial s^2\partial n}$ — перерезывающая сила, $H(Q_i)=(1-\nu)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial n\partial s}\Big|_{S_+}^{S_-}$ — сосредоточенная сила в угловой точке Q_i, $\overrightarrow{n}$ — внешняя нормаль к ∂Q, $\overrightarrow{s}$ — касательная к ∂Q, S_+,S_- — касательные вдоль границы $\partial Q_+,\partial Q_-$ в точке Q_i.

Граничные условия $B^{(3)},B^{(4)},B^{(34)}$ не являются нормальными, но совместны с бигармоническим оператором.

Для доопределения $B^{(3)},B^{(34)}$ достаточно добавить условие $u(Q_i)=0$. Для доопределения $B^{(4)}$ добавим условие: $\begin{cases} u(Q_i)=0 & \\ u(C)=0 & ,\ \text{C — точка на границе } \partial Q_+\\ u(D)=0 & ,\ \text{D — точка на границе } \partial Q_-\end{cases}$

Будем рассматривать краевую задачу для области K_i. Все данные задачи являются совместными, нормальными и удовлетворяют условиям Шапиро–Лопатинского, см. [1].

2. Асимптотика решения краевых задач в ограниченных областях для пространства $H^k_\beta(K_i)$. Большая часть граничных условий не позволяет говорить о том, что $u(x)\in \overset{o}{H}{}^{k+4}_\beta(K_i)$. Поэтому для этих краевых задач необходимо распространить результаты теоремы на пространства $H^{k+4}_\beta(K_i)$. В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать задачу (1) в полярных координатах.

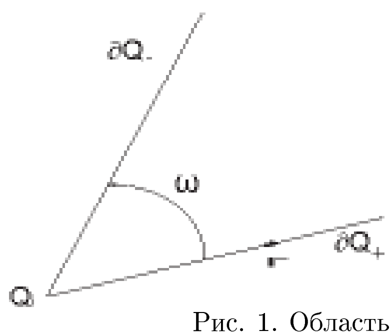

Рис. 1. Область K_i

Лемма 1. [5] *Если* $u(x) \in H^k_\beta(K_i)$, $k \geq \frac{n}{2}$, *$n-$мерное пространство(четное число) и*

$$\int\limits_l |u^{(\xi)}|^2 r^{\beta-2k+n-1+2\xi} dr < +\infty, \xi = \overline{0, k-\frac{n}{2}}, \tag{4}$$

где l — луч, проходящий через начало координат, то $u(x) \in \overset{o}{H}{}^k_\beta(K_i)$.

Доказательство в [5] в лемме 2.

Теорема 4. Об асимптотике решения краевых задач в ограниченных областях для $H^k_\beta(K_i)$ [5]. *Пусть $n = 2$ и*

$$f(x) \in H^{k_1}_{\beta_1}(K_i), g(x) \in H^{k_1+4-\overrightarrow{m}-\frac{1}{2}}_{\beta_1}(\partial Q_i),$$

$u(x) \in H^{k+4}_\beta(K_i)$, *где* $k < k_1$, $-\beta_1+2k_1 > -\beta+2k$, $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$ *— вектор, определяющий порядок операторов для каждого из граничных условий, и на прямой* $\Im m\,(\lambda) = h_1 = \frac{1}{2}(2k_1 - \beta_1 + 8 - n)$ *нет полюсов функции* $R(\lambda, \omega)$. *Тогда решение задачи (1) вблизи особой точки Q_i имеет вид*

$$\begin{aligned} u(r,\omega) = &\sum_{h<\Im m\,(\lambda_\mu)<h_1} \sum_{\sigma=1}^{J_\mu} \sum_{s=0}^{æ_\mu-1} c_{\mu\sigma s} r^{-i\lambda_\mu} (ln\ r)^s P_{\mu\sigma s q}(rln^q r) + \\ &+ \sum_{h<j<h_1} \sum_{s=0}^{æ_\mu-1} c_{js} r^j (\ln^s r) g_{js}(\omega) + u_1(r,\omega), \end{aligned} \tag{5}$$

где $h = \frac{1}{2}(2k-\beta+8-n)$, $u_1(r,\omega) \in H^{k_1+4}_{\beta_1}(K_i)$, $g_{js}(\omega) \in C^\infty(K_i)$, c_{js} *— константа,* $j \in Z$. *Остальные обозначения идентичны тем, что есть в теореме 1.*

Доказательство. Для случая $\beta = 0, \beta_1 = 0$ есть теорема 4.4 из [2]. В ней рассматривается четное n, $f(x) \in H^{k_1}(K_i)$ и $g(x) \in H^{k_1+4-\overrightarrow{m}-\frac{1}{2}}(\partial Q_i)$. Из леммы 6 [5] ясно, что существует функция $v \in H^{k_1}_\beta(K_i)$, такая, что для $u = u_1 + v$ выполняется

$$\begin{cases} \triangle^2 u_1 = f - \triangle^2 v \in \overset{o}{H}{}^k_\beta(K_i), \\ B^{\overrightarrow{m}} u_1 = g - B^{\overrightarrow{m}} v \in \overset{o}{H}{}^{k+4-\overrightarrow{m}-\frac{1}{2}}_\beta(\partial K_i). \end{cases}$$

Из леммы 4.11 [2] ясно, что существует $u_0 \in \overset{o}{H}{}^k_\beta(K_i)$ и многочлен M степени $k + 4 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, такие, что $u = u_0 + M$, где $u \in H^k_\beta(K_i)$. Тогда

$$\begin{cases} \triangle^2 u_0 = f - \triangle^2 M, \\ B^{\overrightarrow{m}} u_0 = g - B^{\overrightarrow{m}} M. \end{cases}$$

Из леммы 3.10 [2] известно, что для краевой задачи с вышеприведенной правой частью найдется решение z в виде

$$z = \sum_{j=0}^{h_1+k_1-\frac{n}{2}-1-\frac{\beta}{2}} \sum_{s=0}^{æ_\mu-1} c_{js} r^j (\ln^s r) g_{js}(\omega).$$

Нас интересует случай $z = \sum\limits_{j=h}^{h_1} \sum\limits_{s=0}^{æ_\mu - 1} c_{js} r^j (\ln^s r) g_{js}(\omega)$, так как для $j > h_1$ члены суммы будут входить в остаточный член, принадлежащий $\overset{o}{H}{}_{\beta}^{k+4}(K_i)$. Априорно известно, что $u \in \overset{o}{H}{}_{\beta}^{k+4}(K_i)$, а члены с $j < h$ не входят в этот класс. Из леммы 6 [5] следует существование такой функции v, что

$$\begin{cases} f - \triangle^2 v = f_1 \in \overset{o}{H}{}_{\beta}^{k}(K_i) \\ g - B^{\overrightarrow{m}} v = g_1 \in \overset{o}{H}{}_{\beta_1}^{k_1+4-\overrightarrow{m}-\frac{1}{2}}(\partial K_i) \end{cases} \quad v \in \overset{o}{H}{}_{\beta}^{k+4}(K_i), \beta < \beta_1.$$

Рассмотрим функцию $u_2 = u_0 - v - z \in \overset{o}{H}{}_{\beta_1}^{k}(K_i)$:

$$\begin{cases} \triangle^2 u_2 = f_2 \in \overset{o}{H}{}_{\beta}^{k}(K_i), \\ B^{\overrightarrow{m}} u_2 = g_2 \in \overset{o}{H}{}_{\beta_1}^{k_1+4-\overrightarrow{m}-\frac{1}{2}}(\partial K_i). \end{cases}$$

На основании теоремы 3.3 [2] получаем:

$$u_2(r,\omega) = \sum_{h < \Im m\,(\lambda_\mu) < h_1} \sum_{\sigma=1}^{J_\mu} \sum_{s=0}^{æ_\mu - 1} c_{\mu\sigma s} r^{-i\lambda_\mu} (ln\ r)^s P_{\mu\sigma s q}(r ln^q r) + u_1(r,\omega).$$

Отсюда получаем (5). Теорема доказана.

Случай области с конечным числом особых точек сводится к отысканию в каждой такой точке $Q_i, i = \overline{1,N}$ своего асимптотического разложения решения краевой задачи. Такое расчленение можно произвести путем введения для каждой окрестности Q_i отрезающую функцию, что и было сделано в [6, 5]. Это дает возможность во всех наших дальнейших исследованиях рассматривать нахождение асимптотического разложения решения краевой задачи только для одной конкретной точки. Из теорем Лакса–Мильграма и теорем 1 и 4 ясно, что краевые задачи (1) имеют смысл для

$$\overset{o}{H}{}_{\beta}^{k+4}(K_i) \subset H_\beta^{k+4}(K_i) \subset H^l(K_i),\ \text{если}\, k + 4 - \frac{\beta}{2} \geq 2.$$

Значит, $h = k - \frac{\beta}{2} + 4 - \frac{n}{2} \geq 2 - \frac{n}{2}$. У нас $n = 2$, поэтому $h \geq 1$. В дальнейшем $\Im m\,(\lambda_\mu) \leq 1$ нами рассматриваться не будут.

Члены асимптотики (2),(5) имеют вид, идентичный функциям из теорем 2, 3. Класс этих функций, то есть их принадлежность к определенному пространству, зависит от минимального значения $\Im m\,(\lambda_\mu)$. Из теорем 2, 3 следует, что $k - \frac{\beta}{2} < \Im m\,(\lambda_\mu) + 1$ для всех λ_μ. Отсюда следует, что общий класс $H_\beta^k(K_i)$ решения можно найти из неравенства

$$k - \frac{\beta}{2} < \min_{h < \Im m\,(\lambda_\mu) < h_1} \Im m\,(\lambda_\mu) + 1.$$

Замечание 1. *Зная минимальное значение мнимой части полюса λ_μ, можно априорно определить класс решения конкретной краевой задачи (1).*

3. Асимптотика решения краевых задач в явном виде. Найдем в явном виде асимптотику решения для каждой из вышеприведенных краевых задач. Имеются в виду основные члены асимптотики (5). То есть в полиноме $P_{\mu\sigma sq}(rln^q r)$ мы найдем коэффициенты $\varphi_\mu^{(s,\sigma)}(\omega)$ и его минимальную степень λ_μ. Именно они существенно влияют на поведение решения задачи и ее класс.

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(1)}$ (3.1)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(1-\cos 2\omega), \text{ где } \omega = \pi, 2\pi, \lambda = 2i,$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(S_0 - 2C_0\omega + C_0\sin 2\omega - S_0\cos 2\omega),$$

где $\lambda = 2i$, ω — является решением уравнения $\omega = \tan\omega$.

$$\begin{cases} \varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-b(C_b - C_a)\sin i\lambda\omega - (aS_b - BS_a)\cos i\lambda\omega + \\ +a(C_b - C_a)\sin[(i\lambda+2)\omega] + (aS_b - bS_a)\cos[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_3^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_3(-b(C_b - C_a)\cos i\lambda\omega + (aS_b - bS_a)\sin i\lambda\omega + \\ +a(C_b - C_a)\cos[(i\lambda+2)\omega] - (aS_b - bS_a\sin[(i\lambda+2)\omega]), \end{cases}$$

для

$$\begin{cases} \omega \neq \pi, 2\pi \text{ или} \\ \omega = \pi, i\lambda \neq n, n \in Z, \\ \omega = 2\pi, i\lambda \neq \frac{1}{2} + n, n \in Z, \end{cases}$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4((-b\sin i\lambda\omega + a\sin[(i\lambda+2)\omega]) + C_5(-\cos i\lambda\omega + \cos[(i\lambda+2)\omega]),$$

где

$$\omega = \begin{cases} \pi & |i\lambda = n \\ 2\pi & |i\lambda = \frac{1}{2} + n, n \in Z. \end{cases}$$

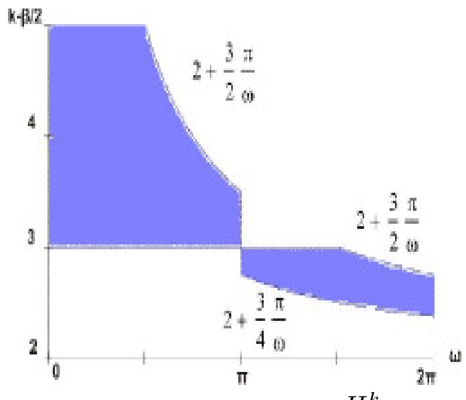

Рис. 2. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(1)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(2)}$(3.2)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1\sin 2\omega, \text{ где } \omega = \tfrac{\pi}{2}k, k = \overline{1,4}, \lambda = 2i,$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2\sin i\lambda\omega, \text{ где } \lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 = -in\tfrac{\pi}{\omega}, n \in Z,$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3\sin[(i\lambda\ +2)\omega], \text{где } \lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1, \lambda_2 = -in\tfrac{\pi}{\omega} + 2i, n \in Z.$$

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4 sin\ i\lambda\omega, \\ \varphi_4^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_4 cos\ i\lambda\omega, \\ \varphi_4^{(0,2)}(\omega) = C_4 sin[(i\lambda\ + 2)\omega], \\ \varphi_4^{(1,2)}(\omega) = i\omega C_4 cos[(i\lambda\ + 2)\omega], \lambda = \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

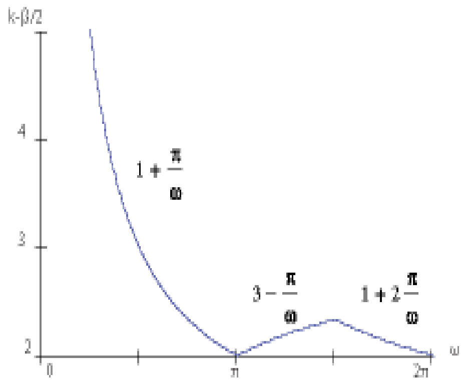

Рис. 3. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(2)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(3)}$ (3.3)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1, \\ \varphi_1^{(1,1)}(\omega) = C_1 cos2\omega, \lambda = 2i, \omega = k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2,\ \text{где}\ \lambda = 2i, \omega \neq k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4},$$

$$\begin{cases} \varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3 cos i\lambda\omega, \\ \varphi_3^{(1,1)}(\omega) = -i\omega C_3 sin i\lambda\omega, \\ \varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3 cos[(i\lambda + 2)\omega], \\ \varphi_3^{(1,1)}(\omega) = -i\omega C_3 sin[(i\lambda + 2)\omega], \lambda = \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4 cos\ i\lambda\omega,\ \text{где}\ \lambda = \lambda_1,$$
$$\varphi_5^{(0,1)}(\omega) = C_5 cos[(i\lambda + 2)\omega],\ \text{где}\ \lambda = \lambda_2.$$

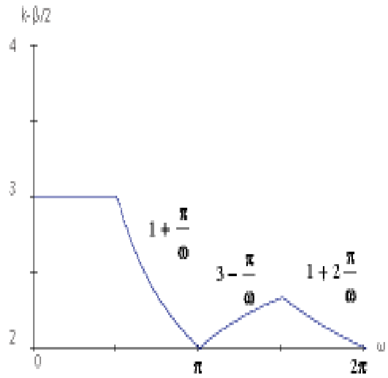

Рис. 4. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(3)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(4)}$(3.4)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(\frac{1-\nu}{1+\nu} + cos2\omega), \\ \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(-i\frac{1-\nu}{(1+\nu)^2} + i\omega sin2\omega + c_0 sin2\omega + D(\frac{1-\nu}{1+\nu} + cos2\omega)), \\ \varphi_1^{(0,2)}(\omega) = C_1 sin2\omega, \lambda = 2i, \omega = \pi, 2\pi, \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(\frac{1-\nu}{1+\nu}S_0 + (1-c_0)sin2\omega + S_0\cos 2\omega), \text{ где } \lambda = 2i, \omega \neq \pi, 2\pi.$$

$$\begin{cases} \varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3((c_b - c_a)\sin i\lambda\omega + \frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \\ -\frac{a}{b}\frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b)\cos i\lambda\omega - \frac{a}{b}\frac{B-a^2}{B-b^2}(c_b-c_a)\sin[(i\lambda+2)\omega] - \\ -\frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \frac{a}{b}\frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b)\cos[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_3^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_3((c_b - c_a)\cos i\lambda\omega + \frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \\ -\frac{a}{b}\frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b)\sin i\lambda\omega - \frac{a}{b}\frac{B-a^2}{B-b^2}(c_b-c_a)\cos[(i\lambda+2)\omega] - \\ -\frac{1}{A-a^2}((A-a^2)S_a - \frac{a}{b}\frac{B-a^2}{B-b^2}(A-b^2)S_b)\sin[(i\lambda+2)\omega]), \end{cases}$$

где $\omega \neq \pi, 2\pi$ и λ удовлетворяет уравнениям (3.29) и (3.36) из [5].

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-(A-b^2)\cos i\lambda\omega + (A-a^2)\cos[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_4^{(0,2)}(\omega) = C_4(-b(B-b^2)\sin i\lambda\omega + a(B-a^2)\sin[(i\lambda+2)\omega]), \end{cases}$$

$$\omega = \begin{cases} \pi, i\lambda = n, \\ 2\pi, i\lambda = \frac{1}{2} + n, n \in Z. \end{cases}$$

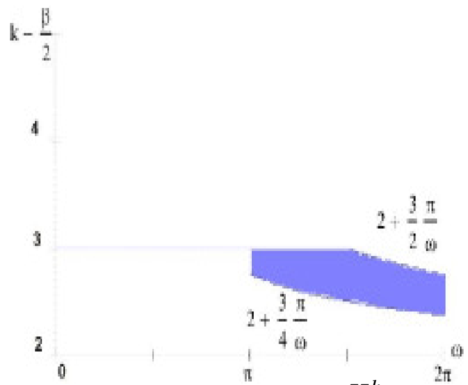

Рис. 5. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(4)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(12)}$(3.5)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(S_0 - 2c_0\omega + c_0\sin 2\omega - S_0\cos 2\omega),$$

где $\lambda = 2i, \omega$ — решение уравнения (3.22) [5].

$$\begin{cases} \varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(b(C_a - C_b)\sin i\lambda\omega - (bS_a - aS_b)\cos i\lambda\omega - \\ -a(c_a - c_b)\sin[(i\lambda+2)\omega] + (bS_a - aS_b)\cos[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_2^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_2((bS_b - aS_a)\cos i\lambda\omega - a(c_a - c_b)\sin i\lambda\omega - \\ -\frac{a}{b}(bS_b - aS_a)\cos[(i\lambda+2)\omega] + a(c_a - c_b)\sin[(i\lambda+2)\omega]), \omega \neq k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-\cos i\lambda\omega + \cos[(i\lambda+2)\omega]),\ \text{где } \omega = F,$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-b\sin i\lambda\omega + a\sin[(i\lambda+2)\omega]),\ \text{где } \omega = G.$$

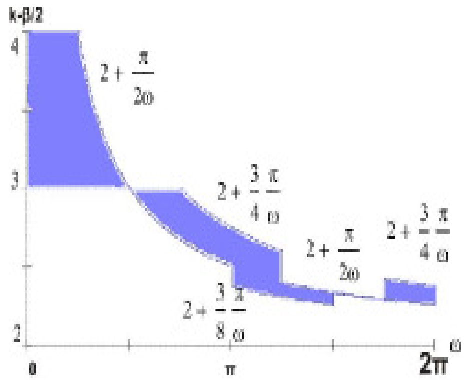

Рис. 6. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(12)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(13)}$(3.6)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(1-\cos 2\omega), \text{где } \lambda = 2i, \omega = k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4}.$$

$$\begin{cases} \varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2((bS_b - aS_a)\sin i\lambda\omega + a(c_a - c_b)\cos i\lambda\omega - \\ -\frac{a}{b}(bS_b - aS_a)\sin[(i\lambda+2)\omega] - a(c_a - c_b)\cos[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_2^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_2((bS_b - aS_a)\cos i\lambda\omega - a(c_a - c_b)\sin i\lambda\omega - \\ -\frac{a}{b}(bS_b - aS_a)\cos[(i\lambda+2)\omega] + a(c_a - c_b)\sin[(i\lambda+2)\omega]), \omega \neq k\frac{\pi}{2}, k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где λ удовлетворяет уравнениям (3.29) и (3.36) из [5].

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-b\sin i\lambda\omega + a\sin i\lambda\omega), \text{где } \omega = F,$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-\cos i\lambda\omega + \cos[(i\lambda+2)\omega]),\ \text{где } \omega = G.$$

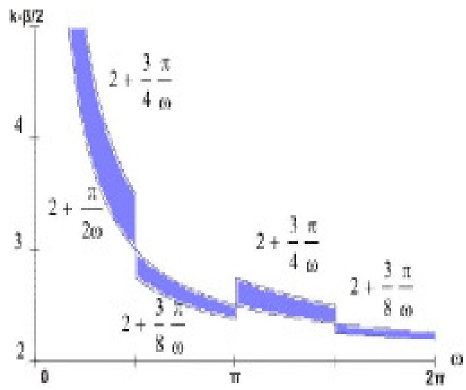

Рис. 7. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(13)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(14)}$(3.7)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(bK_1 \sin i\lambda\omega + K_2 \cos i\lambda\omega - aK_1 \sin[(i\lambda+2)\omega] - K_2 \cos[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_1^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_1(bK_1 \cos i\lambda\omega - K_2 \sin i\lambda\omega - aK_1 \cos[(i\lambda+2)\omega] + \\ +K_2 \sin[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_1^{(2,1)}(\omega) = -\omega^2 C_1(-bK_1 \sin i\lambda\omega - K_2 \cos i\lambda\omega + aK_1 \sin[(i\lambda+2)\omega] + \\ +K_2 \cos[(i\lambda+2)\omega]), \end{cases}$$

где λ — корни задачи кратности один, два или три, соответственно см. (3.3.2) [5].

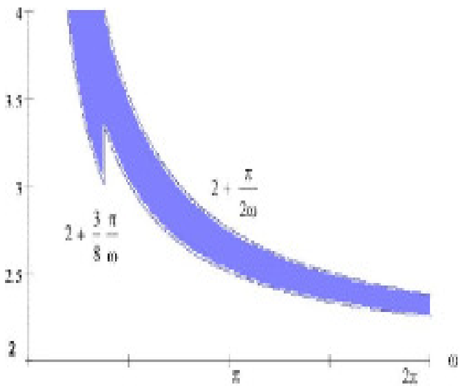

Рис. 8. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(14)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(23)}$ (3.8)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1 \sin 2\omega, \text{ где } \omega = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k = \overline{0,3}, \lambda = 2i,$$

$$\begin{cases} \varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2 \sin i\lambda\omega, \\ \varphi_2^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_2 \cos i\lambda\omega, \\ \varphi_2^{(0,2)}(\omega) = C_3 \sin[(i\lambda+2)\omega], \\ \varphi_2^{(0,2)}(\omega) = i\omega C_3 \cos[(i\lambda+2)\omega], \lambda = \lambda_3 = \lambda_4, \end{cases}$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_4 \sin i\lambda\omega, \text{ где } \lambda = \lambda_3 \neq \lambda_4,$$

$$\varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_5 \sin[(i\lambda+2)\omega], \text{ где } \lambda = \lambda_4 \neq \lambda_3.$$

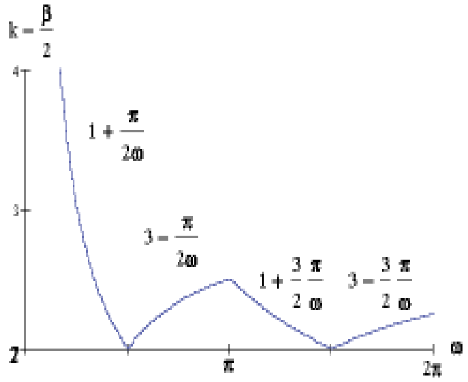

Рис. 9. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(23)}$

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(24)}$(3.9)

$$\varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1 \sin 2\omega, \text{где } \omega = \frac{\pi}{2}k, k = \overline{1,4}, \lambda = 2i,$$

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(-(A-b^2)S_b \sin i\lambda\omega + (A-a^2)S_a \sin[(i\lambda+2)\omega]), \text{ где } \omega = F,$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3(-bc_b(B-b^2)\sin i\lambda\omega + ac_a(B-a^2)\sin[(i\lambda+2)\omega]), \text{ где } \omega \neq F.$$

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-(A-b^2)S_b \sin i\lambda\omega + (A-a^2)S_a \sin[(i\lambda+2)\omega])), \\ \varphi_4^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_4(-(A-b^2)S_b \cos i\lambda\omega + (A-a^2)S_a \cos[(i\lambda+2)\omega])), \end{cases}$$

где $\omega = \frac{\pi}{2}k, k = \overline{1,4}$.

График зависимости класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(24)}$ совпадает с приведенным на рис. 7.

Для задачи (1) с краевыми условиями $B^{(34)}$(3.10)

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0,1)}(\omega) = C_1(c_0\frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega), \\ \varphi_1^{(1,1)}(\omega) = iC_1(\omega \sin 2\omega - c_0\frac{1-\nu}{(1+\nu)^2} + D(c_0\frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega)), \end{cases}$$

где $\omega = \frac{\pi}{2}k, k = \overline{1,4}$.

$$\varphi_2^{(0,1)}(\omega) = C_2(c_0\frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\omega), \text{ где } \omega \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k = \overline{0,1}, \lambda = 2i,$$

$$\varphi_3^{(0,1)}(\omega) = C_3 \cos 2\omega, \text{ где } \omega = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k = \overline{0,1}, \lambda = 2i.$$

$$\begin{cases} \varphi_4^{(0,1)}(\omega) = C_4(-C_b(A-b^2)\cos i\lambda\omega + C_a(A-a^2)\cos[(i\lambda+2)\omega]), \\ \varphi_4^{(1,1)}(\omega) = i\omega C_4(C_b(A-b^2)\sin i\lambda\omega - C_a(A-a^2)\sin[(i\lambda+2)\omega]), \end{cases}$$

где λ — корни кратности два, удовлетворяющие условиям (3.29), (3.36) из [5].

$$\varphi_5^{(0,1)}(\omega) = C_5(-C_b(A-b^2)\cos i\lambda\omega + C_a(A-a^2)\cos[(i\lambda+2)\omega]), \text{ где } \omega \neq F,$$

$\varphi_6^{(0,1)}(\omega) = C_6(-bS_b(B-b^2)\cos i\lambda\omega + aS_a(B-a^2)\cos[(i\lambda+2)\omega])$, где $\omega = F$.

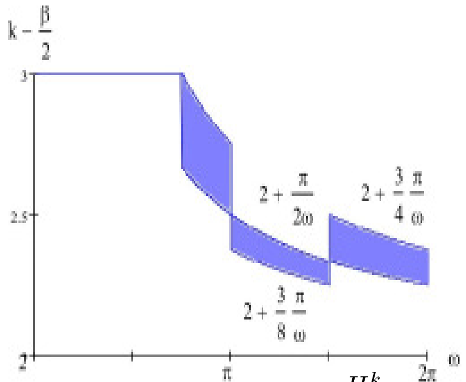

Рис. 10. Зависимость класса решения H_β^k от угла ω для условий $B^{(34)}$

Где ν — коэффициент Пуассона, а $a, b, c_0, c_a, c_b, S_0, S_a, S_b, K_1, K_2, A, B, F, G$ определены в работе [5].

Замечание 2. *Закрашенные области графиков ограничивают возможное значение H_β^k для решения задачи. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — полюса краевой задачи.*

Заключение. Результаты можно распространить на другие эллиптические краевые задачи. При расчетах для конкретных задач данные априорные оценки поведения решения вблизи особых точек позволяют выбирать оптимальный шаг разбиения области. Сгенерированная сетка позволяет при минимальном количестве узлов гарантировать получение решения задачи с фиксированной точностью.

1. **Агранович М. С.** Общие краевые задачи [текст] / М. С. Агранович, М. И. Вишик // Успехи математических наук. – Т. 20. – № 5. – 1965. – С. 102–132.
2. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи в негладких областях [текст] / В. А. Кондратьев // Труды Московского математического общества. – Т. 16. – 1967. – С. 209–292.
3. **Назаров С. А.** Эллиптические задачи с кусочно–гладкой границей [текст] / С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. – М.: Наука, 1991. – 336 с.
4. **Масловская Л. В.** Поведение решений краевых задач для бигармонического уравнения в областях с угловыми точками [текст] / Л. В. Масловская // Дифференциальные уравнения. – Т. 19. – № 12. – 1983. – С. 2172–2175.
5. **Орлов С. В.** Асимптотика решения краевых задач для бигармонических операторов в окрестности угловых точек и точек смены граничных условий [текст] / С. В. Орлов, Л. В. Масловская. – Киев, 1989. – 62 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 21.03.89, №830–Ук89.
6. **Grisvard P.** Elliptic problem in nonsmooth domains [text] / P. Grisvard // – Boston-London-Melbourne, University of Nice, Pitman advanced publishing program. – 1985. – 327 p.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 74–84

УДК 517.929

К. В. Пасюк
Буковинська державна фінансова академія

ПРО ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ НЕЛІНІЙНИХ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Пасюк К. В. Про існування інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь. Одержано достатні умови існування в просторі обмежених числових послідовностей інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь.
Ключові слова: диференціально-різницеві рівняння, інваріантні тори, функція Гріна–Самойленка.

Пасюк К. В. О существовании инвариантных торов нелинейных счетных систем дифференциально-разностных уравнений. Получены достаточные условия существования в пространстве ограниченных числовых последовательностей инвариантных торов нелинейных счетных систем дифференциально-разностных уравнений.
Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, инвариантные торы, функция Грина–Самойленко.

Pasyuk K. V. On existence of invariant tors for nonlinear countable systems of differential-difference equations. In the space of bounded number sequences, sufficient conditions for existence of invariant tors for nonlinear countable systems of differential-difference equations are established.
Key words: differential-difference equations, invariant tors, Green–Samoilenko function.

Вступ. У цій роботі продовжено дослідження, розпочаті в статті [1]. Тут знайдено достатні умови існування в просторі обмежених числових послідовностей інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, що визначені на нескінченновимірних торах і містять нескінченну множину різнознакових сталих відхилень скалярного аргументу. Доведені теореми добре узгоджуються з результатами, що стосуються існування інваріантних торів зліченних систем диференціальних та різницевих рівнянь, визначених на торах, одержаними в монографіях [2, 3].

Основні результати.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P_1(x(t), x(t+Q))x(t) + \\ +F(v(\varphi,t), x(t), x(t+\Theta))x(t+\Delta) + c(\varphi,t), \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots) \in \mathcal{T}_\infty$; відображення $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), a_2(\varphi), a_3(\varphi), \dots\}$ визначено періодичними $\forall i \in N$ відносно координат $\varphi_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ з періодом 2π функціями $a_i(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to R^1$, $\mathcal{T}_\infty$ — нескінченновимірний тор; N — множина натуральних чисел, $\mathfrak{M}$ — простір обмежених числових послідовностей $x =$

$= (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots)$ зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i \{|x_i|\}$; $\varphi_t(\varphi) = (\varphi_{1_t}(\varphi), \varphi_{2_t}(\varphi), \dots)$ — розв'язок першого рівняння системи (1), що визначений на всій осі і задовольняє початковій умові $\varphi = \varphi_0(\varphi)$, причому цей розв'язок є неперервним відносно t відображенням $R^1 \to \mathfrak{M}$. Диференціювання та інтегрування векторних функцій тут і надалі розумітимемо лише у покоординатному сенсі. Функція

$$c(\varphi,t) = (c_1(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t), \dots), c_2(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t), \dots), \dots)$$

здійснює відображення множини $\mathcal{T}_\infty^\infty = \mathcal{T}_\infty \times \mathcal{T}_\infty \times \dots$ у простір $\mathfrak{M}$, тобто $c_i(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t), \dots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1$ для будь-якого натурального числа i; точки $z_i(\varphi,t) = \left(\varphi_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\varphi), \varphi_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\varphi), \dots\right)$ $\forall t \in R^1$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Δ_{ij} — довільні фіксовані дійсні числа, $\{i,j\} \subset N$. Функція

$$v = v(\varphi,t) =$$

$$= (v_1(\psi_1(\varphi,t), \psi_2(\varphi,t), \dots), v_2(\psi_1(\varphi,t), \psi_2(\varphi,t), \dots), \dots)$$

теж відображує простір $\mathcal{T}_\infty^\infty$ в $\mathfrak{M}$, тобто $v_i(\psi_1(\varphi,t), \psi_2(\varphi,t), \dots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1$ $\forall i \in N$; точки $\psi_i(\varphi,t) = \left(\varphi_{1_{t+\Theta_{i1}}}(\varphi), \varphi_{2_{t+\Theta_{i2}}}(\varphi), \dots\right)$ $\forall t \in R^1$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Θ_{ij} — довільні дійсні числа. При цьому $x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1), x_2(t+ +\Delta_2), \dots)$; $x(t+\Theta) = (x_1(t+\Theta_1), x_2(t+\Theta_2), \dots)$ та $x(t+Q) = (x_1(t+Q_1), x_2(t+Q_2), \dots)$, де Δ_i, Θ_i та Q_i — довільні дійсні числа, $i \in N$.

Надалі будемо вважати, що множини відхилень Δ_{ij}, Δ_i, Θ_{ij}, Θ_i та Q_i аргументу t обмежені, тобто $|\Delta_{ij}| \le \Delta^*$, $|\Delta_i| \le \Delta_*$, $|\Theta_{ij}| \le \Theta^*$, $|\Theta_i| \le \Theta_*$ та $|Q_i| \le Q_*$ $\forall \{i,j\} \subset N$, де $\Delta^*, \Delta_*, \Theta^*, \Theta_*, Q_*$ — додатні сталі.

Через $P_1(x,\chi) = \left[p_{ij}^1(x,\chi)\right]_{i,j=1}^\infty$ та $F(v,x,\chi) = [f_{ij}(v,x,\chi)]_{i,j=1}^\infty$ позначено нескінченні матриці, що визначені на множинах $D_* = D \times D$ і D^* відповідно, де $D^* = D_0 \times D \times D$, $D = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \le d = const > 0\}$, $D_0 = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \le V^0 = const > 0\}$, тобто $\{x,\chi\} \subset D$, $v \in D_0$. Норму матриці $P = [p_{ij}]_{i,j=1}^\infty$, узгоджену з векторною нормою простору $\mathfrak{M}$, визначимо рівністю $\|P\| = \sup_i \sum_{j=1}^\infty |p_{ij}|$.

Наступні коефіцієнтні умови назвемо умовами ($\mathbf{V}^*$):

1) $\forall \{\varphi,\psi\} \subset \mathcal{T}_\infty$ $\|a(\varphi)\| = \sup_i \{|a_i(\varphi)|\} \le A = const > 0$ і $\|a(\varphi) - a(\psi)\| \le \alpha \|\varphi - \psi\|$, де $\alpha = const > 0$;

2) для функції $c(\varphi,t)$ виконуються умови:

а) її координати $c_i(z) = c_i(z_1, z_2, \dots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора z_j для будь-яких натуральних i та j;

б) функції $c_i(z)$ неперервні відносно z на $\mathcal{T}_\infty^\infty$ і рівномірно обмежені на цій множині, тобто $\|c(z)\| = \sup_i |c_i(z)| \le C^0 = const > 0$ $(i = 1,2,3,\dots)$;

в) $\forall \{z,\bar{z}\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty$ $\|c(z) - c(\bar{z})\| \le \eta \|z - \bar{z}\|$, $\eta = const > 0$;

3) для функції $v(\varphi,t)$ виконуються умови:

а) її координати $v_i(\psi_1, \psi_2, \dots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора ψ_j для будь-яких натуральних i та j;

б) $\forall \{\psi,\bar{\psi}\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty$ справджуються нерівності $\|v(\psi) - v(\bar{\psi})\| \le \zeta \|\psi - \bar{\psi}\|$, $\|v(\psi)\| \le V^0$, де $\zeta = const > 0$;

4) $\forall i \in N$ справджуються нерівності

$$\sum_{j=1}^\infty \sup_{(x,\chi) \in D_*} |p_{ij}^1(x,\chi)| \le P^0 = const < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(v,x,\chi)\in D^*} |f_{ij}(v,x,\chi)| \le F_0 = const < \infty;$$

5) матриці $P_1(x,\chi)$ та $F(v,x,\chi)$ задовольняють умовам Ліпшіца на D_* та D^* відповідно, тобто $\forall\ \{(x,\chi),(\bar{x},\bar{\chi})\} \subset D_*$ і $\forall\ \{(v,x,\chi),(\bar{v},\bar{x},\bar{\chi})\} \subset D^*$ мають місце оцінки

$$\|P_1(x,\chi) - P_1(\bar{x},\bar{\chi})\| \le \xi_2^*\|x-\bar{x}\| + \xi_3^*\|\chi-\bar{\chi}\|,$$

$$\|F(v,x,\chi) - F(\bar{v},\bar{x},\bar{\chi})\| \le \xi_1\|v-\bar{v}\| + \xi_2\|x-\bar{x}\| + \xi_3\|\chi-\bar{\chi}\|,$$

де $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_2^*,\xi_3^*$ — додатні сталі.

Зауважимо, що при умові 1 з ($\mathbf{V}^*$) для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ існує єдиний вказаний вище розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ (див. [2]).

Інваріантним тором $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1) називають множину точок $x \in \mathfrak{M}$, породжену векторною функцією $x = u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, яка є 2π-періодичною відносно φ_i $(i = 1,2,3,\dots)$, обмежена за нормою і при будь-яких $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $t \in R^1$ задовольняє рівності

$$\begin{aligned}\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P_1(u(\varphi_t(\varphi)), u(\varphi,t+Q))u(\varphi_t(\varphi)) + \\ +F(v(\varphi,t), u(\varphi_t(\varphi)), u(\varphi,t+\Theta))u(\varphi,t+\Delta) + c(\varphi,t),\end{aligned} \tag{2}$$

де $u(\varphi,t+\Theta) = (u_1(\varphi_{t+\Theta_1}(\varphi)), u_2(\varphi_{t+\Theta_2}(\varphi)),\dots)$, символи $u(\varphi,t+Q)$ та $u(\varphi,t+\Delta)$ мають аналогічний сенс.

Задача полягає у відшуканні достатніх умов існування інваріантного тору $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1).

2. Допоміжні твердження. Оберемо будь-яку обмежену за нормою сталою P^0 матрицю $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty}$ з 2π-періодичними відносно φ_i, $i \in N$, елементами, яка задовольняє умові Ліпшіца з коефіцієнтом ξ_1^* на $\mathcal{T}_\infty$, для якої рівняння

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x \tag{3}$$

має ФГС і не має жодного обмеженого на всій числовій прямій розв'язку, крім нульового. Через ФГС тут позначено функцію Гріна–Самойленка

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при} \quad \tau \le 0; \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - E] & \text{при} \quad \tau > 0 \end{cases}$$

рівняння (3), яка для всіх $\tau \in R^1$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ задовольняє нерівність

$$\|G_0(\tau,\varphi)\| \le K\exp\{-\gamma|\tau|\},$$

де K і γ — додатні сталі, що не залежать від φ,τ, $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — матрицант рівняння (3), $C(\varphi)$ — 2π-періодична відносно φ_i $(i = 1,2,3,\dots)$ та обмежена за нормою нескінченна матриця, E — нескінченна одинична матриця. Про існування ФГС та її властивості докладно написано в монографії [2].

Систему рівнянь (1) подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) + P_2(\varphi_t(\varphi), x(t), x(t+Q))x(t) + \\ +F(v(\varphi,t), x(t), x(t+\Theta))x(t+\Delta) + c(\varphi,t),\end{aligned} \tag{4}$$

де $P_2(\varphi_t(\varphi), x(t), x(t+Q)) = P_1(x(t), x(t+Q)) - P(\varphi_t(\varphi))$.

Нехай $u^0(\varphi)$ — будь-яка функція, що має такі властивості: вона є 2π-періодичною відносно φ_i $\forall i \in N$ і на торі $\mathcal{T}_\infty$ задовольняє умові Гельдера з коефіцієнтом U^0 та показником $\frac{\nu}{2(\nu+1)}$, де ν обрано з умови $\frac{\nu\alpha}{\nu+1} < \gamma$, причому $\|u^0(\varphi)\| \le d$ на $\mathcal{T}_\infty$.

Разом з рівнянням (4) розглянемо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) + c^0(\varphi, t), \tag{5}$$

де

$$c^0(\varphi,t) = P_2^0(\varphi,t)u^0(\varphi_t(\varphi)) + F^0(\varphi,t)u^0(\varphi,t+\Delta) + c(\varphi,t),$$
$$P_2^0(\varphi,t) = P_2(\varphi_t(\varphi), u^0(\varphi_t(\varphi)), u^0(\varphi, t+Q)),$$
$$F^0(\varphi,t) = F(v(\varphi,t), u^0(\varphi_t(\varphi)), u^0(\varphi, t+\Theta)).$$

Лема 1. *Якщо виконуються умови* ($\mathbf{V}^*$)*, то рівняння (5) має інваріантний тор* $\mathcal{T}^1$*, породжений функцією*

$$u^1(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi)c^0(\varphi,\tau)d\tau, \tag{6}$$

що задовольняє умові Гельдера відносно φ*, тобто* $\forall\{\varphi,\bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u^1(\varphi) - u^1(\bar\varphi)\| \le U^1\|\varphi - \bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu-1)}},$$

де U^1 *— додатна стала.*

Доведення леми 1. Неважко перевірити, що $\|c^0(\varphi,\tau)\| \le (2P^0 + F_0)d + C^0 = C_*^0$ і координати вектор-функції $c^0(\varphi,\tau)$ неперервні відносно τ на R^1, а отже невласний інтеграл у рівності (6) збігається рівномірно відносно $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ у покоординатному сенсі і визначає інваріантний тор рівняння (5), причому $\|u^1(\varphi)\| \le \le \frac{2KC_*^0}{\gamma}$. Переконаємося, що функція $u^1(\varphi)$ задовольняє умові Гельдера.

Очевидно, що $\forall\{\varphi,\bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u^1(\varphi) - u^1(\bar\varphi)\| \le I^1 + I^2,$$

де

$$I^1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\varphi) - G_0(\tau,\bar\varphi)\|\|c^0(\varphi,\tau)\|d\tau,$$

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\bar\varphi)\|\|c^0(\varphi,\tau) - c^0(\bar\varphi,\tau)\|d\tau,$$

причому за аналогією до доведення теореми 8.2 з [2] легко переконатися, що $I^1 \le S_1\|\varphi - \bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де

$$S_1 = \frac{4C_*^0}{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{\nu+1}}K^3(2P^0(\xi_1^*)^\nu)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо аналогічну оцінку для інтеграла I^2.

Використавши позначення

$$\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|t|\right\}\|\varphi-\bar{\varphi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}=\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\},$$

$$\left\{2V^0\left\{2V^0\zeta^\nu\right\}^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}=V_*^0,$$

$$K_\nu=\left\{2C^0\left[2C^0(\eta\exp\{\alpha\Delta^*\})^\nu\right]^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

неважко переконатися в правильності нерівностей

$$\|c(\varphi,t)-c(\bar{\varphi},t)\|\le K_\nu\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};$$
$$\|v(\varphi,t)-v(\bar{\varphi},t)\|\le V_*^0\exp\{\alpha\Theta^*\}\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};$$
$$\|u^0(\varphi_t(\varphi))-u^0(\varphi_t(\bar{\varphi}))\|\le U^0\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};$$
$$\|u^0(\varphi,t+\Delta)-u^0(\bar{\varphi},t+\Delta)\|\le U^0\exp\{\alpha\Delta_*\}\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};$$
$$\|u^0(\varphi,t+\Theta)-u^0(\bar{\varphi},t+\Theta)\|\le U^0\exp\{\alpha\Theta_*\}\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};$$
$$\|u^0(\varphi,t+Q)-u^0(\bar{\varphi},t+Q)\|\le U^0\exp\{\alpha Q_*\}\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\}.$$

З четвертої умови $(\mathbf{V}^*)$ та останніх нерівностей випливають оцінки

$$\begin{gathered}\|F^0(\varphi,t)u^0(\varphi,t+\Delta)-F^0(\bar{\varphi},t)u^0(\bar{\varphi},t+\Delta)\|\le\\ \le\|F^0(\varphi,t)-F^0(\bar{\varphi},t)\|\|u^0(\varphi,t+\Delta)\|+\\ +\|F^0(\bar{\varphi},t)\|\|u^0(\varphi,t+\Delta)-u^0(\bar{\varphi},t+\Delta)\|\le\\ \le\{\xi_1\|v(\varphi,t)-v(\bar{\varphi},t)\|+\xi_2\|u^0(\varphi_t(\varphi))-u^0(\varphi_t(\bar{\varphi}))\|+\\ +\xi_3\|u^0(\varphi,t+\Theta)-u^0(\bar{\varphi},t+\Theta)\|\}d+F_0\|u^0(\varphi,t+\Delta)-u^0(\bar{\varphi},t+\Delta)\|\le\\ \le F_0^*\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\},\end{gathered}\tag{7}$$

де через F_0^* позначено додатну сталу

$$\left[\xi_1V_*^0\exp\{\alpha\Theta^*\}+(\xi_2+\xi_3\exp\{\alpha\Theta_*\})U^0\right]d+F_0U^0\exp\{\alpha\Delta_*\}.$$

Введемо позначення

$$\left\{2P^0\left\{2P^0(\xi_1^*)^\nu\right\}^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}=P_*=const>0,$$
$$\{\xi_2^*+\xi_3^*\exp\{\alpha Q_*\}\}U^0=P_{**}=const>0,$$
$$P_*+P_{**}=P_{***},\quad dP_{***}+2P^0U^0=\Lambda_1$$

і запишемо наступні нерівності:

$$\begin{gathered}\|P(\varphi_t(\varphi))-P(\varphi_t(\bar{\varphi}))\|\le P_*\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};\\ \|P_1(u^0(\varphi_t(\varphi)),u^0(\varphi,t+Q))-P_1(u^0(\varphi_t(\bar{\varphi})),u^0(\bar{\varphi},t+Q)))\|\le\\ \le P_{**}\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};\\ \|P_2^0(\varphi,t)-P_2^0(\bar{\varphi},t)\|\le\|P_1(u^0(\varphi_t(\varphi)),u^0(\varphi,t+Q))-\\ -P_1(u^0(\varphi_t(\bar{\varphi})),u^0(\bar{\varphi},t+Q)))\|+\|P(\varphi_t(\varphi))-P(\varphi_t(\bar{\varphi}))\|\le\\ \le P_{***}\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\};\\ \|P_2^0(\varphi,t)u^0(\phi_t(\varphi))-P_2^0(\bar{\varphi},t)u^0(\varphi_t(\bar{\varphi}))\|\le\\ \le\|P_2^0(\varphi,t)-P_2^0(\bar{\varphi},t)\|\|u^0(\varphi_t(\varphi))\|+\\ +\|P_2^0(\bar{\varphi},t)\|\|u^0(\varphi_t(\varphi))-u^0(\varphi_t(\bar{\varphi}))\|\le\Lambda_1\exp\{\varphi,\bar{\varphi},\nu,t\}.\end{gathered}\tag{8}$$

З нерівностей (7) та (8) випливають співвідношення

$$\|c^0(\varphi,t)-c^0(\bar\varphi,t)\| \le \|P_2^0(\varphi,t)u^0(\varphi_t(\varphi))-P_2^0(\bar\varphi,t)u^0(\varphi_t(\bar\varphi))\|+$$

$$+\|F^0(\varphi,t)u^0(\varphi,t+\Delta)-F^0(\bar\varphi,t)u^0(\bar\varphi,t+\Delta)\|+\|c(\varphi,t)-c(\bar\varphi,t)\|\le$$

$$\le(\Lambda_1+F_0^*+K_\nu)\exp\{\varphi,\bar\varphi,\nu,t\},$$

що приводять до оцінки

$$I^2\le S_2\|\varphi-\bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu-1)}},$$

де

$$S_2=\frac{2K}{\gamma-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}(\Lambda_1+F_0^*+K_\nu)=const>0.$$

Таким чином, $\forall\{\varphi,\bar\varphi\}\subset\mathcal{T}_\infty$ справджується нерівність

$$\|u^1(\varphi)-u^1(\bar\varphi)\|\le(S_1+S_2)\|\varphi-\bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu-1)}},$$

що завершує доведення леми, якщо число S_1+S_2 позначити через U^1.

Запишемо формальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=P(\varphi_t(\varphi))x(t)+c^k(\varphi,t), \tag{9}$$

де

$$c^k(\varphi,t)=P_2^k(\varphi,t)u^k(\varphi_t(\varphi))+F^k(\varphi,t)u^k(\varphi,t+\Delta)+c(\varphi,t),$$

$$P_2^k(\varphi,t)=P_2(\varphi_t(\varphi),u^k(\varphi_t(\varphi)),u^k(\varphi,t+Q)),$$

$$F^k(\varphi,t)=F(v(\varphi,t),u^k(\varphi_t(\varphi)),u^k(\varphi,t+\Theta)),$$

і сформулюємо наступне твердження.

Лема 2. *[Індуктивна лема]. Нехай виконуються умови леми 1 і справджуються нерівності*

$$2K(2P^0+F_0)<\gamma,\quad \frac{2KC^0}{\gamma-2K(2P^0+F_0)}\le d.$$

Тоді $\forall k\in N\cup\{0\}$ *рекурентне рівняння (9) визначає в просторі* $\mathfrak{M}$ *інваріантний тор* $\mathcal{T}^{k+1}$*, породжений функцією*

$$x=u^{k+1}(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)c^k(\varphi,\tau)d\tau,$$

що задовольняє умові Гельдера

$$\|u^{k+1}(\varphi)-u^{k+1}(\bar\varphi)\|\le U^{k+1}\|\varphi-\bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}\quad\forall\{\varphi,\bar\varphi\}\subset\mathcal{T}_\infty \tag{10}$$

і обмежена на $\mathcal{T}_\infty$ *сталою* d*, тобто* $\|u^{k+1}(\varphi)\|\le d$ *і* $U^{k+1}=const>0$.

Доведення леми 1. Доведення леми проводиться методом повної математичної індукції відносно k і не становить труднощів, тому ми його тут не наводимо.

3. Основний результат. Наступне твердження пропонує достатні умови збіжності послідовності $\{u^k(\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ до функціїї $u(\varphi)$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови леми 1 і справджуються нерівності*

$$2K\left\{\left[C^0(\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*)\right]^{\frac{1}{2}}+2P^0+F_0\right\}<\gamma, \tag{11}$$

$$\left(\frac{C^0}{\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*}\right)^{\frac{1}{2}}\le d<\frac{\gamma-2K(2P^0+F_0)}{2(\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*)K}. \tag{12}$$

Тоді виконуються умови леми 2 і послідовність $\{u^k(\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ рівномірно відносно $\varphi\in\mathcal{T}_\infty$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ до неперервної функціїї $u(\varphi):\mathcal{T}_\infty\to\mathfrak{M}$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1).

Якщо, крім того, $\gamma>\gamma_1$, де

$$\gamma_1:=2K\left\{d(\xi_2+\xi_3\exp\{\alpha\Theta_*\}+\xi_2^*+\xi_3^*\exp\{\alpha Q_*\})+\right.$$
$$\left.+2P^0+F_0\exp\{\alpha\Delta_*\}\right\},$$

то ця функція задовольняє умові Гельдера, тобто $\forall\{\varphi,\bar\varphi\}\subset\mathcal{T}_\infty$

$$\|u(\varphi)-u(\bar\varphi)\|\le U\|\varphi-\bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},\quad U=const>0, \tag{13}$$

де стала ν обирається з умови $\gamma-\frac{\alpha\nu}{\nu+1}>\gamma_1$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що з нерівності (11) безпосередньо випливає нерівність

$$\left(\frac{C^0}{\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*}\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\gamma-2K(2P^0+F_0)}{2(\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*)K},$$

тобто співвідношення (12) має сенс. Крім того, з (11), (12) випливають оцінки

$$2K\left\{(\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*)d+2P^0+F_0\right\}<\gamma,$$

$$\frac{2KC^0}{\gamma-2K(2P^0+F_0)}<d.$$

Перша з них очевидна, а друга випливає з ланцюжка нерівностей

$$\frac{C^0}{(\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*)d}\le d,$$

$$\frac{C^0}{(\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*)d+(2P^0+F_0)-(2P^0+F_0)}\le d,$$

$$\frac{2KC^0}{2K(\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*)d+2K(2P^0+F_0)-2K(2P^0+F_0)}\le d,$$

$$\frac{2KC^0}{\gamma - 2K(2P^0 + F_0)} <$$

$$< \frac{2KC^0}{2K(\xi_2 + \xi_3 + \xi_2^* + \xi_3^*)d + 2K(2P^0 + F_0) - 2K(2P^0 + F_0)} \le d.$$

Таким чином, умови індуктивної леми 2 виконуються. Тепер, ввівши позначення

$$\|u^k(\varphi) - u^{k-1}(\varphi)\|_0 = \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} \|u^k(\varphi) - u^{k-1}(\varphi)\|,$$

неважко переконатися в правильності нерівностей

$$\|P_2^k(\varphi,t) - P_2^{k-1}(\varphi,t)\| \le (\xi_2^* + \xi_3^*)\|u^k(\varphi) - u^{k-1}(\varphi)\|_0,$$

$$\|F^k(\varphi,t) - F^{k-1}(\varphi,t)\| \le (\xi_2 + \xi_3)\|u^k(\varphi) - u^{k-1}(\varphi)\|_0,$$

$$\|c^k(\varphi,t) - c^{k-1}(\varphi,t)\| \le \|P_2^k(\varphi,t) - P_2^{k-1}(\varphi,t)\|\|u^k(\varphi_t(\varphi))\| +$$

$$+ \|P_2^{k-1}(\varphi,t)\|\|u^k(\varphi_t(\varphi)) - u^{k-1}(\varphi_t(\varphi))\| +$$

$$+ \|F^k(\varphi,t) - F^{k-1}(\varphi,t)\|\|u^k(\varphi,t+\Delta)\| +$$

$$+ \|F^{k-1}(\varphi,t)\|\|u^k(\varphi,t+\Delta) - u^{k-1}(\varphi,t+\Delta)\| \le$$

$$\le \left\{(\xi_2 + \xi_3 + \xi_2^* + \xi_3^*)d + 2P^0 + F_0\right\}\|u^k(\varphi) - u^{k-1}(\varphi)\|_0,$$

з яких випливає індуктивна оцінка

$$\|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\|_0 \le$$

$$\le \frac{2K}{\gamma}\left\{(\xi_2 + \xi_3 + \xi_2^* + \xi_3^*)d + 2P^0 + F_0\right\}\|u^k(\varphi) - u^{k-1}(\varphi)\|_0,$$

що приводить до нерівності

$$\|u^{k+1}(\varphi) - u^k(\varphi)\|_0 \le \left(\frac{2K[(\xi_2 + \xi_3 + \xi_2^* + \xi_3^*)d + 2P^0 + F_0]}{\gamma}\right)^k 2d.$$

Це означає, що при $2K[(\xi_2 + \xi_3 + \xi_2^* + \xi_3^*)d + 2P^0 + F_0] < \gamma$ послідовність $\{u^k(\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною у повному метричному просторі $\mathfrak{M}$. Отже, ця послідовність рівномірно відносно $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ до неперервної на $\mathcal{T}_\infty$ функції $u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$.

Залишається показати, що ця функція визначає інваріантний тор системи рівнянь (1). При всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ справджуються тотожності

$$\frac{du^{k+1}(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))u^{k+1}(\varphi_t(\varphi)) +$$

$$+ P_1(u^k(\varphi_t(\varphi)), u^k(\varphi, t+Q))u^k(\varphi_t(\varphi)) -$$

$$- P(\varphi_t(\varphi))u^k(\varphi_t(\varphi)) +$$

$$+ F(v(\varphi,t), u^k(\varphi_t(\varphi)), u^k(\varphi, t+\Theta))u^k(\varphi, t+\Delta) + c(\varphi,t), \qquad (14)$$

тобто у покоординатному вигляді одержуємо рівності

$$\frac{du_s^{k+1}(\varphi_t(\varphi))}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} \{p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j^{k+1}(\varphi_t(\varphi))+$$

$$+p_{sj}^1(u^k(\varphi_t(\varphi)), u^k(\phi, t+Q))u_j^k(\varphi_t(\varphi))-$$

$$-p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j^k(\varphi_t(\varphi))+$$

$$+f_{sj}(v(\varphi,t), u^k(\varphi_t(\varphi)), u^k(\varphi, t+\Theta))u_j^k(\varphi, t+\Delta)\big\} + c_j(\varphi, t),$$

де $s = 1, 2, \ldots, \varphi \in \mathcal{T}_\infty$. Очевидно, що $\forall s \in N$ ряди, що знаходяться в правих частинах останніх рівностей, збігаються рівномірно відносно k, $t \in R^1$ та $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, оскільки вони мажоруються збіжним числовим рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{2 \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_\infty} |p_{sj}(\varphi)| + \sup_{(x,\chi)\in D_*} |p_{sj}^1(x,\chi)| + \sup_{(v,x,\chi)\in D^*} |f_{sj}(v,x,\chi)|\}d.$$

Це дає можливість у рівності (14) перейти у покоординатному сенсі до границі при $k \to \infty$ і одержати тотожність (2). При умові, що $U^k \leq U$ $\forall k \in N$, для доведення нерівності (13) достатньо перейти до границі при $k \to \infty$ у нерівності (10), замінивши U^k на U.

Переконаємося, що остання умова виконується. Неважко перевірити, що у нерівності (10) можна покласти

$$U^k = S_1 + \frac{2K}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}} \left\{K_\nu + \left[\xi_1 V_*^0 \exp\{\alpha\Theta^*\}+\right.\right.$$

$$\left. + \,(\xi_2 + \xi_3 \exp\{\alpha\Theta_*\})U^{k-1}\right] d + F_0 U^{k-1}\exp\{\alpha\Delta_*\}+$$

$$\left. + \,d\left[P_* + (\xi_2^* + \xi_3^* \exp\{\alpha Q_*\})U^{k-1}\right] + 2P^0 U^{k-1}\right\},$$

де від $k \in N$ залежать лише числа U^{k-1}.

Одержуємо індуктивну рівність

$$U^{k+1} - U^k = \frac{2K}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}} \{d(\xi_2 + \xi_3 \exp\{\alpha\Theta_*\} + \xi_2^*+$$

$$+\xi_3^* \exp\{\alpha Q_*\}) + 2P^0 + F_0 \exp\{\alpha\Delta_*\}\}\,(U^k - U^{k-1}),$$

з якої випливає обмеженість послідовності $\left\{U^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, що завершує доведення теореми.

Зауваження 1. *Неоднозначність вибору функції $u^0(\varphi)$ при побудові ітераційного процесу не приводить до зміни функції $u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1).*

Доведемо це твердження. Замість $u^0(\varphi)$ оберемо іншу початкову функцію $\bar{u}^0(\varphi)$ і розглянемо рекурентну послідовність

$$\bar{u}^{k+1}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi)\bar{c}^k(\varphi,\tau)d\tau,$$

де

$$\bar{c}^k(\varphi,t) = \bar{P}_2^k(\varphi,t)\bar{u}^k(\varphi_t(\varphi)) + \bar{F}^k(\varphi,t)\bar{u}^k(\varphi,t+\Delta) + c(\varphi,t),$$
$$\bar{P}_2^k(\varphi,t) = P_2(\varphi_t(\varphi),\bar{u}^k(\varphi_t(\varphi)),\bar{u}^k(\varphi,t+Q)),$$
$$\bar{F}^k(\varphi,t) = F(v(\varphi,t),\bar{u}^k(\varphi_t(\varphi)),\bar{u}^k(\varphi,t+\Theta)).$$

Провівши нескладні з ідейної точки зору, але достатньо громіздкі перетворення, переконуємося, що справджуються такі оцінки:

$$\|u^{k+1}(\varphi) - \bar{u}^{k+1}(\varphi)\| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\varphi)\|\|c^k(\varphi,\tau) - \bar{c}^k(\varphi,\tau)\|d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\gamma|\tau|}\left\{d\left[\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*\right]+2P^0+F_0\right\}\times$$

$$\times\|u^k(\varphi) - \bar{u}^k(\varphi)\|_0 d\tau \le$$

$$\le \frac{2k\left\{d\left[\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*\right]+2P^0+F_0\right\}}{\gamma}\|u^k(\varphi) - \bar{u}^k(\varphi)\|_0,$$

з яких випливає нерівність

$$\|u^{k+1}(\varphi) - \bar{u}^{k+1}(\varphi)\| \le$$

$$\le \left\{\frac{2k\left\{d\left[\xi_2+\xi_3+\xi_2^*+\xi_3^*\right]+2P^0+F_0\right\}}{\gamma}\right\}^{k+1}\|u^0(\varphi) - \bar{u}^0(\varphi)\|_0.$$

При умовах теореми одержуємо співвідношення

$$\lim_{k\to\infty}\|u^{k+1}(\varphi) - \bar{u}^{k+1}(\varphi)\| = 0,$$

яке завершує доведення зауваження 1.

Зауваження 2. *При умовах леми 2 для ліпшіцевості функцій $u^{k+1}(\varphi)$ $\forall k \in \in N$ відносно $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ достатньо, щоб такою була функція $u^0(\varphi)$ і виконувалася оцінка $\gamma > \alpha$. При обмеженості множини коефіцієнтів Ліпшіца цих функцій ліпшіцевою буде і функція $u(\varphi)$, породжуюча інваріантний тор системи рівнянь (1).*

Висновки. Одержано достатні умови існування в просторі обмежених числових послідовностей інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь.

1. **Пасюк К. В.** Про існування ліпшіцевих інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь, що містять нескінченну кількість відхилень скалярного аргументу [текст] / К. В. Пасюк // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – Випуск 421. – С. 75–79.
2. **Samoilenko A. M.** Countable Systems of Differential Equations [text] / A. M. Samoilenko, Yu. V. Teplinskiy. – VSP, Utrecht–Boston, 2003. – 287 p.
3. **Самойленко А. М.** Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах [текст] / А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський. – Київ: Видавництво Ін-ту математики НАН України, 2008. – 496 с.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 85–94

УДК 517.5

В. И. Рукасов, О. Г. Ровенская, О. А. Новиков, В. И. Бодрая
Славянский государственный педагогический университет

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТЬЮ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Рукасов В. І., Ровенська О. Г., Новіков О. О., Бодра В. І. Наближення періодичних функцій багатьох змінних з високою гладкістю прямокутними сумами Валле Пуссена. Одержані асимптотичні рівності для відхилень прямокутних сум Валле Пуссена на класах $\overline{\psi}$-інтегралів функцій багатьох змінних.
Ключові слова: наближення, прямокутні суми Валле Пуссена, асимптотична рівність.

Рукасов В. И., Ровенская О. Г., Новиков О. А., Бодрая В. И. Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена. Получены асимптотические равенства для уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах $\overline{\psi}$-интегралов функций многих переменных.
Ключевые слова: приближение, прямоугольные суммы Валле Пуссена, асимптотическое равенство.

Rukasov V. I., Rovenska O. G., Novikov O. A., Bodra V. I. Approximation of periodical functions of many variables of high smoothness by right-angled sums of Valle Pussin. Received the asymptotic equations for deviations of sums of Valle Pussin on the $\overline{\psi}$-integrals classes of functions of many variables.
Key words: approximation, right-angled sums of Valle Pussin, asymptotic equality.

Введение. Следуя работе [1] (см. также [2],[3]), классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных, позволяющие учитывать в отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^m — евклидово пространство с элементами $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m} [-\pi; \pi]$ — m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ \ i = 1, 2, ..., m\},$$

$$N_*^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ \ i = 1, 2, ..., m\},$$

$$N_i^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ \ x_j \in N_*,\ \ i \neq j\},$$

$$E^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in \{0; 1\},\ \ i = 1, 2, ..., m\}.$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на кубе T^m функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ являются по определению коэффициентами Фурье функции $f(\vec{x})$ [2].

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие основную гармонику функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right)$$

и гармонику, сопряженную по переменной x_i,

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{j \in \overline{m} \setminus \{i\}} \cos\left(k_j x_j - \frac{s_j \pi}{2}\right) \cos\left(k_i x_i - \frac{(s_i+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя [2], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением:

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \tag{1}$$

в котором $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [1; n_i - 1]$ — прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n}$. Прямоугольной частичной суммой ряда Фурье называется [4] тригонометрический полином вида

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}). \tag{2}$$

Пусть $f \in L(T^m)$ и $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2,$ — фиксированные наборы систем чисел, $k \in N_*$.

Положим

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k)}, \quad \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k)}$$

и будем считать, что выполнены условия $\overline{\psi}_i(k) \neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k) \neq 0$, $k \in N_*$, $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$.

Пусть, далее, ряд

$$\sum_{\vec{k} \in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_i^2(k_i)} [\psi_{i1}(k_i) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i) A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})]$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^m)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем $\overline{\psi}_i$-производной функции f по переменной x_i, $i = 1, 2, ..., m$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$. Для фиксированного r-элементного множества $\mu(r) \subset \subset \overline{m}$, $\mu(r) = \{i_1, i_2, ..., i_r\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{i_r}} \partial^{\overline{\Psi}_{i_{r-1}}} ... \partial^{\overline{\Psi}_{i_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} ... \partial x_{i_1}}.$$

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2$ символом $C_\infty^{m\overline{\psi}}$ обозначим множество непрерывных функций $f \in L(T^m)$, имеющих почти везде ограниченные $\overline{\Psi}_\mu$- и $\overline{\psi}_i$-производные:

$$\operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})| \le 1, \ \ \operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \le 1, \ \ i = 1, 2, ..., m; \ \ \mu \subset \overline{m}; \ \ \vec{x} \in T^m. \qquad (3)$$

Изучению аппроксимативных свойств этих классов посвящены работы [5–8].

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2$, определяющих класс $C_\infty^{m\overline{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, β_i^*, $i = 1, 2, ..., m$, такие, что

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k) \cos \frac{\beta_i \pi}{2}, \ \ \psi_{i2}(k) = \psi_i(k) \sin \frac{\beta_i \pi}{2},$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k) \cos \frac{\beta_i^* \pi}{2}, \ \ \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k) \sin \frac{\beta_i^* \pi}{2}, \ \ i = 1, 2, ..., m,$$

то (см. [1]) класс $C_\infty^{m\overline{\psi}}$ является классом (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных и обозначается $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$. При $m = 2$ эти классы являются классами (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций двух переменных, которые были введены в работе [3] (см. также [2]). Если, кроме того, для чисел $r > 0$, $s > 0$, $r_1 \ge r$, $s_1 \ge s$ выполнены условия $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, $\beta_1 = r$, $\beta_1^* = s$, $\beta_2 = r_1$, $\beta_2^* = s_1$, то классы $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ совпадают с классами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. В работе [4] (см. также [9]) изучены вопросы приближения классов $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}}(f; \vec{x}) = S_{n_1,n_2}(f; \vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$, взятых по классам $W_{r_1,s_1}^{r,s}$, получено асимптотическое равенство при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2$

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s}; S_{\vec{n}}) = \frac{4 \ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4 \ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1) \left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}} \right).$$

Для $\vec{n} \in N^m$, $\vec{p} \in N^m$, $p_i < n_i$, $i = 1, 2, ..., m$ положим $G_{\vec{n},\vec{p}} = \prod_{i=1}^{m} [n_i - p_i; n_i - 1]$. Прямоугольными суммами Валле Пуссена будем называть тригонометрические полиномы вида

$$V_{\vec{n},\vec{p}}(f; \vec{x}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} p_i} \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n},\vec{p}}} S_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \qquad (4)$$

где $S_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ — частичные суммы ряда Фурье, заданные соотношением (2), $\vec{n} \in \in N^m$, $p_i \in N$, $p_i < n_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

В данной работе изучаются вопросы приближения полиномами $V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})$ классов $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ в случае, когда функции, задающие эти классы, определяются соотношениями

$$\psi_i(x) = e^{-\alpha_i x}, \ \ \Psi_i(x) = e^{-\alpha_i^* x}, \ \ \alpha_i > 0, \ \ \alpha_i^* > 0, \ \ i = 1, 2, ..., m.$$

По аналогии с классами функций одной переменной будем обозначать такие классы $C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$. Для удобства введем соответствующие для такого случая обозначения для $\overline{\psi}$- и $\overline{\Psi}_\mu$-производных:

$$f^{\overline{\psi}_i}(x) = f^{\alpha_i}_{\beta_i}(x), \ \ i = 1, 2, ..., m, \ \ f^{\overline{\Psi}_\mu}(x) = f^{\alpha^*_\mu}_{\beta^*_\mu}(x), \ \ \mu \subset \overline{m}.$$

Для верхних граней уклонений сумм Фурье на соответствующих классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ функций одной переменной С. М. Никольским в работе [10] было получено при $n \to \infty$ асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1)\frac{q^n}{n}, \ \ q = e^{-\alpha}, \tag{5}$$

где

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. С. Б. Стечкиным [11] этот результат был передоказан другим способом, который позволил уточнить остаточный член в этой формуле.

В работах [7, 8] получен 2–мерный и m–мерный аналоги равенства (5) для классов $C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$.

В работе [13] (см. также [12], [14]) получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), 1 < p < n. \tag{6}$$

В данной работе получена асимптотическая формула, которая является многомерным аналогом равенства (6) для классов $C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$.

Основные результаты. Приведем некоторые определения и вспомогательные утверждения.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ — фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda^{(n_i)}_{k_i}\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\lambda^{(n_i)}_0 = 1$, $\lambda^{(n_i)}_{k_i} = 0$ для $k_i \geq n_i$. Пусть, далее, $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} = \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda^{(n_i)}_{k_i}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$ — прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$.

Каждой функции, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие многочлен

$$U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Величины $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ являются уклонениями таких многочленов от функции $f(\vec{x})$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_i > 0$, $\alpha_i^* > 0$, $q_i = e^{-\alpha_i}$, $Q_i = e^{-\alpha_i^*}$, $\beta_i \in R$, $\beta_i^* \in R$, $p_i \in N$, $1 < p_i < n_i$; $i = 1, 2, ..., m$.

Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(C^{m\alpha}_{\beta,\infty}; V_{\vec{n},\vec{p}}) = \sup\nolimits_{f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}} ||f(\cdot) - V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\cdot)||_C = \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^m \tfrac{4q_i^{n_i-p_i+1}}{\pi p_i(1-q_i^2)} + \\
&+O(1)\left(\sum\nolimits_{i=1}^m \left[\tfrac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(n_i-p_i)(1-q_i)^3} + \tfrac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}\right] + \right. \\
&\left. + \sum\nolimits_{r=2}^m \sum\nolimits_{\mu(r)\subset\overline{m}} \prod\nolimits_{j\in\mu(r)} \tfrac{Q_j^{n_j-p_j+1}}{p_j(1-Q_j^2)}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Понятно, что

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^m p_i} \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n},\vec{p}}} \rho_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^m p_i} \sum_{i=1}^m \sum_{k_i=n_i-p_i}^{n_i-1} \rho_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

где

$$\rho_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - S_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \quad \vec{k} = (k_1; k_2; ...; k_m).$$

Изучим величины $\rho_{\vec{k}}(f;\vec{x})$. В силу теоремы 1 работы [8] для $f \in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$ имеем

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^m \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x} + t_i\vec{e}_i) \sum_{k_i=n_i}^{\infty} \exp(-\alpha_i k_i)\cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt_i +$$

$$+\sum_{r=2}^m (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int\limits_{T^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x} + \sum_{i\in\mu(r)} t_i\vec{e}_i\right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \sum_{k_j=n_j}^{\infty} \exp(-\alpha_j^* k_j)\cos\left(k_j t_j + \frac{\beta_j^*\pi}{2}\right)dt_j.$$

Воспользуемся обозначениями

$$q_i = e^{-\alpha_i}, \quad Q_i = e^{-\alpha_i^*}.$$

В работе [15] показано, что

$$\sum_{k_i=n_i}^{\infty} \exp(-\alpha_i k_i)\cos\left(k_i t + \frac{\beta_i\pi}{2}\right) =$$

$$= q_i^{n_i}\left(\frac{1-q_i\cos t}{1-2q_i\cos t+q_i^2}\cos\left(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)-\frac{q_i\sin t}{1-2q_i\cos t+q_i^2}\sin\left(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right).$$

Поэтому

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})=\sum_{i=1}^m\frac{q_i^{n_i}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x}+t_i\vec{e}_i\right)h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+$$
$$+\sum_{r=2}^m(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\int\limits_{T^r}f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}+\sum_{i\in\mu(r)}t_i\vec{e}_i\right)\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j}}{\pi}H_{n_j}^{\beta_j^*}(t_j)dt_j, \tag{8}$$

где

$$h_{n_i}^{\beta_i}(t)=$$
$$=\left[\cos\left(n_it+\tfrac{\beta_i\pi}{2}\right)-q_i\cos\left((n_i-1)t+\tfrac{\beta_i\pi}{2}\right)\right](1-2q_i\cos t+q_i^2)^{-1},$$
$$H_{n_i}^{\beta_i^*}(t)= \tag{9}$$
$$=\left[\cos\left(n_it+\tfrac{\beta_i^*\pi}{2}\right)-Q_i\cos\left((n_i-1)t+\tfrac{\beta_i^*\pi}{2}\right)\right](1-2Q_i\cos t+Q_i^2)^{-1}.$$

Так как для $f\in C_{\beta,\infty}^{m\alpha}$ выполняются условия

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^m}|f_{\beta_\mu^*}^{\alpha_\mu^*}(\vec{x})|\le 1,\ \ \mu\subset\overline{m},$$

то

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})=\sum_{i=1}^m\frac{q_i^{n_i}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x}+t_i\vec{e}_i\right)h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+$$
$$+O(1)\sum_{r=2}^m\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|H_{n_j}^{\beta_j^*}(t_j)|dt_j.$$

Следовательно,

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})=\sum_{i=1}^m\frac{1}{p_i}\sum_{k=n_i-p_i}^{n_i-1}\frac{q_i^k}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\beta_i}^{\alpha_i}\left(\vec{x}+t\vec{e}_i\right)h_k^{\beta_i}(t)dt+$$
$$+O(1)\sum_{r=2}^m\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{1}{p_j}\sum_{k_j=n_j-p_j}^{n_j}\frac{Q_j^{k_j}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|H_{k_j}^{\beta_j^*}(t_j)|dt_j. \tag{10}$$

Используя рассуждения работы [12], можно показать, что для $i=1,2,...,m$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{p_i}\sum_{k=n_i-p_i}^{n_i-1}\frac{q_i^k}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}+t\vec{e}_i)h_k^{\beta_i}(t)dt=$$
$$=-\frac{q_i^{n_i-p_i}}{p_i\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}+t\vec{e}_i)b_{n_i-p_i+1,i}^{\beta_i}(t)dt+\frac{q_i^{n_i}}{p_i\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}+t\vec{e}_i)b_{n_i,i}^{\beta_i}(t)dt, \tag{11}$$

где

$$b_{n,i}^{\beta}(t) = \tfrac{1-2q_i\cos t+q_i^2\cos 2t}{(1-2q_i\cos t+q_i^2)^2}\cos\left(nt+\tfrac{\beta\pi}{2}\right)+$$
$$+\tfrac{q_i^2\sin 2t-2q_i\sin t}{(1-2q_i\cos t+q_i^2)^2}\sin\left(nt+\tfrac{\beta\pi}{2}\right). \tag{12}$$

Так как для $f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$ выполняются условия

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^m}|f_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x})|\le 1,\ \ i=1,2,...,m,\quad \operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^m}|f_{\beta_\mu^*}^{\alpha_\mu^*}(\vec{x})|\le 1,\ \ \mu\subset\overline{m},$$

то

$$\mathcal{E}(C^{m\alpha}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}})=\sup\nolimits_{f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}}||\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})||_C\le\sum\nolimits_{i=1}^m\tfrac{q_i^{n_i-p_i}}{\pi p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i,i}(t)|dt+$$
$$+O(1)\sum\nolimits_{r=2}^m\sum\nolimits_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod\nolimits_{j\in\mu(r)}\tfrac{1}{p_j}\sum\nolimits_{k_j=n_j-p_j}^{n_j}\tfrac{Q_j^{k_j}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|H^{\beta_j^*}_{k_j}(t_j)|dt_j. \tag{13}$$

Используя рассуждения работы [12], можно показать, что для $i=1,2,...,m$ справедливы соотношения

$$\sum_{k_i=n_i-p_i}^{n_i-1}Q_i^{k_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|H^{\beta_i^*}_{k_i}(t)|dt=Q_i^{n_i-p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^{\beta_i^*}_{n_i-p_i+1,i}(t)|dt,$$

где

$$B_{n,i}^{\beta}(t) = \tfrac{1-2Q_i\cos t+Q_i^2\cos 2t}{(1-2Q_i\cos t+Q_i^2)^2}\cos\left(nt+\tfrac{\beta\pi}{2}\right)+$$
$$+\tfrac{Q_i^2\sin 2t-2Q_i\sin t}{(1-2Q_i\cos t+Q_i^2)^2}\sin\left(nt+\tfrac{\beta\pi}{2}\right). \tag{14}$$

Повторяя рассуждения работы [13], получаем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta}_{n-p+1;i}(t)|dt=\tfrac{4}{1-q_i^2}+O(1)\tfrac{1}{(n-p)(1-q_i)^3};$$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta}_{n;i}(t)|dt=O(1)\tfrac{1}{1-q_i^2};\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^{\beta}_{n;i}(t)|dt=O(1)\tfrac{1}{1-Q_i^2}. \tag{15}$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^m\frac{q_i^{n_i}}{\pi p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i,i}(t)|dt+$$
$$+O(1)\sum_{r=2}^m\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{1}{p_j}\sum_{k_j=n_j-p_j}^{n_j}\frac{Q_j^{k_j}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|H^{\beta_j^*}_{k_j}(t_j)|dt_j=$$

$$= O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j-p_j}}{p_j(1-Q_j^2)}\right).$$

Следовательно,

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})=\sum_{i=1}^{m}\frac{q^{n_i-p_i+1}}{\pi p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\beta_i}^{\alpha_i}\left(\vec{x}+t\vec{e}_i\right)b_{n_i-p_i,i}^{\beta_i}(t)dt+$$
$$+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j-p_j}}{p_j(1-Q_j^2)}\right). \quad (16)$$

Найдем функцию $f_0\in C_{\beta,\infty}^{m\alpha}$, для которой справедливо соотношение

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f_0;\vec{0})=\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{\pi p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i-p_i+1,i}^{\beta_i}(t)|dt+$$
$$+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{q_i^{n_i-p_i}}{p_i(n_i-p_i)(1-q_i)^3}+\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}\right]+\right. \quad (17)$$
$$\left.+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j-p_j}}{p_j(1-Q_j^2)}\right).$$

Учитывая соотношения (10) и (15), для всякой функции $f\in C_{\beta,\infty}^{m\alpha}$ находим

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{0})=\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{\pi p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\beta_i}^{\alpha_i}\left(\vec{0}+t\vec{e}_i\right)b_{n_i-p_i+1,i}^{\beta_i}(t)dt+$$
$$+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j-p_j}}{p_j(1-Q_j^2)}\right).$$

В работе [12] показано, что функции

$$y_i^*(t)=\mathrm{sign}b_{n_i-p_i+1,i}^{\beta_i}(t),\ \ i=1,2,...,m$$

можно переопределить на множестве, мера которого меньше $K(n_i-p_i)^{-1}$, где K — некоторое фиксированное число, так, чтобы полученные функции $y_i(t)$ удовлетворяли условиям

$$|y_i(t)|\le 1,\ \ \int\limits_{-\pi}^{\pi}y_i(t)dt=0.$$

Далее, построим функции $\varphi_i(t_1;t_2)=y_i(t_i)$, $\vec{t}\in T^2$, и функции $f_i(\vec{x})$, такие, что $(f_i)_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x})=\varphi_i(\vec{x})$. Повторяя рассуждения работы [4], можно показать, что функция $f_0(\vec{x})=\sum\limits_{i=1}^{m}f_i(\vec{x})$ удовлетворяет условию

$$(f_0)_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x})=\varphi_i(\vec{x}),\ \ i=1,2,...,m.$$

Поэтому $f_0 \in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$ и на промежутке $[-\pi;\pi]$ кроме множества точек, мера которого меньше $K(n_i-p_i)^{-1}$, выполняется условие

$$(f_0)^{\alpha_i}_{\beta_i}(\vec{0}+t\vec{e}_i) = \mathrm{sign} b^{\beta_i}_{n_i-p_i+1,i}(t).$$

Следовательно, для $i=1,2,...,m$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_0)^{\alpha_i}_{\beta_i}\left(\vec{0}+t\vec{e}_i\right)b^{\beta_i}_{n_i-p_i,i}(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i,i}(t)|dt + O(1)\frac{1}{(n_i-p_i)}.$$

Таким образом, для найденной функции $f_0(\vec{x})$ справедливо соотношение (17). Сопоставляя соотношения (13) и (17), видим, что

$$\mathcal{E}(C^{m\alpha}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}}) = \sum\nolimits_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{\pi p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i+1,i}(t)|dt+$$
$$+O(1)\left(\sum\nolimits_{i=1}^{m}\left[\frac{q_i^{n_i-p_i}}{p_i(n_i-p_i)}+\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}\right]+\sum\nolimits_{r=2}^{m}\sum\nolimits_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod\nolimits_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j-p_j}}{p_j(1-Q_j^2)}\right). \tag{18}$$

Учитывая соотношение (15), отсюда получаем асимптотическую формулу (7). Теорема доказана.

Заключение. Заметим, что при выполнении условий

$$\alpha_i=\alpha_i^*,\quad \lim_{n_i\to\infty}p_i=\infty,\quad \lim_{n_i\to\infty}(n_i-p_i)=\infty,\quad i=1,2,...,m$$

соотношение (7) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

1. **Ласурия Р. А.** Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций [текст] / Р. А. Ласурия // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55. – № 7. – С. 911–918.
2. **Степанец А. И.** Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций [текст] / А. И. Степанец, Н. Л. Пачулиа // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43. – № 4. – С. 545–555.
3. **Задерей П. В.** Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных [текст] / П. В. Задерей // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В. К. Дзядык. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 16–28.
4. **Степанец А. И.** Равномерные приближения тригонометрическими полиномами [текст] / А. И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1981. – 340 с.
5. **Рукасов В. И.** Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання [текст] / В. И. Рукасов, О. А. Новиков, В. И. Бодрая / Відп. ред. О. І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 1. – № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С. 250–269.

6. **Рукасов В. И.** Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье [текст] / В. И. Рукасов, О. А. Новиков, В. И. Бодрая // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57. № 4. – С. 564–570.

7. **Рукасов В. И.** Приближение классов функций двух переменных высокой гладкости прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання [текст] / В. И. Рукасов, О. А. Новиков, В. И. Бодрая / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 4. – № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – С. 270 – 283.

8. **Рукасов В. И.** Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Фурье [текст] / В. И. Рукасов, О. А. Новиков, В. Е. Величко, О. Г. Ровенская, В. И. Бодрая // Труды института прикладной математики и механики. – Т. 16. – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, 2008. – С. 163–170.

9. **Степанец А. И.** Приближение некоторых классов периодических функций двух переменных суммами Фурье [текст] / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25. – № 5. – С. 599–609.

10. **Никольский С. М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем [текст] / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. сер. мат. – 1946. – Т. 10. – № 3. – С. 207–256.

11. **Стечкин С. Б.** Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций [текст] / С. Б. Стечкин // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 145. – № 7. – С. 126–151.

12. **Рукасов В. И.** Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения [текст] / В. И. Рукасов, О. А. Новиков. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 228–241.

13. **Рукасов В. И.** Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій : Дис. докт. физ-мат наук: 01.01.01 [текст] / В. И. Рукасов. – К., 2003. – 345 с.

14. **Степанец А. И.** Приближения суммами Валле Пуссена [текст] / А. И. Степанец, В. И. Рукасов, С. О. Чайченко // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – Т. 68. – 368 с.

15. **Степанец А. И.** Классификация и приближение периодических функций [текст] / А. И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

16. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 т. [текст] / А. И. Степанец. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 426 с.

17. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 т. [текст] / А. И. Степанец. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 95–108

УДК 517.925

А. А. Стехун
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИСЧЕЗАЮЩИХ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Стехун А. О. Асимптотичні зображення зникаючих в околі особливої точки розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку. Встановлюються асимптотичні зображення для зникаючих при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) розв'язків диференціальних рівнянь третього порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь типу Емдена–Фаулера.
Ключові слова: нелінійні дифференціальні рівняння, $P_\omega^0(\lambda_0)$–рішення, асимптотичні представлення.

Стехун А. А. Асимптотические представления исчезающих в окрестности особой точки решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Устанавливаются асимптотические представления для исчезающих при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) решений диференциальных уравнений третьего порядка, асимптотически близких к уравнениям типа Эмдена–Фаулера.
Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, $P_\omega^0(\lambda_0)$–решения, асимптотические представления.

Stechun A. A. Asymptotic representations of solutions vanishing near a singular point of the third order nonlinear differential equations. The third order differential equations asymptotically close to Emden-Fowler differential equations are considered. Asymptotic representations for the solutions vanishing as $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) of these equations are established.
Key words: nonlinear differential equations, $P_\omega^0(\lambda_0)$–solutions, asymptotic representations.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. В последние 40–50 лет получено достаточно большое количество результатов, касающихся асимптотического поведения решений существенно нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Большая часть из них отражена в монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия [1]. В частности, здесь дана классификация всех возможных типов правильных и сингулярных неколеблющихся решений. Для некоторых из них установлены двухсторонние асимптотические оценки, а для части- и точные асимптотические формулы при стремлении аргумента к особой точке. При этом особенно эффективными оказались следствия для нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера

$$y^{(n)} = p(t)|y|^{1+\sigma}\mathrm{sign}\,\mathrm{y},$$

где $\sigma \neq 0$, а p-непрерывна и отлична от нуля на промежутке $[a, \omega[$.

В работах А. В. Костина [2] и В. М. Евтухова [3–5] предложены методы, позволяющие получать точные асимптотические формулы для правильных неколеблющихся решений неавтономных дифференциальных уравнений n-го порядка со степенными нелинейностями более общего вида. В дальнейшем методика из [3–5] была распространена (см. [6]) на дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Однако эта методика все-таки предполагала в некотором смысле степенной характер нелинейности f. Так, например, для уравнения

$$y^{(n)} = p(t)|y|^{\sigma+1}L(y),$$

в котором $\sigma \in \mathbb{R}$, p — непрерывна и отлична от нуля на промежутке $[a, \omega[$, а L — медленно меняющаяся (см. [7]) в нуле ($+\infty$) функция, она уже не применима для установления асимптотики решений, стремящихся к нулю ($\pm\infty$) при $t \uparrow \omega$.

Для указанного выше уравнения второго порядка (случай $n = 2$) к настоящему времени разработаны подходы (см. работы [8-13]), позволяющие получать как двухсторонние асимптотические оценки, так и точные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для широкого класса решений. Непосредственный перенос этих подходов на уравнения n-го порядка не является тривиальным и требует более детального исследования такого типа дифференциальных уравнений третьего порядка.

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi :]0, y_0] \to]0, +\infty[$ — правильно меняющаяся при $y \to 0$ функция порядка $\sigma + 1$, $\sigma \neq 0$.

Из определения правильно меняющейся при $y \to 0$ функции порядка $\sigma + 1$ (см. [7]) следует, что

$$\varphi(y) = |y|^{\sigma+1}L(y), \tag{1.2}$$

где $L : (0, y_0] \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и медленно меняющаяся при $y \to 0$ функция, т. е. удовлетворяющая для любого $\lambda > 0$ условию

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1. \tag{1.3}$$

В [7] показано, что предельное соотношение (1.3) выполняется равномерно по λ на любом промежутке $[c, d] \subset]0, +\infty[$ (свойство M_1) и существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $y \to 0$ функция $L_1 :]0, y_0] \longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ (свойство M_2), такая, что

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in]0,y_0]}} \frac{L(y)}{L_1(y)} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ y\in]0,y_0]}} \frac{yL_1'(y)}{L_1(y)} = 0. \tag{1.4}$$

Определение. *Решение $y : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$, где $t_0 \in [a, \omega[$, уравнения (1) будем называть $P^0_\omega(\lambda_0)$ — решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = 0, \ \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty \end{cases} \ (k = 1, 2), \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)}=\lambda_0. \tag{1.6}$$

Целью работы является установление асимптотики, а также необходимых и достаточных условий существования $P^0_\omega(\lambda_0)$ — решений уравнения (1), для которых $\lambda_0\notin\left\{0,\frac{1}{2},1,\pm\infty\right\}$.

Положим

$$\pi_\omega(t)=\begin{cases} t, & \text{если } \omega=+\infty,\\ t-\omega, & \text{если } \omega<+\infty,\end{cases}\qquad \Phi(y)=\int\limits_B^y\frac{dz}{\varphi(z)},\quad J(t)=\int\limits_A^t p(\tau)\pi^2_\omega(\tau)\,d\tau,$$

где

$$B=\begin{cases} y_0, & \text{если}\quad \sigma>0,\\ 0, & \text{если}\quad \sigma<0,\end{cases}\qquad A=\begin{cases} a, & \text{если}\quad \int\limits_a^\omega \pi^2_\omega(t)p(t)\,dt=+\infty,\\ \omega, & \text{если}\quad \int\limits_a^\omega \pi^2_\omega(t)p(t)\,dt<+\infty.\end{cases}$$

Обратим внимание на то, что для функции Φ существует обратная функция Φ^{-1}, заданная на промежутке $]-\infty,0]$, если $\sigma>0$, и на промежутке $]0,b]$, где $b=\int_0^{y_0}\frac{dz}{\varphi(z)}$, если $\sigma<0$, причем для них

$$\begin{gathered}\lim_{y\downarrow 0}\Phi(y)=-\infty,\qquad \lim_{z\to-\infty}\Phi^{-1}(z)=0\quad\text{при}\quad\sigma>0,\\ \lim_{y\downarrow 0}\Phi(y)=0,\qquad \lim_{z\downarrow 0}\Phi^{-1}(z)=0\quad\text{при}\quad\sigma<0.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Кроме того, в силу свойств правильно меняющихся при $y\to 0$ функций (см. [7]) имеет место асимптотическое соотношение

$$\Phi(y)\sim-\frac{y}{\sigma\varphi(y)}\quad\text{при}\quad y\to 0. \tag{1.8}$$

Ниже для уравнения (1.1) будет установлено следующее утверждение.

Теорема. *Для существования у уравнения* (1.1) $P^0_\omega(\lambda_0)$*–решений, таких, что* $\lambda^0\notin\left\{0,\frac{1}{2},1,\pm\infty\right\}$*, необходимо, а если соблюдается одно из неравенств*

$$2\lambda_0^2+2\lambda_0-1\le 0,\quad \sigma(2\lambda_0-1)>0,\quad \sigma(2\lambda_0-1)\ne 3-6\lambda_0-6\lambda_0^2, \tag{1.9}$$

то и достаточно, чтобы

$$(\lambda_0-1)(2\lambda_0-1)\pi_\omega(t)<0\quad \textit{при}\quad t\in[a,\omega[^1,\quad \alpha_0\lambda_0<0, \tag{1.10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}=\frac{\sigma(2\lambda_0-1)}{1-\lambda_0}. \tag{1.11}$$

При этом для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))}=\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}p(t)\pi^3_\omega(t)[1+o(1)], \tag{1.12}$$

[1]При $\omega=+\infty$ считаем, что $a>0$.

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} + o(1), \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} + o(1). \tag{1.13}$$

Замечание 1. *Нетрудно проверить, что одно из неравенств (1.9) заведомо выполняется, если* $-9 < \sigma < 0$.

Замечание 2. *Если в (1.2) медленно меняющаяся при* $y \to 0$ *функция* L *такова, что*

$$L\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{2\lambda_0-1}{\lambda_0-1}+o(1)}\right) = [B(\lambda_0) + o(1)]L(|\pi_\omega(t)|) \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где $B(\lambda_0)$ *— отличная от нуля вещественная постоянная, то асимптотическое представление (1.12) в приведенной выше теореме может быть записано в явном виде:*

$$y(t) = \left[\frac{(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)} p(t) L(|\pi_\omega(t)|) \pi_\omega^3(t)\right]^{-\frac{1}{\sigma}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Для установления приведенной выше теоремы потребуются два вспомогательных утверждения. Первое из них относится к априорным свойствам $P_\omega^0(\lambda_0)$-решений, третья производная которых отлична от нуля в некоторой левой окрестности ω, вытекающим, в частности, из леммы 10.1 работы [14].

Лемма 1. [14] *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. *Тогда для каждого* $P_\omega^0(\lambda_0)$*-решения уравнения (1.1) имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические соотношения*

$$\frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)} \sim \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} \sim \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}. \tag{2.1}$$

Второе утверждение касается вопроса о существовании исчезающих в бесконечности решений у систем дифференциальных уравнений вида

$$v_i' = f_i(x, v_1, v_2, v_3) + \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j + V_i(x, v_1, v_2, v_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $f_i, V_i : [x_0, +\infty[\times \mathbb{R}_b^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ — непрерывные и малые в некотором смысле функции,

$$\mathbb{R}_b^3 = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \le b \ (i = 1, 2, 3)\}, \quad b > 0.$$

Лемма 2. *Пусть матрица* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ *не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, а функции* f_i, V_i $(i = 1, 2, 3)$ *таковы, что при* $i = 1, 2, 3$ *соблюдаются условия*

$$\lim_{x \to +\infty} f_i(x, v_1, v_2, v_3) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_b^3, \tag{2.3}$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|+|v_3| \to 0} \frac{V_i(x, v_1, v_2, v_3)}{|v_1| + |v_2| + |v_3|} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0, +\infty[. \tag{2.4}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.2) имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^3 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_b^3$ $(x_1 \geq x_0)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Более того, таких решений существует целое k- параметрическое семейство, если среди собственных значений матрицы A имеется k собственных значений с отрицательной действительной частью.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай почти треугольной системы, т. е. когда в (2.2)

$$a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0. \tag{2.5}$$

Выберем число $\varepsilon_0 > 0$, полагая

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{|a_{33}|}{4}, \frac{|a_{22}a_{33}|}{4(|a_{23}| + |a_{33}|)}, \frac{|a_{11}a_{22}a_{33}|}{4(|a_{22}a_{33}| + |a_{12}a_{23}| + |a_{12}a_{33}| + |a_{13}a_{22}|)}\right\}.$$

В силу условий (2.4) для данного $\varepsilon_0 > 0$ существует число $b_0 \in]0, b[$, такое, что при $|v_j| \leq b_0$ $(j = 1, 2, 3)$ и $x \geq x_0$ соблюдаются неравенства

$$|V_i(x, v_1, v_2, v_3)| \leq \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} |v_j| \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.6}$$

Согласно (2.3) и (2.6) для любых $|v_i| \leq b_0$ $(i = 1, 2, 3)$ имеем

$$\lim_{x \to +\infty} e^{a_{ii}x} \int\limits_{\alpha_i}^{x} |f_i(\tau, v_1, v_2, v_3)| e^{-a_{ii}\tau}\, d\tau = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.7}$$

$$e^{a_{ii}x} \left| \int\limits_{\alpha_i}^{x} |V_i(\tau, v_1, v_2, v_3)| e^{-a_{ii}\tau}\, d\tau \right| \leq \frac{3\varepsilon_0 b_0}{|a_{ii}|} \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad x \geq x_0, \tag{2.8}$$

где пределы интегрирования $\alpha_i \in \{x_0, +\infty\}$ $(i = 1, 2, 3)$ и выбраны следующим образом: $\alpha_i = +\infty$, если $a_{ii} > 0$, и $\alpha_i = x_0$, если $a_{ii} < 0$.

Далее, для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ введем постоянную c_i^o, полагая $c_i^o = 0$, если $a_{ii} > 0$, и выбирая ее любым действительным числом — в противном случае. В силу такого выбора постоянных c_i^o $(i = 1, 2, 3)$ и условий (2.7) найдется число $x_1 \geq x_0$ такое, что при $x \geq x_1$ и $|v_i| \leq b_0$ $(i = 1, 2, 3)$ соблюдаются неравенства

$$e^{a_{ii}x} \left(|c_i^o| + \left| \int\limits_{\alpha_i}^{x} |f_i(\tau, v_1, v_2, v_3)| e^{-a_{ii}\tau}\, d\tau \right| \right) < \frac{\varepsilon_0 b_0}{|a_{ii}|} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.9}$$

Пусть $C_{loc}([x_1, +\infty); \mathbb{R}^3)$ — пространство непрерывных вектор-функций $v = (v_i)_{i=1}^3 : [x_1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ с топологией равномерной сходимости на замкнутых отрезках из $[x_1, +\infty)$, а S — подмножество тех из них, для которых

$$|v_i(x)| \leq b_0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad x \in [x_1, +\infty).$$

Рассмотрим оператор $F = (F_i)_{i=1}^3 : S \longrightarrow C_{loc}([x_1, +\infty); \mathbb{R}^3)$, определенный следующим образом:

$$\begin{gathered} F_3(v)(x) = e^{a_{33}x}\left(c_3 + \int\limits_{\widetilde{\alpha}_3}^{x} H_3(\tau, v(\tau))e^{-a_{33}\tau}\, d\tau\right), \\ F_2(v)(x) = \\ = e^{a_{22}x}\left(c_2 + a_{23}\int\limits_{\widetilde{\alpha}_2}^{x} F_3(v)(\tau)e^{-a_{22}\tau}d\tau + \int\limits_{\widetilde{\alpha}_2}^{x} H_2(\tau, v(\tau))e^{-a_{22}\tau}d\tau\right), \\ F_1(v)(x) = e^{a_{11}x}\left(c_1 + a_{12}\int\limits_{\widetilde{\alpha}_1}^{x} F_2(v)(\tau)e^{-a_{11}\tau}d\tau + \right. \\ \left. + a_{13}\int\limits_{\widetilde{\alpha}_1}^{x} F_3(v)(\tau)e^{-a_{11}\tau}d\tau + \int\limits_{\widetilde{\alpha}_3}^{x} H_1(\tau, v(\tau))e^{-a_{11}\tau}d\tau\right), \end{gathered} \tag{2.10}$$

где

$$H_i(x, v) = f_i(x, v_1, v_2, v_3) + V_i(x, v_1, v_2, v_3) \quad (i = 1, 2, 3),$$

c_i $(i = 1, 2, 3)$ — вещественные постоянные, удовлетворяющие неравенствам $|c_i| \leq$ $\leq |c_i^o|$, а каждый из пределов интегрирования $\widetilde{\alpha}_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ равен $+\infty$, если $a_{ii} > 0$, и равен x_1, если $a_{ii} < 0$.

Из (2.10) в силу (2.8), (2.9) и выбора ε_0 следует, что для любой вектор-функции $v \in S$

$$|F_3(v)(x)| \leq \frac{4\varepsilon_0 b_0}{|a_{33}|} \leq b_0 \quad \text{при} \quad x \geq x_1,$$

$$|F_2(v)(x)| \leq \frac{4\varepsilon_0 b_0}{|a_{22}|} + \frac{4\varepsilon_0 b_0 |a_{23}|}{|a_{33}a_{22}|} = \frac{4\varepsilon_0 b_0}{|a_{22}a_{33}|}\left(|a_{23}| + |a_{33}|\right) \leq b_0 \quad \text{при} \quad x \geq x_1,$$

$$|F_1(v)(x)| \leq \frac{4\varepsilon_0 b_0}{|a_{11}|} + \frac{4\varepsilon_0 b_0 |a_{12}|}{|a_{11}a_{22}a_{33}|}\left(|a_{23}| + |a_{33}|\right) + \frac{4\varepsilon_0 b_0 |a_{13}|}{|a_{33}a_{11}|} =$$

$$= \frac{4\varepsilon_0 b_0}{|a_{11}a_{22}a_{33}|}\left(|a_{22}a_{33}| + |a_{12}a_{23}| + |a_{12}a_{33}| + |a_{13}a_{22}|\right) \leq b_0 \quad \text{при} \quad x \geq x_1.$$

Значит, $|F_i(v(x))| \leq b_0$ $(i = 1, 2, 3)$ при $x \geq x_1$, т. е. $F(S) \subseteq S$.

Теперь установим непрерывность оператора F.

Пусть $v_k = (v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}) \in S$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} v_k(x) = v_0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_1, +\infty)$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} H_i(x, v_k(x)) = H_i(x, v_0(x)) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.11}$$

равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_1, +\infty[$.

Зафиксируем произвольным образом отрезок $[x_1, x_2] \subseteq [x_1, +\infty)$ и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_{3\varepsilon}$, такое, что для всех $k \geq K_{3\varepsilon}$ $|F_3(v_k)(x) -$ $- F_3(v_0)(x)| < \varepsilon$ при $x \in [x_1, x_2]$.

При $a_{33} < 0$, т. е. когда $\widetilde{\alpha_3} = x_1$, утверждение очевидно в силу (2.10). Пусть $a_{33} > 0$. В этом случае $\widetilde{\alpha_3} = +\infty$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выбираем $x_3 \geq x_2$ настолько большим, чтобы соблюдалось неравенство

$$e^{a_{33}x_2}\int\limits_{x_3}^{\infty}|H_3(\tau, v_k(\tau)) - H_3(\tau, v_0(\tau))|e^{-a_{33}\tau}\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, принимая во внимание равномерную сходимость $v_k(x)$ и $H_3(x, v_k(x))$ на промежутке $[x_1, x_3]$, выбираем $K_{3\varepsilon}$ таким образом, чтобы при $k \geq K_{3\varepsilon}$

$$e^{a_{33}x_2}\int\limits_{x_1}^{x_3}|H_3(\tau, v_k(\tau)) - H_3(\tau, v_0(\tau))|e^{-a_{33}\tau}\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из указанных выше неравенств следует, что $|F_3(v_k)(x) - F_3(v_0)(x)| < \varepsilon$ на промежутке $[x_1, x_2]$ при $k \geq K_{3\varepsilon}$.

Установив, что последовательность функций $\{F_3(x, v_k(x))\}$ сходится к $F_3(x, v_0(x))$ равномерно на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset [x_1, +\infty[$, можем аналогично доказать равномерную сходимость на любом замкнутом отрезке $[x_1, x_2'] \subset \subset [x_1, +\infty[$ последовательности функций $\{F_2(x, v_k(x))\}$ к функции $F_2(x, v_0(x))$. После этого таким же образом устанавливается равномерная сходимость $\{F_1(x, v_k(x))\}$ к $F_1(x, v_0(x))$ на любом замкнутом отрезке $[x_1, x_2''] \subset [x_1, +\infty[$. Тем самым доказана непрерывность оператора F.

Пусть теперь $v \in S$. Тогда в силу (2.10)

$$(F_i(v)(x))' = \sum_{j=i}^{3} a_{ij}F_j(v)(x) + H_i(x, v(x)), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Поскольку $F(S) \subset S$, соблюдаются условия (2.6) и ввиду (2.3) существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|f_i(x, v_1, v_2, v_3)| \leq M \quad \text{при} \quad x \geq x_0 \quad \text{и} \quad (v_1, v_1, v_3) \in \mathbb{R}^3_b,$$

то отсюда имеем

$$\left|(F_i(v)(x))'\right| \leq b_0 \sum_{j=i}^{3} |a_{ij}| + M + 3b_0\varepsilon_0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad x \geq x_1.$$

Здесь постоянные, стоящие справа, не зависят от выбора $v \in S$. Поэтому из этих неравенств следует, что функции из множества $F(S)$ являются равностепенно непрерывными на каждом конечном отрезке промежутка $[x_1, +\infty[$. Так как, кроме того, множество S является замкнутым и выпуклым, то в силу теоремы Шаудера–Тихонова (см. с. 9, [15]) существует $v \in S$, такое, что $v = F(v)$. Данная вектор-функция $v : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^3_{b_0}$, очевидно, является решением системы дифференциальных уравнений (2.2) в случае выполнения условий (2.5).

Покажем, что это решение стремится к нулю при $x \to \infty$.

Допустим противное. Тогда

$$\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\limsup_{x\to+\infty}|v_i(x)|\right\}=c_0,\quad 0<c_0\le b_0. \tag{2.12}$$

Зафиксируем $\varepsilon=c_0/11$. В силу (2.12) существует $x_*\ge x_1$, такое, что

$$\max_{i=\overline{1,3}}|v_i(x)|<c_0+\varepsilon\quad\text{при}\quad x\ge x_*3.$$

Далее, из (2.10) с учетом (2.7), (2.8) и выбора ε_0 следует существование такого $x_{**}\ge x_*$, что при $x>x_*$ имеет место неравенство

$$\max_{i=\overline{1,3}}|F_i(v)(x)|\le\varepsilon+\frac{3}{4}\sup_{x\in(x_3,+\infty)}\max_{i=\overline{1,3}}|v_i(x)|<\varepsilon+\frac{3}{4}(c_0+\varepsilon).$$

С другой стороны, согласно (2.12) имеется последовательность $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$, стремящаяся к $+\infty$, для которой при $l\ge l_0$ соблюдаются неравенства

$$\max_{i=\overline{1,3}}|v_i(x_l)|>c_0-\varepsilon,\quad x_l\ge x_{**}.$$

Значит, так как v — неподвижная точка оператора F, то при $l\ge l_0$

$$c_0-\varepsilon<\max_{i=\overline{1,2}}|u_i(x_l)|=\max_{i=\overline{1,2}}|F_i(u)(x_l)|\le\varepsilon+\frac{3}{4}(c_0+\varepsilon),$$

откуда следует, что $c_0<11\varepsilon=c_0$. Получили противоречие. Таким образом, решение уравнения $v=F(v)$ стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Поскольку существование такого решения операторного уравнения получено при фиксированных постоянных c_i $(i=1,2,3)$, удовлетворяющих неравенствам $|c_i|\le|c_i^O|$ $(i=1,2,3)$, то согласно выбору постоянных c_i^o имеем целое m — параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди чисел a_{11}, a_{22}, a_{33} m чисел отрицательных.

Таким образом, при выполнении условий (2.5) лемма доказана.

Теперь рассмотрим общий случай, предполагая, что матрица коэффициентов $A=(a_{ij})_{i,j=1}^3$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

Допустим сначала, что характеристическое уравнение матрицы A имеет три, отличных от нуля, вещественных корня λ_i $(i=1,2,3)$. В этом случае существует вещественная невырожденная матрица S размерности 3×3, такая, что

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1&\mu_1&0\\0&\lambda_2&\mu_2\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},$$

где каждое μ_i $i\in\{1,2\}$ равно либо нулю, либо единице. Поэтому применяя к системе (2.2) преобразование

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}\tilde v_1\\\tilde v_2\\\tilde v_3\end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

получим с учетом условий (2.3) и (2.4) систему дифференциальных уравнений

$$\tilde{v}_i' = \tilde{f}_i(x, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) + \sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_{ij}\tilde{v}_j + \tilde{V}_i(x, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.14}$$

в которой

$$\tilde{a}_{11} = \lambda_1,\ \tilde{a}_{22} = \lambda_2,\ \tilde{a}_{33} = \lambda_3,\ \tilde{a}_{13} = \tilde{a}_{21} = \tilde{a}_{31} = \tilde{a}_{32} = 0,\ \tilde{a}_{ii+1} = \mu_i\ (i = 1, 2),$$

а $\tilde{f}_i, \tilde{V}_i$ непрерывны на множестве $[x_0, +\infty[\times \mathbb{R}^3_{\tilde{b}}$ $(0 < \tilde{b} \leq b)$ и удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}_i(x, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) \in \mathbb{R}^3_{\tilde{b}}, \tag{2.15}$$

$$\lim_{|\tilde{v}_1|+|\tilde{v}_2|+|\tilde{v}_3|\to 0} \frac{\tilde{V}_i(x, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)}{|\tilde{v}_1| + |\tilde{v}_2| + |\tilde{v}_3|} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0, +\infty[. \tag{2.16}$$

Таким образом, мы свели задачу к частному случаю, рассмотренному ранее. Отсюда с учетом замены (2.3) следует, что система дифференциальных уравнений (2.2) имеет по крайней мере одно вещественное решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, причем таких решений существует целое m–параметрическое семейство, если среди корней λ_i $(i = 1, 2, 3)$ имеется m отрицательных корней.

Допустим теперь, что характеристическое уравнение матрицы A имеет один отличный от нуля вещественный корень λ_1 и два комплексно сопряженных корня $\lambda_2 = \alpha + i\beta,\ \lambda_3 = \alpha - i\beta$ $(\beta \neq 0)$ с отличной от нуля вещественной частью.

В этом случае существует невырожденная вещественная матрица S размерности 3×3, такая, что

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Далее введем матрицу

$$L(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta x & -\sin\beta x \\ 0 & \sin\beta x & \cos\beta x \end{pmatrix}.$$

Она ограничена вместе с обратной на $\mathbb{R}$ и такова, что

$$L^{-1}(x)S^{-1}ASL(x) - L^{-1}(x)L'(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Поэтому применяя к системе (2.2) преобразование

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = SL(x) \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

получим с учетом (2.17) и условий (2.3), (2.4) систему дифференциальных уравнений вида (2.14), в которой

$$\tilde{a}_{11} = \lambda_1, \quad \tilde{a}_{22} = \alpha, \quad \tilde{a}_{33} = \alpha, \quad \tilde{a}_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

а $\tilde{f}_i, \tilde{V}_i$ непрерывны на множестве $[x_0, +\infty[\times \mathbb{R}^3_{\tilde{b}}$ $(0 < \tilde{b} \leq b)$ и удовлетворяют условиям (2.15), (2.16), т. е. опять приходим к рассмотренному частному случаю. Значит, у системы (2.14) существует хотя бы одно решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, которому в силу замены (2.18) соответствует решение системы (2.2), исчезающее в бесконечности. Более того, таких решений существует целое m-параметрическое семейство, если среди чисел $\lambda_1, \alpha, \alpha$ имеется m отрицательных.

Лемма полностью доказана.

3. Доказательство теоремы.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to]0, y_0]$ - $P^0_\omega(\lambda_0)$ — решение уравнения (1.1), для которого $\lambda_0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \pm\infty\right\}$. В силу леммы 1 для этого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения (2.1). Значит, справедливы представления (1.13). Кроме того, из (2.1) и (1.1) следует, что

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} p(t)\pi^2_\omega(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \tag{3.1}$$

и соблюдается при $t \uparrow \omega$ асимптотическое представление (1.12).

Поскольку согласно определению $P^0_\omega(\lambda_0)$ — решения $y(t) > 0$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $y(t) \to 0$ при $t \uparrow \omega$, а $y^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ ввиду (2.1) сохраняют знак на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, то $y'(t) < 0$ на $[t_1, \omega[$. Поэтому из (2.1) и (3.1) вытекают неравенства (1.10).

Согласно свойству M_2 медленно меняющихся при $y \to 0$ функций существует непрерывно дифференцируемая правильно меняющаяся при $y \to 0$ степени $\sigma + 1$ функция $\varphi_1 :]0, y_0[\longrightarrow]0, +\infty[$, такая, что

$$\varphi(y) \sim \varphi_1(y) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \lim_{y \to 0} \frac{y\varphi_1'(y)}{\varphi_1(y)} = \sigma + 1.$$

Учитывая этот факт и представление (3.1), с использованием правила Лопиталя находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)}{J(t)\varphi(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)}{J(t)\varphi_1(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[\dfrac{y(t)}{\varphi_1(y(t))}\right]'}{J'(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_1(y(t))}\left[1 - \dfrac{y(t)\varphi_1'(y(t))}{\varphi_1(y(t))}\right]}{p(t)\pi^2_\omega(t)} = -\frac{\alpha_0\sigma(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0}.$$

Сравнивая это предельное соотношение с (1.12), получим условие (1.11).

Достаточность. Пусть при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ соблюдаются условия (1.10), (1.11) и выполняется одно из неравенств (1.9). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P^0_\omega(\lambda_0)$ — решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.12), (1.13).

Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\Phi(y(t)) = q(t)[1+v_1(x)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1+v_2(x)],$$
$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1+v_3(x)], \quad x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \tag{3.2}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad q(t) = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} J(t),$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1' = \beta\left(-\dfrac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}(1+v_1) + \dfrac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}\cdot\dfrac{Y(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))q(t)}(1+v_2)\right), \\[2ex] v_2' = \beta\left(1 + v_2 + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}(1+v_2)(1+v_3) - \dfrac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}(1+v_2)^2\right), \\[2ex] v_3' = \beta\left(1 + v_3 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}(1+v_3)^2 + \dfrac{p(t)\pi_\omega^3(t)}{(2\lambda_0 - 1)J(t)}\cdot\dfrac{q(t)\varphi(Y(t,v_1))}{Y(t,v_1)(1+v_2)}\right), \end{cases} \tag{3.3}$$

в которой $t = t(x)$ — функция, обратная для $x = \beta\ln|\pi_\omega(t)|$ и

$$Y(t,v_1) = \Phi^{-1}\left(q(t)(1+v_1)\right). \tag{3.4}$$

В силу условий (1.10) и (1.11)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q(t) = -\infty \quad \text{при} \quad \sigma > 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q(t) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma < 0$$

и существует число $t_0 \in [a,\omega[$, такое, что в случае $\sigma > 0$

$$q(t)(1+v_1) \in]-\infty, 0] \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[\quad \text{и} \quad |v_1| \le \frac{1}{2},$$

а в случае $\sigma < 0$

$$q(t)(1+v_1) \in]0,b] \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[\quad \text{и} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.$$

Поэтому $Y(t,v_1) \in]0,y_0[$ при $t \in [t_0,\omega[$ и $|v_1| \le \frac{1}{2}$, причем согласно (1.7)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Отсюда с учетом (1.8) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))\Phi(Y(t,v_1))} = -\sigma \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

т. е.

$$\frac{Y(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))} = [-\sigma + R_1(t,v_1)]\Phi(Y(t,v_1)) \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(Y(t,v_1))}{Y(t,v_1)} = \frac{-\frac{1}{\sigma} + R_2(t,v_1)}{\Phi(Y(t,v_1))},$$

где функции R_i $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_i(t,v_1)=0 \quad (i=1,2) \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.5}$$

Значит, в силу (3.4) имеют место представления

$$\frac{Y(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))}=[-\sigma+R_1(t,v_1)]q(t)(1+v_1), \quad \frac{\varphi(Y(t,v_1))}{Y(t,v_1)}=\frac{-\frac{1}{\sigma}+R_2(t,v_1)}{q(t)(1+v_1)}.$$

Учитывая эти представления и полагая

$$h(t)=\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)J'(t)}{\sigma(1-2\lambda_0)J(t)},$$

перепишем систему дифференциальных уравнений (3.3) в виде

$$\begin{cases} v_1'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f_1(x,v_1,v_2)+\sigma(1-2\lambda_0)v_2+V_1(v_1,v_2)\right], \\[2ex] v_2'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[(1-2\lambda_0)v_2+\lambda_0 v_3+V_2(v_2,v_3)\right], \\[2ex] v_3'=\dfrac{\beta}{\lambda_0-1}\left[f_2(x,v_1,v_2)-v_1-v_2-(\lambda_0+1)v_3+V_3(x,v_1,v_2,v_3)\right], \end{cases} \tag{3.6}$$

где

$$f_1(x,v_1,v_2)=(2\lambda_0-1)\left[R_1(t,v_1)(1+v_2)-\sigma+\sigma)h(t)\right](1+v_1),$$

$$V_1(v_1,v_2)=\sigma(1-2\lambda_0 v_1v_2, \quad V_2(v_2,v_3)=\lambda_0v_2v_3-(2\lambda_0-1)v_2^2,$$

$$f_2(x,v_1,v_2)=-\sigma h(t)R_2(t,v_1)(1+v_1)^{-1}(1+v_2)^{-1}+(h(t)-1)(1-v_1-v_2)),$$

$$V_3(x,v_1,v_2,v_3)=-(2\lambda_0-1)v_3^2+h(t)\left((1+v_1)^{-1}(1+v_2)^{-1}-1+v_1+v_2\right).$$

Полученную систему рассмотрим на множестве $[x_0,+\infty[\times\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$, где $x_0= =\beta\ln|\pi_\omega(t_0)|$ и $\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}=\{(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3 : |v_k|\le\frac{1}{2}\ (k=1,2,3)\}$. Поскольку $x'(t)=\frac{\beta}{\pi_\omega(t)}>0$ при $t\in[t_0,\omega[$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega}x(t)=+\infty$ и $t=t(x)$ — функция, обратная для $x:[t_0,\omega[\longrightarrow[\tau_0,+\infty[$, то на множестве $[x_0,+\infty[\times\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$ правые части системы непрерывны, и в силу условий (1.11), (3.5)

$$\lim_{x\to+\infty}f_1(x,v_1,v_2)=0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}f_2(x,v_1,v_2)=0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1,v_2.v_3)\in\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{|v_k|+|v_{k+1}|\to0}\frac{V_k(v_k,v_{k+1})}{|v_k|+|v_{k+1}|}=0 \quad (k=1,2),$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|+|v_3|\to0}\frac{V_3(x,v_1,v_2,v_3)}{|v_1|+|v_2|+|v_3|}=0 \quad \text{равномерно по} \quad x\in[\tau_0,+\infty[.$$

Покажем также, что постоянная матрица коэффициентов при линейной части системы (3.6) не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Для этого достаточно показать, что таких собственных значений не имеет матрица

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(1-2\lambda_0) & 0 \\ 0 & 1-2\lambda_0 & \lambda_0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы $\det(C-\rho E)=0$. Тогда получим:

$$\rho^3 + 3\lambda_0\rho^2 + (2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)\rho + \sigma\lambda(1-2\lambda_0) = 0. \tag{3.7}$$

Это алгебраическое уравнение в силу выполнения условий (1.9) не имеет корней с нулевой действительной частью.

Таким образом, показано, что для системы дифференциальных уравнений (3.6) соблюдаются все условия леммы 2. Согласно этой лемме система (3.6) имеет по крайней мере одно решение $(v_k)_{k=1}^3 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(x_1 \geq x_0)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, причем таких решений существует целое m–параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (3.7) имеется m корней, знаки которых совпадают со знаком $\beta(1-\lambda_0)$ (поскольку все корни уравнения (3.7) отличаются от корней характеристического уравнения предельной матрицы коэффициентов при линейной части системы (3.6) множителем $\frac{\beta}{\lambda_0-1}$). Каждому такому решению системы (3.6) в силу замен (3.2) соответствует решение дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.12), (1.13). Нетрудно убедиться в том, что это решение является $P_\omega^0(\lambda_0)$ — решением уравнения (1.1). Поскольку $\beta = \text{sign}\pi_\omega(t)$, то в силу (1.10) таких решений у уравнения (1.1) будет целое m–параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (3.7) имеется m корней, знаки которых совпадают со знаком числа $2\lambda_0 - 1$. Теорема полностью доказана.

Заключение. В настоящей работе получены точные асимптотические формулы для некоторых исчезающих в особой точке ω решений обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка (1.1) с правильно меняющейся при $y \to 0$ нелинейностью $\varphi(y)$. В отличие от работ, посвященных уравнениям такого вида второго порядка, здесь сняты ограничения на гладкость функции φ, что стало возможным благодаря использованию свойств правильно меняющихся функций и установленной лемме 2. Поскольку аналог леммы 2 для двумерной системы уже был ранее установлен в [16], то такой же подход может быть использован для снятия ограничений на функцию φ при изучении уравнений указанного вида второго порядка. Найденные в работе асимптотические формулы неявно задают вид решений. Однако в случае конкретного вида функции φ (см. замечание 2) они довольно часто могут быть записаны в явном виде. В силу произвольности $\omega \leq +\infty$ доказанная теорема позволяет описывать асимптотику не только правильных, но и сингулярных решений первого рода уравнения (1.1).

1. **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия – Москва: Наука, 1990. – 432 с.

2. **Костин А. В.** Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / А. В. Костин // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23, № 3. – С. 524–526.
3. **Евтухов В. М.** Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка [текст] / В. М. Евтухов // Докл. расшир. заседаний Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа ТГУ. – 1988. – 3, № 3. – С. 62–65.
4. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера n-го порядка [текст] / В. М. Евтухов // Докл. АН России. – 1992. – 324, № 2. – С. 258–260.
5. **Евтухов В. М.** Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена–Фаулера [текст] / В. М. Евтухов // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – 145, № 2. – С. 269–273.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений n-го порядка [текст] / В. М. Евтухов // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: праці Українського математичного конгресу-2001 / Вид. Інституту математики НАН України. – Київ, 2002. – С. 15–33.
7. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции [текст] / Е. Сенета – М.: Наука. – 1985. – 144 с.
8. **Marić V.** Asymptotic Properties of Solutions of the Equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ [text] / V. Marić, M. Tomić // Mathematische Zeitschrift. – 1976. – 149. – P. 261–266.
9. **Talliaferro S. D.** Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ [text] / S. D. Talliaferro // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – 12 , № 6. – P. 136–152.
10. **Marić V.** Regular variations end Differential equations (Lecture Notes in Mathematics 1726) [text] / Marić V. – Berlin: Springer, 2000. – 127 p.
11. **Evtukhov V. M.** Asymptotic representations for unbounded solutions of second order nonlinear differential equations close to equations of Emden-Fowler type [text] / V. M. Evtukhov, L. A. Kirilova //Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2003. – 30. – P. 153–158.
12. **Кирилова Л. О.** Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена–Фаулера [текст] / Л. О. Кирилова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. – 2004. – Вип. 228. – Математика. – С. 30–35.
13. **Евтухов В. М.** Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, Л. А. Кириллова // Дифференц. уравнения. – 2005. – 41, № 8. – С. 1053–1061.
14. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Дис. докт. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Дифференциальные уравнения" [текст] / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 295 с.
15. **Coppel W. A.** Stability and asymptotic behaviour of differential equations [text] / W. A. Coppel – Boston, Heats and company, 1965. – 166 p.
16. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, В. М. Харьков // Дифференц. уравнения. – 2007. – № 43. – С. 1311–1323.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 109–115

УДК 517.9

О. Ю. Теплінський
Інститут математики НАН України

ОБМЕЖЕНІСТЬ РЕНОРМАЛІЗАЦІЙ ДИФЕОМОРФІЗМІВ КОЛА ЗІ ЗЛАМОМ

Теплінський О. Ю. Обмеженість ренормалізацій дифеоморфізмів кола зі зламом. Доведено обмеженість за $C^{2+\alpha}$-нормою послідовності ренормалізацій довільного $C^{2+\alpha}$-гладкого дифеоморфізму кола зі зламом.
Ключові слова: дифеоморфізми кола зі зламом, ренормалізації.

Теплинский А. Ю. Ограниченность ренормализаций диффеоморфизмов окружности с изломом. Доказана ограниченность в $C^{2+\alpha}$-норме последовательности ренормализаций произвольного $C^{2+\alpha}$-гладкого диффеоморфизма окружности с изломом.
Ключевые слова: диффеоморфизмы окружности с изломом, ренормализации.

Teplinsky A. Boundness of renormalizations of circle diffeomorphisms with a break. It is proved that the sequence of renormalizations of any $C^{2+\alpha}$-smooth circle diffeomorphism with a break is bounded in the $C^{2+\alpha}$-norm.
Key words: circle diffeomorphisms with a break, renormalizations.

Вступ. Дифеоморфізм кола зі зламом — це такий гомеоморфізм кола, який є гладким всюди крім однієї точки, в якій його похідна має стрибок. В оглядовій роботі [1] було анонсовано результат щодо умов наявності C^1-гладкого спряження між двома дифеоморфізмами кола зі зламом. Доведення зазначеного результату здійснюється на основі т. зв. умовної теореми з [2], яка виводить наявність такого спряження з експоненційного зближення послідовних ренормалізацій двох заданих гомеоморфізмів кола та ще деяких додаткових умов. В даній замітці буде доведено одну з цих умов, а саме — показано обмеженість послідовності ренормалізацій дифеоморфізму кола зі зламом гладкості $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, за $C^{2+\alpha}$-нормою.

Властивості ренормалізацій дифеоморфізмів кола гладкості $C^{2+\alpha}$ зі зламом вперше було досліджено в роботах [3, 4]. Зокрема, там було показано, що такі ренормалізації наближаються до певної сім'ї дробово-лінійних відображень експоненційно швидко за C^2-нормою. Але оскільки зазначена сім'я сама по собі не є обмеженою, то зі згаданого результату безпосередньо не випливає обмеженість послідовності ренормалізацій навіть за C^2-нормою. Тим не менш, розвинувши певні ідеї з [4], виявляється можливим довести обмеженість довільної такої послідовності за нормою $C^{2+\alpha}$, що і складає зміст нашої статті.

Дамо необхідні означення. *Одиничним колом* ми називаємо фактор-простір $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ із зрозумілим чином заданими орієнтацією, метрикою, мірою Лебега та операцією додавання. Позначимо $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ відповідне факторизаційне відображення, яке "намотує" пряму на коло. Довільний зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм T одиничного кола $\mathbb{S}$ може бути, відповідно, "піднято" на пряму $\mathbb{R}$ у вигляді гомеоморфізму $L_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що має властивість $L_T(x+1) \equiv L_T(x) + 1$, пов'язану із T співвідношенням $\mu \circ L_T = T \circ \mu$, і є визначеним з точністю до цілого доданку.

Найважливішою арифметичною характеристикою зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму T одиничного кола $\mathbb{S}$ є *число обертання* $\rho = \rho(T)$, яке визначається як границя $\lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{i}$, де $x_i = L_T^i x_0$ — траєкторія підняття (класичний результат Пуанкаре стверджує, що для всякого T число обертання існує і не залежить від вибору підняття L_T й початкової точки $x_0 \in \mathbb{R}$). Тут і надалі для заданого відображення F запис F^i позначає його i-ту ітерацію $F \circ F \circ \cdots \circ F$ (i разів). Будемо вважати число обертання ірраціональним (така властивість є еквівалентною відсутності в T періодичних точок) і використовувати його розклад у нескінченний *ланцюговий дріб* [5]:

$$\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{k_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}. \tag{1}$$

Фактично значенням виразу (1) є границя послідовності *раціональних наближень* $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$. Взаємопрості натуральні числа p_n та q_n задовольнять рекурентні співвідношення $p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2}$ для $n \geq 1$, де для зручності покладається $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ та $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$.

Для заданого гомеоморфізму T можна розглянути траєкторію $\xi_i = T^i \xi_0$, $i \geq 0$ певної *відміченої точки* $\xi_0 \in \mathbb{S}$ і вибрати з неї послідовність *динамічних наближень* ξ_{q_n}, $n \geq 0$, індексами яких є знаменники відповідних раціональних наближень до ρ. Зручно також використовувати $\xi_{q_{-1}} = \xi_0 - 1$. Добре вивчені арифметичні властивості раціональних наближень показують, що динамічні наближення підходять до відміченої точки по черзі з двох боків:

$$\xi_{q_{-1}} < \xi_{q_1} < \cdots < \xi_{q_{2m+1}} < \cdots < \xi_0 < \cdots < \xi_{q_{2m}} < \cdots < \xi_{q_2} < \xi_{q_0}.$$

У відповідності до цього порядку означимо n-й *фундаментальний відрізок* $\Delta_0^{(n)}$ як дугу $[\xi_0, \xi_{q_n}]$ для парного n та як дугу $[\xi_{q_n}, \xi_0]$ для n непарного. Ітерації T^{q_n} та $T^{q_{n-1}}$, обмежені на фундаментальні відрізки $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$, відповідно, є нічим іншим, як двома неперервними компонентами відображення першого повернення для T на їхнє об'єднання $\overline{\Delta}_0^{(n-1)} = \Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$ із склеєними між собою кінцевими точками $\xi_{q_{n-1}}$ і ξ_{q_n}. Послідовні образи фундаментального відрізку $\Delta_0^{(n-1)}$ під дією T позначатимемо $\Delta_i^{(n-1)} = T^i \Delta_0^{(n-1)}$, $i \geq 0$.

Наступне елементарне, але ключове для наших оцінок комбінаторне твердження випливає з арифметичних властивостей розкладу числа обертання в ланцюговий дріб.

Твердження (A). *Жодні два з відрізків $\Delta_i^{(n-1)}$, $0 \leq i < q_n$, не мають спільних внутрішніх точок. Зокрема, сума їхніх довжин є меншою за довжину кола, тобто за одиницю.*

Назвемо n-ю *ренормалізацією*, $n \geq 0$, зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму T одиничного кола $\mathbb{S}$ з числом обертання (1) відносно відміченої точки $\xi_0 \in \mathbb{S}$

функцію

$$f_n = \mathfrak{r}_n \circ T^{q_n} \circ \mathfrak{r}_n^{-1}, \tag{2}$$

яка одержується з обмеження ітерації T^{q_n} на фундаментальний відрізок $\Delta_0^{(n-1)}$ за допомогою аффінної заміни координат $\mathfrak{r}_n : \Delta_0^{(n-1)} \to [-1,0]$, яка переводить ξ_0 в 0, а $\xi_{q_{n-1}}$ в -1. Очевидно, що визначена вказаним чином функція $f_n : [-1,0] \to \mathbb{R}$ є неперервною і строго зростаючою, до того ж виконуються нерівності $f_n(x) > x$ для всіх $x \in [-1,0]$ та $f_n(-1) < 0$ (докладний опис властивостей ренормалізацій дивіться [6]).

Гомеоморфізм кола T називається *дифеоморфізмом* гладкості $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, *з можливим зламом* в точці ξ_0, якщо виконуються наступні умови, які простіше формулювати в термінах обмеження $\bar{L}_T$ підняття L_T на відрізок $[x_0, x_0+1]$, де $\mu x_0 = \xi_0$ (і L_T, і x_0 визначені з точністю до цілого доданку, але це не впливає на однозначність нашого означення):

1) $\bar{L}_T \in C^{2+\alpha}([x_0, x_0+1])$;
2) $\min_{x\in[x_0,x_0+1]} \bar{L}'_T > 0$.

В термінах власне гомеоморфізму кола T це означає, що він є гладким усюди на колі крім однієї точки, в якій його похідна може мати стрибок, але вона ніде не вироджується в нуль. Говорячи про "можливий" злам, ми маємо на увазі, що зламу може і не бути: випадок рівності однобічних похідних $T'(\xi_0+) = T'(\xi_0-)$, тобто випадок $\bar{L}'_T(x_0) = \bar{L}'_T(x_0+1)$, не виключається з нашого розгляду. Розглядаючи ренормалізації дифеоморфізму кола зі зламом, будемо вважати, що відміченою точкою є саме точка зламу. Очевидно, що за такого припущення усі ренормалізації довільного дифеоморфізма зі зламом належать класу $C^{2+\alpha}([-1,0])$.

Основні результати.

Теорема 1. *Послідовність ренормалізацій дифеоморфізму кола зі зламом є обмеженою в просторі $C^{2+\alpha}([-1,0])$, тобто для кожного зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму кола T, що задовольняє умови 1)–2) з ірраціональним числом обертання (1), існують такі сталі C_0, C_1, C_2 та C_{H}, залежні лише від T, що для кожного $n \geq 0$ ренормалізація f_n відносно точки зламу ξ_0 задовольняє нерівності*

$$|f_n(x)| \leq C_0, \quad x \in [-1,0]; \tag{3}$$

$$|f'_n(x)| \leq C_1, \quad x \in [-1,0]; \tag{4}$$

$$|f''_n(x)| \leq C_2, \quad x \in [-1,0]; \tag{5}$$

$$|f''_n(x) - f''_n(y)| \leq C_{\mathrm{H}}|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in [-1,0]. \tag{6}$$

Доведення. В доведенні теореми 1 є формули, що містять похідні від кусочно-гладкої функції T (чи її ітерацій). У випадку коли аргументом такої похідної трапляється точка зламу, маються на увазі ліві або праві однобічні похідні. Власне кажучи, кожна з таких формул мусила б записуватися у двох варіантах — для похідних зліва та для похідних справа, але ми цього, звичайно ж, не робитимемо.

Почнемо з оцінки (4). В силу означення ренормалізації (2) ця оцінка еквівалентна тому, що $(T^{q_n})'(\eta_0) = \prod_{i=0}^{q_n-1} T'(\eta_i) \le C_1$, $\eta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$, $\eta_i = T^i\eta_0 \in \Delta_i^{(n-1)}$, а остання є частиною двобічної оцінки Данжуа

$$e^{-\mathfrak{v}} \le (T^{q_n})'(\eta_0) \le e^{\mathfrak{v}}, \tag{7}$$

де $\mathfrak{v} = \operatorname{Var} \ln T' > 0$, для всіх $\eta_0 \in \mathbb{S}$. В [7] оцінку (7) доведено для гладкого гомеоморфізму кола T, але це доведення легко поширити на кусково-гладкий гомеоморфізм. Справді, комбінаторні міркування з [7] показують, що

$$|\ln((T^{q_n})'(\eta_0)) - \ln((T^{q_n})'(\zeta_0))| \le \mathfrak{v} \tag{8}$$

для довільних $\eta_0, \zeta_0 \in \mathbb{S}$. Легко зауважити, що

$$\int_{\mathbb{S}} (T^{q_n})'(\eta_0) d\eta_0 = \int_0^1 (L_T^{q_n})'(x_0) dx_0 = L_T^{q_n}(1) - L_T^{q_n}(0) = 1,$$

тому внаслідок кускової гладкості T^{q_n} знайдуться такі $\zeta_0^+, \zeta_0^- \in \mathbb{S}$, що $((T^{q_n})'(\zeta_0^+)) \ge$ $\ge 1 \ge ((T^{q_n})'(\zeta_0^-)) > 0$, а отже, з (8) випливає (7), і (4) має місце з $C_1 = e^{\mathfrak{v}}$.

Тепер доведемо (3). Оскільки f_n зростає, то

$$\max_{x \in [-1,0]} |f_n(x)| = \max\{|f_n(-1)|, |f_n(0)|\}.$$

Неважко зауважити, що $f_n(-1) \in (-1, 0)$, отже $|f_n(-1)| \le 1$. З іншого боку, $\Delta_0^{(n)} \subset \Delta_{q_n}^{(n-1)}$, тому $|f_n(0)| = \frac{|\Delta_0^{(n)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} < \frac{|\Delta_{q_n}^{(n-1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} = (T^{q_n})'(\theta_0) \le e^{\mathfrak{v}}$ згідно з (7), де $\theta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$ — та точка, для якої $|\Delta_{q_n}^{(n-1)}| = |T^{q_n}\Delta_0^{(n-1)}| = (T^{q_n})'(\theta_0)|\Delta_0^{(n-1)}|$. Таким чином, (3) має місце з $C_0 = e^{\mathfrak{v}}$.

Оцінка (5) в силу (2) еквівалентна такій: $|(T^{q_n})''(\eta_0)| \le \frac{C_2}{|\Delta_0^{(n-1)}|}$, $\eta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$. Неважко переконатися, що

$$(T^j)''(\zeta_0) = (T^j)'(\zeta_0) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{T''(\zeta_i)}{T'(\zeta_i)} (T^i)'(\zeta_0) \tag{9}$$

для довільних $\zeta_0 \in \mathbb{S}$, $j \ge 0$. Оскільки для довільних $\eta_0, \zeta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$ маємо $\eta_i, \zeta_i \in \Delta_i^{(n-1)}$, то з огляду на твердження (A) виводимо для довільного $0 \le j \le q_n$ оцінку $|\ln(T^j)'(\eta_0) - \ln(T^j)'(\zeta_0)| \le \sum_{i=0}^{j-1} |\ln T'(\eta_i) - \ln T'(\zeta_i)| \le \mathfrak{v}$, з якої випливає оцінка

$$e^{-\mathfrak{v}} \le \frac{(T^j)'(\eta_0)}{(T^j)'(\zeta_0)} \le e^{\mathfrak{v}}.$$

Зауваживши для кожного $0 \le j \le q_n$ існування $\theta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$, такого, що $|\Delta_j^{(n-1)}| =$ $= (T^j)'(\theta_0)|\Delta_0^{(n-1)}|$, з останньої оцінки виводимо наступну:

$$e^{-\mathfrak{v}} \frac{|\Delta_j^{(n-1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} \le (T^j)'(\eta_0) \le e^{\mathfrak{v}} \frac{|\Delta_j^{(n-1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} \tag{10}$$

для довільних $\eta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$, $0 \le j \le q_n$. Використавши тотожність (9), оцінки (7) та (10), а також скориставшися твердженням (A), для довільного $\eta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$ дістаємо

$$|(T^{q_n})''(\eta_0)| \le e^{\mathfrak{v}} \sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{|T''(\eta_i)|}{T'(\eta_i)} e^{\mathfrak{v}} \frac{|\Delta_i^{(n-1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} \le \frac{e^{2\mathfrak{v}}}{|\Delta_0^{(n-1)}|} \max_{\zeta\in\mathbb{S}} \frac{|T''(\zeta)|}{T'(\zeta)}, \tag{11}$$

тобто (5) виконується з $C_2 = e^{2\mathfrak{v}} M_0$, де M_0 — максимальне значення модуля функції $S_T = \bar{L}_T''/\bar{L}_T' \in C^\alpha([x_0, x_0+1])$.

Нарешті, доведемо останню оцінку теореми. Нехай $x, y \in [-1, 0]$, $\eta_0 = \mathfrak{r}_n^{-1} x$, $\zeta_0 = \mathfrak{r}_n^{-1} y$. Згідно з (2), у термінах гомеоморфізму T оцінка (6) еквівалентна такій: $|(T^{q_n})''(\eta_0) - (T^{q_n})''(\zeta_0)| \le C_{\rm H} |\eta_0 - \zeta_0|^\alpha |\Delta_0^{(n-1)}|^{-1-\alpha}$ для всіх $\eta_0, \zeta_0 \in \Delta_0^{(n-1)}$. Відповідно до розкладу (9) запишемо

$$(T^{q_n})''(\eta_0) - (T^{q_n})''(\zeta_0) =$$

$$= \Big((T^{q_n})'(\eta_0) - (T^{q_n})'(\zeta_0) \Big) \sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{T''(\eta_i)}{T'(\eta_i)} (T^i)'(\eta_0) +$$

$$+ (T^{q_n})'(\zeta_0) \sum_{i=0}^{q_n-1} \left(\frac{T''(\eta_i)}{T'(\eta_i)} - \frac{T''(\zeta_i)}{T'(\zeta_i)} \right) (T^i)'(\eta_0) +$$

$$+ (T^{q_n})'(\zeta_0) \sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{T''(\zeta_i)}{T'(\zeta_i)} \Big((T^i)'(\eta_0) - (T^i)'(\zeta_0) \Big).$$

Оцінимо окремо кожен з трьох рядків записаного розкладу. Маємо для першого рядку

$$|(T^{q_n})'(\eta_0) - (T^{q_n})'(\zeta_0)| = |(T^{q_n})''(\theta_0)| \cdot |\eta_0 - \zeta_0| \le \frac{e^{2\mathfrak{v}} M_0 |\eta_0 - \zeta_0|}{|\Delta_0^{(n-1)}|}$$

згідно з (11),

$$\left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{T''(\eta_i)}{T'(\eta_i)} (T^i)'(\eta_0) \right| \le \frac{e^{\mathfrak{v}} M_0}{|\Delta_0^{(n-1)}|} \tag{12}$$

згідно з (10) і твердженням (A), отже

$$\left| \Big((T^{q_n})'(\eta_0) - (T^{q_n})'(\zeta_0) \Big) \sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{T''(\eta_i)}{T'(\eta_i)} (T^i)'(\eta_0) \right| \le \frac{e^{3\mathfrak{v}} M_0^2 |\eta_0 - \zeta_0|}{|\Delta_0^{(n-1)}|^2}.$$

Для виразів у другому рядку маємо

$$\left| \frac{T''(\eta_i)}{T'(\eta_i)} - \frac{T''(\zeta_i)}{T'(\zeta_i)} \right| \le M_{\rm H} |\eta_i - \zeta_i|^\alpha,$$

де $M_{\rm H}$ — константа Гьольдера для функції $S_T = \bar{L}_T''/\bar{L}_T'$,

$$|\eta_i - \zeta_i| = (T^i)'(\theta_0) |\eta_0 - \zeta_0| \le e^{\mathfrak{v}} \frac{|\Delta_i^{(n-1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} |\eta_0 - \zeta_0|$$

згідно з (10), отже

$$\left|(T^{q_n})'(\zeta_0)\sum_{i=0}^{q_n-1}\left(\frac{T''(\eta_i)}{T'(\eta_i)}-\frac{T''(\zeta_i)}{T'(\zeta_i)}\right)(T^i)'(\eta_0)\right|\le\frac{e^{(2+\alpha)\mathfrak{v}}M_{\mathrm{H}}|\eta_0-\zeta_0|^\alpha}{|\Delta_0^{(n-1)}|^{1+\alpha}}$$

згідно з (7), (10) і твердженням (A). Для останнього рядку маємо

$$|(T^i)'(\eta_0)-(T^i)'(\zeta_0)|=|(T^i)''(\theta_0)|\cdot|\eta_0-\zeta_0|,$$

а відповідно до (9) і (12)

$$|(T^i)''(\theta_0)|\le\frac{e^{2\mathfrak{v}}M_0|\Delta_i^{(n-1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|^2},$$

отже

$$\left|(T^{q_n})'(\zeta_0)\sum_{i=0}^{q_n-1}\frac{T''(\zeta_i)}{T'(\zeta_i)}\Big((T^i)'(\eta_0)-(T^i)'(\zeta_0)\Big)\right|\le\frac{e^{3\mathfrak{v}}M_0^2|\eta_0-\zeta_0|}{|\Delta_0^{(n-1)}|^2}.$$

Підсумовуючи оцінки трьох рядків, з огляду на очевидну нерівність $|\eta_0-\zeta_0|\le$ $\le|\Delta_0^{(n-1)}|$, з якої випливає $\frac{|\eta_0-\zeta_0|}{|\Delta_0^{(n-1)}|}\le\frac{|\eta_0-\zeta_0|^\alpha}{|\Delta_0^{(n-1)}|^\alpha}$, дістаємо

$$|(T^{q_n})''(\eta_0)-(T^{q_n})''(\zeta_0)|\le C_{\mathrm{H}}\frac{|\eta_0-\zeta_0|^\alpha}{|\Delta_0^{(n-1)}|^{1+\alpha}},\quad \eta_0,\zeta_0\in\Delta_0^{(n-1)}$$

із $C_H=2e^{3\mathfrak{v}}M_0^2+e^{(2+\alpha)\mathfrak{v}}M_{\mathrm{H}}$, що й потрібно було довести.

Висновки. Ми довели обмеженість послідовності ренормалізацій довільного $C^{2+\alpha}$-гладкого дифеоморфізму кола з можливим зламом за $C^{2+\alpha}$-нормою. Цей результат дає змогу довести оголошену в [1] теорему щодо умов гладкої еквівалентності двох таких дифеоморфізмів.

1. **Теплинский А. Ю.** Жёсткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями [текст] / А. Ю. Теплинский, К. М. Ханин // Успехи математических наук. – 2004. – Т. 59, № 2. – С. 137–160.
2. **Khanin K.** Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities [text] / K. Khanin, A. Teplinsky // Inventiones Mathematicae. – 2007. – V. 169, № 1. – P. 193–218.
3. **Вул Е. Б.** Гомеоморфизмы окружности с особенностью типа излома [текст] / Е. Б. Вул, К. М. Ханин // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 3. – С. 189–190.
4. **Khanin K. M.** Circle homeomorphisms with weak discontinuities [text] / K. M. Khanin, E. B. Vul // Advances in Soviet mathematics. – 1991. – V. 3. – P. 57–98.
5. **Хинчин А. Я.** Цепные дроби [текст] / А. Я. Хинчин. – Москва: ГИФМЛ, 1960. – 112 с.

6. **Теплінський О. Ю.** Гіперболічна підкова для дифеоморфізмів кола зі зламом [текст] / О. Ю. Теплінський // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 1. – С. 112–127.
7. **Синай Я. Г.** Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами [текст] / Я. Г. Синай, К. М. Ханин // Успехи математических наук. – 1989. – Т. 44, № 1. – С. 57—82.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 116–128

УДК 517.926

С. А. Щёголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О ПОЛНОМ РАЗДЕЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Щоголев С. А. Про повний розподіл деяких класів лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь. Отримано деякий аналог теореми Флоке–Ляпунова для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої зображувані у вигляді рядів Фур'є з повільно змінними параметрами.
Ключові слова: многовид, повільно змінний, диференціальний, ряд Фур'є.

Щёголев С. А. О полном разделении некоторых классов линейных однородных систем дифференциальных уравнений . Получен некоторый аналог теоремы Флоке–Ляпунова для линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде рядов Фурье с медленно меняющимися параметрами.
Ключевые слова: многообразие, медленно меняющийся, дифференциальный, ряд Фурье.

Shchogolev S. A. On full separation of some classes of linear homogeenous system's of the differential equations. The some analog of Floque–Lyapunov theorem for the linear homogeneous system of the differential equations with coefficients, whose represented by a Fourier-series with slowly varying parameters are obtained.
Key words: manifold, slowly varying, differential, Fourier series.

Введение. В теории дифференциальных уравнений важной задачей является проблема построения для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1, \cdots, x_n)$, $P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$ ляпуновского преобразования

$$x = L(t)y, \tag{2}$$

приводящего систему (1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y, \tag{3}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$, то есть вопрос о полном разделении системы (1). Если преобразование (2) удаётся построить в явном виде, то систему (1) можно проинтегрировать в квадратурах, поскольку система (3) распадается на n независимых линейных однородных уравнений 1-го порядка. В то же время очевидно. что в общем случае построение преобразования (2) в явном виде невозможно, поскольку возникает необходимость интегрирования матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dL}{dt} = P(t)L - L\Lambda(t),$$

а это ничуть не менее сложная задача, чем интегрирование непосредственно самой системы (1). Поэтому в ряде исследований [1–6] не ставилась задача явного построения преобразования (2), а лишь доказывалось его существование, исследовались его свойства и возможность его приближённого построения, а также представление в виде асимптотических рядов. Также важным являлся вопрос о принадлежности элементов преобразующей матрицы $L(t)$ к тем же классам, что и элементы матрицы $P(t)$.

В работе [2] изучался вопрос о возможности приведения системы вида

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t) + A(t))x, \tag{4}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$, а $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$ в некотором смысле малая по сравнению с $\Lambda(t)$ квадратная матрица, с помощью ляпуновского преобразования

$$x = (E + Q(t))y$$

(E — единичная матрица) к системе вида

$$\frac{dy}{dt} = D(t)y,$$

$D(t) = \mathrm{diag}(d_1(t), \cdots, d_n(t))$. В работе [2] эта задача рассматривалась в классе непрерывных и ограниченных на всей оси функций. При этом предполагалось выполнение условия

$$\inf_{t\in R} |\mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)| \geq \gamma > 0 \quad (j \neq k). \tag{5}$$

Было установлено, что элементы матрицы $Q(t)$ также являются непрерывными и ограниченными на всей оси функциями.

Проблема разделения в случае неограниченных коэффициентов рассматривалась в работе [7].

В монографии [5] рассматривалась задача блочной расщепляемости на $\mathbf{R}$ линейных систем дифференциальных уравнений, экспоненциально дихотомичных на полуосях $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$. При этом указывались оценки для матрицантов систем, полученных в результате расщепления.

В работе [4] задача разделения системы вида (4) рассматривалась при более слабом, чем (5), условии, а именно:

$$\mathrm{Re}\lambda_1(t) < \mathrm{Re}\lambda_2(t) < \ldots < \mathrm{Re}\lambda_n(t) \quad (t_0 \leq t < +\infty).$$

В работе [3] изучалась задача приведения системы вида (4) к блочно-диагональному виду в классах почти периодических (в частности квазипериодических и периодических) функций. При этом было установлено, что элементы матрицы $Q(t)$ также являются функциями соответственно тех же классов.

В работе [8] изучалась задача приведения к L-диагональному виду и к действительному диагональному виду линейных систем с коэффициентами осциллирующего типа.

2. Основные обозначения и определения.

Введём область

$$G = \left\{t, \varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, -L\varepsilon^{-1} \le t \le L\varepsilon^{-1}, 0 < L < +\infty\right\}.$$

Определение 1. *Будем говорить, что в области G функция $f(t,\varepsilon)$ принадлежит классу $S_m \quad (m \in N \cup \{0\})$, если выполнены следующие условия:*

1) $f : G \to \mathbf{C}$,

2) $f(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^m(\mathbf{G})$ по t,

3) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_G |f_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty \quad (0 \le k \le m)$.

Определение 2. *Будем говорить, что в области G функция $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ принадлежит классу $B_m \quad (m, l \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, если эта функция представима в виде*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём выполнены условия

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S_m, \quad d^k f_n(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon) \quad (n \in \mathbf{Z}, \quad 0 \le k \le m)$,

2) $\|f\|_{B^l_m} \stackrel{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_G |f_{nk}(t,\varepsilon)| < +\infty$,

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau, \varphi(t,\varepsilon) \in \mathbf{R}^+, \varphi(t,\varepsilon) \in S_m, \inf\limits_G \varphi(t,\varepsilon) > 0$.

Функции класса B_m образуют линейное пространство, которое превращается в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|_{B_m}$. Справедлива цепочка включений

$$B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_m.$$

Для любой функции $f(t,\varepsilon,\theta) \in B_m$ обозначим:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)\mathrm{exp}(-in\theta)d\theta.$$

Символом $(A)_{jk}$ обозначим элемент a_{jk} матрицы $A = (a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$.

Для векторов $x = \mathrm{colon}(x_1,\cdots,x_n), y = \mathrm{colon}(y_1,\cdots,y_n)$ обозначим: $(x,y) = \sum_{j=1}^n x_k y_k$.

3. Постановка задачи. Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \left(A(t,\varepsilon) + \mu B(t,\varepsilon,\theta)\right)x, \tag{6}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1,\cdots,x_n)$, элементы $n \times n$-матрицы $A(t,\varepsilon)$ из класса S_m, а элементы $n \times n$-матрицы $B(t,\varepsilon,\theta)$ из класса B_m $(m \ge 3)$; $\mu \in [0,\mu_0] \subset \mathbf{R}$.

Изучается вопрос о полном разделении системы (6) и о принадлежности элементов преобразующей матрицы к классам $B_k(0 \le k \le m)$ при условии, что собственые значения $\lambda_j(t,\varepsilon)(j=\overline{1,n}$ матрицы $A(t,\varepsilon)$ таковы, что

$$\lambda_j(t,\varepsilon)-\lambda_k(t,\varepsilon)=i\omega_{jk}(t,\varepsilon) \quad (\omega_{jk}\in\mathbf{R}). \tag{7}$$

При этом существенно используются результаты работы [9]. Целью статьи является также получение некоторого аналога теоремы Флоке–Ляпунова [10] в терминах функций классов $B_k(0 \le k \le m)$ и представление фундаментальной системы решений (6). Статья содержит полное обоснование результатов, сформулированных в [11].

4. Некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right)\in B_m. \tag{8}$$

Тогда

$$\int\limits_0^t f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))d\tau\in B_{m-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим:

$$\int\limits_0^t f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))d\tau=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau,\varepsilon)\mathrm{exp}(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau$$

(вследствие равномерной сходимости ряда (8) почленное интегрирование законно).

Обозначим:

$$D_n^0u\equiv u,\quad D_n^1u=\frac{d}{dt}\left(\frac{u(t,\varepsilon)}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right),\quad D_n^ku=D_n^1(D_n^{k-1}u).$$

Путём m-кратного интегрирования по частям получим:

$$\int\limits_0^t f_n(\tau,\varepsilon)\mathrm{exp}(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau=a_n(t,\varepsilon)\mathrm{exp}(in\theta(t,\varepsilon))-a_n(0,\varepsilon),$$

где

$$a_n(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{D_n^k(f_n(t,\varepsilon))}{in\varphi(t,\varepsilon)}+$$

$$+(-1)^m\mathrm{exp}(-in\theta(t,\varepsilon))\int\limits_0^t D_n^m(f_n(\tau,\varepsilon))\mathrm{exp}(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau.$$

Применив к функции $a_n(t,\varepsilon)$ оператор $D_n^s\left(\frac{d}{dt}\right)$, получим:

$$D_n^s\left(\frac{da_n}{dt}\right)=\sum_{k=0}^{m-s-2}(-1)^kD_n^{k+s+1}(f_n(t,\varepsilon))+$$

$$+(-1)^{m+s-1}in\varphi(t,\varepsilon)\exp(-in\theta(t,\varepsilon))\int\limits_0^t D_n^m(f_n(\tau,\varepsilon))\exp(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau.$$

Очевидно, что

$$D_n^k(f_n(t,\varepsilon))=\varepsilon^kf_{nk}^*(t,\varepsilon),\quad \sup_G|f_{nk}^*(t,\varepsilon)|<+\infty.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_0^t D_n^m((f_n(\tau,\varepsilon))\exp(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau\right|\le L\varepsilon^{m-1}\sup_G|f_{nm}^*(t,\varepsilon)|,$$

причём, как несложно убедиться,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\sup_G|f_{nm}^*(t,\varepsilon)|<+\infty.$$

Из этих оценок вытекает, что $\forall s=\overline{0,m-2}:$

$$\frac{d^{s+1}a_n(t,\varepsilon)}{dt^{s+1}}=\varepsilon^{s+1}a_{ns}^*(t,\varepsilon),$$

причём

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\sup_G|a_{ns}^*|<+\infty,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть задана линейная однородная система дифференциальных уравнений:*

$$\frac{dx}{dt}=\left(iD(t,\varepsilon)+\varepsilon R(t,\varepsilon)+\sum_{\nu=1}^{r}P_\nu(t,\varepsilon,\theta)\mu^\nu\right)x, \tag{9}$$

$$D(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}(\sigma_1(t,\varepsilon),\dots,\sigma_N(t,\varepsilon)),\sigma_j(t,\varepsilon)\in\mathbf{R},R(t,\varepsilon)=(r_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}},$$

$$P_\nu(t,\varepsilon,\theta)=(p_{\nu jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}.\sigma_j(t,\varepsilon)\in S_m,r_{jk}(t,\varepsilon)\in S_{m-1},p_{\nu jk}(t,\varepsilon,\theta))\in B_m$$

$$(j,k=\overline{1,N};\nu=\overline{1,r}).$$

При выполнении условия $\forall p\in\mathbf{Z}$

$$\inf_G|\sigma_j(t,\varepsilon)-\sigma_k(t,\varepsilon)-p\varphi(t,\varepsilon)|\ge\gamma>0\quad(j\ne k)$$

существует преобразование вида

$$x = \left(E + \varepsilon \Phi(t,\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{r} \Phi_\nu(t,\varepsilon,\theta)\mu^\nu \right) y, \tag{10}$$

в котором элементы матрицы Φ *из класса* S_{m-1}, *а матриц* Φ_ν *— из класса* B_m, *приводящее систему (9) к виду*

$$\frac{dy}{dt} = \Big(iD(t,\varepsilon) + \varepsilon A_0(t,\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu +$$

$$+ \varepsilon^2 H(t,\varepsilon) + \mu\varepsilon W(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{r+1} F(t,\varepsilon,\theta,\mu) \Big) y, \tag{11}$$

где A_0 *— диагональная матрица с элементами из* S_{m-1}, $A_\nu(\nu = \overline{1,r})$ *— диагональные матрицы с элементами из* S_m, H, W, F *— квадратные матрицы с элементами из* B_{m-2}.

Доказательство. С учётом того, чтобы преобразованная система имела вид (11), определим матрицы $\Phi, \Phi_\nu, A_0, A_\nu$ $(\nu = \overline{1,r})$ следующим образом:

$$(\Phi)_{jk} = \frac{i(R)_{jk}}{\sigma_j - \sigma_k} \quad (j \neq k), \quad (\Phi)_{jj} \equiv 0,$$

$$(A_0)_{jk} \equiv 0 \quad (j \neq k), \quad (A_0)_{jj} = (R)_{jj},$$

$$(\Phi_\nu)_{jk} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n((T_\nu)_{jk})}{i(\sigma_j - \sigma_k - n\varphi)} \exp(in\theta) \quad (j \neq k),$$

$$(\Phi_1)_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n((T_\nu)_{jj})}{in\varphi} \exp(in\theta),$$

$$(A_\nu)_{jk} \equiv 0 \quad (j \neq k), \quad (A_\nu)_{jj} = \Gamma_0((P_1)_{jj}),$$

где обозначено: $T_1 = P_1$, $T_\nu = P_\nu + \sum_{q=1}^{\nu-1} (P_{\nu-q}\Phi_q - \Phi_q A_{\nu-q})$, $(\nu = \overline{2,r})$.

При достаточно малых значениях параметров ε и μ преобразование (10) будет невырожденным. Матрицы H, W, F можно определить формулами

$$H = -\frac{1}{\varepsilon}(E + \varepsilon\Phi)^{-1} \frac{d\Phi}{dt},$$

$$W = \left(E + \varepsilon\Phi + \sum_{\nu=1}^{r} \Phi_\nu \mu^\nu \right)^{-1} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial t} \mu^{\nu-1} - \varepsilon \sum_{\nu=1}^{r} \Phi_\nu H \mu^{\nu-1} \right),$$

$$F = \left(E + \varepsilon\Phi + \sum_{\nu=1}^{r} \Phi_\nu \mu^\nu \right)^{-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\sum_{\alpha+\beta=\nu+r+1} (P_\alpha \Phi_\beta - \Phi_\alpha A_\beta) \right) \mu^\nu.$$

Лемма 3. *Пусть задана квазилинейная дифференциальная система*

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f(t,\varepsilon) + \mu g(t,\varepsilon,\theta) + iD(t,\varepsilon)\xi + \varepsilon P(t,\varepsilon)\xi + \mu R(t,\varepsilon,\theta)\xi + \\ + \varepsilon(\xi, U(t,\varepsilon)\xi) + \mu(\xi, V(t,\varepsilon,\theta)\xi), \tag{12}$$

где $\xi = \mathrm{colon}(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $D = \mathrm{diag}(\sigma_1(t,\varepsilon), \ldots, \sigma_N(t,\varepsilon))$ *— действительная матрица, компоненты* N*-мерного вектора* f *и* $N \times N$*-матриц* P, U *из класса* S_{m-1}*, компоненты* N*-мерного вектора* g *и* $N \times N$*-матриц* R, V *из класса* B_m*.*

Пусть выполнены следующие условия:

(i) $\inf\limits_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0$, $\forall p \in \mathbf{Z}$, $j = \overline{1,n}$,

(ii) $\inf\limits_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - \sigma_k(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0$, $\forall p \in \mathbf{Z}$, $j \neq k$.

Тогда для достаточно малых значений ε *и* μ *и произвольного* $r \in \mathrm{N}$ *существует невырожденное преобразование вида*

$$\xi = h_r(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \Psi_r(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta, \tag{13}$$

где компоненты вектора h_r *и матрицы* Ψ_r *из класса* B_{m-1}*, которое сводит систему (12) к виду*

$$\frac{d\eta}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\eta + \varepsilon c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{r+1}}{\varepsilon} d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon^2 V_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \\ + \mu\varepsilon V_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \mu^{r+1} V_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \\ + \varepsilon^2(\eta, W_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta) + \mu\varepsilon(\eta, W_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta), \tag{14}$$

где все коэффициенты системы (14) принадлежат классу B_{m-2}*;* $\Lambda(t,\varepsilon,\mu) = = iD(t,\varepsilon) + \varepsilon A_0(t,\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu$*;* $A_0, A_1, \ldots, A_r$ *— диагональные матрицы с элементами из* S_{m-1}*.*

Доказательство. Наряду с системой (12) рассмотрим вспомогательную квазилинейную систему

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi}{d\theta} = iD(t,\varepsilon)\xi + \mu g(t,\varepsilon,\theta) + \mu R(t,\varepsilon,\theta)\xi + \mu(\xi, V(t,\varepsilon,\theta)\xi), \tag{15}$$

где t, φ рассматриваются как постоянные величины. Вектор g и матрицы R, V являются 2π-периодическими по θ. Для нахождения 2π-периодического по θ решения системы (15) можно использовать метод малого параметра Пуанкаре [12], согласно которому это решение ищется в виде степенного по параметру μ ряда

$$\xi(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k(t,\varepsilon,\theta)\mu^{k+1}, \tag{16}$$

где ξ^k, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — 2π-периодические по θ функции. Запишем уравнения для определения r первых коэффициентов ряда (16):

$$\varphi\frac{d\xi^0}{d\theta} = iD\xi^0 + g, \\ \varphi\frac{d\xi^1}{d\theta} = iD\xi^1 + R\xi^0, \\ \varphi\frac{d\xi^s}{d\theta} = iD\xi^s + R\xi^{s-1} + \sum_{l=0}^{s-2}(\xi^l, V\xi^{s-2-l}), \quad s = \overline{2, r-1}. \tag{17}$$

Условие (i) леммы гарантирует для каждого из уравнений (17) существование единственного 2π-периодического его решения. Очевидно при этом, что все полученные таким образом функции $\xi^0(t,\varepsilon,\theta),\dots,\xi^{r-1}(t,\varepsilon,\theta)$ принадлежат классу B_m.

Совершим теперь в системе (12) подстановку:

$$\xi=\chi+\sum_{k=0}^{r-1}\xi^k(t,\varepsilon,\theta)\mu^{k+1}+\varepsilon iD^{-1}(t,\varepsilon)f(t,\varepsilon) \tag{18}$$

(вследствие условия (i) матрица $D^{-1}(t,\varepsilon)$ существует), где χ — новый неизвестный вектор. Придём к системе

$$\begin{gathered}\tfrac{d\chi}{dt}=iD(t,\varepsilon)\chi+\varepsilon^2h(t,\varepsilon)+\mu^{r+1}m(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu\varepsilon k(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\\ +\varepsilon P(t,\varepsilon)\chi+\mu R(t,\varepsilon,\theta)\chi+\mu^2U_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi+\mu\varepsilon U_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi+\\ +\varepsilon^2U_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi+\varepsilon(\chi,U(t,\varepsilon)\chi)+\mu(\chi,V(t,\varepsilon,\theta)\chi).\end{gathered} \tag{19}$$

Вследствие условия (ii) леммы на основании леммы 2 систему (19) при помощи невырожденного преобразования

$$\chi=\Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1 \tag{20}$$

(χ^1 — новый неизвестный вектор) можно привести к виду

$$\begin{gathered}\tfrac{d\chi^1}{dt}=\left(iD(t,\varepsilon)+\varepsilon A_0(t,\varepsilon)+\textstyle\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu\right)\chi^1+\\ +\varepsilon^2h^1(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu\varepsilon h^2(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{r+1}h^3(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\\ +\varepsilon^2U_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1+\mu\varepsilon U_5(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1+\mu^{r+1}U_6(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1+\\ +\varepsilon(\chi^1,U_7(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1)+\mu(\chi^1,U_8(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1).\end{gathered} \tag{21}$$

Предполагая ε,μ достаточно малыми, совершим в системе (21) замену:

$$\chi^1=\mu\varepsilon u(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\varepsilon\eta, \tag{22}$$

где η — новый неизвестный вектор, а u - 2π-периодическое решение линейной неоднородной системы:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{du}{dt}=\left(iD(t,\varepsilon)+\varepsilon A_0(t,\varepsilon)+\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu\right)u+h^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) \tag{23}$$

(t,φ считаются постоянными). В результате получим систему (14).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть система (14) такова, что выполнено одно из следующих условий (А) или (Б):*

(А) $\mathrm{Re}(A_\nu(t,\varepsilon))_{jj}\equiv 0$, $(j=\overline{1,N};\nu=\overline{1,r})$;

(Б) $\exists r_0 \in \mathbf{N}(1 \le r_0 \le r)$, *такое, что* $\min\limits_{1\le j\le N} \inf\limits_G |\mathrm{Re}(A_{r_0}(t,\varepsilon))_{jj}| = \gamma > 0$, *и* $\forall \nu = \overline{1, r_0 - 1}$ *(если* $r_0 > 1$*):* $\mathrm{Re}(A_\nu(t,\varepsilon))_{jj} \equiv 0$ $(j = \overline{1,n})$.

Тогда для достаточно малых значений ε, μ *система (14) имеет частное решение класса* B_{m-2}.

Справедливость леммы следует из результатов работы [9].

Следствием лемм 3, 4 является

Лемма 5. *Пусть система (12) такова, что*

(i) выполнены условия (i), (ii) леммы 3,

(ii) для системы (14), полученной из системы (12) с помощью преобразования (13), выполнены условия леммы 4,

Тогда для достаточно малых значений ε, μ *система (12) имеет частное решение класса* B_{m-2}.

5. Основные результаты.

Вернёмся теперь к системе (6) и будем предполагать выполнение следующих условий.

1^0. Собственные значения $\lambda_1(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_n(t,\varepsilon)$ матрицы $A(t,\varepsilon)$ удовлетворяют условию (7).

2^0. $\inf\limits_G |\omega_{jk}(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \ge \gamma > 0$ $\forall p \in \mathbf{Z}$ $(j,k = \overline{1,n}; j \ne k)$.

3^0. Существует матрица $L(t,\varepsilon)$ с элементами из класса S_m, такая, что

1) $\inf\limits_G |\det L(t,\varepsilon)| > 0$,

2) $L^{-1}AL = \Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_n(t,\varepsilon))$.

4^0. $\exists r \in \mathbf{N} : \mu^{r+1} \le \varepsilon^2$.

Осуществив в системе (6) подстановку

$$x = L(t,\varepsilon)y, \tag{24}$$

приведём её к виду

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon K(t,\varepsilon) + \mu W(t,\varepsilon,\theta))\, y, \tag{25}$$

где элементы матрицы $K = -\frac{1}{\varepsilon}L^{-1}\frac{dL}{dt}$ из класса S_{m-1}, а элементы матрицы $W = L^{-1}BL$ из класса B_m.

В системе (25) осуществим подстановку:

$$y = (E + Q(t,\varepsilon,\theta,\mu))z, \tag{26}$$

в котором диагональные элементы матрицы $Q = (q_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ тождественно равны нулю, а остальные элементы определяются из условия диагональности преобразованной системы. Тогда

$$\frac{dq_{jk}}{dt} = i\omega_{jk}(t,\varepsilon)q_{jk} + \varepsilon(k_{jj}(t,\varepsilon) - k_{kk}(t,\varepsilon))q_{jk} +$$

$$+\mu(w_{jj}(t,\varepsilon,\theta) - w_{kk}(t,\varepsilon,\theta))q_{jk} + +\varepsilon k_{jk}(t,\varepsilon) + \mu w_{jk}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\varepsilon \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}}^{n} k_{js}(t,\varepsilon)q_{sk} + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}}^{n} w_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk} - \tag{27}$$

$$-\varepsilon q_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}}^{n} k_{ks}(t,\varepsilon)q_{sk} - \mu q_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}}^{n} w_{ks}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk}, j,k = \overline{1,n}(j \neq k).$$

При этом для компонент вектора z получим систему

$$\frac{dz_j}{dt} = d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)z_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{28}$$

где

$$d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \lambda_j(t,\varepsilon) + \varepsilon_{jj}(t,\varepsilon) + \mu w_{jj}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\varepsilon \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j)}}^{n} k_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{js}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j)}}^{n} w_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{js}(t,\varepsilon,\theta,\mu).$$

Легко заметить, что система (27) распадается на n независимых подсистем порядка $n-1$, каждая из которых имеет вид (12). В качестве коэффициентов $\sigma_j(t,\varepsilon)(j=\overline{1,N})$ системы (12) в системах (27) выступают $\omega_{jk}(t,\varepsilon)$, поэтому в силу 2^0 :

$$\inf_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| = \inf_G |\omega_{jk}(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0, p \in \mathbf{Z},$$

$$\inf_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - \sigma_s(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| =$$

$$= \inf_G |-i(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon)) + i(\lambda_s(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon)) - p\varphi(t,\varepsilon)| =$$

$$= \inf_G |-i(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_s(t,\varepsilon)) - p\varphi(t,\varepsilon)| = \inf_G |\omega_{js}(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0 (j \neq s).$$

Таким образом, каждая из систем (27) удовлетворяет условиям (i), (ii) леммы 3. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система (6) такова, что*

(i) справедливы предположения $1^0 - 4^0$*;*

(ii) каждая из систем (27) удовлетворяет условию (ii) леммы 5.

Тогда для достаточно малых значений параметров ε, μ *существуют преобразования (24), (26), приводящие систему (6) к диагональному виду (28), причём все элементы матрицы* $Q(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ *принадлежат классу* B_{m-2}.

Теорема 2. *Пусть система (6) удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда система (6) имеет фундаментальную систему решений вида*

$$x_{jk} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} l_{k\nu}(t,\varepsilon) q_{\nu j}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) r_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) \exp \int_0^t d_{j0}(\tau,\varepsilon,\mu) d\tau, j,k = \overline{1,n}$$

(j — номер решения, k — номер компоненты), где $l_{k\nu} \in S_m$, $q_{\nu j} \in B_{m-2}$, $r_j \in \in B_{m-3}$, $d_{j0} \in S_{m-2}$ ($q_{jj} \equiv 1$).

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1, леммы 1 и систе мы (28).

Проиллюстрируем выполнение условий теоремы 2 на примере системы, соответствующей уравнению Матье [13]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\left(\omega^2(t,\varepsilon) - 2\mu a(t,\varepsilon)\cos 2\theta(t,\varepsilon)\right) x_1, \tag{29}$$

$\omega, a \in S_m$, $\theta = \int_0^t \varphi(\tau,\varepsilon) d\tau$, $\varphi \in S_m$; $\omega, a, \varphi \in \mathbf{R}$, $\inf_G \omega > 0$, $\inf_G \varphi > 0$.

Ограничимся случаем $r = 1$, то есть вследствие 4^0

$$\mu \le \varepsilon. \tag{30}$$

.

Нетрудно убедиться, что система (27) в данном случае имеет вид:

$$\begin{gathered} \tfrac{dq_{12}}{dt} = -2i\omega q_{12} - 2\mu \tfrac{a}{i\omega} \cos 2\theta \cdot q_{12} + \tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega} - \mu \tfrac{a}{i\omega} \cos 2\theta - \\ - \tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega} q_{12}^2 - \mu \tfrac{a}{i\omega} \cos 2\theta \cdot q_{12}^2, \end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{dq_{21}}{dt} = 2i\omega q_{21} + 2\mu \tfrac{a}{i\omega} \cos 2\theta \cdot q_{21} + \tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega} + \mu \tfrac{a}{i\omega} \cos 2\theta - \\ - \tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega} q_{21}^2 + \mu \tfrac{a}{i\omega} \cos 2\theta \cdot q_{21}^2, \end{gathered} \tag{32}$$

где $\omega_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\omega}{dt}$. То есть имеем два независимых уравнения типа Риккати. Согласно вышеописанному методу уравнение (31) при достаточно малых ε, μ можно привести к виду

$$\begin{gathered} \tfrac{d\eta}{dt} = -2i\omega(t,\varepsilon)\eta + \varepsilon f_2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu f_3(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \tfrac{\mu^2}{\varepsilon} f_4(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon^2 p_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \mu\varepsilon p_5(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \\ + \mu^2 p_6(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \varepsilon^2 \psi_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^2 + \mu\varepsilon\psi_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^2. \end{gathered} \tag{33}$$

Все коэффициенты уравнения (33) из класса B_{m-2}. В данном случае $A_1(t,\varepsilon) \equiv 0$, и, таким образом, имеет место вариант (A) леммы 4. Аналогичная ситуация и в случае уравнения (32). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие из теоремы 2. Пусть система (29) удовлетворяет условиям

(i) $\inf_{G} |2\omega(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0 \ \forall p \in \mathbf{Z}$,

(ii) выполнено условие (30).

Тогда для достаточно малых ε система (29) имеет фундаментальную систему решений вида

$$x_{jk} = l_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\exp\left(\int\limits_0^t \beta_j(\tau,\varepsilon,\mu)d\tau\right) \quad (j,k = 1,2),$$

где $l_{jk} \in B_{m-3}, \beta_j \in S_{m-2}$.

Заключение. Таким образом, для системы вида (6), удовлетворяющей условию (7), получены условия существования преобразования с коэффициентами класса B_{m-2}, приводящего систему (6) к чисто диагональному виду. Как следствие, получен аналог теоремы Флоке–Ляпунова для линейных систем с коэффициентами из класса B_m, близких к медленно меняющимся.

1. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем [текст] / К. А. Абгарян. – М. Наука, 1973. – 431 с.
2. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения [текст] / Н. Я. Лященко // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7. – № 4. – С. 403–418.
3. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме разделения линейной системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами [текст] / Н. Я. Лященко // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7. – № 1. – С. 47–55.
4. **Костін В. В.** Деякі питання повного розподілу та асимптотичної поведінки розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [текст] / В. В. Костін // Доп. АН УРСР, сер. Ф. – 1967. – № 7. – С. 593–595.
5. **Митропольский Ю. А.** Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова [текст] / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
6. **Фещенко С. Ф.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений [текст] / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – К.: Наук. думка, 1966. – 251 с.
7. **Митропольский Ю. А.** О построении решений почти диагональных систем линейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость [текст] / Ю. А. Митропольский, Е. П. Белан // Укр. матем. журн. – 1968. – Т. 20. – № 2. – С. 166–175.
8. **Амелькин К. В.** О расщеплении линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / К. В. Амелькин, А. В. Костин // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6. – Вип. Фіз.-мат. науки. – С. 1–7.
9. **Щёголев С. А.** О решениях, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами, квазилинейных дифференциальных систем второго порядка [текст] / С. А. Щёголев // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т. 12. – Вип. 7. Матем. і механ. – С. 156–176.

10. **Якубович В. А.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами [текст] / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

11. **Щёголев С. А.** О представлении решений некоторых классов систем линейных дифференциальных уравнений [текст] / С. А. Щёголев // Крайові задачі для дифер. рівнянь. К.: ІМ НАНУ, 1998. – Вип. 2. – С. 283-288.

12. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [текст] / И. Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

13. **Хаяси Т.** Нелинейные колебания в физических системах [текст] / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.

УДК 517.954

A. Ashyralyev*, A. Dural, Y. Sözen***
*Department of Mathematics, Fatih University
**Gaziosman Paşa Lisesi

MULTIPOINT NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS INVERSE TYPE: WELL-POSEDNESS

The authors would like to thank to Prof. Pavel Sobolevskii (Universidade Federal do Ceará, Brasil), for his helpful suggestions for the improvement of this paper.

Ashyralyev A., Dural A., Sözen Y. Багатоточечнi нелокальнi крайовi задачi для параболiчних рiвнянь оберненого типу: коректне розв'язання. Розглядаються багатоточечнi нелокальнi крайовi задачi для параболiчних рiвнянь оберненого типу. Встановлюється коректне розв'язання цих задач у просторi гладких функцiй. У роботi отриманi коерцитивнi оцiнки розв'язкiв параболiчних рiвнянь.
Ключовi слова: багатоточечнi нелокальнi крайовi задачi, параболiчнi рiвняння оберненого типу, коректне розв'язання.

Ashyralyev A., Dural A., Sözen Y. Многоточечные нелокальные краевые задачи для параболических уравнений обратного типа: корректная разрешимость. Рассматриваются многоточечные нелокальные краевые задачи для параболических уравнений обратного типа. Устанавливается корректная разрешимость этих задач в пространствах гладких функций. В приложении получены коэрцитивные оценки решения параболических уравнений.
Ключевые слова: многоточечные нелокальные краевые задачи, параболические уравнения обратного типа, корректная разрешимость.

Ashyralyev A., Dural A., Sözen Y. Multipoint nonlocal boundary value problems for parabolic equations inverse type: well-posedness. Multipoint nonlocal boundary value problems for parabolic equations inverse type are considered. The well-posedness of these problems in the space of smooth functions is established. In applications, coercivity estimates for the solution of parabolic differential equations are obtained.
Key words: multipoint nonlocal boundary value problems, parabolic equations inverse type, well-posedness.

Introduction. The role played by coercivity inequalities (well-posedness) in the study of boundary value problems for partial differential equations is well known (see, e.g.,[1]-[3]). Well-posedness of nonlocal boundary value problems for partial differential equations parabolic and elliptic types has been studied extensively by many researchers (see, e.g., [4]-[10], and the references given therein).

In the present paper, we study the well-posedness of the nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t) \qquad (0 \le t \le 1), \\ u(1) = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k u(\theta_k) + \varphi, \\ 0 \le \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_p < 1 \end{cases} \tag{1}$$

for the differential equation in a Hilbert space H with self -adjoint positive definite operator A.

A function $u(t)$ is said to be a *solution* of the problem (1) if the following conditions are satisfied:

1. $u(t)$ is continuously differentiable on the segment $[0,1]$. The derivatives at the end points of the segment are understood as the appropriate unilateral derivatives.
2. The element $u(t)$ belongs to $D(A)$ for all $t \in [0,1]$ and the function $Au(t)$ is continuous on the segment $[0,1]$.
3. $u(t)$ satisfies the equation and the nonlocal boundary conditions (1).

A solution of problem (1) defined in this manner is from now referred as a solution of problem (1) in the space $C(H) = C([0,1],H)$ of all continuous functions $\varphi(t)$ defined on $[0,1]$ with values in H equipped with the norm

$$\| \varphi \|_{C(H)} = \max_{0\le t\le 1} \|\varphi(t)\|_H .$$

Problem (1) is said to be *well-posed* in $C(H)$, if the solutions of (1) satisfy the following *coercivity inequality*

$$\|u'\|_{C(H)} + \|Au(t)\|_{C(H)} \le M_C \left(\|f\|_{C(H)} + \|A\varphi\|_H\right),$$

where $1 \le M_C < \infty$, which is independent of $f(t) \in C(H)$, $\varphi \in D(A)$.

For $\alpha \in (0,1)$, we let $C_1^\alpha(H)$ and $C^\alpha(H)$ denote the Banach spaces obtained by the completion of the set of all smooth $H-$valued functions $\varphi(t)$ on $[0,1]$ with the norms

$$\|\varphi\|_{C_1^\alpha(H)} = \|\varphi\|_{C(H)} + \sup_{0\le t<t+\tau\le 1} \frac{(1-t)^\alpha \|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^\alpha},$$

$$\|\varphi\|_{C^\alpha(H)} = \|\varphi\|_{C(H)} + \sup_{0\le t<t+\tau\le 1} \frac{\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^\alpha}.$$

We say problem (1) is well-posed in $\mathcal{F}(H)$, if for each $f(t) \in \mathcal{F}(H)$ problem (1) is uniquely solvable and the following coercivity inequality hold:

$$\|u'\|_{\mathcal{F}(H)} + \|Au\|_{\mathcal{F}(H)} \le M \left(\|f\|_{\mathcal{F}(H)} + \|A\varphi\|_{H'}\right),$$

where $H' \subset H$, $M(\alpha)$ does not depend on $f(t)$ and φ.

We are interested in studying the well-posedness of problem (1) under the assumption

$$\sum_{k=1}^{p} |\alpha_k| \le 1. \tag{2}$$

In present paper, the well-posedness of the multipoint nonlocal boundary value problem (1) in space $C_1^\alpha(H)$ and $C^\alpha(H)$ is established. In applications, this abstract result permit us to obtain coercivity estimates in various Hölder norms for the solutions of nonlocal boundary value problems for parabolic equations.

1 Theorem on well-posedness

Now, let us give some lemmas we need in the sequel. Throughout this paper, let H be a Hilbert space, A be a positive definite self-adjoint operator with $A \geq \delta I$, where $\delta > 0$.

Lemma 1. *([13]) For every* $0 < t < t + \tau \leq 1$ *and* $0 \leq \beta \leq 1$, *we have*

$$\left\| e^{-tA} \right\|_{H \to H} \leq 1, \tag{3}$$

$$\left\| tAe^{-tA} \right\|_{H \to H} \leq 1, \tag{4}$$

$$\left\| e^{-tA} - e^{-(t+\tau)A} \right\|_{H \to H} \leq M \frac{\tau^\beta}{(t+\tau)^\beta}, \tag{5}$$

$$\left\| A(e^{-tA} - e^{-(t+\tau)A}) \right\|_{H \to H} \leq M \frac{\tau^\beta}{t(t+\tau)^\beta}, \tag{6}$$

for some $M > 0$.

Lemma 2. *Suppose that assumption (2) holds. Then, the operator*

$$I - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{-(1-\theta_k)A}$$

has an inverse

$$T = \left(I - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{-(1-\theta_k)A} \right)^{-1}$$

and the following estimate is satisfied:

$$||T||_{H \to H} \leq \frac{1}{1 - e^{-(1-\theta_p)\delta}} \leq C(\delta, \theta_p). \tag{7}$$

Proof . The proof follows from the triangle inequality, assumption (2), and estimate

$$\left\| \left(I - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{-(1-\theta_k)A} \right)^{-1} \right\|_{H \to H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{|1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{-(1-\theta_k)\lambda}|}.$$

Let us now obtain the formula for solution of problem (1). It is clear that for smooth data, the inverse Cauchy problem

$$\frac{du}{dt} - Au(t) = f(t), 0 < t < 1, u(1) = \xi$$

has a unique solution

$$u(t) = e^{-(1-t)A} u(1) - \int_t^1 e^{-(s-t)A} f(s) ds. \tag{8}$$

Using (8) and the nonlocal boundary condition

$$\xi = u(1) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u(\theta_k) + \varphi,$$

it can be written as follows

$$u(1) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left\{ e^{-(1-\theta_k)A} u(1) - \int_{\theta_k}^{1} e^{-(s-\theta_k)A} f(s)ds \right\} + \varphi.$$

By Lemma 2, we obtain

$$u(1) = T\left(-\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int_{\theta_k}^{1} e^{-(s-\theta_k)A} f(s)ds + \varphi \right). \tag{9}$$

Thus, the nonlocal boundary value problem (1) is uniquely solvable and for the solution, formulas (8) and (9) are valid.

Theorem 1. *Assume that $\varphi \in D(A)$, $f(t) \in C_1^{\alpha}(H)$ and (2). Then, problem (1) is well-posed in $C_1^{\alpha}(H)$ and the following coercivity estimate*

$$\|u'\|_{C_1^{\alpha}(H)} + \|Au\|_{C_1^{\alpha}(H)} \leq C(\delta, \theta_p) \left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_1^{\alpha}(H)} + \|A\varphi\|_H \right)$$

is valid, where $C(\delta, \theta_p)$ is independent of φ and $f(t)$, $t \in [0,1]$.

Proof. Using formula (8), we get for $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} Au(t) &= e^{-(1-t)A} Au(1) - \textstyle\int_t^1 Ae^{-(s-t)A} f(s)ds = \\ &= e^{-(1-t)A} Au(1) - \textstyle\int_t^1 Ae^{-(s-t)A} (f(s) - f(t))ds + (e^{-(1-t)A} - I)f(t). \end{aligned} \tag{10}$$

From estimates (3), (4), and definition of $C_1^{\alpha}(H)-$norm it follows that

$$\begin{aligned} \|Au(t)\|_H &\leq \|Au(1)\|_H + \tfrac{\|f\|_{C_1^{\alpha}(H)}}{(1-t)^{\alpha}} \textstyle\int_t^1 \tfrac{ds}{(s-t)^{1-\alpha}} + 2\|f\|_{C_1^{\alpha}(H)} \leq \\ &\leq \|Au(1)\|_H + \tfrac{4}{\alpha}\|f\|_{C_1^{\alpha}(H)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Next, let us estimate $\|Au(1)\|_H$.

Using formula (9), we obtain

$$\begin{aligned} Au(1) &= T\left(-\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int_{\theta_k}^{1} Ae^{-(s-\theta_k)A} f(s)ds + A\varphi \right) = T(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \times \\ &\times \left\{ -\textstyle\int_{\theta_k}^1 Ae^{-(s-\theta_k)A} (f(s) - f(\theta_k))ds - (I - e^{-(1-\theta_k)A}) f(\theta_k) \right\} + A\varphi). \end{aligned} \tag{12}$$

It follows from assumption (2), estimates (3), (4), (7), the definition of $C_1^\alpha(H)-$ norm and formula (12) that

$$\|Au(1)\|_H \leq C(\delta,\theta_p)\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{p}|\alpha_k|\left\{\tfrac{\|f\|_{C_1^\alpha(H)}}{(1-\theta_k)^\alpha}\int_{\theta_k}^{1}\tfrac{ds}{(s-\theta_k)^{1-\alpha}}+2\|f\|_{C_1^\alpha(H)}\right\}+\|A\varphi\|_H\right]\leq \tag{13}$$

$$\leq C(\delta,\theta_p)\left(\tfrac{1}{\alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right).$$

Thus, combining estimates (11), (13), we get

$$\|Au\|_{C(H)} \leq C(\delta,\theta_p)\left(\frac{1}{\alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right). \tag{14}$$

Now, we estimate

$$\sup_{0\leq t<t+\tau\leq 1}\frac{(1-t)^\alpha\|Au(t+\tau)-Au(t)\|_H}{\tau^\alpha}.$$

If $1-t\leq 2\tau$, then estimate (14) yields

$$\|Au(t+\tau)-Au(t)\|_H \leq C(\delta,\theta_p)\frac{\tau^\alpha}{(1-t)^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right). \tag{15}$$

Now, let $1-t>2\tau$. From identity (9) it follows that

$$\begin{aligned}
&Au(t)-Au(t+\tau)=(e^{-(1-t)A}-e^{-(1-t-\tau)A})Au(1)-\\
&-\textstyle\int_t^{t+2\tau}Ae^{-(s-t)A}(f(s)-f(t))ds+\\
&+\textstyle\int_{t+\tau}^{t+2\tau}Ae^{-(s-t-\tau)A}(f(s)-f(t+\tau))ds-\\
&-\textstyle\int_{t+2\tau}^{1}A(e^{-(s-t)A}-e^{-(s-t-\tau)A})(f(s)-f(t)ds+\\
&+(e^{-(1-t-\tau)A}-e^{-(1-t)A})(f(t+\tau)-f(t))+\\
&+(e^{-(1-t)A}-e^{-(1-t-\tau)A})f(t+\tau)=\\
&=I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)+I_5(t)+I_6(t).
\end{aligned} \tag{16}$$

Let us first estimate $I_1(t)$. Using estimates (5), (13), we obtain

$$\begin{aligned}
&\|I_1(t)\|_H \leq \|e^{-(1-t)A}-e^{-(1-t-\tau)A}\|_{H\to H}\|Au(1)\|_H\leq\\
&\leq \tfrac{M\tau^\alpha}{(1-t)^\alpha}C(\delta,\theta_p)\left(\tfrac{1}{\alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Now, from estimate (4) and the definition of $C_1^\alpha(H)-$norm it follows that

$$\begin{aligned}
&\|I_2(t)\|_H \leq \textstyle\int_t^{t+2\tau}\|Ae^{-(s-t)A}\|_{H\to H}\|f(s)-f(t)\|_H ds\leq\\
&\leq \tfrac{2^\alpha\tau^\alpha}{(1-t)^\alpha\ \alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Using estimate (4), the definition of $C_1^\alpha(H)-$norm, and the fact $1-t\le 2\tau$, we get

$$\begin{aligned}\|I_3(t)\|_H \le \textstyle\int_{t+\tau}^{t+2\tau} \|Ae^{-(s-t-\tau)A}\|_{H\to H}\|f(s)-f(t+\tau)\|_H ds \le \\ \le \tfrac{2^\alpha \tau^\alpha}{(1-t)^\alpha\ \alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}.\end{aligned} \tag{19}$$

It follows from estimate (6) for $\beta=1$, the definition of $C_1^\alpha(H)-$norm, and the fact $s\ge t+2\tau$ that

$$\begin{aligned}\|I_4(t)\|_H \le \textstyle\int_{t+2\tau}^{1}\|A(e^{-(s-t)A}-e^{-(s-t-\tau)A})\|_{H\to H}\|f(s)-f(t)\|_H ds \le \\ \le M\tfrac{2^{-1+\alpha}\ \tau^\alpha}{(1-t)^\alpha\ (1-\alpha)}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}.\end{aligned} \tag{20}$$

By estimate (3) and the definition of $C_1^\alpha(H)-$norm, we obtain

$$\begin{aligned}\|I_5(t)\|_H \le \|e^{-(1-t-\tau)A}-e^{-(1-t)A}\|_{H\to H}\|f(t+\tau)-f(t)\|_H \le \\ \le \tfrac{2\tau^\alpha}{(1-t)^\alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}.\end{aligned} \tag{21}$$

Finally, from estimate (5) and the definition of $C_1^\alpha(H)-$norm it follows that

$$\begin{aligned}\|I_6(t)\|_H \le \|e^{-(1-t)A}-e^{-(1-t-\tau)A}\|_{H\to H}\|f(t+\tau)\|_H \le \\ \le \tfrac{M\tau^\alpha}{(1-t)^\alpha}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}.\end{aligned} \tag{22}$$

Hence, combining estimates (17)-(22), for $1-t>2\tau$ we get

$$\frac{(1-t)^\alpha\|Au(t+\tau)-Au(t)\|_H}{\tau^\alpha}\le C(\delta,\theta_p)\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right).$$

Thus,

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t<t+\tau\le 1}\tfrac{(1-t)^\alpha\|Au(t+\tau)-Au(t)\|_H}{\tau^\alpha}\le \\ \le C(\delta,\theta_p)\left(\tfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right).\end{aligned} \tag{23}$$

From estimates (14), (23) it follows that

$$\|Au\|_{C_1^\alpha(H)}\le C(\delta,\theta_p)\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right). \tag{24}$$

Using differential equation (1), estimate (24) and the triangle inequality, we obtain

$$\|u'\|_{C_1^\alpha(H)}\le C(\delta,\theta_p)\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_1^\alpha(H)}+\|A\varphi\|_H\right). \tag{25}$$

This finishes the proof of Theorem 2.

Note that the spaces $C_1^\alpha(H)$ in which coercive solvability has been established, depend on the parameter $\alpha\in[0,1]$. However, the constants in the coercive inequalities depend on $\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$. Hence, we can not choose the parameter α freely from $[0,1]$, where problem (1) is well posed. As we note above problem (1) is ill posed in $C(H)$ ($C_1^\alpha(H)$ for $\alpha = 0$). We cannot establish well-posedness of problem (1) in $C_1^\alpha(H)$ for $\alpha = 1$.

Let $H_\alpha = H_{\alpha,\infty}(H, A)$ be the *fractional space*, consisting all $v \in H$ for which the following norm

$$\|v\|_{H_\alpha} = \|v\|_H + \sup_{\lambda>0} \|\lambda^{1-\alpha} A e^{-\lambda A} v\|_H$$

is finite.

Theorem 2. *Assume that $f(t) \in C^\alpha(H)$, $f(1) - \sum_{k=1}^p \alpha_k f(\theta_k) + A\varphi \in H_\alpha$ and (2). Then problem (1) is well-posed in $C^\alpha(H)$ and the following coercivity estimate*

$$\|u'\|_{C^\alpha(H)} + \|Au\|_{C^\alpha(H)} + \|u'\|_{C(H_\alpha)} \leq$$

$$\leq M \left(\frac{1}{\alpha} \|f(1) - \sum_{k=1}^p \alpha_k f(\theta_k) + A\varphi\|_{H_\alpha} + \frac{C(\delta, \theta_p)}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(H)} \right)$$

holds, where M does not depend on φ and $f(t)$, $t \in [0,1]$.

Proof. From formula (10) it follows that for $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} Au(t) &= -f(t) + e^{-(1-t)A}(Au(1) + f(1)) - \\ &- \textstyle\int_t^1 Ae^{-(s-t)A}(f(s) - f(t))ds + e^{-(1-t)A}(f(t) - f(1)) = \\ &= J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t). \end{aligned} \tag{26}$$

Let us establish the estimate for $\|Au\|_{C^\alpha(H)}$.

Clearly, we have

$$\|J_1\|_{C^\alpha(H)} = \|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{27}$$

Using the definition of $H_\alpha-$norm and the equality

$$\int_{1-t-\tau}^{1-t} -Ae^{-sA} ds = e^{-(1-t)A} - e^{-(1-t-\tau)A},$$

we get

$$\|J_2\|_{C^\alpha(H)} \leq \frac{1}{\alpha} \|Au(1) + f(1)\|_{H_\alpha}. \tag{28}$$

It follows from estimate (4) and the definition of $C^\alpha(H)-$norm that

$$\|J_3(t)\|_H \leq \frac{(1-t)^\alpha}{\alpha} \|f\|_{C^\alpha(H)}, \quad \text{for any } t \in [0,1]. \tag{29}$$

Hence, using estimate (29), we obtain

$$\|J_3\|_{C(H)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{30}$$

Let us now estimate

$$\sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \frac{\|J_3(t+\tau) - J_3(t)\|_H}{\tau^\alpha}.$$

Let $1-t \leq 2\tau$. Then, from the triangle inequality, estimate (29) it follows that

$$\begin{gathered} \tfrac{\|J_3(t+\tau)-J_3(t)\|_H}{\tau^\alpha} \leq \tfrac{\|J_3(t+\tau)\|_H+\|J_3(t)\|_H}{\tau^\alpha} \leq \\ \leq \tfrac{(1-t-\tau)^\alpha+(1-t)^\alpha}{\tau^\alpha \alpha}\|f\|_{C^\alpha(H)} \leq \tfrac{(2^\alpha+1)}{\alpha}\|f\|_{C^\alpha(H)}. \end{gathered} \tag{31}$$

Now, let $1-t > 2\tau$. Then, we can write as

$$J_3(t) - J_3(t+\tau) = J_{31}(t) + J_{32}(t) + J_{33}(t) + J_{34}(t),$$

where $J_{31}(t) = I_2(t),\ J_{32}(t) = I_3(t),\ J_{33}(t) = I_4(t)$ (see page 6), and

$$J_{34}(t) = (e^{-(1-t-\tau)A} - e^{-\tau A})(f(t+\tau) - f(t)).$$

Thus, we have

$$\|J_{31}(t)\|_H \leq \frac{2^\alpha \tau^\alpha}{\alpha}\|f\|_{C^\alpha(H)}, \tag{32}$$

$$\|J_{32}(t)\|_H \leq \frac{2^\alpha \tau^\alpha}{\alpha}\|f\|_{C^\alpha(H)}, \tag{33}$$

$$\|J_{33}(t)\|_H \leq M\frac{2^{-1+\alpha}\ \tau^\alpha}{(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{34}$$

Finally, from estimate (3) and the definition of $C^\alpha(H)-$norm it follows that

$$\|J_{34}(t)\|_H \leq 2\tau^\alpha\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{35}$$

Therefore, estimates (32)-(35) result that for $1-t > 2\tau$,

$$\frac{\|J_3(t+\tau) - J_3(t)\|_H}{\tau^\alpha} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{36}$$

Using estimates (31), (36), we get

$$\sup_{0\leq t<t+\tau\leq 1}\frac{\|J_3(t+\tau) - J_3(t)\|_H}{\tau^\alpha} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{37}$$

So, it follows from estimates (30), (37) that

$$\|J_3\|_{C^\alpha(H)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{38}$$

By estimate (3) and the definition of $C^\alpha-$norm, we obtain

$$\|J_4(t)\|_H \leq (1-t)^\alpha\|f\|_{C^\alpha(H)} \leq \|f\|_{C^\alpha(H)}, \text{ for all } t \in [0,1]. \tag{39}$$

Hence, estimate (39) results that

$$\|J_4\|_{C(H)} \leq \|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{40}$$

Using estimates (3), (5), we get for all $0 \le t < t+\tau \le 1$,

$$\|J_4(t+\tau) - J_4(t)\|_H \le \|e^{-(1-t-\tau)A} - e^{-(1-t)A}\|_{H\to H}\|f(t) - f(1)\|_H +$$
$$+\|e^{-(1-t-\tau)A}\|_{H\to H}\|f(t+\tau) - f(t)\|_H \le \tag{41}$$
$$\le M\tfrac{\tau^\alpha}{(1-t)^\alpha}(1-t)^\alpha\|f\|_{C^\alpha(H)} + \tau^\alpha\|f\|_{C^\alpha(H)} \le (M+1)\tau^\alpha\|f\|_{C^\alpha(H)}.$$

Thus, it follows from estimate (41) that

$$\sup_{0\le t<t+\tau\le 1}\frac{\|J_4(t+\tau) - J_4(t)\|_H}{\tau^\alpha} \le M_1\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{42}$$

Combining estimates (40), (42), we obtain

$$\|J_4\|_{C^\alpha(H)} \le M_1\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{43}$$

From estimates (27), (28), (38) and (43) it follows that

$$\|Au\|_{C^\alpha(H)} \le M\left(\frac{1}{\alpha}\|Au(1) + f(1)\|_{H_\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(H)}\right). \tag{44}$$

Using the triangle inequality, estimate (44), and differential equation (1), we get

$$\|u'\|_{C^\alpha(H)} \le M\left(\frac{1}{\alpha}\|Au(1) + f(1)\|_{H_\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(H)}\right). \tag{45}$$

Now, let us establish the estimate for $\|u'\|_{C(H_\alpha)}$.

Formula (8) and differential equation (1) result that for $t \in (0,1)$

$$u'(t) = e^{-(1-t)A}(Au(1) + f(1)) + e^{-(1-t)A}(f(t) - f(1)) -$$
$$-\int_t^1 Ae^{-(s-t)A}(f(s) - f(t))ds = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t).$$

Using estimate (3) and the definition of H_α−norm, we obtain

$$\|G_1(t)\|_{H_\alpha} \le \|Au(1) + f(1)\|_{H_\alpha}. \tag{46}$$

Next, from estimate (4) and the definition of C^α−norm it follows that

$$\|G_2(t)\|_{H_\alpha} \le \|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{47}$$

Finally, by estimate (3) and the definition of C^α−norm, we get

$$\|G_3(t)\|_{H_\alpha} \le \frac{1}{1-\alpha}\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{48}$$

Hence, estimates (46)-(48) result that

$$\|u'\|_{C^\alpha(H)} \le M\left(\|Au(1) + f(1)\|_{H_\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\|f\|_{C(H_\alpha)}\right). \tag{49}$$

Therefore, combining estimates (44), (45) and (49), we obtain

$$\begin{aligned} &\|u'\|_{C^\alpha(H)} + \|Au\|_{C^\alpha(H)} + \|u'\|_{C(H_\alpha)} \leq \\ &\leq M\left(\tfrac{1}{\alpha}\|Au(1)+f(1)\|_{H_\alpha} + \tfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(H)}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Let us now estimate $\|Au(1)+f(1)\|_{H_\alpha}$. From formula (9) it follows that

$$Au(1)+f(1) = T\{-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\int_{\theta_k}^{1} Ae^{-(s-\theta_k)A}(f(s)-f(\theta_k))ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k e^{-(1-\theta_k)A}(f(\theta_k)-f(1)) + f(1) - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k f(\theta_k) + A\varphi\} =$$

$$= P_1 + P_2 + P_3.$$

Using estimates (4), (7), the assumption (2), and the definition of $C^\alpha(H)-$norm, we get

$$\|P_1\|_{H_\alpha} \leq C(\delta,\theta_p)\frac{1}{1-\alpha}\|f\|_{C^\alpha(H)}, \tag{51}$$

$$\|P_2\|_{H_\alpha} \leq C(\delta,\theta_p)\|f\|_{C^\alpha(H)}. \tag{52}$$

$$\|P_3\|_{H_\alpha} = \|f(1) - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k f(\theta_k) + A\varphi\|_{H_\alpha}. \tag{53}$$

Estimates (50), (51)-(53) concludes the proof of Theorem 2.

2 Application

In this section, we consider the applications of Theorem 1 and Theorem 2.
First, the nonlocal boundary value problem of parabolic type

$$\begin{cases} u_{tt} + (a(x)u_x)_x - \delta u = f(t,x),\ 0<t<1,\ 0<x<1, \\ u(1,x) = \sum\limits_{m=1}^{p}\alpha_m u(\theta_m,x) + \varphi(x), 0\leq x\leq 1, \\ 0\leq\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_p<1, \\ u(t,0)=u(t,1),\ u_x(t,0)=u_x(t,1),\ 0\leq t\leq 1 \end{cases} \tag{54}$$

under assumption (2) is considered. The problem (54) has a unique smooth solution $u(t,x)$ for (2), $\delta>0$ and the smooth functions $a(x)\geq a>0$ $(x\in(0,1))$, $\varphi(x)$ $(x\in\in[0,1])$ and $f(t,x)$ $(t,x\in[0,1])$. This allows us to reduce the nonlocal boundary values problem (54) to the nonlocal boundary value problem (1) in a Hilbert space $H=L_2[0,1]$ with a self-adjoint positive definite operator A^x defined by (54). Let us give a number of corollaries of the abstract Theorem 1.

Theorem 3. *For solutions of the problem (54), we have the following stability inequalities*

$$\| u_t \|_{C_1^\alpha(L_2([0,1]))} + \| u \|_{C_1^\alpha(W_2^2([0,1]))} \leq$$
$$\leq C(\delta,\theta_p)\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \| f \|_{C_1^\alpha(L_2([0,1]))} + \|\varphi\|_{W_2^2([0,1])}\right),$$

where $C(\delta,\theta_p)$ does not depend on $\varphi(x)$, $f(t,x)$.

Theorem 4. *Let*

$$(a(x)\varphi_x(x))_x - \delta\varphi(x) = f(1,x) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f(\theta_k, x).$$

Then, for solutions of the problem (54), we have the following stability inequalities

$$\| u_t \|_{C^\alpha(L_2([0,1]))} + \| u \|_{C^\alpha(W_2^2([0,1]))} \leq \frac{C(\delta,\theta_p)}{\alpha(1-\alpha)} \| f \|_{C^\alpha(L_2([0,1]))},$$

where $C(\delta,\theta_p)$ is independent of $\varphi(x)$, $f(t,x)$.

The proofs of Theorem 3 and Theorem 4 are based on the abstract Theorem 1, Theorem 2, and the symmetry properties of the space operator generated by the problem (54).

Second, let Ω be the unit open cube in the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, , x_n) : 0 < x_i < 1, i = 1, \cdots, n\}$ with boundary S, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$. In $[0,1] \times \Omega$, the boundary value problem for the multi-dimensional parabolic equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = f(t,x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,\ 0 < t < 1, \\ u(1,x) = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i u(\theta_i, x) + \varphi(x), x \in \overline{\Omega}, \\ 0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_p \leq 1, \\ u(t,x) = 0,\ x \in S,\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{55}$$

under assumption (2) is considered. Here $a_r(x)$, $(x \in \Omega)$, $\varphi(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$, and $f(t,x)$ $(t \in (0,1),\ x \in \Omega)$ are given smooth functions and $a_r(x) \geq a > 0$.
We consider the Hilbert space $L_2(\overline{\Omega})$ of the all square integrable functions defined on $\overline{\Omega}$, equipped with the norm

$$\| f \|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left(\int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|^2 dx_1 \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The problem (55) has a unique smooth solution $u(t,x)$ for (2) and the smooth functions $\varphi(x)$, $a_r(x)$ and $f(t,x)$. This allows us to reduce the problem (55) to the nonlocal boundary value problem (1) in the Hilbert space $H = L_2(\overline{\Omega})$ with a self-adjoint positive definite operator A^x defined by (55).

Theorem 5. *For the solutions of the problem (55), the following stability inequalities*

$$\| u_t \|_{C_1^\alpha(L_2(\overline{\Omega}))} + \| u \|_{C_1^\alpha(W_2^2(\overline{\Omega}))} \leq$$
$$\leq C(\delta,\theta_p)\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \| f \|_{C_1^\alpha(L_2(\overline{\Omega}))} + \|\varphi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})}\right),$$

hold, where $C(\delta,\theta_p)$ does not depend on $\varphi(x)$, $f(t,x)$.

Theorem 6. *Let*

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)\varphi_{x_r}(x))_{x_r} = f(1,x) - \sum_{k=1}^{p}\alpha_k f(\theta_k,x).$$

Then, for the solutions of the problem (55), the following stability inequalities

$$\| u_t \|_{C^\alpha(L_2(\overline{\Omega}))} + \| u \|_{C^\alpha(W_2^2(\overline{\Omega}))} \leq \frac{C(\delta,\theta_p)}{\alpha(1-\alpha)} \| f \|_{C^\alpha(L_2(\overline{\Omega}))},$$

hold, where $C(\delta,\theta_p)$ is independent of $\varphi(x)$, $f(t,x)$.

The proofs of Theorem 5 and Theorem 6 are based on the abstract Theorem 1, Theorem 2, and the symmetry properties of the operator A^x defined by formula (55) and the following theorem on the coercivity inequality for the solution of the elliptic differential problem in $L_2(\overline{\Omega})$.

Theorem 7. *([15]) For the solutions of the elliptic differential problem*

$$\begin{cases} A^x u(x) = \omega(x), x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in S, \end{cases}$$

the following coercivity inequality holds :

$$\sum_{r=1}^{n} \|u_{x_r x_r}\|_{L_2(\overline{\Omega})} \leq M\|\omega\|_{L_2(\overline{\Omega})}.$$

Conclusion. Multipoint nonlocal boundary value problems for parabolic equations inverse type are considered. The well-posedness of these problems in the space of smooth functions is established. In applications, coercivity estimates for the solution of parabolic differential equations are obtained.

1. **Ladyzhenskaya O. A.** Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type [text] / O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva. – Moscow: Nauka, 1967. (Russian). English transl. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Providence, RI: American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, 1968. – Vol. 23.

2. **Ladyzhenskaya O. A.** Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type [text] / O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva. – Moscow: Nauka, 1973. (Russian). English transl.of first edition. Linear and Quasilinear Elliptic Equations. London, New York: Academic Press, – 1968.
3. **Vishik M. L.** Partial Differential Equations [text] / M. L. Vishik, A. D. Myshkis, O. A. Oleinik // in: Mathematics in USSR in the Last 40 Years, 1917–1957. – Moscow: Fizmatgiz, – 1959. – Vol. 1. – P. 563–599 (Russian).
4. **Ashyralyev A.** Nonlocal boundary value problems for abstract parabolic difference equations: well-posedness in Bochner spaces [text] / A. Ashyralyev // Journal of Evolution Equations. – 2006. – Vol. 6. – № 1. – P. 1–28.
5. **Ashyralyev A.** Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations [text] / A. Ashyralyev, A. Hanalyev, P. E. Sobolevskii // Abstract and Applied Analysis. – 2001. – Vol. 6. – № 1. – P. 53–61.
6. **Ashyralyev A.** Nonlocal boundary value problems for partial differential equations:Well-posedness [text] / A. Ashyralyev // AIP Conference Proceedings Global Analysis and Applied Mathematics: International Workshop on Global Analysis. – 2004. – Vol. 729. – P. 325–331.
7. **Clement Ph.** On the regularity of abstract Cauchy problems and boundary value problems [text] / Ph. Clement, S. Guerre–Delabrire // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. – 1999. – Vol. 9. – № 4. – P. 245–266.
8. **Aibeche A.** Coerciveness estimate for Ventcel boundary value problem for a differential equation [text] / A. Aibeche, A. Favini // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70. – № 2. – P. 269–277.
9. **Agarwal R.** Maximal regular boundary value problems in Banach-valued weighted spaces [text] / R. Agarwal, M. Bohner, V. B. Shakhmurov // Boundary Value Problems. – 2005. – Vol. 1. – P. 9–42.
10. **Shakhmurov V. B.** Coercive boundary value problems for regular degenerate differential-operator equations [text] / V. B. Shakhmurov // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – Vol. 292. –№ 2. – P. 605–620.
11. **Ashyralyev A.** Positive operators and the fractional spaces [text] / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii. – Voronezh: Offset laboratory VSU. – 1989. – P. 13 (Russian).
12. **Ashyralyev A.** Well-Posedness of Parabolic Difference Equations [text] / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag., – 1994. – P. 349.
13. **Ashyralyev A.** New Difference schemes for Partial Differential Equations [text] / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag., – 2004. – P. 441.
14. **Sobolevskii P. E.** Coerciveness inequalities for abstract parabolic equations [text] / P. E. Sobolevskii // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1964. – Vol. 157. – № 1. – C. 52–55 (Russian).
15. **Sobolevskii P. E.** Some properties of the solutions of differential equations in fractional spaces [text] / P. E. Sobolevskii // in: Trudy Nauchn. – Issled. Inst. Mat. Voronezh. Gos. Univ. – 1975. – Vol. 14. – P. 68–74 (Russian).
16. **Sobolevskii P. E.** The coercive solvability of difference equations [text] / P. E. Sobolevskii // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1971. – Vol. 201. – № 5. – P. 1063–1066 (Russian).

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 18. – С. 142–149

М Е Х А Н І К А

УДК 662.215.2

С. К. Асланов
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТВЕРДОТОПЛИВНОЙ КАМЕРЕ СГОРАНИЯ

Асланов С. К. Математична теорія збудження нестійких коливань в твердопаливній камері згоряння. На базі зв'язаної математичної постановки задачі про збурення побудована теорія нестійкості фізико-хімічних і термогазодинамічних процесів в камері згорання твердого ракетного палива.
Ключові слова: математична теорія, нестійкі коливання, твердопаливна камера згоряння.

Асланов С. К. Математическая теория возбуждения неустойчивых колебаний в твердотопливной камере сгорания. На базе сопряженной математической постановки задачи о возмущениях построена теория неустойчивости физико-химических и термогазодинамических процессов в камере сгорания твердого ракетного топлива.
Ключевые слова: математическая теория, неустойчивые колебания, твердотопливная камера сгорания.

Aslanov S. K. The mathematical theory of unstable oscillations stimulation into combustion chamber of rigid propellant. On the base of the conjugate mathematical formulation problem about disturbances the instability theory of physical-chemical and thermogasdynamical processes into combustion chamber of propellant was constructed.
Key words: mathematical theory, unstable oscillations, combustion chamber.

Введение. В результате многочисленных опытов с модельными ракетными двигателями (РД) твердого топлива (ТТ) и натурных огневых испытаний камер сгорания (КС) хорошо известен [1] разнообразный характер самовозбуждения неустойчивых колебаний в широком диапазоне частот, начиная от нескольких герц низкочастотного (н.ч.) интервала и кончая десятком килогерц высокочастотного (в.ч.), т. е. акустического интервала. Такое многообразие развития неустойчивости порождается необычайной сложностью протекающих в КС физико-химических и термогазодинамических процессов, за счет инерционности которых формируются различные механизмы обратной связи. Эти процессы включают в себя, по крайней мере, четыре характерных масштаба времени, существенно отличающихся друг от друга. А именно: акустический — τ_a, связанный с конечным объемом КС; тепловой — τ_0, связанный с приповерхностным прогревом твердой (конденсированной) фазы исходного топлива; масштаб — τ_1, связанный с газофазными превращениями непосредственно у горящей поверхности ТТ; масштаб — τ_2, связанный со временем пребывания окончательных продуктов реакций внутри КС.

Поэтому в имеющихся теоретических исследованиях неустойчивости горения ТТ в камере преобладает предельное упрощение применяемых подходов, когда указанная выше совокупность стационарных процессов рассматривается односторонним путем (без учета их взаимного влияния). Большинство таких исследований остается в рамках диффузионно-теплового аспекта горения конденсированных (к-) систем, с которым можно связать лишь н. ч. – диапазон неустойчивости. Анализ в. ч. – диапазона ограничивался лишь подробным рассмотрением акустической проводимости горящей поверхности ТТ, от величины которой зависит характер отражения импульсов давления, пришедших извне. Физический подход [2] к газодинамической неустойчивости относительно акустических волн, спонтанно возникающих внутри пламени, был основан на качественных соображениях, исходя из предложенного механизма забрасывания в зону газофазных превращений мелких капель, диспергируемых с горящей поверхности ТТ. В анализе [3] малых возмущений стационарного процесса горения пороха в полузамкнутом объеме введено в рассмотрение характерное время пребывания внутри него продуктов реакции, но изменение давления в этом объеме не учитывалось. Попытка такого учета для горения в свободном пространстве осуществлена [4] в сопряженной математической постановке задачи о возмущениях (для зон ТТ и газообразных продуктов сгорания), в которой участвуют пульсации температурного напряжения на горящей поверхности.

Основные результаты. В настоящей работе математическая теория возбуждения неустойчивых колебаний в камере сгорания ТТ построена на базе сопряженной постановки задачи о возмущениях, включающей в себя как изменения температурного профиля предварительного прогрева к-фазы топлива, так и последующие газодинамические процессы внутри объема КС. Таким образом, удается учесть взаимодействие указанных составляющих нестационарного процесса горения ТТ, которые характеризуются совокупностью всех временных масштабов $\tau_0, \tau_1, \tau_a, \tau_2$. Поскольку внимание будет сосредоточено на продольных модах колебаний, естественно воспользоваться квазиодномерной схематизацией геометрии КС в виде канала постоянного поперечного сечения. Спереди он ограничен зарядом ТТ, производящим с поверхности своего торца газообразные продукты сгорания, которые в дальнейшем истекают через выходное сопло. Простейшие предположения о безинерционности химических реакций разложения твердого вещества (во фронте $x = 0$) и сгорания образующихся промежуточных газообразных реагентов (во фронте $x = L_1$) приводят в подвижной системе отсчета, связанной с горящим торцом ТТ, к следующим друг за другом стационарным потокам сред. Прогретый теплопроводностью слой к-фазы топлива занимает область "0" ($x \leq 0$) и имеет скорость V_0, совпадающую со скоростью стационарного распространения процесса горения ТТ. За ней следует пародымогазовая, так называемая «темная» зона "1" ($0 < x < L_1$) газообразных превращений промежуточных реагентов, движущихся со скоростью V_1;$L_1 = V_1\tau_1$. Процесс завершается областью "2" ($x > L_1$) окончательных продуктов сгорания, перемещающихся со скоростью V_2 и покидающих КС через выхлопное сопло $x \cong L_2 = V_2\tau_2$. В силу чрезвычайной малости величины V_0 скорости горения ТТ по сравнению с таковыми V_1 и V_2 для газообразных сред изменением положения выходного сопла, вызванным движением системы отсчета, можно пренебречь. Все параметры перечисленных стационарных потоков обозначаются индексами в соответствии с нумерацией областей. Величины этих параметров для областей "1" и "2" могут быть найдены из законов сохранения на фронтах разложения ТТ $x = 0$ и горения $x = L_1$ как скачках разрежения с заданными притоками энергии, скоростью горения V_0 и физико-химическими свойствами исходного топлива. Стационарный температурный профиль предварительного прогрева ТТ (область "0") описывается в [5] решением соответствующего уравнения теплопроводности в виде

$$T^{(0)} = T_0 + (T_{no} - T_0)\exp(V_0 x/\chi_0). \tag{1}$$

Здесь χ_0 и T_0 — температуропроводность и начальная температура ТТ, т.е. вдали от горящей поверхности $x = 0$ с температурой $T_{no}; \tau_0 = \chi_0/V_0^2$ — характерное время процессов к-фазе.

Распределение температуры (1) в исходном ТТ вместе с кусочно-постоянными значениями стационарных параметров в областях "1" и "2" принимаются в качестве основного решения системы общих уравнений теплопроводности и газовой динамики [5]

$$\begin{gathered} L(T) = \chi_0 \tfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad L(\rho) = -\rho \tfrac{\partial V}{\partial x}; \quad L(V) = -\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial P}{\partial x}; \quad L(S) = 0; \\ S \approx (P/\rho^\gamma); \\ L() = \tfrac{\partial}{\partial t} + V\tfrac{\partial}{\partial x} \end{gathered} \tag{2}$$

для исследования неустойчивости рассматриваемого сопряженного процесса в схематизированной КС. Здесь P, ρ, V, T, γ — давление, плотность, скорость, температура к-фазы, энтропия, отношение теплоемкостей газовых течений.

Линеаризованные возмущения, накладываемые согласно уравнениям [2] на это основное решение и выбираются в форме заданного типа экспоненциальной зависимости от времени $()' \sim exp(\Gamma_j x + \omega t)$ с неизвестным ω. Возмущение положения границ $x = 0 (x = L_1)$ между областями течения задается также в виде $\varepsilon_0(\varepsilon_1) \sim exp\omega t$. В результате проблема устойчивости приводится к задаче на собственные значения ω. Эффект динамической деформации твердой фазы по сравнению с таковым для газообразного состояния "1", "2" не учитывается: $V_0 \equiv 0, \rho_0' \equiv 0$. Поскольку предметом исследования служит неустоичивость по отношению к спонтанно возникающим внутренним возмущениям, из двух решений для ТТ в области "0" $(x < 0)$ следует оставить лишь то, которое неограниченно убывает от горящей поверхности $x = 0$ вглубь ТТ, так что из (2) будем иметь

$$\Gamma_0 = \frac{V_0}{2\chi_0}(1 + \sqrt{1 + 4\frac{\omega}{\omega_0}}), \omega_0 = \frac{V_0^2}{\chi_0^2}. \tag{3}$$

Исходя из идеальности газовых течений, в каждой из областей "1" и "2" $(j = 1, 2)$ будем иметь по два (8) акустических возмущения (индекс "a") и по одному энтропийскому (индекс "S") переносимому со средой, т. е. уравнения (2) приводят к

$$\Gamma_{ja}^{(\pm)} = -\frac{\omega}{V_j}\frac{M_j}{M_j \pm 1}, \Gamma_{js} = -\frac{\omega}{V_j}, M_j = \frac{V_j}{a_j}, \tag{4}$$

где M — число Маха, a — скорость звука; $L_2 = a_2\tau_a$.

Таким образом, в совокупности с возмущениями положений поверхностей газификаций ТТ (ε_0) и плоскости окончания газофазных превращений "1" (ε_1) приходим к наличию в данной постановке задачи без начальных условий к девяти возмущениям экспоненциального типа.

В качестве граничных условий для них используются законы сохранения массы, импульса и энергии в виде интегральных теорем [5], которые применяются к возмущенной области "1" газофазных превращений и к слою в окрестности плоскости $x = L_2$ окончания этих превращений, целиком включающей в себя ее возмущенное положение. В результате окончательно можно прийти к уравнению при $x = 0$

$$
\begin{aligned}
(1-q)\frac{d\varepsilon_0}{dt} - (1-\frac{1}{\delta})\frac{d\varepsilon_1}{dt} - \sigma'_{10} = 0,\\
\frac{K\alpha}{m_0}(T' + \frac{dT^{(0)}}{dx}\varepsilon_0) - \sigma'_{11} = 0,\\
(1 - \frac{1}{q} - \frac{\chi_0 c_0}{qV_0^3}\frac{dT^{(0)}}{dx})\frac{d\varepsilon_0}{dt} + (\delta-1)\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{c_0}{V_1}(T' + \frac{\chi_0}{V_0}\frac{\partial T'}{\partial x}) - R'_1 = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

и при $x = L_1$ —

$$\delta\sigma'_{10} - \sigma'_{20} = 0,\ \sigma'_{11} - \sigma'_{21} = 0,\ R'_1 - \delta R'_2 = 0,$$

где

$$\sigma'_{j1} = (1+\ell)V'_j + (1+M_j^2)\frac{P'_j}{\rho_j V_j} - \frac{V_j}{\ell_{pj}}S'_j,\ R'_j = V'_j + \frac{P'_j}{\rho_j V_j} + \frac{V_j}{\ell_{pj}}\frac{S'_j}{(\gamma-1)M_j^2}\, m_0 =$$

$$= \rho_0 V_0, q = V_1/V_0 = \rho_0/\rho_1 \gg 0; \delta = V_2/V_1 = \rho_1/\rho_2 > 1.$$

Большая величина K требует учета температурного напряжения в балансе импульса, тем более что ниже везде будут фигурировать только $K_{\alpha q}$. Влияние термической деформации в уравнении теплопроводности и законах сохранения не учитывается по причине относительной малости [7].

Седьмое граничное условие следует из того, что в критическом сечении выходного сопла Лаваля ($x \approx L_2$) всегда обеспечивается режим максимального расхода [6], поскольку давление в КС реактивного двигателя намного превосходит наружное. Вытекающее отсюда отсутствие изменения расхода при линеаризованных возмущениях состояний дает следующее требование:

$$V'_2 + \frac{P'_2}{\rho_2 V_2} - \frac{V_2}{C_{p2}}\left[1 + \frac{2}{(\gamma_2+1){M_2}^2}\right]S'_2 = 0, \qquad \text{при } x \cong L_2. \tag{6}$$

Остальные два условия, необходимые для математического замыкания настоящей задачи о возмущениях, должны описывать взаимодействие между возникающими термогазодинамическими возмущениями и физико-химическими процессами, происходящими при разложении k-фазы и сгорании в темной зоне "1" образующихся при этом промежуточных реагентов, выражающимися, в конечном итоге, изменениями массовой скорости сгорания ТТ $\rho_0(d\varepsilon_0/dt)$ и протяженности зоны промежуточных реагентов "1" $L_1' = \varepsilon_1(t+\tau_1) - \varepsilon_0(t)$.

Тем самым данные условия приобретают характер уравнений для формирующихся механизмов обратной связи, а их ввод производится с позиций квазистационарности процессов, протекающих в k-фазе топлива и в «темной» зоне.

Это позволит варьировать известный вид стационарных зависимостей [8] для массовой скорости горения ТТ и температуры его горящей поверхности: $m, T_n/(\varphi, p)$, где φ, p — градиент температуры k-фазы и давление газа непосредственно на указанной поверхости. Исключая φ и следуя методике [8] перевода зависимости $(\varphi, p \to (T_0, p_1))$, можно, в итоге, получить для приращения скорости горения $m' = -\rho_0(d\varepsilon_0/dt)$ следующее уравнение при $x=0$:

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} + \alpha_1 \frac{{V_0}^2}{\chi_0} q\varepsilon_0 + \gamma_1\alpha_2(1-\alpha_3)\frac{{P_1}'}{\rho_1 V_1}M_1^2 + \frac{\alpha_1 V_1}{T_{no}-T_0}T' = 0, \tag{7}$$

где $\alpha_1 = \frac{k}{r},\ \alpha_2 = \frac{\nu(r-1)-\mu k}{k+r-1},\ \alpha_3 = \frac{\mu(k-1)-\nu r}{\nu(r-1)-\mu k}\alpha_1$.

$$k = (T_{no}-T_0)\frac{\partial(\ln m_0)}{\partial(\ln T_0)},\ r = \frac{\partial T_{no}}{\partial T},\ \mu = \frac{1}{T_{no}-T_0}\ \frac{\partial T_{no}}{\partial p_1}, \nu = \frac{\partial(\ln m_0)}{\partial(\ln p_1)}$$

находятся из стационарных законов горения: $m_0, T_{no}/(T_0, p_1)$.

Простейшее предположение о процессе сгорания прмежуточных реагентов области "1" в нормальном фронте пламени $x = L_1$ позволяет найти приращение L_1' протяженности этой зоны газофазных превращений с полностью варьирования выражения для оценки толщины предпламенного прогрева $L_1 \cong \frac{\chi_1}{V_1},\ \chi_1 = \lambda_1/(\rho_1 V_1 C_p)$; коэффициент теплопроводности λ_1 и теплоемкость C_p принимаются постоянными. За величину вариаций P_1, V_1, S_1 естественно принять, по аналогии с [9], суммарные измерения возмущений, интегрально накопленных в зоне "1" при движении прогревающейся частицы смеси вдоль траектории $x = V_1(t'-t)$. В результате получим второе упавнение обратной связи

$$\frac{L_1'}{L_1} = \frac{1}{L_1}\big[\varepsilon_1(t+\tau_1) - \varepsilon_0(t)\big] = -\int\limits_t^{t+\tau_1} \frac{\partial\sigma_{10}'}{\partial x}|_{x=V_1(t')-1}\,dt'. \tag{8}$$

Постановка возмущений типа (3), (4) в условиях(5)–(8) приводит к системе девяти линейных однородных уравнений относительно амплитуд этих возмущений. Равенство нулю ее определителя дает окончательно сложное трансцендентное уравнение для искомых собственных значений ω следующего вида:

$$\tilde{\omega}(shu + F_1 M_1 + F_2 M_2^2) = 0. \tag{9}$$

Громоздкие выражения F включают в себя, наряду с $\bar{\omega} = \omega\tau_0,\ u = \omega\tau_a$, $u_2 = \omega\tau_2,\ z = \omega\tau_1$, также весь комплекс фигурировавших выше характеристик стационарного режима процессов в КС.

Разделение н.ч.- и в.ч.-неустойчивости производится с позиции $\xi = \tau_a/\tau_0 \ll \ll 1$, т. е. разведения между собой величин временных масштабов акустических процессов в КС и тепловой релаксации в k-фазе. Так, в случае в.ч.-неустойчивости в качестве основного масштаба времени естественно выступает

τ_a, т. е. считается $u \sim 1$. Тогда для реализации механизма положительной обратной связи необходимо согласование масштабов времени процессов в газовой фазе области "1" («темной» зоне) и акустических в объеме КС, т. е. выполнение $\tilde{\tau} = \tau_1/\tau_a \sim 1$.

Поскольку скорость продуктов реакции в КС невелика, то число Маха $M_2 = L_2/a_2 = \tau_a/\tau_2 \ll 1$ можно принять в качестве асимптотически малого параметра и искать решение уравнения (9) в виде представления по степеням M_2

$$u = u_0 + u_1 M_2 + O(M_2^2). \tag{10}$$

При этом $z = u\tau_1/\tau_a, \tilde{\omega} = u\tau_0/\tau_a$ выражаются через u. В результате находим

$$shu_0 = 0, \quad u_0 = in\pi, \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

$$u_1 = \gamma_2(1 - \frac{1}{\gamma_1})\frac{\rho_0 c_0}{Kaq}\sqrt{\frac{n\pi}{2\xi}}\{N_+ - 1 + i(N_- - 1)\}, \tag{11}$$

где

$$N_+ = N[\cos(n\pi\tilde{\tau}) \pm \sin(n\pi\tilde{\tau})], N = (n\pi\tau)^2 b + a, a = \sqrt{2}(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2\delta}\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1}) > 0,$$

$$b = \sqrt{2}(1 - \frac{1}{\delta}) > 0, \xi = \frac{\tau_a}{\tau_0} \ll 1.$$

Причем слагаемое $u_1 M_2 \sim (M_2/\sqrt{\xi})$ будет действительно носить характер асимптотической поправки в (10), коль скоро можно считать $(M_2/\xi) \sim 1$. Таким образом, критерий возбуждения неустойчивых колебаний $Reu_1 > 0$ определяется неравенством

$$N_+ > 1, \quad \text{или} \quad \sqrt{2}N\cos[(n\pi\tilde{\tau}) - (\pi/4)] > 1, \tag{12}$$

в котором $N > 0$ всегда, а величина δ выражается через тепловыделение Q в газовой фазе: $\delta - 1 = (Q/a_1^2)$.

Заключение. Полученный критерий дает совокупность участков возбуждения прогрессивно нарастающих колебаний в зависимости от параметра $\tilde{\tau}$ количественного согласования временных масштабов акустики КС и газофазных превращений «темной» зоны. Главный член u_0 асимптотики (10) соответствует по (11) значениям акустических частот для закрытой с обоих концов трубы длины L_2, что совпадает с известными наблюдениями для КС [1]. Мнимая часть u_1 служит асимптотической поправкой этих частот на различные эффекты течения внутри камеры.

В н.ч.-неустойчивости в качестве основного масштаба времени выступает тепловой τ_0, т. е. $\tilde{\omega} = \omega\tau_0 \sim 1$. Тогда для реализации механизма положительной обратной связи необходимо согласование масштабов времени процессов в k-фазе и прибывания продуктов в КС, т. е. $\tilde{\tau_2} = (\tau_2/\tau_0) \sim 1$. Решение уравнения (9) можно искать в виде представления по степеням малого параметра ξ

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega_0} + \tilde{\omega_1}\xi + O(\xi^2), \tag{13}$$

при этом $u = \tilde{\omega}\xi$, $z = \tilde{\omega}\xi\tilde{\tau}$ выражаются через $\tilde{\omega}$.

В результате для главного члена ω_0 асимптотически (13) будем иметь следующее трансцендентное уравнение с бесконечным множеством комплексных корней:

$$(\frac{1}{2}e^{-\tilde{\omega_0}\tilde{\tau_2}}-1)\{1+\frac{C}{\delta K_2}[(\Gamma_0-1)(\frac{1}{\tilde{\omega_0}}+\tilde{\alpha_1})-1]\}+\frac{1}{\gamma_2-1}(\frac{\gamma_2}{\gamma_1 K_2}-\tilde{\omega_0}\tilde{\tau_2})=0, \quad (14)$$

где $C=\frac{C_0(T_{no}-T)}{a_1^2}$, $K_2=C\tilde{\alpha_1}\frac{K\alpha q}{\rho_0 C_0}$, $\tilde{\alpha_1}=[c\alpha_2\gamma_1\frac{K\alpha q}{\rho_0 C_0}(1-\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1})+\frac{\alpha_1}{\beta_1}]^{-1}$.

Выделение в последнем $y=\sqrt{4\tilde{\omega_0}+1}=2\Gamma_0(\chi_0/V_0)-1$ и последующее возведение в квадрат позволяет получить квазилентный член с главным членом [10]. Согласно теореме Л. С. Понтрягина, безусловная неустойчивость имеет место лишь для квазимногочленов без главного члена. Поэтому в нашем случае должен существовать критерий, определяющий н.ч.-неустойчивые колебания ($Re\tilde{\omega_0}>0$). Совокупность участков их возбуждения и соответствующие частоты могут быть найдены численными расчетами. С целью получения двусторонней аналитической оценки диапазонов неустойчивости имеет смысл рассмотреть два предельных математических случая — $\tilde{\tau_2}<<1$ и $\tilde{\tau_2}>>1$.

В первом из них для главного члена асимптотики $\tilde{\omega_0}=\tilde{\omega}_{00}+\tilde{\omega}_{01}\tau_2+\ldots$ приходим в конечном итоге из (14) к квадратному уравнению по y. Нетрудно убедиться, что неустойчивость его комплексных корней, с которой связаны нарастающие колебания, возможна при

$$\frac{K\alpha q}{\rho_0 C_0}\gamma_1\beta_1>1-\frac{C\gamma_1}{2\delta}(1-\frac{1}{\gamma_2})(1-\beta_2), \qquad Re(\tilde{\omega}_{00})>0. \quad (15)$$

Асимптотика второго предельного случая $\tilde{\omega_0}=(\tilde{\omega}'_{00})/\tilde{\tau_2}+O(1)$ приводит уравнение (14) к следующему виду:

$$exp(-\tilde{\omega}'_{00})=[2\tilde{\omega}'_{00}/(\gamma_2-1)]+1+2\gamma_2[1+\rho_0C_0/(K\alpha qC)]/(\gamma_2-1)$$

Исследуя его комплексные корни, можно выделить область неустойчивых колебаний

$$(Re(\tilde{\omega}'_{00})>0): \qquad \frac{K\alpha qC}{\rho_0 C_0}\gamma_1\beta_1<1. \quad (16)$$

Таким образом, полученные неравенства (15), (16) совместно ограничивают зону неустойчивости решений общего уравнения (14).

1. **Исследование** реактивных двигателей на твердом топливе [текст] / Под ред. Саммерфилда. – М: ИЛ, 1963. – 244 с.
2. **Щелкин К. И.** О высокочастотных пульсациях при горении твердого топлива [текст] / К. И. Щелкин // Доклады АН СССР. – Том 156, № 5. – 1964. – С. 1176–1179.
3. **Зельдович Я. Б.** Об устойчивости горения порохов в полузамкнутом объеме [текст] / Я. Б. Зельдович // ПМТФ, – № 1. – 1963.
4. **Асланов С. К.** Внутренние возмущения давления и устойчивость горения твердого топлива [текст] / С. К. Асланов // Горение конденсированных систем. – АН СССР, Черноголовка. – 1977. – С. 59–67.

5. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика [текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
6. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа [текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: Физматгиз, 1950. – 784 с.
7. **Ландау Л. Д.** Теория упругости [текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
8. **Новожилов Б. В.** Нестационарное горение твердых ракетных топлив [текст] / Б. В. Новожилов. – М.: Наука, 1973. – 145 с.
9. **Асланов С. К.** Критерий неустойчивости медленного горения газовых смесей [текст] / С. К. Асланов // Физика горения и взрыва. – № 3. – 1965.
10. **Постников М. М.** Устойчивые многочлены [текст] / М. М. Постников. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
11. **Афанасьев В. В.** Расчеты электрических цепей на программируемых микрокалькуляторах [текст] / В.В. Афанасьев, О.Н. Василевский. – М.: Энергоиздат, 1992. – 190 с.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка" має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті та короткі повідомлення, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямками:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Короткі повідомлення.
4. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сайті журналу www.visnyk_math.onu.edu.ua або які можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок, а короткого повідомлення — 5–6 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме та список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України "Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України" від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008 р.).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65026

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти на сайті:

www.visnyk_math.onu.edu.ua