УДК 517.962.24:519.21

Н. В. Брадул, Л. Е. Шайхет
Донецкий государственный университет управления

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ "ХИЩНИК-ЖЕРТВА" ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Брадул Н. В., Шайхет Л. Ю. Стiйкiсть рiзницевого аналога математичної моделi "хижак-жертва" при випадкових збуреннях. Розглядається рiзницевий аналог математичної моделi типу "хижак-жертва". Отримано додатковi умови на крок дискретизацiї при якому рiзницевий аналог зберiгає властивiсть стiйкостi вихiдної системи. Розглянутий метод дослiдження може бути застосован для дослiдження iнших нелiнiйних систем з порядком нелiнiйностi бiльшим за одиницю.
Ключовi слова: математична модель "хижак-жертва", додатня точка рiвноваги, рiзницевий аналог, стiйкiсть.

Брадул Н. В., Шайхет Л. Е. Устойчивость разностного аналога математической модели "хищник-жертва" при случайных возмущениях. Рассматривается разностный аналог математической модели типа "хищник-жертва". Получены достаточные условия на шаг дискретизации, при котором разностный аналог сохраняет свойство устойчивости исходной модели. Предложенный метод исследования может быть использован для исследования других нелинейных систем с порядком нелинейности большим единицы.
Ключевые слова: математическая модель "хищник-жертва", положительная точка равновесия, разностный аналог, устойчивость.

Bradul N. V., Shaikhet L. E. Stability of the discrete analogue of the mathematical "predator-prey" model with stochastic perturbations. Discrete analogue of the mathematical "predator-prey" model is considered. The sufficient conditions for the step of discretization by that the discrete analogue saves stability property of the initial model are obtained. Proposed method can be used for investigation of other nonlinear systems with the order of nonlinearity more than one.
Key words: mathematical "predator-prey" model, positive point of equilibrium, discrete analogue, stability.

Введение. Математические модели типа "хищник-жертва" как с непрерывным, так и с дискретным временем представляют интерес для многих исследователей [1, 5], [14]-[16], [22]-[18], [20]-[21]. Одной из важнейших задач в этих исследованиях является задача устойчивости положительной точки равновесия таких моделей. В связи с проблемами численного анализа особый интерес представляет изучение способности разностного аналога сохранять свойство устойчивости исходной модели.

В работе рассматривается математическая модель типа "хищник-жертва", описываемая двумя нелинейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)(a - a_1x_1(t) - a_2x_2(t)),$$

$$\dot{x}_2(t) = -bx_2(t) + b_1x_1(t-h_1)x_2(t-h_2), \tag{1}$$

и начальным условием

$$x_m(s) = \varphi_m(s), \quad s \in [-\max(h_1, h_2), 0], \quad m = 1, 2. \tag{2}$$

Здесь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — плотности популяций жертвы и хищника соответственно, h_1 и h_2 — неотрицательные запаздывания.

В работе получены достаточные условия устойчивости по вероятности положительной точки равновесия разностного аналога системы (1) при случайных возмущениях. Получены условия на шаг дискретизации, при котором разностный аналог сохраняет свойство устойчивости исходной модели.

Применяемый здесь метод исследования рассматриваемой нелинейной системы (с порядком нелинейности большим единицы) при случайных возмущениях является достаточно общим и может быть использован для исследования других нелинейных систем такого же типа.

Основные этапы исследования таковы. Предполагается, что рассматриваемая детерминированная система имеет точку равновесия и подвергается случайным возмущениям типа белого шума, которые прямо пропорциональны отклонению текущего состояния системы от точки равновесия. Точка равновесия исходной детерминированной системы остается при этом решением и построенной таким образом стохастической системы [6]. Построенная стохастическая система линеаризуется в окрестности точки равновесия, и нулевое решение вспомогательной линейной системы исследуется на асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом. Условия асимптотической устойчивости в среднем квадратическом нулевого решения вспомогательной линейной системы, полученные с помощью общего метода построения функционалов Ляпунова ([17]-[22], [27, 28]) и формулируемые в терминах параметров рассматриваемой системы, обеспечивают также устойчивость по вероятности исходной нелинейной системы при случайных возмущениях. Это утверждение справедливо как для дифференциальных уравнений, так и для разностных ([20, 23], [24]-[26]). Поэтому сначала нужно получить условия устойчивости точки равновесия системы дифференциальных уравнений, затем аналогичные условия для ее разностного аналога. Условия устойчивости разностного аналога дают оценку на шаг дискретизации, при котором разностный аналог сохраняет свойство устойчивости точки равновесия исходной системы с непрерывным временем, что может быть использовано при численном моделировании исследуемой системы.

Введем используемые в дальнейшем обозначения, определения, вспомогательные утверждения.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, i — дискретное время, $i \in Z_0 \bigcup Z$, $Z_0 = \{-k, ..., 0\}$, $Z = \{0, 1, ...\}$, k заданное натуральное число, $\mathfrak{F}_i \in \mathfrak{F}$ — поток σ - алгебр, $\mathbf{M}$ — математическое ожидание, $\mathbf{P}\{\cdot/\mathfrak{F}_i\}$ и $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}\{\cdot/\mathfrak{F}_i\}$ — условная вероятность и условное математическое ожидание, H — пространство последовательностей $x = \{x(0), x(1), ...\}$ $\mathfrak{F}_i$-измеримых случайных величин $x(i) \in \mathbf{R}^n$, $i \in Z$, $\xi(i)$, $i = 1, 2, ...$, последовательность независимых между собой $\mathfrak{F}_i$-измеримых случайных величин таких, что $\mathbf{M}\xi(i) = 0$, $\mathbf{M}\xi^2(i) = 1$, $||\varphi||_0 = \max\limits_{j \in Z_0} |\varphi_j|$, $U_\varepsilon = \{x : |x| \leq \varepsilon\}$, процесс $x(i)$ — решение стохастического разностного уравнения

$$\begin{aligned} x(i+1) = F(i, x(i), x(i-1), \dots, x(i-k)) + \\ +G(i, x(i), x(i-1), \dots, x(i-k))\xi(i+1), \qquad i \in Z, \end{aligned} \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(i) = \varphi(i), \qquad i \in Z_0 = \{-k, \dots, 0\}, \tag{4}$$

функции $F(i, x_0, x_1, ..., x_k)$ и $G(i, x_0, x_1, ..., x_k)$ удовлетворяют условию $F(i, 0, ..., 0) = G(i, 0, ..., 0) = 0$. Для произвольной последовательности $V(i)$, $i \in Z$, положим $\bar{\Delta}V(i) = V(i+1) - V(i)$.

Определение 1. *Тривиальное решение уравнения (3) с начальным условием (4) называется устойчивым по вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что решение $x(i) = x(i, \varphi)$ уравнения (3) удовлетворяет неравенству $\mathbf{P}\{|x(i,\varphi)| > \varepsilon_1 / \mathfrak{F}_0\} < \varepsilon_2$ для любой начальной функции φ такой, что $\mathbf{P}\{||\varphi||_0 < \delta\} = 1$.*

Определение 2. *Тривиальное решение уравнения (3) с начальным условием (4) называется устойчивым в среднем квадратическом, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что решение $x(i) = x(i, \varphi)$ удовлетворяет условию $\mathbf{M}|x(i)|^2 < \varepsilon$ для любой начальной функции φ такой, что $||\varphi||^2 = \sup_{j \in Z_0} \mathbf{M}|\varphi(j)|^2 < < \delta$. Если, кроме того, $\lim_{i \to \infty} \mathbf{M}|x(i)|^2 = 0$ для любой начальной функции φ, то тривиальное решение уравнения (3) называется асимптотически устойчивым в среденем квадратическом.*

Теорема 1. [19] *Пусть для уравнения (3), (4) существует неотрицательный функционал $V(i) = V(i, x(i), x(i-1), ..., x(i-k))$, удовлетворяющий условиям*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}V(0, \varphi(0), \varphi(-1), ..., \varphi(-k)) \le c_1 ||\varphi||^2, \\ \mathbf{M}\bar{\Delta}V(i) \le -c_2 \mathbf{M}|x(i)|^2, \quad i \in Z, \end{aligned} \tag{5}$$

где $c_1 > 0, c_2 > 0$. Тогда тривиальное решение уравнения (3), (4) асимптотически устойчиво в среднем квадратическом.

Теорема 2. [23, 24] *Пусть для уравнения (3), (4) существует неотрицательный функционал $V(i) = V(i, x(i), x(i-1), ..., x(i-k))$, удовлетворяющий условиям*

$$\begin{aligned} V(i, x(i), x(i-1), ..., x(i-k)) \ge c_0 |x(i)|^2, \\ V(0, \varphi(0), \varphi(-1), ..., \varphi(-k)) \le c_1 ||\varphi||_0^2, \\ \mathbf{M}_i \bar{\Delta}V(i) \le 0, \quad x(j) \in U_\varepsilon, \quad -k \le j \le i, \quad i \in Z, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$. Тогда тривиальное решение уравнения (3), (4) устойчиво по вероятности.

Рассмотрим нелинейное разностное уравнение вида

$$x(i+1) = \sum_{j=0}^{i+k} A_j x(i-j) + \sum_{j=0}^{i+k} B_j x(i-j) \xi(i+1) + g_i(x(i), x(i-1), ..., x(-k)) \tag{7}$$

с порядком нелинейности большим единицы, то есть

$$|g_i(x(i), x(i-1), ..., x(-k))| \leq \sum_{j=0}^{i+h} \gamma_j |x(i-j)|^{\nu_j}, \quad \nu_j > 1, \quad j \in Z. \tag{8}$$

Предположим, что для линейной части уравнения (7), то есть для уравнения

$$x(i+1) = \sum_{j=0}^{i+k} A_j x(i-j) + \sum_{j=0}^{i+k} B_j x(i-j)\xi(i+1), \tag{9}$$

существует функционал $V(i, x(i), x(i-1), ..., x(i-k))$, удовлетворяющий условиям Теоремы 1, в частности, условию (5). При условии (8) этот же функционал удовлетворяет ([20, 23, 24]) условиям Теоремы 2, в частности, условию (6) для уравнения (7).

Это означает, что полученное (в терминах параметров уравнения (9)) с помощью функционала $V(i, x(i), x(i-1), ..., x(i-k))$ условие асимптотической устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения линейного уравнения (9) является также условием устойчивости по вероятности тривиального решения нелинейного уравнения (7).

Таким образом, исследование устойчивости по вероятности тривиального решения нелинейного уравнения вида (7) с порядком нелинейности большим единицы сводится к исследованию асимптотической устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения линейного уравнения (9).

Аналогичный метод применим также для стохастических дифференциальных уравнений [25, 26].

Основные результаты.

1. Положительная точка равновесия, стохастические возмущения, центрирование и линеаризация.

Предположим, что в системе (1) постоянные a, a_1, a_2, b, b_1 положительны и таковы, что

$$A = a - b\frac{a_1}{b_1} > 0. \tag{10}$$

Тогда система (1) имеет положительную точку равновесия (x_1^*, x_2^*), которая определяется условиями $\dot{x}_1(t) \equiv 0$, $\dot{x}_2(t) \equiv 0$ и имеет вид

$$x_1^* = \frac{b}{b_1}, \qquad x_2^* = \frac{A}{a_2}. \tag{11}$$

Как было впервые предложено в [2] и использовалось позднее в [1, 3, 4], предположим, что система уравнений (1) подвергается случайным возмущениям типа белого шума, которые прямо пропорциональны отклонению состояния системы $(x_1(t), x_2(t))$ от точки равновесия (x_1^*, x_2^*) и воздействуют на $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ так, что система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)(a - a_1x_1(t) - a_2x_2(t)) + \sigma_1(x_1(t) - x_1^*)\dot{w}_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -bx_2(t) + b_1x_1(t-h_1)x_2(t-h_2) + \sigma_2(x_2(t) - x_2^*)\dot{w}_2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь σ_1 и σ_2 — произвольные постоянные, $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — независимые между собой винеровские процессы [6]. Отметим, что точка равновесия (x_1^*, x_2^*) системы (1) является также решением системы (12).

Центрируя систему (12) относительно точки равновесия (x_1^*, x_2^*), введем новые переменные $y_1(t) = x_1(t) - x_1^*$, $y_2(t) = x_2(t) - x_2^*$. Система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -(y_1(t) + x_1^*)(a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)) + \sigma_1 y_1(t)\dot{w}_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -by_2(t) + b_1(x_2^* y_1(t-h_1) + x_1^* y_2(t-h_2) + y_1(t-h_1)y_2(t-h_2)) + \\ &\quad + \sigma_2 y_2(t)\dot{w}_2(t), \\ y_m(s) &= \varphi_m(s), \quad s \in [-\max(h_1,h_2), 0], \quad m = 1,2. \end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно, что устойчивость точки равновесия (x_1^*, x_2^*) системы (12) эквивалентна устойчивости тривиального решения системы (13).

Отбрасывая нелинейные слагаемые в системе (13), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -x_1^*(a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t)) + \sigma_1 z_1(t)\dot{w}_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= -bz_2(t) + b_1(x_2^* z_1(t-h_1) + x_1^* z_2(t-h_2)) + \sigma_2 z_2(t)\dot{w}_2(t), \\ z_m(s) &= \varphi_m(s), \quad s \in [-\max(h_1,h_2), 0], \quad m = 1,2, \end{aligned} \tag{14}$$

которую будем называть линейной частью системы (13).

Положим $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$, $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s))$.

Определение 3. *Тривиальное решение системы (13) называется устойчивым по вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что решение $y(t) = y(t,\varphi)$ удовлетворяет условию $\mathbf{P}\{\sup_{t\ge 0} |y(t,\varphi)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$ для любой начальной функции φ такой, что $\mathbf{P}\{\sup_{s\le 0} |\varphi(s)| \le \delta\} = 1$.*

Определение 4. *Тривиальное решение системы (14) называется устойчивым в среднем квадратическом, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что решение $z(t) = z(t,\varphi)$ удовлетворяет условию $\mathbf{M}|z(t,\varphi)|^2 < \varepsilon$ для любой начальной функции φ такой, что $\sup_{s\le 0} \mathbf{M}|\varphi(s)|^2 < \delta$. Если, кроме того, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}|z(t,\varphi)|^2 = 0$ для любой начальной функции φ, то тривиальное решение системы (14) называется асимптотически устойчивым в среднем квадратическом.*

С помощью общего метода построения функционалов Ляпунова ([17]-[22], [27, 28]) в [29] получены достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения системы (14).

Теорема 3. [29] *Пусть*

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_2^2 b \sigma_2^2}{A b_1^2}, \qquad A_2 = 2b\left(\frac{a_1}{b_1} - Ah_1\right) - \sigma_1^2, \qquad A_3 = \frac{2Ab_1}{a_2}, \\ A_4 &= \frac{a_2 b}{b_1}\left(2(1 - bh_2) - \frac{a_1\sigma_2^2}{Ab_1}\right), \qquad B_1 = \frac{a_2 b^2}{b_1} h_2, \qquad B_2 = Abh_1. \end{aligned} \tag{15}$$

Если выполняются условия (10), $A_2 > 0$, $A_4 > 0$,

$$\begin{gathered} h_1 < \frac{1}{A}\left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{\sigma_1^2}{2b}\right), \qquad h_2 < \frac{1}{b}\left(1 - \frac{a_1\sigma_2^2}{2Ab_1}\right), \\ \left(\sqrt{B_1^2 + A_1A_2} + B_1\right)\left(\sqrt{B_2^2 + A_3A_4} + B_2\right) < A_2A_4, \end{gathered} \tag{16}$$

то тривиальное решение системы (14) асимптотически устойчиво в среднем квадратическом.

Как показано в [25, 26], при порядке нелинейности большем 1 достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения линейной части рассматриваемой нелинейной системы обеспечивают устойчивость по вероятности тривиального решения исходной системы. Таким образом, условия Теоремы 3 являются достаточными для устойчивости по вероятности тривиального решения системы (13) и, соответственно, для устойчивости по вероятности положительной точки равновесия системы (12).

2. Устойчивость разностного аналога.

Из Теорем 1, 2 вытекает, что исследование устойчивости тривиального решения разностного уравнения может быть сведено к построению соответствующего функционала Ляпунова.

Рассмотрим разностный аналог системы (12) в виде

$$\begin{aligned} x_1(i+1) &= x_1(i) + \Delta x_1(i)(a - a_1x_1(i) - a_2x_2(i)) + \\ &+ \sqrt{\Delta}\sigma_1(x_1(i) - x_1^*)\xi_1(i+1), \\ x_2(i+1) &= (1 - \Delta b)x_2(i) + \Delta b_1 x_1(i-k_1)x_2(i-k_2) + \\ &+ \sqrt{\Delta}\sigma_2(x_2(i) - x_2^*)\xi_2(i+1). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $k_m = h_m/\Delta$ — целое, Δ — выбираемый шаг дискретизации, $x_m(i) = x_m(t_i)$, $t_i = i\Delta$, $\xi_m(i+1) = (w_m(t_{i+1}) - w_m(t_i))/\sqrt{\Delta}$, $m = 1, 2$, $i \in Z$. Отметим, что $\xi_1(i)$ и $\xi_2(i)$, $i \in Z$ — независимые между собой последовательности взаимно независимых $\mathfrak{F}_i$-измеримых случайных величин [6] таких, что $\mathbf{M}\xi_m(i) = 0$, $\mathbf{M}\xi_m^2(i) = 1$, $m = 1, 2$.

Аналогично построим разностный аналог линейной части (14) системы (13)

$$\begin{aligned} z_1(i+1) &= (1 - \Delta a_1x_1^*)z_1(i) - \Delta a_2x_1^*z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_1z_1(i)\xi_1(i+1), \\ z_2(i+1) &= (1 - \Delta b)z_2(i) + \Delta b_1(x_2^*z_1(i-k_1) + x_1^*z_2(i-k_2)) + \\ &+ \sqrt{\Delta}\sigma_2z_2(i)\xi_2(i+1). \end{aligned} \tag{18}$$

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения системы (18) построим соответствующий функционал Ляпунова. Следуя общему методу построения функционалов Ляпунова [19], перепишем второе уравнение системы (18) в виде

$$z_2(i+1) = z_2(i) + \Delta b_1x_2^*z_1(i) - \Delta b_1(x_2^*\bar{\Delta}F_1(i) + x_1^*\bar{\Delta}F_2(i)) + \sqrt{\Delta}\sigma_2z_2(i)\xi_2(i+1),$$

где

$$F_m(i) = \sum_{j=1}^{k_m} z_m(i-j), \qquad m = 1, 2,$$

и положим

$$Z_2(i) = z_2(i) + \Delta b_1(x_2^* F_1(i) + x_1^* F_2(i)).$$

Тогда система (18) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} z_1(i+1) &= (1-\Delta a_1 x_1^*)z_1(i) - \Delta a_2 x_1^* z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_1 z_1(i)\xi_1(i+1), \\ Z_2(i+1) &= \Delta b_1 x_2^* z_1(i) + Z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_2 z_2(i)\xi_2(i+1). \end{aligned} \tag{19}$$

Функционал Ляпунова $V(i)$ для системы (19) строится в виде $V(i) = V_1(i)+$ $+V_2(i)$, где

$$V_1(i) = z_1^2(i) + 2\mu z_1(i)Z_2(i) + \gamma Z_2^2(i),$$

а $V_2(i)$ выбирается стандартным способом после получения оценки для $\mathbf{M}\bar{\Delta}V_1(i)$.

Легко видеть, что

$$\mathbf{M}\bar{\Delta}V_1(i) = \mathbf{M}(V_1(i+1) - V_1(i)) = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \mathbf{M}[((1-\Delta a_1 x_1^*)z_1(i) - \Delta a_2 x_1^* z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_1 z_1(i)\xi_1(i+1))^2 - z_1^2(i)],$$

$$J_2 = 2\mu\mathbf{M}[((1-\Delta a_1 x_1^*)z_1(i) - \Delta a_2 x_1^* z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_1 z_1(i)\xi_1(i+1))\times$$
$$\times(\Delta b_1 x_2^* z_1(i) + Z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_2 z_2(i)\xi_2(i+1)) - z_1(i)Z_2(i)],$$

$$J_3 = \gamma\mathbf{M}[(\Delta b_1 x_2^* z_1(i) + Z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_2 z_2(i)\xi_2(i+1))^2 - Z_2^2(i)].$$

Используя условие $\mathbf{M}\xi_m(i+1) = 0$, $m = 1, 2$, преобразуем J_1 следующим образом

$$J_1 = [(1-\Delta a_1 x_1^*)^2 - 1]\mathbf{M}z_1^2(i) + \Delta^2 a_2^2 (x_1^*)^2 \mathbf{M}z_2^2(i)+$$
$$+\Delta\sigma_1^2\mathbf{M}z_1^2(i) - 2(1-\Delta a_1 x_1^*)\Delta a_2 x_1^* \mathbf{M}z_1(i)z_2(i) =$$
$$= \Delta[(-a_1 x_1^*(2-\Delta a_1 x_1^*) + \sigma_1^2)\mathbf{M}z_1^2(i) + \Delta a_2^2(x_1^*)^2\mathbf{M}z_2^2(i) -$$
$$-2(1-\Delta a_1 x_1^*)a_2 x_1^* \mathbf{M}z_1(i)z_2(i)].$$

Аналогично

$$J_2 = 2\mu\mathbf{M}[((1-\Delta a_1 x_1^*)z_1(i) - \Delta a_2 x_1^* z_2(i))(\Delta b_1 x_2^* z_1(i) + Z_2(i)) - z_1(i)Z_2(i)] =$$
$$= 2\mu[(1-\Delta a_1 x_1^*)\Delta b_1 x_2^* \mathbf{M}z_1^2(i) - \Delta^2 Ab\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) -$$
$$-\Delta a_1 x_1^* \mathbf{M}z_1(i)Z_2(i) - \Delta a_2 x_1^* \mathbf{M}z_2(i)Z_2(i)] =$$
$$= 2\mu\Delta[(1-\Delta a_1 x_1^*)b_1 x_2^* \mathbf{M}z_1^2(i) - \Delta Ab\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) -$$
$$-a_1\mathbf{M}z_1(i)(x_1^* z_2(i) + \Delta b(x_2^* F_1(i) + x_1^* F_2(i))) -$$
$$-a_2\mathbf{M}z_2(i)(x_1^* z_2(i) + \Delta b(x_2^* F_1(i) + x_1^* F_2(i)))] =$$
$$= 2\mu\Delta[(1-\Delta a_1 x_1^*)b_1 x_2^* \mathbf{M}z_1^2(i) - (\Delta Ab + a_1 x_1^*)\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) -$$
$$-\Delta a_1 b(x_2^* \mathbf{M}z_1(i)F_1(i) + x_1^* \mathbf{M}z_1(i)F_2(i)) -$$
$$-a_2 x_1^* \mathbf{M}z_2^2(i) - \Delta b(A\mathbf{M}z_2(i)F_1(i) + a_2 x_1^* \mathbf{M}z_2(i)F_2(i))]$$

и

$$J_3 = \gamma\Delta[\Delta b_1^2(x_2^*)^2\mathbf{M}z_1^2(i) + \sigma_2^2\mathbf{M}z_2^2(i) +$$
$$+2b_1x_2^*\mathbf{M}z_1(i)(z_2(i) + \Delta b_1(x_2^*F_1(i) + x_1^*F_2(i)))] =$$
$$= \gamma\Delta[\Delta b_1^2(x_2^*)^2\mathbf{M}z_1^2(i) + \sigma_2^2\mathbf{M}z_2^2(i) + 2b_1x_2^*\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) +$$
$$+2\Delta b_1^2x_2^*(x_2^*\mathbf{M}z_1(i)F_1(i) + x_1^*\mathbf{M}z_1(i)F_2(i))].$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}\bar{\Delta}V_1(i) = \Delta[(-a_1x_1^*(2-\Delta a_1x_1^*) + \sigma_1^2)\mathbf{M}z_1^2(i) + \Delta a_2^2(x_1^*)^2\mathbf{M}z_2^2(i) -$$
$$-2(1-\Delta a_1x_1^*)a_2x_1^*\mathbf{M}z_1(i)z_2(i)] +$$
$$+2\mu\Delta[(1-\Delta a_1x_1^*)b_1x_2^*\mathbf{M}z_1^2(i) - (\Delta Ab + a_1x_1^*)\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) -$$
$$-\Delta a_1b(x_2^*\mathbf{M}z_1(i)F_1(i) + x_1^*\mathbf{M}z_1(i)F_2(i)) -$$
$$-a_2x_1^*\mathbf{M}z_2^2(i) - \Delta a_2b(x_2^*\mathbf{M}z_2(i)F_1(i) + x_1^*\mathbf{M}z_2(i)F_2(i))] +$$
$$+\gamma\Delta[\Delta b_1^2(x_2^*)^2\mathbf{M}z_1^2(i) + \sigma_2^2\mathbf{M}z_2^2(i) + 2b_1x_2^*\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) +$$
$$+2\Delta b_1^2x_2^*(x_2^*\mathbf{M}z_1(i)F_1(i) + x_1^*\mathbf{M}z_1(i)F_2(i))] =$$
$$= \Delta[-a_1x_1^*(2-\Delta a_1x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1x_2^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \gamma\Delta b_1^2(x_2^*)^2]\mathbf{M}z_1^2(i) +$$
$$+\Delta[\Delta a_2^2(x_1^*)^2 - 2\mu a_2x_1^* + \gamma\sigma_2^2]\mathbf{M}z_2^2(i) -$$
$$-2\Delta[a_2x_1^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \mu(\Delta Ab + a_1x_1^*) - \gamma b_1x_2^*]\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) +$$
$$+2\Delta^2b_1x_2^*[\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*]\mathbf{M}z_1(i)F_1(i) +$$
$$+2\Delta^2b[\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*]\mathbf{M}z_1(i)F_2(i) -$$
$$-2\Delta^2\mu Ab\mathbf{M}z_2(i)F_1(i) - 2\Delta^2\mu a_2bx_1^*\mathbf{M}z_2(i)F_2(i). \tag{20}$$

Заметим, что

$$2\Delta z_m(i)F_m(i) = 2\Delta\sum_{j=1}^{k_m} z_m(i)z_m(i-j) \le \Delta\sum_{j=1}^{k_m}(z_m^2(i) + z_m^2(i-j)) =$$
$$= h_mz_m^2(i) + \Delta\sum_{j=1}^{k_m} z_m^2(i-j), \qquad m = 1, 2, \tag{21}$$

и для произвольных положительных γ_1, γ_2

$$2\Delta z_1(i)F_2(i) = 2\Delta\sum_{j=1}^{k_2} z_1(i)z_2(i-j) \le \Delta\sum_{j=1}^{k_2}(\gamma_1^{-1}z_1^2(i) + \gamma_1z_2^2(i-j)) =$$
$$= \gamma_1^{-1}h_2z_1^2(i) + \gamma_1\Delta\sum_{j=1}^{k_2} z_2^2(i-j), \tag{22}$$

$$2\Delta z_2(i)F_1(i) = 2\Delta\sum_{j=1}^{k_1} z_2(i)z_1(i-j) \le \Delta\sum_{j=1}^{k_1}(\gamma_2z_2^2(i) + \gamma_2^{-1}z_1^2(i-j)) =$$

$$= \gamma_2 h_1 z_2^2(i) + \gamma_2^{-1}\Delta \sum_{j=1}^{k_1} z_1^2(i-j). \tag{23}$$

Подставляя оценки (21)–(23) в (20), получим

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}\bar{\Delta}V_1(i) \le \Delta[-a_1x_1^*(2-\Delta a_1x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1x_2^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \gamma\Delta b_1^2(x_2^*)^2]\mathbf{M}z_1^2(i) + \\
+\Delta[\Delta a_2^2(x_1^*)^2 - 2\mu a_2x_1^* + \gamma\sigma_2^2]\mathbf{M}z_2^2(i) - \\
-2\Delta[a_2x_1^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \mu(\Delta Ab + a_1x_1^*) - \gamma b_1x_2^*]\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) + \\
+\Delta b_1x_2^*|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| \left(h_1\mathbf{M}z_1^2(i) + \Delta\sum_{j=1}^{k_1}\mathbf{M}z_1^2(i-j) \right) + \\
+\Delta b|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| \left(\gamma_1^{-1}h_2\mathbf{M}z_1^2(i) + \gamma_1\Delta\sum_{j=1}^{k_2}\mathbf{M}z_2^2(i-j) \right) + \\
+\Delta\mu Ab \left(\gamma_2h_1\mathbf{M}z_2^2(i) + \gamma_2^{-1}\Delta\sum_{j=1}^{k_1}\mathbf{M}z_1^2(i-j) \right) + \\
+\Delta\mu a_2bx_1^* \left(h_2\mathbf{M}z_2^2(i) + \Delta\sum_{j=1}^{k_2}\mathbf{M}z_2^2(i-j) \right) = \\
= \Delta[-a_1x_1^*(2-\Delta a_1x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1x_2^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \gamma\Delta b_1^2(x_2^*)^2 + \\
+b_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*|(x_2^*h_1 + \gamma_1^{-1}x_1^*h_2)]\mathbf{M}z_1^2(i) + \\
+\Delta[\Delta a_2^2(x_1^*)^2 - 2\mu a_2x_1^* + \gamma\sigma_2^2 + \mu b(\gamma_2Ah_1 + a_2x_1^*h_2)]\mathbf{M}z_2^2(i) - \\
-2\Delta[a_2x_1^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \mu(\Delta Ab + a_1x_1^*) - \gamma b_1x_2^*]\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) + \\
+\Delta^2 \left(q_1\sum_{j=1}^{k_1}\mathbf{M}z_1^2(i-j) + q_2\sum_{j=1}^{k_2}\mathbf{M}z_2^2(i-j) \right),
\end{gathered}$$

где

$$\begin{aligned}
q_1 &= b_1[x_2^*|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| + \gamma_2^{-1}\mu Ax_1^*], \\
q_2 &= b[\gamma_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| + \mu a_2x_1^*].
\end{aligned} \tag{24}$$

Согласно общему методу построения функционалов Ляпунова [19], вспомогательная часть $V_2(i)$ функционала $V(i)$ выбирается в виде

$$V_2(i) = \Delta^2\sum_{m=1}^{2} q_m \sum_{j=1}^{k_m}(k_m - j + 1)z_m^2(i-j).$$

Тогда

$$\bar{\Delta}V_2(i) = \Delta^2\sum_{m=1}^{2} q_m \left(k_m z_m^2(i) - \sum_{j=1}^{k_m} z_m^2(i-j) \right).$$

Следовательно, для функционала $V(i) = V_1(i) + V_2(i)$ с учетом (24) получим

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\bar{\Delta}V(i) \le \Delta[-a_1x_1^*(2-\Delta a_1x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1x_2^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \gamma\Delta b_1^2(x_2^*)^2 + \\ + b_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*|(x_2^*h_1 + \gamma_1^{-1}x_1^*h_2) + \\ + b_1h_1(x_2^*|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| + \gamma_2^{-1}\mu Ax_1^*)]\mathbf{M}z_1^2(i) + \\ + \Delta[\Delta a_2^2(x_1^*)^2 - 2\mu a_2x_1^* + \gamma\sigma_2^2 + \mu b(\gamma_2Ah_1 + a_2x_1^*h_2) + \\ + bh_2(\gamma_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| + \mu a_2x_1^*)]\mathbf{M}z_2^2(i) - \\ - 2\Delta[a_2x_1^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \mu(\Delta Ab + a_1x_1^*) - \gamma b_1x_2^*]\mathbf{M}z_1(i)z_2(i) = \\ = \Delta[-a_1x_1^*(2-\Delta a_1x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1x_2^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \gamma\Delta b_1^2(x_2^*)^2 + \\ + b_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*|(2x_2^*h_1 + \gamma_1^{-1}x_1^*h_2) + \gamma_2^{-1}\mu Abh_1]\mathbf{M}z_1^2(i) + \\ + \Delta[\Delta a_2^2(x_1^*)^2 - 2\mu a_2x_1^* + \gamma\sigma_2^2 + \mu b(\gamma_2Ah_1 + a_2x_1^*h_2) + \\ + bh_2(\gamma_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| + \mu a_2x_1^*)]\mathbf{M}z_2^2(i) + \\ + 2\Delta[\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^* - a_2x_1^*(1-\Delta a_1x_1^*) - \Delta\mu Ab]\mathbf{M}z_1(i)z_2(i).\end{gathered}$$

В результате получаем, что функционал $V(i)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{M}\bar{\Delta}V(i) \le \mathbf{M}z'(i)Pz(i),$$

где

$$z(i) = \begin{pmatrix} z_1(i) \\ z_2(i) \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}p_{11} = \Delta[-a_1x_1^*(2-\Delta a_1x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1x_2^*(1-\Delta a_1x_1^*) + \gamma\Delta b_1^2(x_2^*)^2 + \\ + b_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*|(2x_2^*h_1 + \gamma_1^{-1}x_1^*h_2) + \gamma_2^{-1}\mu Abh_1], \\ p_{22} = \Delta[\Delta a_2^2(x_1^*)^2 - 2\mu a_2x_1^* + \gamma\sigma_2^2 + \mu b(\gamma_2Ah_1 + a_2x_1^*h_2) + \\ + bh_2(\gamma_1|\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^*| + \mu a_2x_1^*)], \\ p_{12} = 2\Delta[\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^* - a_2x_1^*(1-\Delta a_1x_1^*) - \Delta\mu Ab].\end{gathered} \tag{25}$$

Из Теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если существуют числа μ, $\gamma > \mu^2$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, такие, что симметричная матрица P с элементами, определенными в (25), является отрицательно определенной, то есть $p_{11} < 0$, $p_{22} < 0$, $p_{11}p_{22} > p_{12}^2$, то тривиальное решение системы (18) асимптотически устойчиво в среднем квадратическом.*

Покажем, что при условиях Теоремы 3 на параметры исходной системы такие числа μ, γ, γ_1, γ_2 существуют. Выберем γ из условия $p_{12} = 0$, то есть

$$\gamma b_1x_2^* - \mu a_1x_1^* - a_2x_1^*(1-\Delta a_1x_1^*) - \Delta\mu Ab = 0. \tag{26}$$

Тогда с учетом (11)

$$\gamma = \delta_{1\Delta}\mu + \delta_{2\Delta}, \tag{27}$$

где

$$\delta_{1\Delta} = \frac{a_2 b}{b_1}\left(\frac{a_1}{Ab_1} + \Delta\right), \qquad \delta_{2\Delta} = \frac{a_2^2 b}{Ab_1^2}\left(1 - \Delta\frac{a_1 b}{b_1}\right). \tag{28}$$

Из неравенства $\gamma > \mu^2$, то есть $\delta_{1\Delta}\mu + \delta_{2\Delta} > \mu^2$, следует, что требуемое число μ должно принадлежать интервалу

$$\left(\frac{\delta_{1\Delta} - \sqrt{\delta_{1\Delta}^2 + 4\delta_{2\Delta}}}{2}, \frac{\delta_{1\Delta} + \sqrt{\delta_{1\Delta}^2 + 4\delta_{2\Delta}}}{2}\right). \tag{29}$$

Отметим также, что из (26) при условии $\Delta a_1 x_1^* < 1$ или, что с учетом (11) то же самое,

$$\Delta < \frac{b_1}{a_1 b}, \tag{30}$$

следует

$$\gamma b_1 x_2^* - \mu a_1 x_1^* = a_2 x_1^*(1 - \Delta a_1 x_1^*) + \Delta\mu Ab > 0. \tag{31}$$

Предполагая, что $p_{11} < 0$, и используя (27), (31), получим

$$\begin{gathered} -a_1x_1^*(2 - \Delta a_1 x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1 x_2^*(1 - \Delta a_1 x_1^*) + (\delta_{1\Delta}\mu + \delta_{2\Delta})\Delta b_1^2 (x_2^*)^2 + \\ +[a_2 b(1 - \Delta a_1 x_1^*) + \Delta\mu Abb_1](2x_2^* h_1 + \gamma_1^{-1} x_1^* h_2) + \gamma_2^{-1}\mu Abh_1 < 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Отсюда, с учетом (30)

$$\mu < \frac{a_1x_1^*(2 - \Delta a_1 x_1^*) - \sigma_1^2 - \Delta\delta_{2\Delta} b_1^2 (x_2^*)^2 - b(1 - \Delta a_1 x_1^*)(2Ah_1 + \gamma_1^{-1} a_2 x_1^* h_2)}{2b_1 x_2^*(1 - \Delta a_1 x_1^*) + \Delta\delta_{1\Delta} b_1^2 (x_2^*)^2 + \Delta Abb_1(2x_2^* h_1 + \gamma_1^{-1} x_1^* h_2) + \gamma_2^{-1} Abh_1}. \tag{33}$$

Аналогично, предполагая, что $p_{22} < 0$, получим

$$\Delta a_2^2 (x_1^*)^2 + \delta_2\sigma_2^2 + \gamma_1 a_2 b x_1^* h_2 (1 - \Delta a_1 x_1^*) <$$

$$< \mu[2a_2 x_1^*(1 - \Delta a_1 x_1^*) - \delta_1\sigma_2^2 - \gamma_1 \Delta Ab^2 h_2 - \gamma_2 Abh_1].$$

Считая выражение в квадратных скобках положительным, получим

$$\frac{\Delta a_2^2 (x_1^*)^2 + \delta_2\sigma_2^2 + \gamma_1 a_2 b x_1^* h_2 (1 - \Delta a_1 x_1^*)}{2a_2 x_1^*(1 - \Delta a_1 x_1^*) - \delta_1\sigma_2^2 - \gamma_1 \Delta Ab^2 h_2 - \gamma_2 Abh_1} < \mu. \tag{34}$$

Из (11), (28) следует

$$\begin{aligned} \delta_{1\Delta} b_1^2 (x_2^*)^2 &= \frac{A^2 b_1^2}{a_2^2}\frac{ba_2}{b_1}\left(\frac{a_1}{Ab_1} + \Delta\right) = \frac{Ab}{a_2}(a_1 + \Delta Ab_1), \\ \delta_{2\Delta} b_1^2 (x_2^*)^2 &= \frac{A^2 b_1^2}{a_2^2}\frac{ba_2^2}{Ab_1^2}(1 - \Delta a_1 x_1^*) = Ab\left(1 - \Delta\frac{a_1 b}{b_1}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, из (33)–(35) следует, что требуемое μ должно принадлежать интервалу

$$\left(\frac{A_{1\Delta} + B_{1\Delta}\gamma_1}{A_{4\Delta} - B_2\gamma_2 - B_{3\Delta}\gamma_1}, \frac{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_1^{-1}}{A_{3\Delta} + B_2\gamma_2^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_1^{-1}}\right), \tag{36}$$

где с учетом (11), (35)

$$A_{1\Delta} = \frac{a_2^2 b \sigma_2^2}{A b_1^2} + \Delta \frac{a_2^2 b^2}{b_1^2}\left(1 - \frac{a_1\sigma_2^2}{A}\right),$$

$$A_{2\Delta} = 2b\left(\frac{a_1}{b_1} - Ah_1\right) - \Delta b\left(\frac{a_1^2 b}{b_1^2} + A\left(1 - \Delta\frac{a_1 b}{b_1}\right)\right) - \sigma_1^2,$$

$$A_{3\Delta} = \frac{2Ab_1}{a_2} + \Delta\frac{Ab}{a_2}(Ab_1(2h_1+\Delta) - a_1),$$

$$A_{4\Delta} = \frac{a_2 b}{b_1}\left(2(1-bh_2) - \sigma_2^2\left(\frac{a_1}{Ab_1} + \Delta\right)\right),$$

$$B_{1\Delta} = \frac{a_2 b^2 h_2}{b_1}\left(1 - \Delta\frac{a_1 b}{b_1}\right), \quad B_2 = Abh_1, \quad B_{3\Delta} = \Delta A b^2 h_2.$$

Для того, чтобы интервал (36) существовал, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{A_{1\Delta} + B_{1\Delta}\gamma_1}{A_{4\Delta} - B_2\gamma_2 - B_{3\Delta}\gamma_1} < \frac{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_1^{-1}}{A_{3\Delta} + B_2\gamma_2^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_1^{-1}}, \tag{37}$$

или, что то же самое,

$$\frac{A_{1\Delta} + B_{1\Delta}\gamma_1}{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_1^{-1}} \times \frac{A_{3\Delta} + B_2\gamma_2^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_1^{-1}}{A_{4\Delta} - B_2\gamma_2 - B_{3\Delta}\gamma_1} < 1. \tag{38}$$

Оптимальными γ_1 и γ_2 являются те, при которых левая часть неравенства (38) достигает минимума. Для упрощения задачи минимизации найдем минимум левой части (38) при $\Delta = 0$. Из (15) следует, что $A_{i0} = A_i$, $i = 1, ..., 4$, $B_{10} = B_1$, $B_{30} = 0$. Поэтому при $\Delta = 0$ неравенство (38) принимает вид

$$\frac{A_1 + B_1\gamma_1}{A_2 - B_1\gamma_1^{-1}} \times \frac{A_3 + B_2\gamma_2^{-1}}{A_4 - B_2\gamma_2} < 1. \tag{39}$$

Легко показать, что минимум левой части (39) равен $(\gamma_1/\gamma_2)^2$ и достигается при

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{B_1^2 + A_1A_2} + B_1}{A_2}, \qquad \gamma_2 = \frac{A_4}{\sqrt{B_2^2 + A_3A_4} + B_2}. \tag{40}$$

Подставляя (40) в (39), получим (16). Таким образом, при $\Delta = 0$ неравенство (38) (и (37)) с γ_1 и γ_2, определенными в (40), выполняется. Вследствие непрерывной зависимости левой части неравенства (38) от Δ оно будет выполняться и для достаточно малых $\Delta > 0$, то есть

$$\frac{A_{1\Delta} + B_{1\Delta}\gamma_{1\Delta}}{A_{4\Delta} - B_2\gamma_{2\Delta} - B_{3\Delta}\gamma_{1\Delta}} < \frac{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}}{A_{3\Delta} + B_2\gamma_{2\Delta}^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}}, \tag{41}$$

где

$$\gamma_{1\Delta} = \frac{\sqrt{B_{1\Delta}^2 + A_{1\Delta}A_{2\Delta}} + B_{1\Delta}}{A_{2\Delta}}, \qquad \gamma_{2\Delta} = \frac{A_{4\Delta}}{\sqrt{B_2^2 + A_{3\Delta}A_{4\Delta}} + B_2}. \tag{42}$$

Таким образом, интервал (36) при γ_1 и γ_2, определенных в (42), и достаточно малых $\Delta > 0$ существует.

Покажем, что интервал (36), (42) принадлежит интервалу (29). Так как левая граница интервала (29) при условии (30) отрицательна, а левая граница интервала (36), (42) положительна, то достаточно показать, что

$$\frac{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}}{A_{3\Delta} + B_2\gamma_{2\Delta}^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}} < \frac{\delta_{1\Delta} + \sqrt{\delta_{1\Delta}^2 + 4\delta_{2\Delta}}}{2}. \tag{43}$$

Для доказательства (43), в свою очередь, достаточно показать, что для любого Δ, удовлетворяющего (30), выполняется неравенство

$$\frac{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}}{A_{3\Delta} + B_2\gamma_{2\Delta}^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}} < \delta_{1\Delta}.$$

Действительно, в силу (28), (30)

$$\frac{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}}{A_{3\Delta} + B_2\gamma_{2\Delta}^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}} \le \frac{A_{2\Delta}}{A_{3\Delta}} \le \frac{\frac{2ba_1}{b_1} - \frac{\Delta b^2 a_1^2}{b_1^2}}{\frac{2Ab_1}{a_2} + \frac{\Delta Ab}{a_2}(\Delta Ab_1 - a_1)} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 b(2b_1 - \Delta b a_1)}{Ab_1^2(2b_1 + \Delta b(\Delta Ab_1 - a_1))} = \frac{a_1 a_2 b}{Ab_1^2} \times \frac{2b_1 - \Delta b a_1}{2b_1 - \Delta b a_1 + \Delta^2 Abb_1} < \frac{a_1 a_2 b}{Ab_1^2} < \delta_{1\Delta}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Если выполняются условия (10), (15), (16) и выбранный шаг дискретизации Δ удовлетворяет условиям (30), (41), то тривиальное решение системы (18) асимптотически устойчиво в среднем квадратическом, и, соответственно, положительная точка равновесия (11) системы (17) устойчива по вероятности.*

Пример. *Численное моделирование системы (12) проводилось с помощью разностного аналога (17) при следующих значениях параметров:* $a = 5$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.5$, $b = 3.5$, $h_1 = h_2 = 0.02$, $\sigma_1 = 0.6$, $\sigma_2 = 0.8$, $\varphi_1(s) = 8.5\cos s$, $\varphi_2(s) = 8.5\sin(s+1)$. *При этом* $A = 3.6$, $A_1 = 0.622$, $A_2 = 1.936$, $A_3 = 7.2$, $A_4 = 6.261$, $B_1 = 0.245$, $B_2 = 0.252$, $x_1^* = 7$, $x_2^* = 7.2$, $\varphi_1(-0.02) = 8.498$, $\varphi_1(-0.01) = 8.499$, $\varphi_1(0) = 8.5$, $\varphi_2(-0.02) = 7.059$, $\varphi_2(-0.01) = 7.106$, $\varphi_2(0) = 7.152$. *Условия (10), (16) выполняются, условие (30) принимает вид* $\Delta < 0.714$. *При выбранном шаге дискретизации* $\Delta = 0.01$ *условие (41) также выполняется: 0.152<0.253. Было проведено численное моделирование тысячи траекторий системы (12), все они сходились к точке равновесия* (x_1^*, x_2^*). *На рис. 1 показана одна из полученных траекторий устойчивого решения системы в фазовой плоскости* (x_1, x_2), *на рис. 2 показано изменение этого решения во времени.*

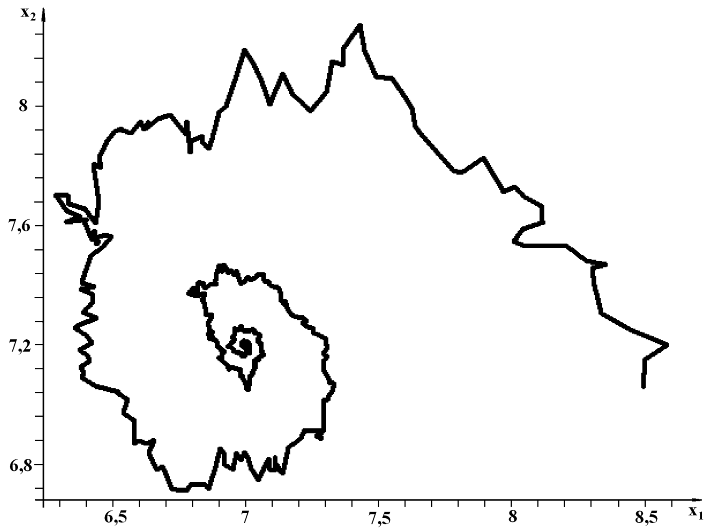

Рис. 1. Траектория устойчивого решения системы (12) в фазовой плоскости (x_1, x_2)

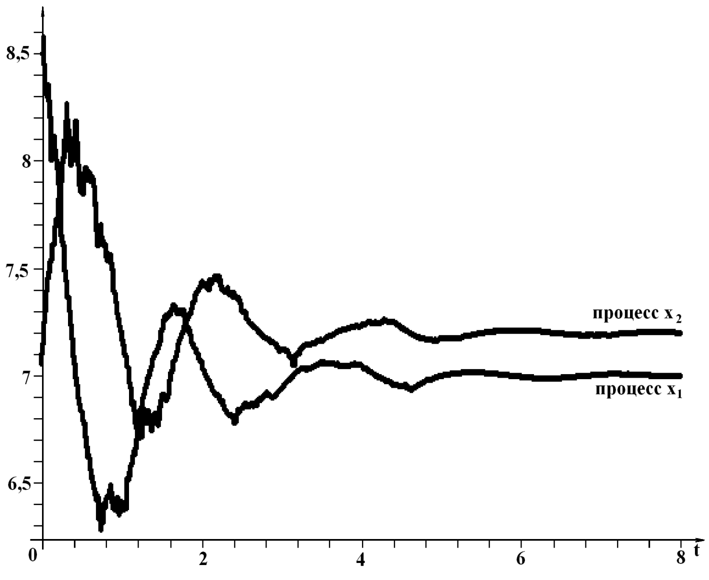

Рис. 2. Изменение траекторий устойчивого решения системы (12) во времени

Замечание 1. *Отметим, что описанный выше метод был опробован в* [3] *на более простой (одномерной) модели (так называемой "мухе Николсона"), для которой был проведен достаточно подробный численный анализ области устойчивости модели в пространстве ее параметров, в частности, исследована зависимость области устойчивости разностного аналога исследуемой системы от шага дискретизации. На основе полученных выше результатов аналогичный численный анализ может быть проведен и для более сложной (двумерной) модели типа "хищник-жертва". Этим же методом могут быть исследованы модели большей размерности, например, трехмерная "модель эпидемии"* [2] *и другие.*

Заключение. В работе получены достаточные условия на шаг дискретизации, при котором разностный аналог сохраняет свойство устойчивости рассматриваемой нелинейной модели. Предложенный метод исследования может быть использован также для изучения других нелинейных систем с порядком нелинейности большим единицы.

1. **Bandyopadhyay M.** Ratio dependent predator-prey model: effect of environmental fluctuation and stability [text] / M. Bandyopadhyay, J. Chattopadhyay // Nonlinearity. – 2005. – № 18. – P. 913–936.
2. **Beretta E.** Stability of epidemic model with time delays influenced by stochastic perturbations [text] / E. Beretta, V. Kolmanovskii, L. Shaikhet // Mathematics and Computers in Simulation (Special Issue "Delay Systems"). – 1998. – V. 45, № 3-4. – P. 269–277.
3. **Bradul N.** Stability of the positive point of equilibrium of Nicholson's blowflies equation with stochastic perturbations: numerical analysis [text] / N. Bradul, L. Shaikhet // Discrete Dynamics in Nature and Society. – 2007. – Article ID 92959, 25 p.
4. **Carletti M.** On the stability properties of a stochastic model for phage-bacteria interaction in open marine environment [text] / M. Carletti // Mathematical Biosciences. – 2002. – № 175. – P. 117–131.
5. **Garvie M.** Finite-Difference Schemes for Reaction-Diffusion Equations Modeling Predator-Prey Interactions in MATLAB [text] / M. Garvie // Bulletin of Mathematical Biology. – 2007. – V. 69, № 3. – P. 931–956.
6. **Gikhman I. I.** The theory of stochastic processes [text] / I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. – New York: Springer-Verlag, 1979. – 390 p.
7. **Hasting A.** Age-Depend Predation Is Not a Simple Process [text] / A. Hasting // J. Math. Biology. – 1983. – № 23. – P. 347–362.
8. **Hasting A.** Delays in recruitment different trophic levels: Effects on stability [text] / A. Hasting // J. Math. Biology. – 1984. – № 21. – P. 35–44.
9. **Itokazu T.** Almost Periodic Solutions of Prey-Predator Discrete Models with Delay [text] / T. Itokazu, Y. Hamaya // Advances in Difference Equations. – 2009. – Article ID 976865, 19 p.
10. **Kolmanovskii V. B.** New results in stability theory for stochastic functional-differential equations (SFDEs) and their applications [text] / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet // Dynamic Systems and Applications, Dynamic Publishers Inc. – 1994. – V. 1, № 1. – P. 167–171.

11. **Колмановский В. Б.** Метод построения функционалов Ляпунова для стохастических дифференциальных уравнений нейтрального типа [текст] / В. Б. Колмановский, Л. Е. Шайхет // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1851–1857.
12. **Kolmanovskii V. B.** General method of Lyapunov functionals construction for stability investigation of stochastic difference equations [text] / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet // Dynamical Systems and Applications, World Sci. Ser. Appl. Anal., World Scientific, New Jersey. – 1995. – № 4. – P. 397–439.
13. **Kolmanovskii V. B.** Some peculiarities of the general method of Lyapunov functionals construction [text] / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet // Applied Mathematics Letters. – 2002. – V. 15, № 3. – P. 355–360.
14. **Kolmanovskii V. B.** Construction of Lyapunov functionals for stochastic hereditary systems: a survey of some recent results [text] / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet // Mathematical and Computer Modelling. – 2002. – V. 36, № 6. – P. 691–716.
15. **Kolmanovskii V. B.** About one application of the general method of Lyapunov functionals construction [text] / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet // International Journal of Robust and Nonlinear Control (Special Issue on Time Delay Systems) RNC. – 2003. – V. 13, № 9. – P. 805–818.
16. **Kulenovic M. R. S.** Linearized oscillations in population dynamics [text] / M. R. S. Kulenovic, G. Ladas // Bulletin of Mathematical Biology. – 1987. – V. 49, № 5. – P. 615–627.
17. **Kulenovic M. R. S.** Global attractivity in population dynamics [text] / M. R. S. Kulenovic, G. Ladas, Y. G. Sficas // Computers and Mathematics with Applications. – 1989. – V. 18, № 10–11. – P. 925–928.
18. **Liao X.** On a stoichiometric two predators on one prey discrete model [text] / X. Liao, Sh. Zhou, Z. Ouyang // Applied Mathematics Letters. – 2007. – № 20. – P. 272–278.
19. **Liz E.** A sharp global stability result for a discrete population model [text] / E. Liz // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – № 330. – P. 740–743.
20. **Luo J.** Stability in probability of nonlinear stochastic Volterra difference equations with continuous variable [text] / J. Luo, L. Shaikhet // Stochastic Analysis and Applications. – 2007. – V. 25, № 6. – P. 1151–1165.
21. **Marotto F.** The dynamics of a discrete population model with threshold [text] / F. Marotto // Mathematical Biosciences. – 1982. – № 58. – P. 123–128.
22. **Muroya Y.** Persistence global stability in discrete models of Lotka-Volterra type [text] / Y. Muroya // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – № 330. – P. 24–33.
23. **Paternoster B.** Stability in probability of nonlinear stochastic difference equations [text] / B. Paternoster, L. Shaikhet // Stability and Control: Theory and Applications. – 1999. – V. 2, № 1–2. – P. 25–39.
24. **Paternoster B.** About stability of nonlinear stochastic difference equations [text] / B. Paternoster, L. Shaikhet // Applied Mathematics Letters. – 2000. – V. 13, № 5. – P. 27–32.
25. **Shaikhet L. E.** Stability in probability of nonlinear stochastic hereditary systems [text] / L. E. Shaikhet // Dynamic Systems and Applications. – 1995. – V. 4, № 2. – P. 199–204.
26. **Шайхет Л. Е.** Устойчивость по вероятности нелинейных стохастических систем с запаздыванием [текст] / Л. Е. Шайхет // Математические заметки. – 1995. – Т. 57, № 1. – Р. 142–146.

27. **Shaikhet L. E.** Modern state and development perspectives of Lyapunov functionals method in the stability theory of stochastic hereditary systems [text] / L. E. Shaikhet // Theory of Stochastic Processes. – 1996. – V. 2(18), № 1–2. – P. 248–259.

28. **Shaikhet L. E.** Necessary and sufficient conditions of asymptotic mean square stability for stochastic linear difference equations [text] / L. E. Shaikhet // Applied Mathematics Letters. – 1997. – V. 10, № 3. – P. 111–115.

29. **Shaikhet L. E.** Stability of a positive point of equilibrium of one nonlinear system with aftereffect and stochastic perturbations [text] / L. E. Shaikhet // Dynamic Systems and Applications. – 2008. – № 17. – P. 235–253.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 24–34

УДК 517.9

Е. А. Булатников*, А. В. Плотников**
*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
**Одесская государственная академия строительства и архитектуры

БИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Булатніков Є. О., Плотніков А. В. Білінійні системи з нечіткою правою частиною. Вводиться поняття керованого білінійного диференціального рівняння з нечіткими параметрами в правій частині та доводяться деякі властивості відповідних нечітких пучків траекторій за допомогою переходу до керованих диференціальних включень з нечіткою правою частиною.
Ключові слова: оптимальне керування, диференційні включення, нечіткі множини.

Булатников Е. А., Плотников А. В. Билинейные системы с нечеткой правой частью. Вводится понятие управляемого билинейного дифференциального уравнения с нечеткими параметрами в правой части и доказываются некоторые свойства соответствующих нечетких пучков траекторий при помощи перехода к управляемым дифференциальным включениям с нечеткой правой частью.
Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные включения, нечеткие множества.

Bulatnikov E. A., Plotnikov A. V. Bilinear systems with fuzzy right side. Notion of controlled bilinear differential equation with fuzzy parameters in the right-hand side is introduced and some properties of corresponding fuzzy pencils of trajectories are proved with using change to controlled differential inclusions with fuzzy right-hand side.
Key words: optimal control, differential inclusions, fuzzy sets.

Введение. Понятие нечеткого множества было введено в работе [1]. В работе [2] впервые рассматривалось нечеткое дифференциальное уравнение, которое в дальнейшем исследовалось в работах [3]–[7], а в работах [8]–[10] изучались дифференциальные включения с нечеткой правой частью, которые затем рассматривались в [11], [12].

Управляемые билинейные дифференциальные системы были рассмотрены в работах Celikovsky [13], [14], а их приложения в работе [15]. В данной работе вводится понятие управляемого билинейного дифференциального уравнения с нечеткими параметрами в правой части и доказываются некоторые свойства соответствующих нечетких пучков траекторий при помощи перехода к управляемым дифференциальным включениям с нечеткой правой частью.

Основные определения и обозначения. Пусть $Comp(R^n)$ (или $Conv(R^n)$) — пространство непустых (выпуклых) компактных подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = min\{r \geq 0 \mid A \subset B + S_r(0),\ B \subset A + S_r(0)\},$$

где $A,\ B \subset Comp(R^n)$ (или $Conv(R^n)$), $S_r(a)$ — шар в R^n радиуса r с центром в точке a.

Определение 1. *Под нечетким множеством A понимается совокупность $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, где X — универсальное множество, а $\mu_A(x)$ — функция принадлежности, характеризующая степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A. Функция $\mu_A(x)$ принимает значения в некотором вполне упорядоченном множестве M. Множество M называют множеством принадлежностей, часто в качестве M выбирается интервал $[0,1]$. Если $M = \{0,1\}$, то нечеткое множество может рассматриваться как обычное, четкое множество.*

Рассмотрим следующую управляемую билинейную систему:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)x + c(t)u(t) + v(t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \ t \in [t_0, t_1] \subset R,$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, $A(t)$, $B(t)$ — матрицы $n \times n$, $c(t)$ — n-мерный вектор, $u(t)$ — скалярное управление, $v \in R^n$ — неопределенный параметр такой, что для всех $t \in [t_0, t_1]$ $v \in V$, где V — нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(\cdot) : R^n \to [t_0, t_1]$.

Предположение. *Будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям:*

1) матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор $c(t)$ — измеримы на R^1;

2) существуют константы a, b, $c > 0$ такие, что $\|A(t)\| \le a$, $\|B(t)\| \le b$, $\|c(t)\| \le c$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

3) функция $u(t)$ — измерима на каждом конечном временном интервале $[t_0, t_1]$;

4) существуют константы u_{min}, u_{max} такие, что $u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

5) характеристическая функция $\mu(\cdot) : R^n \to [0,1]$ удовлетворяет условиям:

a) модальная, т. е. существует хотя бы одно $y_0 \in R^n$ такое, что $\mu(y_0) = 1$;

b) $\mu(y)$ — полунепрерывна сверху по y, т. е. $\forall y_0 \in R^n$ $\overline{\lim\limits_{y \to y_0}} \mu(y) = \mu(y_0)$;

c) для любого $\varepsilon > 0$ и $y \in R^n \setminus \{y \mid \mu(y) = 1\}$ существуют y', $y'' \in R^n$ такие, что $\|y - y'\| < \varepsilon$, $\|y - y''\| < \varepsilon$ и $\mu(y') < \mu(y) < \mu(y'')$;

d) множество $cl\{y \in R^n \mid \mu(y) > 0\}$ — компактно, $cl(P)$ — замыкание множества $P \subset R^n$.

Определение 2. *Множество всех управлений $u(t)$, удовлетворяющих Предположению, будем называть множеством допустимых управлений и обозначать U.*

Введем понятие α-срезки нечеткого множества.

Определение 3. [5] *α-срезкой нечеткого множества V ($\alpha \in [0,1]$) назовем множество $[V]^\alpha$, определяемое по следующей формуле:*

$$[V]^\alpha = \begin{cases} \{y \in R^n \mid \mu(y) \ge \alpha\}, & \text{если} \quad \alpha \in (0,1], \\ cl\{y \in R^n \mid \mu(y) > 0\}, & \text{если} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторые свойства α-срезки $[V]^\alpha$.

Свойство. *Из условия 5 Предположения следует:*
1) для любых $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$ таких, что $\alpha_1 > \alpha_2$ справедливо включение:

$$[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha_2};$$

2) для любого $0 \le \alpha \le 1$ соответствующая α-срезка нечеткого множества V является компактным множеством в R^n.

Доказательство. 1) Проведем доказательство от противного. Рассмотрим произвольные $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ такие, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Предположим, что $[V]^{\alpha_1} \not\subset [V]^{\alpha_2}$. Это означает, что найдется по крайней мере один такой вектор $y \in R^n$, что $y \in [V]^{\alpha_1}$, но $y \notin [V]^{\alpha_2}$. Если $y \in [V]^{\alpha_1}$, то согласно определению α-срезки: $\mu(y) \ge \alpha_1$. По условию, $\alpha_1 > \alpha_2$ и, следовательно, $\mu(y) \ge \alpha_2$. Отсюда следует, что $y \in [V]^{\alpha_2}$, что противоречит нашему предположению. Значит, $[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha}_2$.

2) Докажем замкнутость множества $[V]^\alpha$. Рассмотрим последовательность $\{y_n^\alpha\}_{n=1}^\infty \in [V]^\alpha$, сходящуюся к некоторому $y^\alpha \in R^n$. Докажем, что y^α также принадлежит $[V]^\alpha$. Так как $y_n^\alpha \in [V]^\alpha$, $\forall n = \overline{1,\infty}$, то $\mu(y_n^\alpha) \ge \alpha$. В силу полунепрерывности сверху функции $\mu(y)$ по y, получаем: $\mu(y_n^\alpha)$ сходится сверху к $\mu(y^\alpha)$ при $y_n^\alpha \to y^\alpha$. Далее, так как справедливо соотношение $\alpha \le \mu(y_n^\alpha) \le 1$ (из определения функции μ), то переходя к пределу, получим $\alpha \le \mu(y^\alpha) \le 1$. Отсюда следует, что $y^\alpha \in [V]^\alpha$, что доказывает замкнутость множества $[V]^\alpha$.

Тогда, так как для любого $0 < \alpha \le 1$ $[V]^\alpha \subset [V]^0 \in Comp(R^n)$, также принадлежит $Comp(R^n)$. Свойство доказано. $\square$

Рассмотрим следующее нечеткое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u(t)x + c(t)u(t) + V,\ x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

которое получается из системы (1), благодаря замене параметра $v(t)$ на нечеткое множество V.

Системе (2) поставим в соответствие систему

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u(t)x + c(t)u(t) + [V]^\alpha,\ x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где $[V]^\alpha$ — некоторая α-срезка($\alpha \in [0,1]$) нечеткого множества V.

В результате получаем управляемую дифференциальную систему с многозначной правой частью.

Обозначим через $[X(u)]^\alpha$ — пучок траекторий системы (3), соответствующих допустимому управлению $u(t)$, а через $[X(t,u)]^\alpha$ соответствующее сечение пучка $[X(u)]^\alpha$ в момент $t \in [t_0, t_1]$ ($\alpha \in [0,1]$).

Введем понятия нечеткого пучка траекторий для системы (2).

Определение 4. *Нечетким пучком траекторий системы (2) назовем нечеткое множество $X(u)$ такое, что для любого $t \in [t_0, t_1]$ α-срезки $X(t,u)$ совпадают с сечением пучка траекторий $[X(u)]^\alpha$ системы (3).*

Определение 5. *Нечетким измеримым многозначным отображением назовем отображение, любая α-срезка которого является измеримым многозначным отображением по Лебегу.*

Определение 6. [5] *Интегралом от нечеткого множества $F(t)$ назовем множество $\int\limits_0^t F(s)ds$, α-срезки которого совпадают с интегралом Ауманна [16] от α-срезки нечеткого множества $F(t)$, т. е. выполняется условие*

$$\left[\int\limits_0^t F(s)ds\right]^\alpha = \int\limits_0^t [F(s)]^\alpha ds = \left\{ \int\limits_0^t f(s)ds \;\middle|\; f : R^1 \to R^n,\ f(\cdot) \in [F(\cdot)]^\alpha \right\}.$$

Рассмотрим следующую лемму.

Лемма. *Если матричная функция $D(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и нечеткое множество V с характеристической функцией $\mu(\cdot)$ удовлетворяет условиям:*

1) $D(\cdot)$ — измерима по t на $[t_0, t_1]$;

2) существует функция $d(\cdot) \in L_1([t_0, t_1])$ такая, что для почти всех $t \in \in [t_0, t_1]$ выполняется неравенство $\|D(t)\| \le d(t)$;

3) характеристическая функция $\mu(\cdot)$ удовлетворяет условию 5 из Предположения, то $\int\limits_0^t D(s)V ds$ существует для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Согласно ([5], теорема 2.3) интеграл $\int\limits_0^t D(s)V ds$ существует для всех $t \in [t_0, t_1]$, если нечеткое многозначное отображение $L(t) = D(t)V$ измеримо и ограничено некоторой интегральной функцией $p(t)$. Согласно условию 1), нечеткое многозначное отображение $L(t)$ измеримо, а из условий 2) и 3), и Свойства следует, что существует $p(t) = d(t)v_0$, где $v_0 \ge \left|[V]^0\right|$. Лемма доказана. □

Определение 7. *Нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением назовем отображение, любая α-срезка которого является абсолютно непрерывным многозначным отображением.*

Определение 8. *Нечеткое множество назовем компактным, если его любая α-срезка является компактным множеством.*

Определение 9. *Нечеткое множество назовем выпуклым, если его любая α-срезка является выпуклым множеством.*

Дадим определение множества достижимости для управляемой системы (3) с многозначной правой частью.

Определение 10. [17] *Множеством достижимости $[Y(t_1)]^\alpha$ системы (3) назовем множество всех множеств $Comp(R^n)$, в которые можно перевести систему (3) из начального состояния x_0 при помощи допустимых управлений в состояние t_1, т. е.*

$$[Y(t_1)]^\alpha = \{ [X(t_1, u)]^\alpha \mid u(\cdot) \in U \}.$$

На основании данного определения введем определение множества достижимости для нечеткой системы (2).

Определение 11. *Нечетким множеством достижимости $Y(t_1)$ системы (2) назовем множество всех нечетких множеств, α-срезки которого совпадают с $[Y(t_1)]^\alpha$ для всех $\alpha \in [0,1]$.*

Основные результаты. Докажем теорему о свойствах нечеткого пучка траекторий $X(u)$ системы (2).

Теорема 1. *При выполнении условий Предположения для любого допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующий нечеткий пучок $X(u)$ системы (2) удовлетворяет условиям:*

1) для всех $t \in [t_0, t_1]$ нечеткое многозначное отображение $X(t,u)$ представимо в виде

$$X(t,u) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)A(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)c(s)ds - \right.$$
$$\left. - \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)\left(B'(s)w(s)c(s) + c'(s)\right)ds\right) + \tag{4}$$
$$+E_w(t)\exp\left(B(t)w(t)\right)c(t) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)V ds,$$

где интегралы, кроме последнего, понимаются в смысле Лебега, а последний — в смысле определения 6; $E_w(t)$ — следующая матричная функция (в зависимости от $w(t) = \int_{t_0}^{t} u(s)ds$, $t \in [t_0, t_1]$):

$$E_w(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i(s)w(s)^{i+1}}{(i+1)!}(-1)^i + \sum_{i=0}^{\infty} i\int_{t_0}^{t}(-B(\alpha))^{i-1}B'(\alpha)\frac{w(\alpha)^{i+1}}{(i+1)!}d\alpha$$

и $\Phi(t), \Phi^{-1}(t)$ даны следующими формулами:

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds\right) \times$$
$$\times \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t=\tau_{k+1}} \cdots \int_{t_0}^{\tau_2} \prod_{j=1}^{k}\left\{\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_{k+1-j}} B(s)u(s)ds\right)A(\tau_{k+1-j})\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left(\int_{t_0}^{\tau_{k+1-j}} B(s)u(s)ds\right)\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_k\right)$$

и

$$\Phi^{-1}(t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t=\tau_{k+1}} \cdots \int_{t_0}^{\tau_2} \prod_{j=1}^{k}\left\{\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_j} B(s)u(s)ds\right)(-A(\tau_j))\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left(\int_{t_0}^{\tau_j} B(s)u(s)ds\right)\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_k\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds\right).$$

2) для всех $t \in [t_0, t_1]$ $X(t,u)$ является выпуклым и компактным нечетким множеством;

3) при каждом допустимом $u(\cdot)$ многозначная траектория $X(\cdot, u)$ является нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением;

4) для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и любых $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ таких, что $\alpha_1 > \alpha_2$, соответствующие α-срезки нечеткого множества $X(t,u)$ удовлетворяют условию:

$$[X(t,u)]^{\alpha_1} \subset [X(t,u)]^{\alpha_2}.$$

Доказательство. 1) Функция $\Phi^{-1}(s)$ измерима как сумма, произведение и предел измеримых функций. В работе Celikovsky [14] показано, что $\max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|\Phi^{-1}(t)\|_S \le K_2$, где $K_2 = e^{(A^M + B^M u_p)(t_1 - t_0)}$, $A^M = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|A(t)\|_S$, $B^M = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|B(t)\|_S$, $u_p = \max\{|u_{min}|, |u_{max}|\}$, $\|\cdot\|_S$-спектральная матричная норма. Следовательно, в последнем слагаемом в правой части выражения (4) интеграл существует, так как нечеткое многозначное отображение $\Phi^{-1}V$ удовлетворяет предположениям Леммы. Значит, выражение (4) имеет смысл.

Теперь покажем, что нечеткое сечение пучка $X(t,u)$ системы (2) представимо в виде (4). Введем обозначение

$$G(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)A(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)c(s)ds - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)\left(B'(s)w(s)c(s) + c'(s)\right)ds\right) +$$
$$+ E_w(t)\exp\left(B(t)w(t)\right)c(t).$$

Рассмотрим произвольную α-срезку правой части выражения (4):

$$\left[G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds\right]^{\alpha} = [G(t)]^{\alpha} + \left[\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds\right]^{\alpha} =$$
$$= G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha}ds.$$

Тогда получим

$$\left[G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds\right]^{\alpha} = G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha}ds. \qquad (5)$$

Правая часть выражения (5) является сечением пучка траекторий $[X(t,u)]^{\alpha}$ системы (3), что следует из определения самого множества $[X(t,u)]^{\alpha}$. А значит, согласно определению 3, нечеткое многозначное отображение $X(t,u)$ представимо в виде (4).

2) Для всех $t \in [t_0, t_1]$ и любого $\alpha \in [0,1]$ покажем выпуклость и компактность α-срезки $[X(t,u)]^\alpha$ нечеткого множества $X(t,u)$.

Согласно выражению (5) $[X(t,u)]^\alpha = G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds$. Так как подынтегральное выражение является измеримым и ограниченным многозначным отображением, то, согласно теореме Аумана [18] о непустоте, выпуклости и компактности интеграла от многозначного отображения, получаем, что для всех $t \in [t_0, t_1]$ и $\alpha \in [0,1]$ α-срезка $[X(t,u)]^\alpha$ является компактным и выпуклым множеством, что влечет за собой компактность и выпуклость нечеткого множества $X(t,u)$ в силу определения 8 и определения 9.

3) Рассмотрим выражение (5) в виде:

$$[X(t,u)]^\alpha = G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds.$$

Функция $G(t)$ есть сумма трех абсолютно непрерывных функций, где первые две являются таковыми как интегралы от измеримых функций, а третья — произведение $E_w(t)$ на экспоненту ($E_w(t)$ абсолютно непрерывна как сумма абсолютно непрерывных функций).

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds$. Под знаком интеграла содержится многозначное измеримое отображение и, следовательно, является абсолютно непрерывным многозначным отображением [19]. Тогда α-срезка $[X(t,u)]^\alpha$ нечеткого множества $X(t,u)$ представляет собой абсолютно непрерывное многозначное отображение. В силу определения 7 отображение $X(t,u)$ является нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением, что и требовалось доказать.

4) Используя введенные выше обозначения и определение интеграла Ауманна [16] сечения пучков $[X(t,u)]^{\alpha_1}$ и $[X(t,u)]^{\alpha_2}$ запишем в виде:

$$[X(t,u)]^{\alpha_1} = G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_1} ds$$

и

$$[X(t,u)]^{\alpha_2} = G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_2} ds.$$

Согласно Свойству, справедливо условие: $[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha_2}$. Это значит, что множество $\Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_2}$ содержит все ветви множества $\Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_1}$. Отсюда вытекает, что $[X(t,u)]^{\alpha_1} \subset [X(t,u)]^{\alpha_2}$, что и требовалось доказать. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теорему о равенстве сечений нечетких пучков траекторий.

Теорема 2. *При выполнении условий предположения для любых двух нечетких множеств V_1 и V_2 таких, что для любого $\alpha \in [0,1]$ $conv[V_1]^\alpha = conv[V_2]^\alpha$, любого допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующие нечеткие пучки $X_1(u)$ и $X_2(u)$ системы (2) удовлетворяют условию: $X_1(t,u) = X_2(t,u)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.*

Доказательство. В силу выражения (5) и свойства интеграла Ауманна [16], согласно которому для любого многозначного отображения $F(\cdot) : R^1 \to \to Comp(R^n)$, интегрируемого по Ауманну, выполняется свойство:

$$\int_0^T F(t)dt = \int_0^T convF(t)dt.$$

Получаем, что $[X_1(t,u)]^\alpha = [X_2(t,u)]^\alpha$ для любого $\alpha \in [0,1]$. Это в свою очередь влечет за собой равенство соответствующих нечетких пучков, то есть $X_1(t,u) = = X_2(t,u)$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим и докажем следующие свойства нечеткого множества достижимости.

Теорема 3. *При выполнении условий Предположения нечеткое множество достижимости $Y(t_1)$ системы (2) является выпуклым и компактным.*

Доказательство. 1) Докажем вначале выпуклость множества $Y(t_1)$. Рассмотрим $X(t,u)$ в виде $X(t,u) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\left(c(s)u(s) + V\right)ds$. Рассмотрим произвольные допустимые управления $u_1(t),\ u_2(t) \in U(t)$. Данным управлениям соответствуют нечеткие сечения пучков траекторий $X(t_1,u_1),\ X(t_1,u_2) \in \in Y(t_1)$ соответственно.

Тогда

$$X(t,u_1) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds,$$

$$X(t,u_2) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds.$$

Рассмотрим выпуклую комбинацию $X_\beta = \beta X(t_1,u_1) + (1-\beta)X(t_1,u_2)$, $\beta \in \in (0,1)$ и покажем, что $X_\beta \in Y(t_1)$:

$$\begin{aligned}
&\beta X(t_1,u_1) + (1-\beta)X(t_1,u_2) = \\
&= \beta\left(\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds\right) + \\
&+(1-\beta)\left(\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds\right) = \\
&= \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \beta\Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} (1-\beta)\Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds + \\
&+\beta\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds + (1-\beta)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds + \Phi(t)x_0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первые два слагаемые:

$$\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\beta\Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}(1-\beta)\Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds=$$

$$=\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)\beta u_1(s)ds+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)(1-\beta)u_2(s)ds=$$

$$=\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)\left(\beta u_1(s)+(1-\beta)u_2(s)\right)ds.$$

В силу выпуклости множества $U(t)$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$ существует некоторое управление $u_\beta(t)$ такое, что $u_\beta(t)=\beta u_1(t)+(1-\beta)u_2(t)$.

В силу выпуклости интеграла $\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds$ (по Теореме 1) справедливо следующее:

$$\beta\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds+(1-\beta)\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds=\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds.$$

Отсюда следует

$$\beta X(t_1,u_1)+(1-\beta)X(t_1,u_2)=$$
$$=\Phi(t)x_0+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)u_\beta(s)ds+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds,$$

т. е. так как $u_\beta(\cdot)\in U$, то существует некоторое сечение $X(t_1,u_\beta)=X_\beta\in\in Y(t_1)$. Значит, множество $Y(t_1)$ является выпуклым, что и требовалось доказать.

2) Докажем компактность множества $Y(t_1)$. По определению 8 нечеткое множество компактно, если компактна любая его α-срезка. Для произвольного $\alpha\in[0,1]$ рассмотрим множество $[Y(t_1)]^\alpha=\{\,[X(t_1,u)]^\alpha\mid u(\cdot)\in\in U(\cdot)\}$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{[X(t_1,u_k)]^\alpha\}_{k=1}^\infty\in\in[Y(t_1)]^\alpha$, сходящуюся к некоторому $\widetilde{X}$. Также рассмотрим соответствующую последовательность управлений $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty\in U$. В силу теоремы Асколи-Арцела [20] из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_p}(\cdot)\}_{p=1}^\infty$, из которой, в свою очередь, по теореме Мазура [21] можно выделить последовательность $\{u_{k_{p_s}}(\cdot)\}_{s=1}^\infty$, сильно сходящуюся к некоторому управлению $\widetilde{u}(\cdot)$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{u_{k_{p_s}}\to\widetilde{u}}[X(t_1,u_{k_{p_s}})]^\alpha=[X(t_1,\widetilde{u})]^\alpha=\widetilde{X}\in[Y(t_1)]^\alpha$, что означает замкнутость множества $[Y(t_1)]^\alpha$.

Далее, рассмотрим дифференциальное включение:

$$\dot{x}\in A(t)x+B(t)u(t)x+c(t)U(t)+[V]^\alpha \tag{6}$$

Обозначим $[Z(t_1)]^\alpha$ сечение пучка траекторий дифференциального включения (6). Очевидно, что

$$[Z(t_1)]^\alpha = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)U(s)ds + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds,$$

и $[Z(t_1)]^\alpha \subset Conv(R^n)$. Через Ω обозначим множество, элементами которого являются все компактные множества, входящие в $[Z(t_1)]^\alpha$. Множество Ω является компактным ([6], стр. 102). А так как $[Y(t_1)]^\alpha$ является замкнутым подмножеством множества Ω, то множество $[Y(t_1)]^\alpha$ является компактным.

Из первой и второй частей доказательства следует, что нечеткое множество достижимости $Y(t_1)$ является выпуклым и компактным нечетким множеством. Теорема доказана. □

Заключение. В статье получены условия при которых множество достижимости нечетких управляемых билинейных дифференциальных включений компактно и выпукло.

1. **Zadeh L. A.** Fuzzy Sets [text] / Zadeh L. A. // Inf. Control. – 1965. – V. 8. – P. 338–353.
2. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] / Kaleva O. // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – V. 3. – P. 301–317.
3. **Kaleva O.** A note on fuzzy differential equations [text] / Kaleva O. // Nonlinear Anal. – 2006. – V. 64. – P. 895–900.
4. **Lakshmikantham V.** Theory of set differential equations in metric spaces [text] / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi. – Cambridge Sci. Publ., 2006. – 204 p.
5. **Park J. Y.** Existence and uniqueness theorem for solution of fuzzy differential equations [text] / J. Y. Park, H. K. Han // Int. J. Math. And Math. Sci. – 1999. – 22, No. 2. – P. 271–279.
6. **Park J. Y** Fuzzy differential equations [text] / J. Y. Park, H. K. Han. // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – V. 110. – P. 69–77.
7. **Vorobiev D.** Towards the theory of fuzzy differential equations [text] / D. Vorobiev, S. Seikkala. // Ibid. – 2002. – V. 125. – P. 231–237.
8. **Aubin J. P.** Fuzzy differential inclusions [text] / Aubin J. P. // Prob. Control and Inform. Theory. – 1990. – 19. No. 1. – P. 55–67.
9. **Baidosov V. A.** Differential inclusions with fuzzy right-hand side [text] / Baidosov V. A. // Sov. Math. – 1990. – 40. No. 3. – P. 567–569.
10. **Baidosov V. A.** Fuzzy differential inclusions [text] / Baidosov V. A. // J. Appl. Math. and Mech. – 1990. – 54. No. 1. – P. 8–13.
11. **Hullermeier E.** An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems [text] / Hullermeier E. // Int. J. Uncertainly Fuzziness Knowledge Based Systems. – 1997. – V. 5. – P. 117–137.

12. **Lakshmikantham V.** Theory of fuzzy differential equations and inclusions [text] / V. Lakshmikantham, R. Mohapatra. – Ser. Math. Anal. and Appl., London: Taylor and Francis, Ltd., 2003. – 143 p.
13. **Celikovsky S.** On the representation of trajectories of bilinear systems and its applications [text] / Celikovsky S. // Kybernetika. – 1987. – V. 23, No. 3. – P. 198–213.
14. **Celikovsky S.** On the continuous dependence of trajectories of bilinear systems on controls and its applications [text] / Celikovsky S. // Kybernetika. – 1988. – V. 24, No. 4. – P. 278–292.
15. **Рудик А. П.** Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина [текст] / А. П. Рудик. – М.: Атомиздат, 1971. – 208 с.
16. **Aumann R. J.** Integrals of the set-valued functions [text] / Aumann R. J. // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – V. 12. – P. 1–12.
17. **Плотников А. В.** Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью : дис. на соискание уч. степ. докт. физ.-матем. наук. [текст] / А. В. Плотников. – Одесса, 1994. – 198 с.
18. **Aumann R. J.** Measurable utility and the measurable choise theorem [text] / Aumann R. J. // Proc. Internat. Colloq. La Decision, C.N.R.S. Aix-en-Provence. – 1967. – P. 15–26.
19. **Arstein Z.** Integration of compact set-valued functions [text] / Arstein Z., Burne J. A. // Pacific J. of math. – 1975. – 58, No. 2. – P. 296–307.
20. **Иосида К.** Функциональный анализ [текст] / К. Иосида. – М.: Наука, 1967. – 624 с.
21. **Люстерник Л. А.** Краткий курс функционального анализа [текст] / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.
22. **Половинкин Е. С.** Элементы теории многозначных отображений [текст] / Е. С. Половинкин. – М.: Изд-во МФТИ, 1982. – 127 с.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 35–56

УДК 517.956

Н. О. Бурдейна
Львівський національний університет імені Івана Франка

ГЛАДКА ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ І НЕРОЗДІЛЕНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Бурдейна Н. О. Гладка глобальна розв'язність гіперболічної задачі з рухомими межами і нерозділеними крайовими умовами. Методами характеристик та стискуючих відображень встановлено глобальну класичну розв'язність задачі з рухомими межами і нелінійними нелокальними крайовими умовами для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку.
Ключові слова: гіперболічна задача з рухомими межами, квазілінійні рівняння, класичний розв'язок, метод характеристик, теорема Банаха.

Бурдейная Н. А. Гладкая глобальная разрешимость гиперболической задачи с подвижными границами и неразделёнными граничными условиями. Методами характеристик и сжимающих отображений установлена классическая глобальная разрешимость задачи с движущимися границами и нелинейными нелокальными граничными условиями для гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка.
Ключевые слова: гиперболическая задача с подвижными границами, квазилинейные уравнения, классическое решение, метод характеристик, теорема Банаха.

Burdeina N. O. The smooth global solvability of the hyperbolic problem with moving boundaries and unseparated boundary conditions. Applying the method of characteristic and method of contractive mappings, the classical global solvability of movable boundary problem with nonlinear nonlocal boundary conditions for hyperbolic system of quasi-linear equations of the first order is established.
Key words: hyperbolic problem with moving boundaries, quasi-linear equations, classical solution, method of characteristic, Banach Theorem.

Вступ. Задачі з рухомими межами є об'єктом багатьох досліджень, оскільки моделюють проблеми газової динаміки, теорії мілкої води, механіки в'язкопружніх середовищ, магнітної гідродинаміки тощо [1-3].

У даній роботі встановлено локальну та глобальну класичні розв'язності задачі з рухомими межами для квазілінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з нелокальними (нерозділеними) крайовими умовами. Відмітимо, що гіперболічні задачі з нелокальними умовами мають також важливе прикладне значення [3].

Подібні задачі розглядались у роботах [5-7], проте в них встановлено лише достатні умови існування та єдиності узагальнених розв'язків.

При доведенні основних тверджень цієї праці використано методику із [8-9].

Основні результати.

1. Постановка задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a_1(t) < x < a_2(t),$ $a_k(0) = a_k^0,\ k \in \{1,2\},\ 0 < t < T\}$ розглянемо систему квазілінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u),\ i \in \{1,...,n\}, \tag{1}$$

$$u(x,t) = (u_1(x,t),...,u_n(x,t)),$$

для якої задані початкові умови

$$u(x,0) = g(x), \quad a_1^0 \le x \le a_2^0, \quad g(x) = (g_1(x),...,g_n(x)). \tag{2}$$

Нехай

$$I_k = \{i: \ sgn[\lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0)) - a_k'(0)] = (-1)^{k+1}\}, \quad r_k = cardI_k, \quad k \in \{1,2\}.$$

Тоді крайові умови задаємо у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\beta_{ij}^k(t)u_j(a_k(t),t) + \int\limits_0^t \gamma_i(t,\tau,u(a(\tau),\tau))d\tau = \mu_i(t), \tag{3}$$

$$u(a(t),t) = (u(a_1(t),t), u(a_2(t),t)),\ i \in \{1,...,r_1+r_2\},\ 0 \le t \le T.$$

Тут функції $\lambda_i, f_i : \mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : [a_1^0, a_2^0] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,...,n\}$, $a_k, \beta_{ij}^k, \mu_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\gamma_i : [0,T]^2 \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,...,r_1+r_2\}, j \in I_k, k \in \{1,2\}$ — задані.

Введемо клас функцій $\left(C_L^1(\overline{\Omega_T})\right)^n = \left\{u \in (\mathbb{C}^1(\overline{\Omega_T}))^n : u_x \in (Lip(\overline{\Omega_T}))^n\right\}$.

Означення 1. *Класичним розв'язком задачі (1)–(3) називатимемо функцію* $u(x,t) \in \left(\mathbb{C}_L^1(\overline{\Omega_{T_0}})\right)^n$, $T_0 \le T$, *що задовольняє систему рівнянь (1),початкові та крайові умови (2)-(3). Якщо* $T_0 < T$, *то такий розв'язок назвемо локальним, а при* $T_0 = T$ *розв'язок назвемо глобальним.*

2. Локальна розв'язність задачі. Введемо позначення

$$\mathcal{B}_R^n = \left\{u \in \mathbb{R}^n : |u_i| \le R, \ \ i \in \{1,...,n\},\right\}, \quad G = \max_{\substack{1\le i\le n,\\ x\in[a_1^0,a_2^0]}} |g_i(x)|,$$

$B(t) = (\beta_{ij}^k(t))$, $i \in \{1,...,r_1+r_2\}$, $j \in I_k$, $k \in \{1,2\}$ – квадратна матриця розміром $(r_1+r_2)\times(r_1+r_2)$. Для довільної неперервно диференційованої функції $w(x,y,v)$ позначатимемо $(w)_y(x,y,v) \stackrel{def}{=} \dfrac{\partial w(x,y,v)}{\partial y}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\left\{\lambda_i,\ f_i\right\} \subset \mathbb{C}^{1,0,1}(\Omega_T \times \mathcal{B}_{G+1}^n) \cap Lip(\Omega_T \times \mathcal{B}_{G+1}^n)$,

$\left\{(\lambda_i)_x, (\lambda_i)_u, (f_i)_x, (f_i)_u\right\} \subset Lip_{x,u}(\Omega_T \times \mathcal{B}_{G+1}^n), i \in \{1,...,n\}$;

2) $g_i \in \mathbb{C}^1([a_1^0, a_2^0]),\ g_i' \in Lip([a_1^0, a_2^0]), i \in \{1, ..., n\}$*;*
3) $a_k \in \mathbb{C}^1([0,T]),\ a_k' \in Lip([0,T]),\ k \in \{1,2\}$*;*
4) $detB(t) \neq 0, \quad t \in [0,T]$;
5) $\mu_i \in \mathbb{C}^1([0,T]),\ \mu_i' \in Lip([0,T]),\ i \in \{1, ..., r_1 + r_2\}$;
6) $\beta_{ij}^k \in \mathbb{C}^1([0,T]),\ (\beta_{ij}^k)' \in Lip([0,T]),\ i \in \{1, ..., r_1 + r_2\},\ j \in I_k,$
$k \in \{1,2\}$;
7) $\gamma_i \in \mathbb{C}^{1,0,0}\Big([0,T]^2 \times \mathcal{B}_{G+1}^{2n}\Big) \cap Lip\Big([0,T]^2 \times \mathcal{B}_{G+1}^{2n}\Big),$
$(\gamma_i)_t' \in Lip_{t,w}\Big([0,T]^2 \times \mathcal{B}_{G+1}^{2n}\Big),\ i \in \{1, ..., r_1 + r_2\}$;
8) $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{2} \beta_{ij}^k(0) g_j(a_k^0) = \mu_i(0), \quad i \in I_k,\ k \in \{1,2\},$
$\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{2} \Big((\beta_{ij}^k)'(0) g_j(a_k^0) + \beta_{ij}^k(0)[(a_k'(0) - \lambda_j(a_k^0, 0, g(a_k^0))) g_j'(a_k^0) +$
$+ f_j(a_k^0, 0, g(a_k^0))] + \gamma_i(0, 0, g(a^0)) = (\mu_i)'(0),\ i \in I_k,\ k \in \{1,2\}$
(умова погодження нульового та першого порядків);
9)$\lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0)) \neq a_k'(0), \quad i \in \{1, ..., n\}, \quad k \in \{1,2\}$.

Тоді для деякого $T_0 < T$ *існує єдиний класичний локальний розв'язок задачі (1)–(5), визначений на часовому проміжку* $[0, T_0]$.

Доведення. Позначимо через $\varphi_i(\tau; x, t, u),\ i \in \{1, ..., n\}$, розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau, u(\xi, \tau)), \qquad \xi(t) = x, \tag{4}$$

причому $\varphi_i(\tau; x, t, u)$ є функцією аргумента τ з параметрами x, t та функціональною залежністю від u. Введемо позначення $\varphi_i(\tau) \stackrel{def}{=} \varphi_i(\tau; x, t, u)$, а якщо потрібно підкреслити залежність від однієї або кількох змінних, то будемо записувати $\varphi_i^x(\tau), \varphi_i^t(\tau), \varphi_i^{x,t}(\tau), \varphi_i^u(\tau)$. Часову координату точки перетину функції φ_i з межею області Ω_T при русі в напрямі спадання τ позначимо через $\chi_i(x, t, u) = \max\{\tau :\ \tau \leq t,\ (\varphi_i(\tau), \tau) \in \partial\Omega_T\}$. Для $\chi_i(x, t; u)$ будемо використовувати схожі позначення $\chi_i,\ \chi_i^x,\ \chi_i^t,\ \chi_i^u$.

Проінтегрувавши рівності (1) вздовж її відповідних характеристик $\xi = \varphi_i(\tau)$, отримаємо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = u_i\Big(\varphi_i(\chi_i), \chi_i\Big) + \int\limits_{\chi_i}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau), \tau, u(\varphi_i(\tau), \tau)\Big) d\tau, \quad i \in \{1, ..., n\}. \tag{5}$$

Зауважимо, якщо функція u є розв'язком (1), то вона буде розв'язком системи (5). І навпаки, якщо $u \in (\mathbb{C}^1(\overline{\Omega_T}))^n$ розв'язок задачі (5),(2)–(3), то вона буде розв'язком (1). Крім того, якщо $u \in (\mathbb{C}^1(\overline{\Omega_T}))^n$ — розв'язок задачі (5), (2)–(3), причому виконується нерівність

$$\Big| \frac{d}{d\tau} \varphi_i(\tau; a_k(t), t, u) \Big|_{\tau = t} - a_k'(t) \Big| \geq \frac{\gamma}{2}, \quad \gamma = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ k \in \{1,2\}}} |\lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0)) - a_k'(0)|, \tag{6}$$

то u буде також розв'язком системи

$$u_i(x,t) = \vartheta_i(x,t,u) + \int\limits_{\chi_i}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad i \in \{1,...,n\}, \tag{7}$$

для якої

$$\vartheta_i(x,t,u) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0)), \quad \text{якщо } \chi_i = 0 , \\ M_{ik}(\chi_i) + \sum\limits_{p=1}^{2} \sum\limits_{j \notin I_p} B_{ij}^{kp}(\chi_i) u_j(a_p(\chi_i),\chi_i) + \\ + \int\limits_{0}^{\chi_i} \Gamma_{ik}(\chi_i,\tau,u(a(\tau),\tau))d\tau, \\ \text{якщо } \chi_i > 0, \ \varphi_i(\chi_i) = a_k(\chi_i), \quad i \in I_k, \ k \in \{1,2\}, \end{cases}$$

$$M_{ik}(t) = \frac{1}{detB(t)} \sum_{j=1}^{r_1+r_2} \beta_{ij}^{k}(t)\mu_i(t),$$

$$B_{ij}^{kp}(t) = \frac{1}{detB(t)} \sum_{j=1}^{r_1+r_2} \beta_{ij}^{k}(t) \sum_{s \notin I_p} \beta_{is}^{p}(t) u_s(a_p(t),t), \ j \notin I_p, \ p \in \{1,2\},$$

$$\Gamma_{ik}(t,\tau,u(a(\tau),\tau)) = \frac{1}{detB(t)} \sum_{j=1}^{r_1+r_2} \beta_{ij}^{k}(t)\gamma_i(t,\tau,u(a(\tau),\tau)), \ i \in I_k, \ k \in \{1,2\}.$$

Очевидно, якщо u — розв'язок (7) і виконується (6), тоді u — розв'язок (5), (2)–(3). Тобто функція $u \in (\mathbb{C}^1(\overline{\Omega_T}))^n$, яка задовольняє систему (7), буде класичним розв'язком задачі (1)–(3).

Нехай λ_0 — стала Ліпшиця для функцій $\lambda_i(x,t,u), (\lambda_i)_x(x,t,u)$, $(\lambda_i)_u(x,t,u)$, $i \in \{1,...,n\}$ на множині $\Omega_T \times \mathcal{B}_{G+1}^n$; f_0 — для $f_i(x,t,u)$, $(f_i)_x(x,t,u), (f_i)_u(x,t,u), i \in \{1,...,n\}$ на $\Omega_T \times \mathcal{B}_{G+1}^n$; μ_0 — для $M_{ik}(t)$, $(M_{ik})'(t)$, $i \in I_k$, $k \in \{1,2\}$ на $[0,T]$; β_0 — для $B_{ij}^{kp}(t)$, $(B_{ij}^{kp})'(t)$, $j \notin I_p$, $p \in \{1,2\}$, $i \in I_k$, $k \in \{1,2\}$ на $[0,T]$; γ_0 — для $\Gamma_{ik}(t,\tau,w)$, $(\Gamma_{ik})_t'(t,\tau,w)$, $i \in I_k$, $k \in \{1,2\}$ на $[0,T] \times [0,T] \times \mathcal{B}_{G+1}^{2n}$; g_0 — для $g_i(x), g_i'(x), i \in \{1,...,n\}$ на $[a_1^0,a_2^0]$, а також

$$\Lambda = \max_{\substack{1 \le i \le n \\ (x,t,u) \in \Omega_T \times \mathcal{B}_{G+1}^n}} \Big\{ |\lambda_i(x,t,u)|, |(\lambda_i)_x(x,t,u)|, |(\lambda_i)_u(x,t,u)| \Big\};$$

$$F = \max_{\substack{1 \le i \le n \\ (x,t,u) \in \Omega_T \times \mathcal{B}_{G+1}^n}} \Big\{ |f_i(x,t,u)|, |(f_i)_x'(x,t,u)|, |(f_i)_u'(x,t,u)| \Big\};$$

$$G_1 = \max_{\substack{1 \le i \le n \\ x \in [a_1^0,a_2^0]}} |g_i'(x)|, \ M = \max_{\substack{i \in I_k, k \in \{1,2\}, \\ t \in [0,T]}} \Big\{ |M_{ik}(t)|, |(M_{ik})'(t)| \Big\};$$

$$A = \max_{\substack{k \in \{1,2\}, \\ t \in [0,T]}} \{|a_k(t)|, |(a_k'(t)|\}, \ B = \max_{\substack{j \notin I_p, p \in \{1,2\}, \\ i \in I_k, k \in \{1,2\}, t \in [0,T]}} \Big\{ |B_{ij}^{kp}(t)|, |(B_{ij}^{kp})'(t)| \Big\};$$

$$\Gamma = \max_{\substack{i\in I_k, k\in\{1,2\}, t\in[0,T] \\ 0\le\tau\le t, w\in\mathcal{B}^{2n}_{G+1}}} \Big\{|\Gamma_{ik}(t,\tau,w)|, |(\Gamma_{ik})'_t(t,\tau,w)|\Big\}.$$

Визначимо функції

$$\bar{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(a_1^0), & \text{якщо } x < a_1^0, \\ g_i(x), & \text{якщо } a_1^0 \le x \le a_2^0, \\ g_i(a_2^0), & \text{якщо } x > a_2^0, \end{cases} \quad i \in \{1,...,n\}.$$

Введемо метричний простір $Q = Q(T_0, U, U_1, L, L_1)$, що складається з функцій $u = (u_1, ..., u_n)$, $u_i \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega_{T_0}})$, які задовольняють умову (2) і такі обмеження:

H1. $|u_i(x,t) - \bar{g}_i(x)| \le U, \quad i \in \{1,...,n\}, \quad (x,t) \in \Omega_{T_0}$, де $U \le \dfrac{1}{2}$;
H2. $u_i \in Lip(\Omega_{T_0}, L), \quad i \in \{1,...,n\}$;
H3. $|(u_i)_x(x,t)| \le U_1, \quad i \in \{1,...,n\}, \quad (x,t) \in \Omega_{T_0}$;
H4. $(u_i)_x \in Lip_x(\Omega_{T_0}, L_1), \quad i \in \{1,...,n\}$.
Метрику на елементах $\{u^1, u^2\} \subset Q$ введемо як

$$\rho(u^1,u^2) = \max_{\substack{1\le i\le n \\ (x,t)\in\Omega_T}} \{|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|, |(u_i^1)_x(x,t) - (u_i^2)_x(x,t)|\}.$$

У просторі Q визначимо оператор $S(u) = (S_1(u), ..., S_n(u))$:

$$(S_i(u))(x,t) = \theta_i(x,t,u) + \int\limits_{\chi_i}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau), \tau, u(\varphi_i(\tau),\tau)\Big) d\tau, \quad i \in \{1,...,n\},$$

де

$$\theta_i(x,t,u) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0)), \quad \text{якщо } \chi_i = 0 \ , \\ M_{ik}(\chi_i) + \sum\limits_{p=1}^{2} \sum\limits_{j\notin I_p} B_{ij}^{kp}(\chi_i)(S_j(u))(a_p(\chi_i),\chi_i) + \\ + \int\limits_0^{\chi_i} \Gamma_{ik}(\chi_i, \tau, (S(u))(a(\tau),\tau)) d\tau, \\ \text{якщо } \chi_i > 0, \ \ \varphi_i(\chi_i) = a(\chi_i), \quad i \in I_k, \ k \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Надалі, позначимо $S^u := S(u)$.
Для коректності визначення оператора вимагаємо, щоб

$$\Big|\frac{d}{d\tau}\varphi_i(\tau; a_k(t), t, u)\big|_{\tau=t} - a_k'(t)\Big| \ge \frac{\gamma}{2}, \quad i \in \{1,...,n\}, \ k \in \{1,2\}, \ t \in [0,T_0], \tag{8}$$

$$\chi_i(a_k(t),t) = 0, \quad k \in \{1,2\}, \quad i \notin I_k. \tag{9}$$

Ці умови одержуємо з

$$\Big|\frac{d}{d\tau}\varphi_i(\tau; a_k(t), t, u)\big|_{\tau=t} - a_k'(t)\Big| = |\lambda_i(a_k(t), t, u(a_k(t),t)) - a_k'(t)| \ge$$

$$\ge |\lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0)) - a_k'(0)| - |\lambda_i(a_k(t), t, u(a_k(t),t)) - \lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0))| -$$

$$-|a_k'(0) - a_k'(t)| \ge \gamma - \lambda_0(AT_0 + T_0 + n(U + g_0 AT_0),$$

якщо

$$\lambda_0(A+1+ng_0A)T_0 \le \gamma/4, \tag{10}$$

$$n\lambda_0 U \le \gamma/4. \tag{11}$$

Зауважимо, що для виконання рівності (9), достатньо вимагати, щоб

$$T_0 \le \frac{a_2^0 - a_1^0}{2A+\Lambda}. \tag{12}$$

Відповідно до вимог теореми Банаха про стискуючі відображення, потрібно показати, що існує набір параметрів (T_0, U, U_1, L, L_1), при яких оператор S відображає повний метричний простір (Q,ρ) в себе, є стискуючим і виконуються умови (8)–(9).

Встановимо обмеження на параметри простору, при яких S^u задовольняє умову **H1.** Для цього розглянемо спочатку випадок $\chi_i = 0$. Тоді

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \le |g_i(\varphi_i(0)) - \bar{g}_i(x)| + \int\limits_0^t |f_i(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau))|d\tau \le (g_0\Lambda + F)T_0.$$

У випадку $\chi_i > 0$, використавши лему 1 [9] і припущення

$$\lambda_0(1+nL)T_0 \le 1, \tag{13}$$

попередньо встановимо допоміжну оцінку

$$|S_i^u(a_k(t),t) - g_i(a_k^0)| = |g_i(\varphi_i^{a_k(t),t}(0)) - g_i(a_k^0)| +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i}^t |f_i(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau))|d\tau \le (g_0(A+\Lambda)+F)T_0.$$

Враховуючи умови погодження нульового порядку, одержимо

$$\begin{aligned} &|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \le |g_i(a_k^0) - \bar{g}_i(x)| + |M_{ik}(\chi_i) - M_{ik}(0)| + \\ &+ \sum_{p=1}^{2} \sum_{j \notin I_p} \Big(|B_{ij}^{kp}(\chi_i) - B_{ij}^{kp}(0)| S_j^u(a_p(\chi_i),\chi_i) + B_{ij}^{kp}(0)|S_j^u(a_p(\chi_i),\chi_i) - \\ &- g_j(a_p^0)| \Big) + \int_0^{\chi_i} |\Gamma_{ik}(\chi_i,\tau,S^u(a(\tau),\tau))|d\tau + \int_{\chi_i}^t |f_i(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau))|d\tau \le \\ &\le \Big(g_0(A+\Lambda) + \mu_0 + 2n(\beta_0(G+1) + B(g_0(A+\Lambda)+F)) + F + \Gamma \Big) T_0. \end{aligned}$$

Тому, якщо

$$\Big(g_0(A+\Lambda) + \mu_0 + 2n(\beta_0(G+1) + B(g_0(A+\Lambda)+F)) + F + \Gamma \Big) T_0 \le U, \tag{14}$$

то

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \le U, \quad (x,t) \in \Omega_{T_0}.$$

Перейдемо до перевірки умов, за яких S^u задовольняє обеження **H2**.

Розглянемо випадок $\chi_i = 0$ і, враховуючи лему 1 [9], припущення (13) та

$$T_0(f_0(1+nL)\max\{1, A+\Lambda\}e) \le 1, \tag{15}$$

$$\max\{\gamma_0, \Gamma\}T_0 \le 1, \tag{16}$$

одержуємо

$$|\Delta_j S_i^u(x_j, t)| \le (g_0 + T_0 f_0(1+nL))e|\Delta x_j| \le (g_0 e + 1)|\Delta x_j|.$$

Припустимо, що T_0 достатньо мале, щоб задовольнити нерівність (15), та, врахувавши оцінку

$$|\Delta_j \varphi_i^{a_k(t_j), t_j}(\tau)| \le (A+\Lambda)e|\Delta t_j|, \tag{17}$$

отримуємо

$$|\Delta_j S_i^u(a_k(t_j), t_j)| \le ((g_0 + T_0 f_0(1+nL))(A+\Lambda)e + F)|\Delta t_j| \le k_1|\Delta t_j|.$$

Зауважимо, що тут і надалі, через сталі $k_i, i \in \mathbb{N}$ будемо позначати певну комбінацію сталих, які залежать від вихідних даних та не залежать від T_0.

Нехай $\chi_i > 0$. Згідно з попередніми оцінками та лемою 2 [9], одержуємо

$$|\Delta_j S_i^u(x_j, t)| \le (\mu_0 + 2n(\beta_0(G+1) + Bk_1) + \Gamma + 1 + T_0 f_0(1+nL)e + F)\frac{4}{\gamma}e|\Delta x_j|.$$

Отже, в будь-якому випадку справедлива оцінка $|\Delta_j S_i^u(x_j, t)| \le k_2|\Delta x_j|$.

Оскільки $|\Delta_j S_i^u(x, t_j)| \le (F + \Lambda k_2)|\Delta t_j|$, то $S_i^u \in Lip(\Omega_{T_0}, L)$, якщо

$$F + \max\{1, \Lambda\}k_2 \le L. \tag{18}$$

Введемо позначення $[\varphi_i]_x(\tau) \stackrel{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_i(\tau; x, t, u) = (\varphi_i)_x(\tau) + \sum\limits_j (\varphi_i)_{u_j}(u_j)_x$ та аналогічні для $[\varphi_i]_t(\tau)$.

Тепер перейдемо до перевірки умови **H3**. Зауважимо, що

$$(S_i^u)_x(x,t) = [\theta_i]_x(x,t,u) + Y_i(x,t,u) + Z_i(x,t,u),$$

де

$$[\theta_i]_x(x,t,u) = \begin{cases} g_i'(\varphi_i(0))[\varphi_i]_x(0), \quad \text{якщо } \chi_i = 0\ ; \\ \Big[M_{ik}'(\chi_i) + \sum\limits_{p=1}^{2}\sum\limits_{j\notin I_p}\Big((B_{ij}^{kp})'(\chi_i)S_i^u(a_p(\chi_i),\chi_i) + \\ + B_{ij}^{kp}(\chi_i)[(S_j^u)_x(a_p(\chi_i),\chi_i)a_p'(\chi_i) + (S_j^u)_t(a_p(\chi_i),\chi_i)]\Big) + \\ + \Gamma_{ik}(\chi_i,\chi_i,S^u(a_p(\chi_i),\chi_i)) + \int\limits_0^{\chi_i}(\Gamma_{ik})_t(\chi_i,\tau,S^u(a(\tau),\tau))d\tau\Big][\chi_i]_x, \\ \text{якщо } \chi_i > 0,\ \varphi_i(\chi_i) = a_k(\chi_i),\ i \in I_k,\ k \in \{1,2\}, \end{cases}$$

$$Y_i(x,t,u) = \begin{cases} 0, \qquad \text{якщо } \chi_i = 0\ ; \\ -f_i(a_k(\chi_i),\chi_i,u(a_k(\chi_i),\chi_i))[\chi_i]_x, \\ \text{якщо } \chi_i > 0,\ \ \varphi_i(\chi_i) = a_k(\chi_i),\ \ i \in I_k,\ \ k \in \{1,2\}, \end{cases}$$

$$Z_i(x,t,u) = \int\limits_{\chi_i}^{t} \Big((f_i)_x(\varphi_i(\tau), \tau, u(\varphi_i(\tau),\tau)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (f_i)_u(\varphi_i(\tau), \tau, u(\varphi_i(\tau),\tau))(u_j)_x(\varphi_i(\tau),\tau)\Big) [\varphi_i]_x(\tau) d\tau.$$

Крім того, якщо $\chi_i = 0$, то

$$(S_i^u)_t(x,t) = g_i'(\varphi_i(0))[\varphi_i]_t(0) + f_i(x,t,u(x,t)) + \int\limits_{0}^{t} \Big((f_i)_x(\varphi_i(\tau), \tau, u(\varphi_i(\tau),\tau)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (f_i)_u(\varphi_i(\tau), \tau, u(\varphi_i(\tau),\tau))(u_j)_x(\varphi_i(\tau),\tau)\Big) [\varphi_i]_t(\tau) d\tau.$$

Зазначимо, що справедливі рівності

$$[\varphi_i]_x(\tau) = \exp\Big(-\int\limits_{\tau}^{t} \Big((\lambda_i)_x(\varphi_i(\theta), \theta, u(\varphi_i(\theta),\theta)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\lambda_i)_u(\varphi_i(\theta), \theta, u(\varphi_i(\theta),\theta))(u_j)_x(\varphi_i(\theta),\theta)\Big) d\theta\Big),$$

$$[\chi_i]_x = [\varphi_i]_x(\chi_i)\Big(a_k(\chi_i) - \lambda_i(a_k(\chi_i), \chi_i, u(a_k(\chi_i),\chi_i))\Big)^{-1},$$

$$[\varphi_i]_t(\tau) = -\lambda_i(x,t,u(x,t)) \exp\Big(-\int\limits_{\tau}^{t} \Big((\lambda_i)_x(\varphi_i(\theta), \theta, u(\varphi_i(\theta),\theta)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\lambda_i)_u(\varphi_i(\theta), \theta, u(\varphi_i(\theta),\theta))(u_j)_x(\varphi_i(\theta),\theta)\Big) d\theta\Big).$$

Нехай $\chi_i = 0$ і виконуються нерівності

$$\Lambda(1 + nU_1)T_0 \le 1, \tag{19}$$

$$T_0 F(1 + nU_1)\max\{1, \Lambda\} e \le 1. \tag{20}$$

Тоді одержуємо оцінки

$$|(S_i^u)_x(x,t)| \le G_1 e + T_0 F(1 + nU_1) e \le G_1 e + 1,$$

$$|(S_i^u)_t(x,t)| \le G_1\Lambda e + F + T_0F(1+nU_1)\Lambda e \le G_1\Lambda e + F + 1.$$

При $\chi_i > 0$

$$|(S_i^u)_x(x,t)| \le \Big(M + 2nB(G + G_1e(A+\Lambda) + A + F + 2) + \Gamma + 1\Big)e\frac{2}{\gamma} + Fe\frac{2}{\gamma} + 1.$$

Таким чином, ми можемо забезпечити виконання нерівності

$$|(S_i^u)_x(x,t)| \le U_1, \quad (x,t) \in \Omega_{T_0},$$

якщо

$$\max\Big\{(M + 2nB(G + G_1e(A+\Lambda) + A + F + 2) + \Gamma + 1 + F)\frac{2}{\gamma}, G_1\Big\}e + 1 \le U_1. \quad (21)$$

Розглянемо умову **H4**, тобто переконаємося, що $(S_i^u)_x \in Lip_x(\Omega_{T_0}, L_1)$, $i \in \in \{1, ..., n\}$.

Перш за все, зауважимо, що згідно з лемами 3–5 [9], а також припускаючи виконання нерівності

$$T_0\Big(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1) + n\Lambda L_1\Big)e^2 \le 1, \quad (22)$$

справедливі оцінки:

$$|\Delta_j[\varphi_i^{x_j}]_x(\tau)\Big| \le |\Delta x_j|;\ |\Delta_j[\varphi_i]_x(\tau_j)| \le \Lambda(1+nU_1)e|\Delta\tau_j|;\ |\Delta_j[\chi_i^{x_j}]_x| \le k_3|\Delta x_j|.$$

Нехай $\chi_i^{x_j} = 0,\ j \in \{1,2\}$. Розглянемо

$$|\Delta_j(S_i^u)_x(x_j,t)| \le |\Delta_j g_i'(\varphi_i^{x_j}(0))||[\varphi_i^{x_1}]_x(0)| + |\Delta_j[\varphi_i^{x_j}]_x(0)||g_i'(\varphi_i^{x_2}(0))| +$$
$$+ \int_0^t \Big[(|\Delta_j(f_i)_x(\varphi_i^{x_j}(\tau), \tau, u(\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau))| +$$
$$+ \sum_{m=1}^n [|\Delta_j(f_i)_u(\varphi_i^{x_j}(\tau,\tau,u(\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau))||(u_m)_x(\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau)| +$$
$$+|(f_i)_u(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,u(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau))||\Delta_j(u_m)_x(\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau)|])[\varphi_i^{x_1}]_x(\tau) +$$
$$+\Big(|(f_i)_x(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,u(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau))| +$$
$$+ \sum_{m=1}^n |(f_i)_u(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,u(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau))||(u_m)_x(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau)|\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{x_j}]_x(\tau)|\Big]d\tau \le$$
$$\le \Big(G_1 + g_0e^2 + T_0(f_0(1+L)(1+nU_1) + nFL_1)e^2 + T_0F(1+nU_1)\Big)|\Delta x_j|.$$

Якщо

$$T_0\Big[(f_0(1+nL)(1+nU_1) + nFL_1)e^2 + F(1+nU_1)\Big] \le 1, \quad (23)$$

то

$$|\Delta_j (S_i^u)_x (x_j, t)| \le (G_1 + g_0 e^2 + 1)|\Delta x_j|.$$

Для випадку $\chi_i^{x_j} > 0,\ j \in \{1, 2\}$ також наведемо деякі попередні оцінки, а саме, враховуючи леми 6–7 [9] і припущення

$$T_0 e^2 (A + \Lambda)(\lambda_0 (1 + nU_1)(1 + nL) + n\Lambda L_1) \le 1, \tag{24}$$

одержуємо

$$|\Delta_j [\varphi_i^{a_k(t_j), t_j}]_x (\tau)| \le k_4 |\Delta t_j|, \quad |\Delta_j [\varphi_i^{a_k(t_j), t_j}]_t (\tau)| \le k_5 |\Delta t_j|.$$

З цих оцінок випливає, що

$$|\Delta_j (S_i^u)_x (a_k(t_j), t_j)| \le \Big[g_0 (A + \Lambda) e^2 + G_1 k_4 + F(1 + nU_1) e + T_0 (f_0 (1 + nL) \times$$

$$\times (1 + nU_1) + nFL_1) e^2 (A + \Lambda) + T_0 F (1 + nU_1) k_4 \Big] |\Delta t_j|.$$

Якщо ж

$$T_0 \Big((f_0 (1 + nL)(1 + nU_1) + nFL_1) e^2 (A + \Lambda) + F(1 + nU_1) k_4 \Big) \le 1, \tag{25}$$

то

$$|\Delta_j (S_i^u)_x (a_k(t_j), t_j)| \le k_6 |\Delta t_j|.$$

Перейдемо до оцінки наступної різниці

$$|\Delta_j (S_i^u)_t (a_k(t_j), t_j)| \le \Big[g_0 (A + \Lambda) e^2 \Lambda + G_1 k_4 + f_0 (1 + nL)(A + 1) + \Lambda e F (1 + nU_1) +$$

$$+ T_0 (f_0 (1 + nL)(A + \Lambda) e (1 + nU_1) + nFL_1 (A + \Lambda) e) e \Lambda + T_0 F (1 + nU_1) k_5 \Big] |\Delta t_j|.$$

Зазначимо, якщо має місце нерівність

$$T_0 \Big((f_0 (1 + nL)(1 + nU_1) + nFL_1)(A + \Lambda) e^2 \Lambda + F(1 + nU_1) k_5 \Big) \le 1, \tag{26}$$

то

$$|\Delta_j (S_i^u)_t (a_k(t_j), t_j)| \le k_7 |\Delta t_j|.$$

Легко бачити, що справедлива нерівність

$$|(S_i^u)_x (a_k(t), t) a_k'(t) + (S_i^u)_t (a_k(t), t)| \le k_8.$$

Повернемось до перевірки умови **H4** при $\chi_i^{x_j} > 0,\ j \in \{1, 2\}$. Для визначеності візьмемо $x_1 < x_2$, тоді $\chi_i^{x_1} > \chi_i^{x_2}$. Розглядаючи наступну різницю, згрупуємо доданки і врахуємо обмеженість та ліпшицевість вихідних даних, тоді

$$|\Delta_j (S_i^u)_x (x_j, t)| \le \Big(\frac{8}{\gamma^2} e^2 \Big[\mu_0 + 2n (\beta_0 (G + k_8 + 1) + B (L (A + 1) +$$

$$+A(k_6+G_1e+1)+k_7))+\gamma_0(2+nL(A+1))+\Gamma+1\Big]+(M+2nB(G+1+k_8)+\Gamma+1)k_3+$$

$$+f_0(1+A)(1+nL)\frac{8}{\gamma^2}e^2+Fk_3+F(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^2+1\Big)|\Delta x_j|.$$

Отже, $(S_i^u)_x \in Lip_x(\Omega_{T_0}, L_1), i \in \{1,...,n\}$, якщо

$$\begin{gathered}\frac{8}{\gamma^2}e^2\Big[\mu_0+2n(\beta_0(G+k_8+1)+B(L(A+1)+A(k_6+G_1e+1)+k_7))+\\ +\gamma_0(2+nL(A+1))+\Gamma+1\Big]+(M+2nB(G+1+k_8)+\Gamma+1)k_3+\\ +f_0(1+A)(1+nL)\frac{8}{\gamma^2}e^2+Fk_3+F(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^2+1 \le L_1.\end{gathered} \tag{27}$$

Тепер дослідимо стискуючі властивості оператора S в просторі Q.

Враховуючи попередні припущення та леми 8–11 [9], а також умову

$$L_1\lambda_0T_0e \le 1, \tag{28}$$

одержуємо

$$|\Delta_j\varphi_i^{u^j}(\tau)| \le \lambda_0enT_0\rho, \quad |\Delta_j\chi_i^{u^j}| \le \frac{4}{\gamma}en\lambda_0T_0\rho, \quad |\Delta_j[\varphi_i^{u^j}]_x(\tau)| \le k_9T_0\rho.$$

Введемо іншу метрику

$$\rho_0(u,v)=\max_{\substack{(x,t)\in\Omega_{T_0}\\ 1\le i\le n}}|u_i(x,t)-v_i(x,t)|$$

і позначимо $\rho_0=\rho_0(u^1,u^2)$. Тоді згідно з лемами 12–13 [9] отримаємо оцінки

$$|\Delta_j[\varphi_i^{u^j}]_t(\tau)| \le \Lambda k_9T_0\rho+\lambda_0en\rho_0, \quad |\Delta_j(\chi_i^{u^j})_x| \le k_{10}T_0\rho+\frac{4}{\gamma^2}en\lambda_0\rho_0.$$

Перейдемо до оцінки різниці $|\Delta_jS_i^{u^j}(x,t)|$. Нехай $(x,t)\in\Omega_{T_0}, u^j\in Q, j\in$ $\in\{1,2\}$. Розглянемо різні випадки поведінки характеристик, припустивши виконання нерівності

$$2(A+\Lambda)T_0 \le a_2^0-a_1^0. \tag{29}$$

Нехай $\chi_i^{u^j}=0,\ j\in\{1,2\}$. Тоді

$$|\Delta_jS_i^{u^j}(x,t)| \le |\Delta_jg_i(\varphi_i^{u^j}(0))|+\int\limits_0^t|\Delta_jf_i(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|d\tau \le k_{11}T_0\rho.$$

Якщо ж $\chi_i^{u^j}>0$, $\varphi_i^{u^j}(\chi_i^{u^j})=a_1^j(\chi_i^{u^j})$, $j\in\{1,2\}$ і для визначеності $\chi_i^{u^1}<$ $<\chi_i^{u^2}$, то обидві характеристики перетинають ліву бічну межу відповідної області. Одержуємо оцінку

$$|\Delta_jS_i^{u^j}(x,t)| \le |\Delta_jM_{ik}(\chi_i^{u^j})|+\sum_{p=1}^{2}\sum_{j\notin I_p}\Big(|\Delta_mB_{ij}^{kp}(\chi_i^{u^m})|S_i^{u^1}(a_p(\chi_i^{u^1}),\chi_i^{u^1})+$$

$$+B_{ij}^{kp}(\chi_i^{u^2})|\Delta_m S_i^{u^m}(a_p(\chi_i^{u^m}),\chi_i^{u^m})| + \int\limits_0^{\chi_i^{u^1}} |\Delta_j \Gamma_{ik}(\chi_i^{u^j},\tau,S^{u^j}(a(\tau),\tau))|d\tau +$$

$$+\int\limits_{\chi_i^{u^1}}^{\chi_i^{u^2}} (\Gamma_{ik})_t(\chi_i^{u^2},\tau,S^{u^2}(a(\tau),\tau))d\tau + \int\limits_{\chi_i^{u^2}}^{t} |\Delta_j f_i(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|d\tau +$$

$$+\int\limits_{\chi_i^{u^1}}^{\chi_i^{u^2}} |f_i(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau,u^1(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau))|d\tau \le \Big[\frac{4}{\gamma}e\lambda_0 n\Big(\mu_0 + 2n(\beta_(G+1)+$$

$$+BL(A+1)) + 1 + \Gamma + F\Big) + k_{11}(2nB+1) + f_0 n(e+1)\Big]T_0\rho.$$

Нехай $\chi_i^{u^1} > 0$, $\chi_i^{u^2} = 0$, $\varphi_i^{u^1}(\chi_i^{u^1}) = a_1^1(\chi_i^{u^1})$. Даний випадок зводиться до двох попередніх. Для обгрунтування цього визначимо наступну функцію

$$u^\alpha(x,t) = \alpha u^1(x,t) + (1-\alpha)u^2(x,t), \qquad \alpha \in [0,1].$$

Легко бачити, якщо $\{u^1,u^2\} \in Q$, то $u^\alpha(x,t) \in Q$ для всіх α.

Розглянемо характеристику $x = \varphi(\tau;x,t,\alpha u^1+(1-\alpha)u^2) = \varphi^\alpha(\tau)$. Зауважимо, що $\varphi^\alpha(\tau)$ неперервна за параметром α. Тоді існує таке α_0, $\varphi^{\alpha_0}(0) = a_1^0$. Позначимо $u^3 = u^{\alpha_0}$.

Розглянемо різницю

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \le |S_i^{u^1}(x,t) - S_i^{u^3}(x,t)| + |S_i^{u^3}(x,t) - S_i^{u^2}(x,t)| \le$$

$$\le \Big[\frac{4}{\gamma}e\lambda_0 n\Big(\mu_0 + 2n(\beta_0(G+1)+BL(A+1))+1+\Gamma+F\Big)+k_{11}(2nB+1)+f_0 n(e+1)\Big]\times$$

$$\times \max_{\substack{1\le i\le n\\(x,t)\in\Omega_T}} |u_i^1 - u_i^3| + k_{11}T_0 \max_{\substack{1\le i\le n\\(x,t)\in\Omega_T}} |u_i^3 - u_i^2| \le \Big[\frac{4}{\gamma}e\lambda_0 n\Big(\mu_0 + 2n(\beta_0(G+1)+$$

$$+BL(A+1)) + 1 + \Gamma + F\Big) + 2k_{11}(nB+1) + f_0 n(e+1)\Big]T_0\times$$

$$\times \max_{\substack{1\le i\le n\\(x,t)\in\Omega_T}} |u_i^1 - u_i^2| \le k_{12}T_0\rho.$$

Отже, в будь-якому з цих випадків справедлива оцінка

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \le k_{12}T_0\rho.$$

Тому

$$\rho_0(S^{u^1},S^{u^2}) \le k_{12}T_0\rho = K_1T_0\rho.$$

Тепер оцінимо $|\Delta_j(S_i^{u^j})_x|$ при наведених випадках поведінки характеристик.

Нехай маємо $\chi_i^{u^j}=0,\ j\in\{1,2\}$. Тоді

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})_x(x,t)|\le|\Delta_j g_i'(\varphi_i^{u^j}(0))|[\varphi_i^{u^1}]_x(0)+g_i'(\varphi_i^{u^2}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{u^j}]_x(0)|+$$

$$+\int\limits_0^t\Big(|\Delta_j(f_i)_x(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|+$$

$$+\sum_{m=1}^n|\Delta_j(f_i)_u(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|(u_m^1)_x(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau)+$$

$$+\sum_{m=1}^n(f_i)_u(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))|\Delta_j(u_m^j)_x(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{u^1}]_x(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\Big((f_i)_x(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))|+$$

$$+\sum_{m=1}^n(f_i)_u(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))(u_m^2)_x(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{u^j}]_x(\tau)|d\tau\le$$

$$\le k_{13}T_0\rho.$$

Випишемо ще одну оцінку для цього випадку, яка знадобиться надалі

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})_t(x,t)|\le|\Delta_j g_i'(\varphi_i^{u^j}(0))|[\varphi_i^{u^1}]_t(0)+g_i'(\varphi_i^{u^2}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{u^j}]_t(0)|+$$

$$+|\Delta_j f_i(x,t,u^j(x,t))|+\int\limits_0^t\Big(|\Delta_j(f_i)_x(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|+$$

$$+\sum_{m=1}^n|\Delta_j(f_i)_u(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|(u_m^1)_x(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau)+$$

$$+\sum_{m=1}^n(f_i)_u(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))|\Delta_j(u_m^j)_x(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{u^1}]_t(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\Big((f_i)_x(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))|+$$

$$+\sum_{m=1}^n(f_i)_u(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))(u_m^2)_x(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{u^j}]_t(\tau)|d\tau\le$$

$$\le k_{14}T_0\rho+k_{15}\rho_0.$$

У випадку $\chi_i^{u^j}>0,\ j\in\{1,2\}$, для визначеності $\varphi_i^{u^j}(\chi_i^{u^j})=a_1^j(\chi_i^{u^j}), j\in\{1,2\}$, одержуємо

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})_x(x,t)|\le\Big[|\Delta_j M_{ik}'(\chi_i^{u^j})|+\sum_{p=1}^2\sum_{j\notin I_p}\Big(|\Delta_m(B_{ij}^{kp})'(\chi_i^{u^m})|S_i^{u^1}(a_p(\chi_i^{u^1}),\chi_i^{u^1})+$$

$$+(B_{ij}^{kp})'(\chi_i^{u^2})|\Delta_m S_i^{u^m}(a_p(\chi_i^{u^m}),\chi_i^{u^m})|+|\Delta_m B_{ij}^{kp}(\chi_i^{u^m})|[(S_j^{u^1})_x(a_p(\chi_i^{u^1}),\chi_i^{u^1})a_p'(\chi_i^{u^1})+$$

$$+(S_j^{u^m})_t(a_p(\chi_i^{u^1}),\chi_i^{u^1})]+B_{ij}^{kp}(\chi_i^{u^2})[|\Delta_m(S_j^{u^m})_x(a_p(\chi_i^{u^m}),\chi_i^{u^m})a_p'(\chi_i^{u^m})+$$

$$+(S_j^{u^m})_t(a_p(\chi_i^{u^m}),\chi_i^{u^m})|]\Big)+|\Delta_j\Gamma_{ik}(\chi_i^{u^j},\chi_i^{u^j},S^{u^j}(a_p(\chi_i^{u^m}),\chi_i^{u^m}))|+$$

$$+\int\limits_0^{\chi_i^{u^2}}|\Delta_j(\Gamma_{ik})_t(\chi_i^{u^j},\tau,S^{u^j}(a(\tau),\tau))|d\tau+\int\limits_{\chi_i^{u^2}}^{\chi_i^{u^1}}(\Gamma_{ik})_t(\chi_i^{u^1},\tau,S^{u^1}(a(\tau),\tau))d\tau\Big][\chi_i^{u^1}]_x+$$

$$+\Big[M_{ik}'(\chi_i^{u^2})+\sum_{p=1}^{2}\sum_{j\notin I_p}\Big((B_{ij}^{kp})'(\chi_i^{u^2})S_i^{u^2}(a_p(\chi_i^{u^2}),\chi_i^{u^2})+$$

$$+B_{ij}^{kp}(\chi_i^{u^2})[(S_j^{u^2})_x(a_p(\chi_i^{u^2}),\chi_i^{u^2})a_p'(\chi_i^{u^2})+(S_j^{u^2})_t(a_p(\chi_i^{u^2}),\chi_i^{u^2})]\Big)+$$

$$+\Gamma_{ik}(\chi_i^{u^2},\chi_i^{u^2},S^{u^2}(a_p(\chi_i^{u^2}),\chi_i^{u^2}))+\int\limits_0^{\chi_i^{u^2}}(\Gamma_{ik})_t(\chi_i^{u^2},\tau,S^{u^2}(a(\tau),\tau))d\tau\Big]|\Delta_j[\chi_i^{u^j}]_x|+$$

$$+|\Delta_j f_i(a_k(\chi_i^{u^j}),\chi_i^{u^j},u^j(a_k(\chi_i^{u^j}),\chi_i^{u^j}))|(\chi_i^{u^1})_x+$$

$$+|f_i(a_k(\chi_i^{u^2}),\chi_i^{u^2},u^2(a_k(\chi_i^{u^2}),\chi_i^{u^2}))||\Delta_j[\chi_i^{u^j}]_x|+$$

$$+\int\limits_{\chi_i^{u^1}}^{\chi_i^{u^2}}\Big((f_i)_x(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau,u^1(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau))+\sum_{m=1}^{n}(f_i)_u(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau,u^1(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau))\times$$

$$\times(u_m^1)_x(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau)\Big)[\varphi_i^{u^1}]_x(\tau)d\tau+\int\limits_{\chi_i^{u^2}}^{t}\Big[\Big(|\Delta_j(f_i)_x(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\Big(|\Delta_j(f_i)_u(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau,u^j(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau))|(u_m^1)_x(\varphi_i^{u^1}(\tau),\tau)+$$

$$+(f_i)_u(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))|\Delta_j(u_m^j)_x(\varphi_i^{u^j}(\tau),\tau)|\Big)\Big)[\varphi_i^{u^1}]_x(\tau)+$$

$$+\Big((f_i)_x(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))+\sum_{m=1}^{n}(f_i)_u(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau,u^2(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau))\times$$

$$\times(u_m^2)_x(\varphi_i^{u^2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{u^j}]_x(\tau)|\Big]d\tau\le k_{16}T_0\rho+k_{17}\rho_0.$$

Розглянемо останній можливий випадок поведінки характеристик, а саме $\chi_i^{u^1}>0,\ \chi_i^{u^2}=0$. Аналогічно як для різниці $\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)$, він зводиться до двох попередніх випадків, а саме:

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})_x(x,t)|\le|(S_i^{u^1})_x(x,t)-(S_i^{u^3})_x(x,t)|+|(S_i^{u^3})_x(x,t)-(S_i^{u^2})_x(x,t)|\le$$

$$\leq k_{16}T_0 \max_{\substack{1\leq i\leq n\\(x,t)\in\Omega_T}} |(u^1)_x-(u^3)_x| + k_{17}\max_{\substack{1\leq i\leq n\\(x,t)\in\Omega_T}} |u^1-u^3| + k_{13}T_0\times$$
$$\times \max_{\substack{1\leq i\leq n\\(x,t)\in\Omega_T}} |(u^2)_x-(u^3)_x| \leq \max\{k_{13},k_{16}\}T_0\rho + k_{17}\rho_0.$$

Отже, в будь-якому з розглянутих випадків справедлива оцінка

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})_x(x,t)| \leq \max\{k_{13},k_{16}\}T_0\rho + k_{17}\rho_0 = K_2T_0\rho + K_3\rho_0.$$

Тобто

$$\rho(S^{u^1},S^{u^2}) \leq \max\{K_1,K_2\}T_0\rho + K_3\rho_0.$$

Очевидно, що оператор S не є стискуючим. Розглянемо його квадрат

$$\rho(S^2u^1,S^2u^2) \leq \max\{K_1,K_2\}T_0\rho(S^{u^1},S^{u^2})+$$
$$+K_3\rho_0(S^{u^1},S^{u^2}) \leq \max\{K_1,K_2\}T_0(\max\{K_1,K_2\}T_0\rho + K_3\rho)+$$
$$+K_3K_1T_0\rho = K_4T_0\rho.$$

Звідси, якщо T_0 задовольняє нерівність

$$K_4T_0 \leq 1, \tag{30}$$

то відображення $S^2: Q\to Q$ стискуюче.

Зазначимо, що сукупність усіх накладених умов є сумісною. Справді, зафіксуємо достатньо малі U, T_0, щоб виконувались (10)–(11). Виберемо тепер достатньо великий параметр L, щоб виконувалась нерівність (18), а потім зафіксуємо U_1 згідно із (21). Далі за допомогою (27) визначаємо L_1 та зменшуємо T_0, щоб задовольнити нерівності (12)–(16), (19)–(20),(22)–(26), (28)–(30).

Нехай усі зазначені обмеження виконуються. Тоді, за теоремою Банаха про стискуючі відображення, існує єдина нерухома точка оператора S в просторі Q, яка і буде класичним розв'язком задачі (1)–(3).

Має місце таке зауваження.

Зауваження 1. *При іншому виборі параметрів $\hat{U} \leq U$, $\hat{U}_1 \geq U$, $\hat{L} \geq L$, $\hat{L}_1 \geq L_1$, існує $\tilde{T}_0 \leq T_0$, таке, що для будь-якого $\hat{T}_0 \leq \tilde{T}_0$ оператор S в просторі $Q(\hat{T}_0,\hat{U},\hat{U}_1,\hat{L},\hat{L}_1)$ задовольнятиме умови теореми Банаха.*

Покажемо, що розв'язок єдиний. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що існують дві функції $u^0\in Q$, $u^1 \in \left(C_L^1(\overline{\Omega_{T_0}})\right)^n$, що є розв'язками задачі (1)–(3).

Позначимо $\Upsilon = \{t\in[0,T_0] : u^0(x,t)\neq u^1(x,t)$ для деякого $(x,t)\in\overline{\Omega_{T_0}},\}$, $T_1 = \inf\Upsilon$.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $T_1 = 0$. Розглянемо задачу (1),(3) з такими початковими умовами

$$u(x,0) = g^0(x),\quad a_1^0(0)\leq x\leq a_2^0(0),\quad g^0(x) = u^0(x,0) = u^1(x,0).$$

Вибравши параметри $\hat{U}_1,\hat{L},\hat{L}_1$ — достатньо великими, а параметри $\hat{U},\hat{T}_0$ — достатньо малими, ми забезпечимо належність розв'язків u^0 та u^1 простору $Q(\hat{T}_0,\hat{U},\hat{U}_1,\hat{L},\hat{L}_1)$ на $[0,\hat{T}_0]$.

Згідно із зауваженням, оператор S в даному просторі задовольняє умови теореми Банаха, причому має дві різні нерухомі точки.

Отримана суперечність доводить, що $T_1 = T_0$, а тому $u^0 = u^1$ на $\overline{\Omega_{T_0}}$.

Теорему 1 доведено.

3. Глобальна розв'язність задачі.

Наступним кроком буде встановлення достатніх умов розв'язності задачі (1)–(3) на всьому часовому проміжку.

Теорема 2. *Нехай*

1) $\gamma_i \in Lip_w([0,T]^2 \times \mathbb{R}^{2n}, \hat{\gamma}_0), i \in I_k,\ k \in \{1,2\}$;

2)виконується нерівність $2nB + \hat{\gamma}_0 T\hat{B} < 1$, *де* B *— вище визначена стала, а* $\hat{B} = \dfrac{2nB}{detB(t)}$;

3)існує неперервна неспадна функція $\psi : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+$, *причому* $\int\limits_1^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} = \infty$, *така що* $|f_i(x,t,u)| \le \psi(||u||),\ (x,t,u) \in \Omega_T \times \mathbb{R}^n$;

4) виконуються умови 1)-7) теореми 1, причому в формулюванні умов 1)–6) множини $\mathcal{B}^n_{G+1}$ *та* $\mathcal{B}^{2n}_{G+1}$ *замінимо відповідно множинами* $\mathcal{B}^n_{P+1}$ *та* $\mathcal{B}^{2n}_{P+1}$, *де стала* P *визначається із рівності*

$$\int\limits_{\frac{\max\{M+\hat{B}\Gamma_0 T, G\}}{1-2nB-\hat{B}\hat{\gamma}_0 T}}^{P} \frac{du}{\psi(u)} = \frac{1}{1-2nB-\hat{B}\hat{\gamma}_0 T} T, \quad \Gamma_0 = \max_{\substack{t\in[0,T] \\ k\in\{1,2\}, i\in I_k}} |\gamma_i(t,\tau,0)|;$$

5) справедливе співвідношення

$$\lambda_i(a_k(t),t,u) \ne a'_k(t), \quad t \in [0,T],\ u \in \mathcal{B}^n_{P+1},\ i \in \{1,...,n\},\ k \in \{1,2\};$$

6) виконуються нерівності

$$\frac{4}{\gamma} nB(A+\Lambda) < 1, \qquad \max\{R_1, R_2\} \le 1,$$

де $\gamma = \min\limits_{\substack{t\in[0,T], u\in\mathcal{B}^n_{P+1} \\ i\in\{1,...,n\}, k\in\{1,2\}}} |\lambda_i(a_k(t),t,u) - a'_k(t)|$, Λ, A *– аналогічно як в доведенні теореми 1, причому множини* $\mathcal{B}^n_{G+1}$ *та* $\mathcal{B}^{2n}_{G+1}$ *замінені відповідно множинами* $\mathcal{B}^n_{P+1}$ *та* $\mathcal{B}^{2n}_{P+1}$, *а* R_1 *і* R_2 *– сталі, визначені вихідними даними задачі;*

7) задовольняються умови знакосталості функцій у відповідних областях визначення: $f_i \ge 0, i \in I_1, f_i \le 0, i \in I_2$, *а також* $\beta^k_{ij} \ge 0,\ i \in I_k, j \in \{1,...,n\},\ k \in \in \{1,2\}$, $\gamma_i \le 0,\ i \in I_1$, $\gamma_i \ge 0,\ i \in I_2$;

8) виконуються умови монотонності у відповідних областях визначення для функцій: $g_i, i \in \{1,...,n\}$ *— не спадають,* $\lambda_i, f_i, i \in \{1,...,n\}$ *— не спадають за змінними* x *та* u, $\mu_i, i \in I_1$ *не зростають за* t, $\mu_i, i \in I_2$ *не спадають за* t, $\beta^1_{ij},\ i \in I_1,\ j \in \{1,...,n\}$ *— не зростають за* t, $\beta^2_{ij},\ i \in I_2,\ j \in \{1,...,n\}$ *— не спадають за* t, $\gamma_i,\ i \in I_1$ *— не зростають за* t, $\gamma_i,\ i \in I_2$ *— не спадають за* t.

Тоді існує глобальний класичний розв'язок задачі (1)-(3) в Ω_T, *причому він єдиний в* $C^1_L(\Omega_T)$.

Доведення. Введемо підпростір $\widetilde{Q}(T_0,U,U_1,L,L_1)$ в $Q(T_0,U,U_1,L,L_1)$, наклавши додатково на функцію $u=(u_1,...,u_n)$ умову про те, що $u(x,t)$ є неспадною за змінною x на множині Ω_{T_0}.

Належність оператора S^u простору $\widetilde{Q}$ випливає з доведення теореми 1 і такої леми.

Лема. *Нехай виконуються припущення теореми 2 щодо монотонності f_i, g_i, μ_i, β^k_{ij}, γ_i та знакосталості f_i,β^k_{ij}, γ_i. Якщо функція $u\in\widetilde{Q}$ є неспадною за змінною x при кожному фіксованому t, то цю властивість має і функція $S^u\in\widetilde{Q}$, де S^u — оператор, визначений у п. 2.*

Доведення. Нехай $u\in\widetilde{Q}$, причому $u_i(x,t)$, $i\in\{1,...,n\}$ неспадна за x. Вважатимемо, що $x_1<x_2$. З єдиності розв'язку задачі Коші (4) отримаємо співвідношення:

$$\begin{array}{l} \varphi_i^{x_1}(\tau)<\varphi_i^{x_2}(\tau),\quad \tau\in[\max\{\chi_i^{x_1},\chi_i^{x_2}\},t],\\ \chi_i^{x_1}>\chi_i^{x_2},\quad \text{якщо}\quad \varphi_i^{x_2}(\chi_i^{x_2})=a_1(\chi_i^{x_2}),\\ \chi_i^{x_1}<\chi_i^{x_2},\quad \text{якщо}\quad \varphi_i^{x_1}(\chi_i^{x_1})=a_2(\chi_i^{x_1}). \end{array} \tag{31}$$

Враховуючи монотонність функцій f_i та u, одержимо нерівність

$$f_i(\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau,u(\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau))\le f_i(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,u(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau)),$$

з якої, використавши знакосталість f, маємо

$$\int\limits_{\chi_i^{x_1}}^{t} f_i(\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau,u(\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau))d\tau\le\int\limits_{\chi_i^{x_2}}^{t} f_i(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,u(\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau))d\tau.$$

Крім цього, із співвідношень (31), врахувавши монотонність функцій g_i, μ_i, β^k_{ij}, γ_i отримуємо нерівності:

$$\begin{array}{c} g_i(\varphi_i^{x_1}(0))\le g_i(\varphi_i^{x_2}(0)),\quad \text{якщо}\quad \chi_i^{x_1}=\chi_i^{x_2}=0,\\ M_{ik}(\chi_i^{x_1})+\sum\limits_{p=1}^{2}\sum\limits_{j\notin I_p}B_{ij}^{kp}(\chi_i^{x_1})(S_j(u))(a_p(\chi_i^{x_1}),\chi_i^{x_1})+\\ +\int\limits_0^{\chi_i^{x_1}}\Gamma_{ik}(\chi_i^{x_1},\tau,(S(u))(a(\tau),\tau))d\tau\le\\ \le M_{ik}(\chi_i^{x_2})+\sum\limits_{p=1}^{2}\sum\limits_{j\notin I_p}B_{ij}^{kp}(\chi_i^{x_2})(S_j(u))(a_p(\chi_i^{x_2}),\chi_i^{x_2})+\\ +\int\limits_0^{\chi_i^{x_2}}\Gamma_{ik}(\chi_i^{x_2},\tau,(S(u))(a(\tau),\tau))d\tau,\\ \text{якщо}\quad \varphi_i^{x_j}(\chi_i^{x_j})=a_k(\chi_i^{x_j}),\quad k,j\in\{1,2\},\quad i\in\{1,...,n\}. \end{array} \tag{32}$$

Зауважимо, що вводячи проміжну точку (одну чи дві вигляду $(\bar{x},t)$), можна домогтися виконання однієї з умов справедливості співвідношення (32).

Отже, $S_i^u(x_1,t)\le S_i^u(x_2,t)$, що й доводить лему.

Тоді, $S^u\in\widetilde{Q}$, якщо $u\in\widetilde{Q}$.

Враховуючи припущення теореми 2 та умови теореми 1 про локальну розв'язність, маємо існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(3) в просторі $\widetilde{Q}$.

Позначимо

$$U(t)=\max_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le t_1\le t\\ a_1(t_1)\le x_1\le a_2(t_1)}}|v_i(x_1,t_1)|,\quad W(t)=\max_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le t_1\le t\\ a_1(t_1)\le x\le a_2(t_1)}}\Big|\frac{\partial v_i}{\partial x}(x_1,t_1)\Big|.$$

Оскільки $P>G$, то умови теореми 1 виконуються, а тому існує локальний класичний розв'язок $v\in\widetilde{Q}(T_0^1,U,U_1,L^1,L_1^1)$ (тут параметри T_0^1,L^1,L_1^1 рівні відповідно параметрам T_0,L,L_1, що визначені в попередньому пункті) задачі (1)–(3) на часовому відрізку $[0,T_0^1]$. Використавши припущення 2)–3) теореми 2, цей розв'язок задовольняє наступні співвідношення при різних випадках поведінки характеристик:

$$|v_i(x,t)|\le\begin{cases}G+\int\limits_0^t\phi(U(\tau))d\tau, & \text{якщо } \chi_i=0\ ;\\ M+(2nB+\hat{\gamma}_0\hat{B}T)U(t)+\Gamma_0\hat{B}T+\int\limits_0^t\phi(U(\tau))d\tau, & \text{якщо } \chi_i>0.\end{cases}$$

Об'єднуючи ці випадки, одержуємо

$$U(t)\le(2nB+\hat{\gamma}_0\hat{B}T)U(t)+\max\{G,M+\Gamma_0\hat{B}T\}+\int\limits_0^t\phi(U(\tau))d\tau.$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді

$$U(t)\le\frac{\max\{G,M+\Gamma_0\hat{B}T\}}{1-2nB-\hat{\gamma}_0\hat{B}T}+\frac{1}{1-2nB-\hat{\gamma}_0\hat{B}T}\int\limits_0^t\phi(U(\tau))d\tau.\tag{33}$$

З леми Гронуолла-Беллмана випливає обмеженість розв'язку

$$U(t)\le P,\quad t\in[0,T_0^1].$$

Врахувавши монотонність функцій $\lambda_i, i\in\{1,...,n\}$ та розв'язку v, одержуємо оцінку

$$[\varphi_i]_x(\tau)\le 1.$$

Для похідної розв'язку також встановимо оцінки, аналізуючи можливу поведінку характеристик:

$$\Big|\frac{\partial v_i}{\partial x}(x,t)\Big|\le\begin{cases}G_1+\int\limits_0^t(F+nFW(\tau))d\tau, & \text{якщо } \chi_i=0\ ;\\ \frac{2}{\gamma}\Big(M+2nB(G+F+1)+2nB(A+\Lambda)W(t)+\Gamma(1+T)+F\Big)+\\ +\int\limits_0^t(F+nFW(\tau))d\tau, & \text{якщо } \chi_i>0.\end{cases}$$

Врахувавши означення функції $W(t)$, одержуємо

$$W(t)\le\max\Big\{G_1,\frac{2}{\gamma}\Big(M+2nB(G+F+1)+\Gamma(1+T)+F\Big)\Big\}+FT+$$

$$+\frac{4}{\gamma}nB(A+\Lambda)W(t)+nF\int\limits_0^t W(\tau)d\tau.$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді співвідношення

$$W(t)\leq\frac{\max\Big\{G_1,\frac{2}{\gamma}\Big(M+2nB(G+F+1)+\Gamma(1+T)+F\Big)\Big\}+FT}{1-\frac{4}{\gamma}nB(A+\Lambda)}+ \\ +\frac{nF}{1-\frac{4}{\gamma}nB(A+\Lambda)}\int\limits_0^t W(\tau)d\tau, \tag{34}$$

З леми Гронуолла-Беллмана, випливає оцінка

$$W(t)\leq$$

$$\leq\frac{\max\Big\{G_1,\frac{2}{\gamma}\Big(M+2nB(G+F+1)+\Gamma(1+T)+F\Big)\Big\}+FT}{1-\frac{4}{\gamma}nB(A+\Lambda)}e^{\frac{nF}{1-\frac{4}{\gamma}nB(A+\Lambda)}T}.$$

Для зручності в наступних міркуваннях, перепишемо умови на параметри T_0^1,U,U_1,L^1,L_1^1 простору Q.

Зафіксуємо U відповідно до умови (11), а U_1 відповідно до умови (21), тобто

$$\max\Big\{(M+2nB(P+P_1e(A+\Lambda)+A+F+2)+\Gamma+1+F)\frac{2}{\gamma},P_1\Big\}e+1\leq U_1,$$

де

$$P_1=\frac{\max\{G_1,\frac{2}{\gamma}(M+2nB(G+A+1)+\Gamma(1+T)+F)\}+FT}{1-2nB(A+\Lambda)}e^{\frac{nF}{1-2nB(A+\Lambda)}T}.$$

З нерівностей (18) і (27) отримуємо умови для вибору L^1,L_1^1 :

$$L^1\geq R_3+R_1g_0;\qquad L_1^1\geq R_4+R_2g_0,$$

де R_3, R_4 сталі, визначені вихідними даними задачі.

Тепер перепишемо обмеження на параметр T_0^1 з нерівностей (12)–(16), (19), (20),(22)–(26), (28)–(30) у вигляді

$$T_0^1\leq R_k,\quad T_0^1\leq\frac{R_m}{g_0},$$

$k=\{5,7,8,10,12,14,15,16,17,19,21,23,25,27,29,30\}$,

$m=\{6,9,11,13,18,20,22,24,26,28\}$.

Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $g_0\geq 1$. Тоді всі наведенні співвідношення виконуються, якщо зафіксувати

$$T_0^1=\frac{\Theta}{g_0},\qquad \text{де}\ \ \Theta=\min_{k\in\{5,\ldots,30\}}\{R_k\}.$$

Розглянемо нашу задачу при $t \geq T_0^1$, тобто задачу (1)–(3) з початковими умовами

$$u_i(x, T_0^1) = g_i^1(x), \quad a_1^{T_0^1} \leq x \leq a_2^{T_0^1}, \tag{35}$$

де $g_i^1(x) = v_i(x, T_0^1)$.

Якщо задача (1), (35), (3) має розв'язок v, визначений на проміжку $[T_0^1, T_0^1 + T_0^2]$, то, об'єднуючи розв'язки цих двох задач, отримаємо розв'язок задачі (1)–(3) на відрізку $[0, T_0^1 + T_0^2]$. При цьому можна знову розглянути задачу при $t \geq T_0^1 + T_0^2$, замінивши відповідним чином початкову умову. Продовжуючи ці дії, встановимо існування розв'язку задачі (1)–(3) на дещо більшому часовому проміжку.

Нехай задача (1)–(3) має розв'язок $v \in C_L^1(\overline{\Omega}_{\sum_{k=1}^m T_0^k})$ на часовому відрізку $[0, \sum\limits_{k=1}^m T_0^k]$, причому на ньому задовольняються нерівності (33)–(34). Тому

$$U(t) \leq P, \quad W(t) \leq P_1, \quad t \in [0, \sum_{k=1}^m T_0^k].$$

Розглянемо задачу (1),(3) при $t \geq \sum\limits_{k=1}^m T_0^k$ з початковими умовами

$$u_i(x, \sum_{k=1}^m T_0^k) = g_i^m(x), \; a_1^{\sum_{k=1}^m T_0^k} \leq x \leq a_2^{\sum_{k=1}^m T_0^k}, \tag{36}$$

де $g_i^m(x) = v_i(x, \sum\limits_{k=1}^m T_0^k)$. Легко бачити, що умови теореми 1 для задачі (1), (36), (3) справджуються, а тому існує локальний класичний розв'язок $v \in Q(T_0^{m+1}, U, U_1, L^{m+1}, L_1^{m+1})$ задачі на часовому відрізку $[\sum\limits_{k=1}^m T_0^k, \sum\limits_{k=1}^{m+1} T_0^k]$. Причому значення параметрів U та U_1 є визначеними раніше, а

$$L^{m+1} = R_3 + R_1 \max\{L^m, L_1^m\},$$

$$L_1^{m+1} = R_4 + R_2 \max\{L^m, L_1^m\},$$

де сталі L^m та L_1^m такі, що $v_i \in Lip(\Omega_{\sum_{k=1}^m T_0^k}, L^m)$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial x} \in Lip_x(\Omega_{\sum_{k=1}^m T_0^k}, L_1^m)$, $i \in \{1, ..., n\}$, а $T_0^{m+1} = \frac{\Theta}{\max\{L^m, L_1^m\}}$.

Залишилось довести справедливість нерівностей (33) та (34) на проміжку $[\sum\limits_{k=1}^m T_0^k, \sum\limits_{k=1}^{m+1} T_0^k]$. Розглянемо можливі два випадки:

Нехай $\chi_i = 0$. Тоді

$$|v_i(x,t)| \leq U\Big(\sum_{k=1}^m T_0^k\Big) + \int\limits_{\sum_{k=1}^m T_0^k}^t \phi(U(\tau)) d\tau \leq$$

$$\leq (2nB + \hat{\gamma}_0 \hat{B}T)U\Big(\sum_{k=1}^{m} T_0^k\Big) + \max\{G, M + \Gamma_0 \hat{B}T\} + \int\limits_0^{\sum_{k=1}^{m} T_0^k} \phi(U(\tau))d\tau +$$

$$\int\limits_{\sum_{k=1}^{m} T_0^k}^{t} \phi(U(\tau))d\tau \leq (2nB + \hat{\gamma}_0 \hat{B}T)U(t) \max\{G, M + \Gamma_0 \hat{B}T\} + \int\limits_0^t \phi(U(\tau))d\tau.$$

А якщо $\chi_i > 0$, то

$$|v_i(x,t)| \leq (2nB + \hat{\gamma}_0 \hat{B}T)U(t) + M + \Gamma_0 \hat{B}T + \int\limits_0^t \phi(U(\tau))d\tau.$$

Підсумовуючи, отримаємо нерівність (33). Співвідношення (34) встановлюємо за тією ж схемою.

Отже, за допомогою методу математичної індукції доведено існування класичного розв'язку задачі (1)–(3) на часовому відрізку $[0,T] \cap [0, \sum_{m=1}^{\infty} T_0^m]$. Враховуючи умову 7) теореми 2, одержимо

$$\sum_{m=1}^{\infty} T_0^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Theta}{\max\{L^{m-1}, L_1^{m-1}\}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Theta}{\max\{R_3, R_4\} + \max\{L^{m-2}, L_1^{m-2}\}}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Theta}{(m-1)\max\{R_3, R_4\} + g_0} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

Тому задача (1)–(3) має розв'язок на проміжку $[0,T]$, де T є як завгодно великим. Єдиність отриманого глобального розв'язку слідує з єдиності локальної розв'язності задачі. Теорема 2 доведена.

Висновки. У роботі встановлено достатні умови локальної та глобальної класичної розв'язностей нелінійної задачі для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь з нерозділеними крайовими умовами. Результати роботи узагальнюють дослідження [6-7] та [9] відповідно на випадок гладких розв'язків поставлених проблем та нелокальних крайових умов.

1. **Greenspan H. P.** Astring problem [text] / Greenspan H. P. // J. Math. Analysis and Appl. – 1963. – V. 6, № 3. – P. 339–348.
2. **Elliot C. M.** Weak and variational methods for moving boundary problems [text] / Elliot C. M., Oskendon Y. R. – 1982, London, Pitman. – 213 p.
3. **Крутиков В. С.** Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами [текст] / Крутиков В. С. – К.: Наук. думка, 1985. – 128 с.

4. **Пташник Б. Й.** Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними [текст] / Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. – К.: Наук. думка, 2002. – 415 с.

5. **Мельник З. О.** Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем [текст] / Мельник З. О., Кирилич В. М. // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, № 6. – С. 722–727.

6. **Turo J.** Nonlocal problems for quasilinear functional partical differential equations of first order [text] / Turo J. // Publ. Math. – 1997. – V. 41. – P. 507–517.

7. **Andrusjak R. V.** Global solvability of hyperbolic Stefan problem [text] / Andrusjak R. V., Kyrylych V. M. // Мат. студії. – 2005. – Т. 23, № 2. – С. 191–206.

8. **Андрусяк Р. В.** Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой [текст] / Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д. // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 489–503.

9. **Андрусяк Р. В.** Класична розв'язність задачі з рухомими межами для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь [текст] / Андрусяк Р. В., Бурдейна Н. О., Кирилич В. М. // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 7. – С. 867–891.

Вісник Одесък. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 57–74

УДК 517.925

В. М. Евтухов*, Л. И. Кусик**
*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
**Одесский национальный морской университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Євтухов В. М., Кусік Л. І. Асимптотичні зображення розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Встановлено асимптотичні властивості деяких типів розв'язків одного класу істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку, а також знайдені необхідні та достатні умови їх існування.
Ключові слова: нелінійні рівняння, $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ -розв'язки, асимптотичні зображення.

Евтухов В. М., Кусик Л. И. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Установлены асимптотические свойства некоторых типов решений одного класса существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, а также найдены необходимые и достаточные условия их существования.
Ключевые слова: нелинейные уравнения, $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ -решения, асимптотические представления.

Evtukhov V. M., Kusick L. I. Asymptotic representations of solutions for one class of nonlinear differential equations of second order. The asymptotic behavior of some solutions for one class of essentially nonlinear non-autonomous differential equations of second order are established. We give necessary and sufficient conditions for existence of these solutions.
Key words: nonlinear equations, $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ -solutions, asymptotic representations.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')\psi(t,y,y'), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow\, \longrightarrow]0,+\infty[$ ($i=0,1$) — непрерывные правильно меняющиеся при $y^{(i)} \longrightarrow Y_i$ функции порядка σ_i $(i=0,1)$, $\psi : [a,\omega[\times D \longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, такая, что

$$\lim_{\substack{t\uparrow\omega \\ (y,z)\to(Y_0,Y_1) \\ (y,z)\in\ D}} \psi(t,y,z) = 1. \tag{1.2}$$

При этом предполагается, что $-\infty < a < \omega \le +\infty$[1], $D=\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}$, Δ_{Y_i} $(i= =\{0,1\})$ — односторонняя окрестность Y_i, Y_i ($i\in\{0,1\}$) равно либо 0, либо $\pm\infty$, $\sigma_0+\sigma_1 \ne 1$.

[1]в случае $\omega=+\infty$, считаем $a>0$

В силу определения правильно меняющейся функции (см. [1]) каждая из функций φ_i $(i = \{0, 1\})$ допускает представление вида

$$\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\, L_i(z), \tag{1.3}$$

где $L_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная медленно меняющаяся при $z \to Y_i$ функция, т. е. такая, что

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{L_i(\lambda z)}{L_i(z)} = 1 \quad (i = 1, 2) \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Известно (см. [1]), что предельное соотношение (1.4) выполнется равномерно по λ на любом отрезке $[c, d] \in]0, +\infty[$ (свойство M_1) и существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $z \to Y_i$ функция $L_{ii} : \Delta_{Y_i} \longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ (свойство M_2), удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{L_i(z)}{L_{ii}(z)} = 1, \qquad \lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z L'_{ii}(z)}{L_{ii}(z)} = 0.$$

При $\psi(t, y, y') \equiv 1$, $\varphi_i(y^{(i)}) = |y^{(i)}|^{\sigma_i}$ $(i = 0, 1)$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ уравнение (1.1) является обобщенным уравнением Эмдена–Фаулера. Асимптотическое поведение его всех монотонных решений детально исследовано в [2]–[8]. При $\psi(t, y, y') \equiv 1$ и дважды непрерывно дифференцируемых функциях φ_i $(i = 0, 1)$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi'_i(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \quad \limsup_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \left| \frac{z\varphi''_i(z)}{\varphi'_i(z)} \right| < +\infty \quad (i = 0, 1), \tag{1.5}$$

уравнение (1.1) исследовалось в [9]–[11]. Здесь, прежде всего, был выделен класс изучаемых решений.

Определение 1. *Решение y уравнения (1.1), заданное на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq$ $\leq +\infty$, если для него соблюдаются следующие условия:*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta Y_i \qquad \text{при } t \in [t_0, \omega[\ , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \tag{1.6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t) y''(t)} = \lambda_0. \tag{1.7}$$

Для всех возможных типов $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ — решений уравнения (1.1) в [9]–[11] при $\psi(t, y, y') \equiv 1$ и указанных выше ограничениях (1.5) на φ_i $(i = 0, 1)$ получены необходимые и достаточные условия их существования, а также асимптотические представления при $t \uparrow \omega$.

Целью настоящей заметки является распространение результатов из [9] о $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решениях, для которых $\lambda_0 \neq 0, 1, \pm\infty$, на случай, когда в уравнении (1.1) $\psi(t, y, y') \not\equiv 1$ и φ_i $(i = 0, 1)$ — непрерывные правильно меняющиеся при $y^{(i)} \longrightarrow Y_i$ $(i=0,1)$ функции порядка σ_i $(i=0,1)$ (т. е. снимаются гладкостные ограничения (1.5) на φ_i $(i=0,1)$).

Выберем число $b \in \Delta_{Y_0}$ таким, чтобы соблюдалось неравенство

$$|b-Y_0|<1 \quad \text{при} \quad Y_0=0, \quad b>1 \ (b<-1) \quad \text{при} \quad Y_0=+\infty \ (Y_0=-\infty),$$

и введем функцию

$$\Phi(y)=\int\limits_B^y \frac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}, \quad \text{где} \quad B=\begin{cases} b, & \text{если} \quad \left|\int\limits_b^{Y_0} \dfrac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}\right|=+\infty, \\ Y_0, & \text{если} \quad \left|\int\limits_b^{Y_0} \dfrac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}\right|<+\infty. \end{cases}$$

Так как $\Phi'(y)>0$ при $y\in\Delta_{Y_0}$, то $\Phi:\Delta_{Y_0}(b)\to\Delta_{Z_0}(c)$, где

$$\Delta_{Y_0}(b)=[b,Y_0[, \quad \Delta_{Z_0}(c)=[c,Z_0[, \quad \text{если} \ \Delta_{Y_0} - \ \text{левая окрестность} \ Y_0,$$

$$\Delta_{Y_0}(b)=]Y_0,b], \quad \Delta_{Z_0}(c)=]Z_0,c], \quad \text{если} \ \Delta_{Y_0} - \ \text{правая окрестность} \ Y_0,$$

$$c=\int\limits_B^b \frac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}, \quad Z_0=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad B=Y_0, \\ +\infty, & \text{если} \quad B=b<Y_0, \\ -\infty, & \text{если} \quad B=b>Y_0, \end{cases}$$

причем

$$\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0(b)}}} \Phi(y)=Z_0,$$

и существует обратная непрерывно дифференцируемая возрастающая функция $\Phi^{-1}:\Delta_{Z_0}(c)\to\Delta_{Y_0}(b)$, такая, что

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0(b)}}} \Phi^{-1}(z)=Y_0. \tag{1.8}$$

Используя (1.3), свойство M_2 медленно меняющихся функций и правило Лопиталя, находим

$$\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{|y|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y}{\varphi_0(y)\Phi(y)}=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{|y|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y}{|y|^{\sigma_0}L_0(y)}}{\Phi(y)}=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{|y|^{1-\sigma_0-\sigma_1}\operatorname{sign} y}{L_{00}(y)}}{\Phi(y)}=$$

$$=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{(1-\sigma_0-\sigma_1)|y|^{-\sigma_0-\sigma_1}}{L_{00}(y)}-\dfrac{|y|^{1-\sigma_0-\sigma_1}L'_{00}(y)\operatorname{sign} y}{L^2_{00}(y)}}{\dfrac{|y|^{-\sigma_1}}{\varphi_0(y)}}=$$

$$=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{yL'_{00}(y)}{L_{00}(y)}\right)=1-\sigma_0-\sigma_1,$$

т.е.

$$\Phi(y)\sim\frac{|y|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\varphi_0(y)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0. \tag{1.9}$$

Далее, введем два числа, полагая

$$\mu_0 = \operatorname{sign} b, \quad \mu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_{Y_0} \text{ – левая окрестность } Y_0, \\ -1, & \text{если } \Delta_{Y_0} \text{ – правая окрестность } Y_0. \end{cases}$$

Поскольку b выбрано, как указано выше, а каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение уравнения (1.1) вместе со своей первой и второй производными отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причем первая производная этого решения положительна, если ΔY_0 является левой окрестностью Y_0, и отрицательна — в противном случае, то эти два числа определяют знаки соответственно $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения и его первой производной в некоторой окрестности ω.

Наконец, введем две вспомогательные функции

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int\limits_{A_1}^{t} p(s)\pi_\omega(s)|\pi_\omega(s)|^{-\sigma_1} L_1\left(\mu_1 |\pi_\omega(s)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right) ds,$$

где

$$A_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } \int\limits_{a_1}^{\omega} p(s)|\pi_\omega(s)|^{1-\sigma_1} L_1(\mu_1|\pi_\omega(s)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}) ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int\limits_{a_1}^{\omega} p(s)|\pi_\omega(s)|^{1-\sigma_1} L_1(\mu_1|\pi_\omega(s)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}) ds < +\infty, \end{cases}$$

$a_1 \in [a, \omega[$ и такое, что $\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} \in \Delta_{Y_1}$ при $t \in [a_1, \omega[$, а также

Определение 2. *Будем говорить, что функция φ_i $(i \in \{0,1\})$ удовлетворяет условию S_i, если для любой правильно меняющейся функции $z : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_i}$ порядка r $(r \in \mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\})$, для которой выполнено условие $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = Y_i$, справедливо соотношение*

$$L_i(z(t)) = L_i(\ \mu_i |\pi_\omega(t)|^r\ )[1 + 0(1)] \quad (i \in \{0,1\}) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Для уравнения (1.1) имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}\setminus\{0,1\}$ и функция φ_1 удовлетворяет условию S_1. Тогда для существования у уравнения (1.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ — решений необходимо, а если выполнено одно из следующих двух условий:*

$$\textit{либо} \quad \lambda_0 + 1 - \sigma_1 \neq 0, \quad \textit{либо} \quad \lambda_0 + 1 - \sigma_1 = 0 \quad \textit{и} \quad \lambda_0(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0, \quad (1.10)$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_0 = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)\pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a_1, \omega[, \\ \pm\infty, & \textit{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a_1, \omega[, \end{cases} \quad (1.11)$$

$$Y_1 = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a, \omega[, \\ \pm\infty, & \textit{если} \quad (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a, \omega[, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_1'(t)\pi_\omega(t)}{I_1(t)}=\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{(\lambda_0-1)},\qquad(1.13)$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_0\lambda_0\mu_0>0,\ \ \alpha_0\mu_1(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)>0\ \ \textit{при}\ \ t\in[a,\omega[.\qquad(1.14)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{\mu_0\,|y(t)|^{1-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))}=\gamma_1\,(1-\sigma_0-\sigma_1)\,I_1(t)(1+o(1))\quad\textit{при}\quad t\uparrow\omega,\qquad(1.15)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0(1+o(1))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\quad\textit{при}\quad t\uparrow\omega,\qquad(1.16)$$

где

$$\gamma_1=\alpha_0(\lambda_0-1)\,|\lambda_0|^{\sigma_1}\,|\lambda_0-1|^{-\sigma_1},$$

причем существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$, *и двухпараметрическое — в случае, когда* $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ *и* $(\lambda_0-1)(1+\lambda_0-\sigma_1)\pi_\omega(t)>0$ *при* $t\in[a,\omega[$.

Замечание 1. *В этой теореме асимптотическое представление (1.15) неявно определяет* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ *— решение уравнения (1.1). Однако, в силу представления (1.16) это решение является правильно меняющейся при* $t\uparrow\omega$ *функцией порядка* $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}$. *Поэтому если дополнительно предположить, что функция* φ_0 *удовлетворяет условию* S_0, *то, учитывая (1.3), представление (1.15) можно переписать в виде*

$$\mu_0\,|y(t)|^{1-\sigma_0-\sigma_1}=\gamma_1\,(1-\sigma_0-\sigma_1)\,I_1(t)L_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)(1+o(1))\ \textit{при}\quad t\uparrow\omega,$$

откуда получаем для $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ *— решения асимптотическое представление в следующем явном виде*

$$y(t)=\mu_0\left|\gamma_1\,(1-\sigma_0-\sigma_1)\,I_1(t)L_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(1+o(1))$$

при $t\uparrow\omega$.

Замечание 2. *Приведенная выше теорема, переформулированная для монотонно возрастающих* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ *— решений, совпадает с теоремой 1.1 из работы [9], установленной в частном случае* $\psi(t,y,y')\equiv 1$ *и при более сильных ограничениях (1.5) на функции* φ_i $(i=0,1)$.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$z_i'=f_i(x)+\sum_{j=1}^{2}p_{ij}(x)z_j+g_i(x)\sum_{j=1}^{2}r_{ij}(x,z_1,z_2)\quad(i=1,2),\qquad(2.1)$$

где $f_i, g_i : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$ $p_{ij} : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2)$, $r_{ij} : \Omega^2_{ab} \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2)$ — непрерывные функции, $\Omega^2_{ab} = [a, +\infty[\times \mathbf{R}^2_b$, $\mathbf{R}^2_b = \{(z_1, z_2) : |z_i| \le b,\ i = 1, 2\}$, b — некоторая положительная постоянная. При этом будем также предполагать, что функции r_{ij} $(i, j = 1, 2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \to +\infty} r_{i1}(x, z_1, z_2) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{равномерно по } (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2_{\mathbf{b}}, \tag{2.2}$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \to 0} \frac{r_{i2}(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{равномерно по } x \in [a, +\infty[. \tag{2.3}$$

Введем для системы (2.1) вспомогательные функции, полагая

$$F_i(x) = \int_{\alpha_i}^{x} f_i(\tau) e^{\int_\tau^x p_{ii}(s)ds} d\tau, \quad G_i(x) = \int_{\beta_i}^{x} |g_i(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{ii}(s)ds} d\tau \quad (i = 1, 2),$$

$$P_{ij}(x) = \int_{\alpha_{ij}}^{x} |p_{ij}(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{ii}(s)ds} d\tau \quad (i \ne j, \quad i, j = 1, 2),$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} a, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} f_i(\tau) e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau \ \text{расходится}, \\ +\infty, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} f_i(\tau) e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau \ \text{сходится}, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} a, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |g_i(\tau)| e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau = +\infty, \\ +\infty, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |g_i(\tau)| e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |p_{ij}(\tau)| e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau = +\infty, \\ +\infty, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |p_{ij}(\tau)| e^{-\int_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть функции* r_{ij} $(i, j = 1, 2)$ *удовлетворяют условиям* (2.2), (2.3), *а функции* F_i, G_i $(i = 1, 2)$ *и* P_{ij} $(i \ne j, i, j = 1, 2)$ *таковы, что*

$$\lim_{x \to +\infty} F_i(x) = 0, \quad \limsup_{x \to +\infty} |G_i(x)| < +\infty \quad (i = 1, 2), \tag{2.4}$$

$$\limsup_{x \to +\infty} |P_{ij}(x)| = P^0_{ij} = const \quad (i \ne j, \ i, j = 1, 2). \tag{2.5}$$

Пусть, кроме того, соблюдаются неравенства

$$|P^0_{21}| < 1, \quad |P^0_{12} P^0_{21}| < 1. \tag{2.6}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) *имеет хотя бы одно решение* $(z_1, z_2) : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}^2_b$ $(x_0 \ge a$ *), стремящееся к нулю при* $x \to +\infty$. *Более* *того, существует целое k — параметрическое семейство $(k \in \{1,2\})$ таких решений, если среди функций p_{ii} $(i=1,2)$ имеется k функций, для которых*

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^x p_{ii}(s)ds = -\infty. \tag{2.7}$$

Доказательство. Полагая $B_0 = max\{|P_{21}^0|, |P_{12}^0 P_{21}^0|\}$, подберем с учетом (2.6) числа $q \in]B_0, 1[$, $x_1 \geq a$, $\varepsilon_{02} > 0$ таким образом, чтобы соблюдались неравенства

$$B_i(x) \leq q \quad (i=1,2) \quad \text{при} \quad x \geq x_1, \tag{2.8}$$

где

$$B_2(x) = 2\varepsilon_{02}|G_2(x)| + |P_{21}(x)|, \quad B_1(x) = 2\varepsilon_{02}|G_1(x)| + \left| \int\limits_{\alpha_{12}}^x B_2(\tau)|p_{12}(\tau)| e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau \right|.$$

Для числа $\varepsilon_{02} > 0$ в силу (2.3) найдется $b_0 \in]0, b]$, такое, что на множестве $\Omega_{ab_0}^2$ выполняются неравенства

$$|r_{i2}(x, z_1, z_2)| < \varepsilon_{02}(|z_1| + |z_2|) \ \ (i=1,2). \tag{2.9}$$

Далее, выберем постоянные c_i^0 $(i=1,2)$, взяв в качестве c_i^0 $(i \in \{1,2\})$ произвольное отличное от нуля вещественное число в случае, когда соблюдается условие (2.7), и полагаем $c_i^0 = 0$ — в противном случае. При таком их выборе существуют в силу условий (2.4) и (2.5) числа $x_2 \geq x_1$ и $\varepsilon_{01} > 0$ такие, что

$$A_2(x, c_2^0) \leq b_0(1-q), \quad A_1(x, c_1^0, c_2^0) \leq b_0(1-q) \ \text{ при } \ x \geq x_2, \tag{2.10}$$

где

$$A_2(x, c_2^0) = |c_2^0| e^{\int\limits_a^x p_{22}(s)ds} + |F_2(x)| + \varepsilon_{01}|G_2(x)|, \quad A_1(x, c_1^0, c_2^0) =$$

$$= |c_1^0| e^{\int\limits_a^x p_{11}(s)ds} + |F_1(x)| + \varepsilon_{01}|G_1(x)| + \left| \int\limits_{\alpha_{12}}^x A_2(\tau, c_2^0)|p_{12}(\tau)| e^{\int\limits_a^x p_{11}(s)ds} d\tau \right|.$$

Наконец, учитывая (2.2), подберем число $x_0 \geq x_2$ таким, чтобы на множестве $\Omega_{x_0 b}$ соблюдались неравенства

$$|r_{i1}(x, z_1, z_2)| < \varepsilon_{01} \quad (i=1,2). \tag{2.11}$$

Пусть $\mathbf{C}_{loc}([x_0, +\infty[; \mathbf{R}^2)$ — пространство непрерывных вектор-функций $z = (z_i)_{i=1}^2 : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}^2$ с топологией равномерной сходимости на замкнутых отрезках из $[x_0, +\infty[$, а S — подмножество тех из них, для которых $|z_i(x)| \leq b_0$ $(i=1,2)$ при $x \in [x_0, +\infty[$.

Выбрав произвольным образом постоянные c_1, c_2, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq |c_i| \leq |c_i^0|$ $(i=1,2)$, рассмотрим оператор $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^2 : S \to$

$\to \mathbf{C}_{loc}([x_0, +\infty[; \mathbf{R}^2)$, определяемый рекуррентными соотношениями:

$$
\begin{gathered}
\Phi_2(z)(x) = c_2\, e^{\int\limits_a^x p_{22}(s)ds} + F_2(x) + \int\limits_{\overline{\alpha}_{21}}^x p_{21}(\tau) z_1(\tau) e^{\int\limits_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau + \\
+ \int\limits_{\overline{\beta}_2}^x g_2(\tau) \sum_{j=1}^2 \; r_{2j}\left(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)\right) e^{\int\limits_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau, \\
\Phi_1(z)(x) = c_1 e^{\int\limits_a^x p_{11}(s)ds} + F_1(x) + \int\limits_{\overline{\alpha}_{12}}^x p_{12}(\tau) \Phi_2(z)(\tau) e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau + \\
+ \int\limits_{\overline{\beta}_1}^x g_1(\tau) \sum_{j=1}^2 r_{1j}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau,
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

где каждый из пределов интегрирования $\overline{\beta}_i$ $(i = 1, 2)$, $\overline{\alpha}_{12}$, $\overline{\alpha}_{21}$ равен x_0 , если соответствующий ему из пределов интегрирования β_i $(i = 1, 2)$, α_{12}, α_{21} был до этого выбран равным a , и остается равным $+\infty$ — в противном случае.

Для любого $z \in S$ в силу (2.8)–(2.10)

$$|\Phi_2(z)(x)| \le A_2(x, c_2^0) + b_0 B_2(x) \le b_0 \quad \text{при} \quad x \in [x_0, +\infty[,$$

и

$$|\Phi_1(z)(x)| \le A_1(x, c_1^0, c_2^0) + b_0 B_1(x) \le b_0 \quad \text{при} \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

Поэтому $\Phi(S) \subset S$.

Далее установим непрерывность оператора Φ .

Пусть $z^k = (z_i^k)_{i=1}^2 \in S$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} z^k(x) = z^0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0; +\infty[$. Тогда в силу непрерывности функций r_{ij} $(i, j = 1, 2)$ на множестве Ω_{ab}^2

$$\lim_{k\to+\infty} r_{ij}(x, z_1^k(x), z_2^k(x)) = r_{ij}(x, z_1^0(x), z_2^0(x)) \tag{2.13}$$

равномерно на каждом конечном отрезке $[x_0; +\infty[$.

Покажем, что для произвольных $\varepsilon > 0$ и $x_* > x_0$ при любом $i \in \{1, 2\}$ существует натуральное число K_i , такое что

$$|\Phi_i(z^k)(x) - \Phi_i(z^0)(x)| < \varepsilon \text{ при } k > K_i \text{ и } x \in [x_0, x_*]. \tag{2.14}$$

Отсюда будет следовать, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \Phi(z^k)(x) = \Phi(z^0)(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке из $[x_0; +\infty[$, и тем самым будет доказана непрерывность оператора Φ .

В силу второго из условий (2.4), а также условия (2.5) найдется постоянная $M > 0$, такая что при $x \in [x_0, +\infty[$ выполняются неравенства $|P_{ij}(x)| < M$ $(i, j = 1, 2)$, $|G_i(x)| < M$ $(i = 1, 2)$.

Выберем произвольным образом числа $\varepsilon > 0$, $x_* \in [x_0, +\infty[$ и установим сначала существование натурального числа K_2 для которого соблюдается (2.14) при $i = 2$.

В силу (2.12) имеем

$$\left|\Phi_2(z^k)(x)-\Phi_2(z^0)(x)\right| \le \left|\int\limits_{\overline{\alpha}_{21}}^{x} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau)-z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds}d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\overline{\beta}_2}^{x} |g_2(\tau)| \sum_{j=1}^{2} |r_{2j}(\tau,z_1^k(\tau),z_2^k(\tau))-r_{2j}(\tau,z_1^0(\tau),z_2^0(\tau))|\, e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds}d\tau\right|.$$

Для первого слагаемого, стоящего справа, рассмотрим в отдельности два случая, когда $\overline{\alpha}_{21}=x_0$ и $\overline{\alpha}_{21}=+\infty$.

Пусть $\overline{\alpha}_{21}=x_0$. Поскольку $\lim\limits_{k\to+\infty} z^k(x)=z^0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке из промежутка $[x_0;+\infty[$, то существует $K_{21}(\varepsilon)$ такое, что для любого $k>K_{21}(\varepsilon)$ и $x\in[x_0,x_*]$ будет выполнено неравенство $|z_1^k(x)-z_1^0(x)|<$ $<\frac{\varepsilon}{2M}$. Поэтому

$$\int\limits_{x_0}^{x} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau)-z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds}\,d\tau \le \frac{\varepsilon}{2M}\int\limits_{x_0}^{x} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds}d\tau =$$

$$=\frac{\varepsilon}{2M}|P_{21}(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } k>K_{21} \text{ и } x\in[x_0,x_*].$$

Если же $\overline{\alpha}_{21}=+\infty$, то выберем достаточно большое число $x_1>x_*$ так, чтобы соблюдалось неравенство

$$\int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|\, e^{-\int\limits_{x_0}^{\tau} p_{22}(s)ds}d\tau \le \frac{\varepsilon}{8b_0M}\int\limits_{x_*}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|\, e^{-\int\limits_{x_0}^{\tau} p_{22}(s)ds}d\tau,$$

и подберем натуральное $K_{21}(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$|z_1^k(x)-z_1^0(x)|<\frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{при } k>K_{21} \text{ и } x\in[x_0,x_1].$$

Тогда при $x \in [x_0, x_*]$ и $k > K_{21}$ будем иметь

$$\left|\int\limits_{+\infty}^{x} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right| =$$

$$= e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \left(\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau\right) \le$$

$$\le e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \left(\frac{\varepsilon}{4M}\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau + 2b_0 \int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau\right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4M} e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \left(\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau + \int\limits_{x_*}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau\right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2M} e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \int\limits_{x}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau = \frac{\varepsilon}{2M}|P_{21}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая теперь, что $\lim\limits_{k\to+\infty} r_{2j}(x, z_1^k(x), z_2^k(x)) = r_{2j}(x, z_1^0(x), z_2^0(x))$ $(j = 1, 2)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0; +\infty[$, аналогично предыдущему устанавливаем существование натурального K_{22} такого, что при $k > K_{22}$ и $x \in [x_0, x_*]$ соблюдается неравенство

$$\left|\int\limits_{\bar{\beta}_2}^{x} |g_2(\tau)| \sum_{j=1}^{2} |r_{2j}(\tau, z_1^k(\tau), z_2^k(\tau)) - r_{2j}(\tau, z_1^0(\tau), z_2^0(\tau))|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из вышеизложенного ясно, что

$$\left|\Phi_2(z^k)(x) - \Phi_2(z^0)(x)\right| < \varepsilon \quad \text{при } k > K_2 = \max\{K_{21}, K_{22}\} \quad \text{и } x \in [x_0, x_*].$$

Таким же способом с использованием уже установленного факта, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \Phi_2(z^k)(x) = \Phi_2(z^0)(x)$ равномерно на любом отрезке из промежутка $[x_0, +\infty[$, доказываем при любых $\varepsilon > 0$ и $x_* \in [x_0, +\infty[$ существование натурального K_1, для которого соблюдается неравенство (2.14) при $i = 1$.

Далее покажем, что функции из множества образов $\Phi(S)$ являются равностепенно непрерывными и равномерно ограниченными на каждом отрезке из промежутка $[x_0, +\infty[$. Вследствие того, что Φ отображает ограниченное множество S в себя, функции из $\Phi(S)$ равномерно ограничены на $[x_0, +\infty[$. Кроме того, в силу (2.12) для любой функции $z \in S$

$$\Phi_2'(z)(x) = f_2(x) + p_{21}(x)z_1(x) + p_{22}(x)\Phi_2(z)(x) + g_2(x)\sum_{j=1}^{2} r_{2j}(x, z_1(x), z_2(x)),$$

$$\Phi_1'(z)(x) = f_1(x) + \sum_{j=1}^{2} p_{1j}(x)\Phi_j(z)(x) + g_1(x)\sum_{j=1}^{2} r_{1j}(x, z_1(x), z_2(x)).$$

Отсюда с учетом условий $z \in S$, $\Phi(S) \subset S$, (2.9) и (2.11) имеем

$$|\Phi_i'(z)(x)| \le |f_i(x)| + b_0 \sum_{j=1}^{2} |p_{ij}(x)| + |g_i(x)|(\varepsilon_{01} + 2b_0\varepsilon_{02}) \quad (i = 1, 2)$$

при $x \in [x_0, +\infty[$. Поэтому ввиду непрерывности функций f_i, g_i $(i = 1, 2)$, p_{ij} $(i, j = 1, 2)$ на промежутке $[x_0, +\infty[$ для любых $x_* \ge x_0$ и $x^* \ge x_*$ существует число $M_* > 0$, не зависящее от $z \in S$, такое, что $|\Phi_i'(z)(x)| \le M_*$ ($i = 1, 2$) при $x \in [x_*, x^*]$. Отсюда следует, что функции из множества образов $\Phi(S)$ равностепенно непрерывны на каждом конечном отрезке из $[x_0, +\infty[$.

Таким образом, для Φ выполнены все условия теоремы Шаудера–Тихонова (см. [12], стр. 9) Значит, существует $z \in S$, для которого верно равенство $\Phi(z) = z$. Эта вектор-функция $z : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}^2_{b_0}$, очевидно, является решением системы (2.1).

Покажем, что это решение стремится к нулю при $x \to +\infty$. Допустим противное. Тогда $\max\limits_{i=1,2}\{\limsup\limits_{x\to+\infty} |z_i(x)|\} = \limsup\limits_{x\to+\infty} |z_l(x)| = c_0 > 0$ $(c_o \le b_0)$ и, следовательно, для некоторой возрастающей последовательности $\{x_k\}$, такой, что $x_k \ge x_0$, $x_k \to +\infty$ справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{k\to+\infty} |z_l(x_k)| = c_0$. Поэтому для числа $\varepsilon \in \left]0, \frac{c_0(1-q)}{1+q}\right[$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что соблюдаются неравенства

$$\begin{array}{lll} |z_l(x_k)| > c_0 - \varepsilon & & \text{при} \quad k \ge N, \\ |z_i(x)| < c_0 + \varepsilon & (i = 1, 2) & \text{при} \quad x \ge x_N. \end{array} \tag{2.15}$$

В силу второго из этих неравенств, а также (2.4), (2.5) и (2.9) из (2.12) с учетом того, что $z \in S$ и $\Phi_i(z) = z_i$ $(i = 1, 2)$, получим неравенства

$$|z_i(x)| \le \tilde{A}_i(z)(x) + (c_0 + \varepsilon)\tilde{B}_i(x) \quad (i = 1, 2) \quad \text{при} \quad x \ge x_N, \tag{2.16}$$

в которых

$$\tilde{A}_2(z)(x) = C_2 e^{\int_a^x p_{22}(s)ds} + |F_2(x)| + \left| \int_{\tilde{\beta}_2}^x |g_2(\tau)||r_{21}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau \right|,$$

$$\tilde{A}_1(z)(x) = C_1 e^{\int_a^x p_{11}(s)ds} + |F_1(x)| + \left| \int_{\tilde{\beta}_1}^x |g_1(\tau)||r_{11}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))| e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_{\tilde{\alpha}_{12}}^x |p_{12}(\tau)| \tilde{A}_2(z)(\tau) e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau \right|,$$

$$\tilde{B}_2(x) = 2\varepsilon_{02} \left| \int_{\tilde{\beta}_2}^x |g_2(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau \right| + \left| \int_{\tilde{\alpha}_{21}}^x |p_{21}(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau \right|,$$

$$\tilde{B}_1(x) = 2\varepsilon_{02}\left|\int\limits_{\tilde{\beta}_1}^{x}|g_1(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x}p_{11}(s)ds}d\tau\right| + \left|\int\limits_{\tilde{\alpha}_{12}}^{x}|p_{12}(\tau)|B_2(\tau)e^{\int\limits_{\tau}^{x}p_{11}(s)ds}d\tau\right|,$$

где каждая из постоянных C_i $(i \in \{1,2\})$ не меньше $|c_i|$ при выполнении условия (2.7) и равна нулю — в противном случае, а каждый из пределов интегрирования $\tilde{\beta}_i$ $(i \in \{1,2\})$, $\tilde{\alpha}_{12}$, $\tilde{\alpha}_{21}$ равен x_N ($+\infty$), если в (2.12) соответственно предел интегрирования $\overline{\beta}_i$ $(i \in \{1,2\})$, $\overline{\alpha}_{12}$, $\overline{\alpha}_{21}$ был равен x_0 ($+\infty$).

Ввиду условий (2.2), (2.4), (2.5), (2.7) и леммы 1.2 из работы [13] $\lim\limits_{x\to+\infty}\tilde{A}_i(z)(x) = 0$ $(i = 1,2)$, а согласно условиям (2.8) $\tilde{B}_i(x) < q$ $(i = 1,2)$ при $x \in [x_N, +\infty[$. Поэтому из (2.16) с учетом первого из неравенств (2.15) имеем

$$c_0 - \varepsilon < \tilde{A}_l(x_k) + (c_0+\varepsilon)q \qquad \text{при} \quad k \geq N,$$

откуда следует, что $c_0(1-q) - \varepsilon(1+q) < \tilde{A}_l(x_k)$ при $k \geq N$, чего быть не может, поскольку здесь в силу выбора числа ε слева стоит положительное число, а выражение, стоящее справа, стремится к нулю при $k \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что решение $z \in S$ операторного уравнения $\Phi(z) = z$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. Это решение в силу (2.12) зависит также от постоянных c_i $(i = 1,2)$, которые выбирались произвольными фиксированными вещественными числами, удовлетворяющими неравенствам $0 \leq |c_i| \leq |c_i^0|$ $(i = 1,2)$, где $c_i^0 \neq 0$, если соблюдается условие (2.7) и $c_i^0 = 0$ в противном случае. Значит, при наличии k функций p_{ii} $(i \in \{1,2\})$, для которых выполняется условие (2.7), система дифференциальных уравнений (2.1) имеет k-параметрическое семейство решений $(z_i)_{i=1}^2 : [x_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_{b_0}$, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$.

Лемма полностью доказана.

Из данной леммы с использованием лемм 1.1–1.3 из работы [13] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть функции* f_i, g_i $(i = 1,2)$, p_{ij} $(i,j = 1,2)$ *допускают представления в виде суммы двух непрерывных на промежутке* $[a, +\infty[$ *функций*

$$f_i(x) = \sum_{\nu=1}^{2} f_{\nu i}(x), \quad g_i(x) = \sum_{\nu=1}^{2} g_{\nu i}(x), \quad p_{ij}(x) = \sum_{\nu=1}^{2} p_{\nu ij}(x)$$

таких, что соблюдаются следующие условия:

1) *при любом* $i \in \{1,2\}$

$$\int\limits_a^{+\infty}|f_{2i}(x)|\,dx < \infty, \quad \int\limits_a^{+\infty}|g_{2i}(x)|\,dx < \infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\int\limits_a^{x}p_{2ii}(\tau)\,d\tau = const,$$

$$\int\limits_a^{+\infty}|p_{2ij}(x)|\,dx < \infty \quad (j \neq i, j \in \{1,2\});$$

2) *для некоторого множества* $M \subset \{1,2\}$ *при любом* $i \in M$

$$p_{1ii}(x) \neq 0 \quad \textit{в некоторой окрестности} + \infty, \qquad \int\limits_a^{+\infty}p_{1ii}(\tau)d\tau = \pm\infty,$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{f_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)}=0,\quad \limsup_{x\to+\infty}\frac{g_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)}=G_i^0=const,$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{p_{1ij}(x)}{p_{1ii}(x)}=P_{ij}^0=const\quad (j\neq i, j\in\{1,2\})$$

и при любом $i\in\{1,2\}\setminus M$

$$f_{1i}(x)\equiv 0,\quad g_{1i}(x)\equiv 0,\quad p_{1ij}(x)\equiv 0\quad (j=1,2).$$

Пусть, кроме того, выполняются условия (2.2), (2.3) *и постоянные, определяемые следующим образом*

$$B_2^0=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \ 2\notin M,\\ |P_{21}^0|, & \textit{если}\ \ 2\in M,\end{cases}\qquad B_1^0=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \ 1\notin M,\\ B_2^0|P_{12}^0|, & \textit{если}\ \ 1\in M,\end{cases}$$

таковы, что $B_i^0<1$ *при* $i\in M$ *. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) имеет по крайней мере одно решение* $(z_i)_{i=1}^2 : [x_0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}\ (x_0\geq a)$, *стремящееся к нулю при* $x\to+\infty$ *, причем таких решений существует целое* k *-параметрическое семейство, если среди функций* p_{1ii} $(i\in M)$ *имеется* k *функций, которые отрицательны в некоторой окрестности* $+\infty$ *.*

С использованием леммы 2 и преобразований из доказательства теоремы 2.1 работы [13] легко может быть установлено также следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть соблюдаются условия* (2.2) *,* (2.3) *,* $g_i(x)\equiv 1$ $(i=1,2)$ *,* $\int\limits_a^{+\infty}|f_i(x)|\,dx<+\infty$ $(i=1,2)$ *, функции* p_{ij} $(i,j=1,2)$ *представимы в виде*

$$p_{ij}(x)=p_{ij}^0+q_{ij}(x),$$

где p_{ij}^0 $(i,j=1,2)$ *— вещественные постоянные, а* $q_{ij}:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}\ (i,j=1,2)$ *— непрерывные функции такие, что* $\int\limits_a^{+\infty}|q_{ij}(x)|\,dx<+\infty$ $(i,j=1,2)$ *. Пусть, кроме того, алгебраическое уравнение*

$$\rho^2-(p_{11}^0+p_{22}^0)\rho+p_{11}^0p_{22}^0-p_{12}^0p_{21}^0=0 \tag{2.17}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) *имеет по крайней мере одно решение* $(z_i)_{i=1}^2$: $[x_0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(x_0\geq a)$ *, стремящееся к нулю при* $x\to+\infty$ *, причем таких решений существует целое 2-параметрическое семейство в случае, когда* $p_{11}^0p_{22}^0-p_{12}^0p_{21}^0>0$ *и* $p_{11}^0+p_{22}^0<0$ *, и однопараметрическое семейство, когда* $p_{11}^0p_{22}^0-p_{12}^0p_{21}^0<0$ *.*

Замечание 3. *Из этой леммы в частном случае, когда* $f_i(x)\equiv 0$ $(i=1,2)$ *и* $q_{ij}(x)\equiv 0$ $(i,j=1,2)$ *вытекает лемма 1 из работы [14].*

3. Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $\lambda_0\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ и $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ — решение уравнения (1.1). Тогда, как было указано в п. 1, существует число $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что $y(t) \in \Delta_{Y_0}(b)$ и $\operatorname{sign} y'(t) = \mu_1$ при $t \in [t_1, \omega[$.

Так как для любого $t \in [t_1, \omega[$ справедливо равенство

$$\left(\frac{y(t)}{y'(t)}\right)' = 1 - \frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2},$$

то в силу (1.6), (1.7) выполнено (1.16) и поэтому ввиду (1.7)

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{1}{\lambda_0 - 1} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что y' является правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ функцией порядка $\dfrac{1}{\lambda_0 - 1}$. Значит, соблюдается условие (1.12) и для некоторого числа $a_1 \in \in [t_1, \omega[$ $\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} \in \Delta_{Y_1}$ при $t \in [a_1, \omega[$

Из уравнения (1.1) с учетом (1.2), (1.7) и условия S_1 получим асимптотическое представление

$$\frac{(y'(t))^2}{y(t)} \sim \alpha_0 \lambda_0 p(t) \varphi_0(y(t)) |y'(t)|^{\sigma_1} L_1 \left(\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда вытекает первое из неравенств (1.14) и в силу (1.16) — второе из этих неравенств, а также асимптотическое соотношение вида

$$\frac{|y(t)|^{-\sigma_1}\, y'(t)}{\varphi_0(y(t))} \sim \frac{\gamma_1\, p(t)\, \pi_\omega(t) L_1 \left(\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right)}{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_1}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.2}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от a_1 до t и учитывая, что $\sigma_0 + + \sigma_1 \neq 1$, получим асимптотическое представление

$$\Phi(y(t)) = \gamma_1\, I_1(t)(1 + o(1)) \;\; \text{при} \;\; t \uparrow \omega,$$

где Φ — функция, определенная в п. 1. Отсюда с использованием (1.9) получаем представление (1.15). Из (3.2) и (1.15) вытекает с учетом (1.16) условие (1.13). В силу представления (1.15) и вида функции I_1 соблюдается условие (1.11).

Достаточность. Пусть $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ и выполнены условия (1.10)–(1.14). Покажем, что уравнение (1.1) имеет $P(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$ решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.15), (1.16).

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\Phi(y(t)) = \gamma_1\, I_1(t)(1 + z_1(x)), \;\; \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}\; (1 + z_2(x)), \tag{3.3}$$

где

$$x = \beta \ln|\pi_\omega(\mathrm{t})|, \quad \beta = \begin{cases} \;\;1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \tag{3.4}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = \beta \left(R_1(t(x), z_1)(1 + z_2) - h(t(x))(1 + z_1)\right), \\[2ex] z_2' = \dfrac{\beta}{1 - \lambda_0} \left(\lambda_0 z_2^2 + (\lambda_0 + 1) z_2 + 1 - \dfrac{h(t(x)) R_2(t(x), z_1, z_2)}{R_1(t(x), z_1)} |1 + z_2|^{\sigma_1}\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

в которой

$$h(t) = \frac{\pi_\omega(t) I_1'(t)}{I_1(t)}, \quad R_1(t,z_1) = \frac{\lambda_0}{\gamma_1(\lambda_0 - 1)} \frac{|Y(t,z_1)|^{-\sigma_1} Y(t,z_1)}{I_1(t)\varphi_0(Y(t,z_1))},$$

$$R_2(t,z_1,z_2) = \frac{L_1(Y^{[1]}(t,z_1,z_2))}{L_1\left(\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)} \psi\left(t, Y(t,z_1), Y^{[1]}(t,z_1,z_2)\right),$$

$$Y(t,z_1) = \Phi^{-1}\left(\gamma_1 I_1(t)(1+z_1)\right), \quad Y^{[1]}(t,z_1,z_2) = \frac{\lambda_0 Y(t,z_1)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\,(1+z_2),$$

$t : [x_1, +\infty[\to [a_1, \omega[$ — функция, обратная к (3.4), где $x_1 = \beta \ln|\pi_\omega(a_1)|$.

Здесь, согласно (1.13),

$$\lim_{t\uparrow\omega} h(t) = \frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0 - 1}. \tag{3.6}$$

В силу условий (1.9), (1.11), (1.13), (1.14)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \gamma_1 I_1(t) = Z_0$$

и существует $t_0 \in [a_1, \omega[$ такое, что

$$\gamma_1 I_1(t)(1+z_1) \in \Delta_{Z_0}(c) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[\quad \text{и} \quad |z_1| \le \frac{1}{2},$$

где Z_0 и $\Delta_{Z_0}(c)$ определены в п. 1. Поэтому $Y(t,z_1) \in \Delta_{Y_0}(b)$, $\operatorname{sign} Y(t,z_1) = \mu_0$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $|z_1| \le \frac{1}{2}$, а также ввиду (1.8)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,z_1) = Y_0 \ \text{равномерно по} \ z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{3.7}$$

Согласно условию (1.9), функция Φ является при $y \to Y_0$ правильно меняющейся порядка $1 - \sigma_0 - \sigma_1$, откуда непосредственно вытекает, что функция Φ^{-1} при $z \to Z_0$ является правильно меняющейся порядка $\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$. Тогда в силу представления правильно меняющейся функции и свойства M_1 медленно меняющейся функции

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y(t,z_1)}{|1+z_1|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} Y(t,0)} = 1 \quad \text{равномерно по} \quad z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \tag{3.8}$$

и

$$Y(t,0) = \mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} + o(1)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.9}$$

Отсюда с учетом того, что функция I_1, согласно условию (1.13), является правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ функцией порядка $\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}$, а также условий (1.11), (1.12) и (1.14) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y^{[1]}(t,z_1,z_2) = Y_1 \quad \text{равномерно по} \ (z_1,z_2) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{3.10}$$

В силу (1.9) и (3.7)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\mu_0\,|Y(t,z_1)|^{1-\sigma_1}}{\varphi_0(Y(t,z_1))\Phi(Y(t,z_1))}=1-\sigma_0-\sigma_1 \quad \text{равномерно по} \quad z_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Поэтому имеют место представления

$$\frac{\mu_0\,\lambda_0|Y(t,z_1)|^{1-\sigma_1}}{(\lambda_0-1)\varphi_0(Y(t,z_1))}=\left[\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}+Q_1(t,z_1)\right]\Phi(Y(t,z_1)),$$

$$\frac{(\lambda_0-1)\varphi_0(Y(t,z_1))}{\mu_0\,\lambda_0\,|Y(t,z_1)|^{1-\sigma_1}}=\frac{\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}+Q_2(t,z_1)}{\Phi(Y(t,z_1))},$$

где функции Q_i $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q_i(t,z_1)=0 \ \ (i=1,2) \quad \text{равномерно по} \quad z_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.11}$$

Поскольку $\Phi(Y(t,z_1))=\gamma_1 I_1(t)[1+z_1]$, то из этих представлений следует, что

$$R_1(t,z_1)=\left[\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}+Q_1(t,z_1)\right](1+z_1), \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{R_1(t,z_1)}=\frac{\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}+Q_2(t,z_1)}{1+z_1}. \tag{3.13}$$

Далее, в силу (1.2), (3.8)–(3.10), (1.13), свойства M_1 медленно меняющихся функций и условия (S_1)

$$\lim_{t\uparrow\omega}R_2(t,z_1,z_2)=1 \quad \text{равномерно по} \quad (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

откуда с учетом (3.6) и (3.13) следует, что

$$\frac{h(t)R_2(t,z_1,z_2)}{R_1(t,z_1)}=\frac{1+Q_3(t,z_1,z_2)}{1+z_1}, \tag{3.14}$$

где функция Q_3 удовлетворяет условию

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q_3(t,z_1,z_2)=0 \quad \text{равномерно по} \quad (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.15}$$

Используя теперь представления (3.13) и (3.14), перепишем систему дифференциальных уравнений (3.5) в виде

$$z_i'=\sum_{j=1}^{2}p_{ij}^0 z_j+\sum_{j=1}^{2}r_{ij}(x,z_1,z_2) \quad (i=1,2), \tag{3.16}$$

где

$$p_{11}^0=0, \quad p_{12}^0=\frac{\beta\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}, \quad p_{21}^0=\frac{\beta}{1-\lambda_0}, \quad p_{22}^0=\frac{\beta(\lambda_0+1-\sigma_1)}{1-\lambda_0},$$

$$r_{11}(x,z_1,z_2)=\beta\left[Q_1(t(x),z_1)(1+z_1)(1+z_2)-\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}+h(t(x))\right],$$

$$r_{12}(x,z_1,z_2)=\frac{\beta\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)z_1z_2}{\lambda_0-1},\quad r_{21}(x,z_1,z_2)=\frac{\beta Q_3(t(x),z_1,z_2)|1+z_2|^{\sigma_1}}{(\lambda_0-1)(1+z_1)},$$

$$r_{22}(x,z_1,z_2)=\frac{\beta}{1-\lambda_0}\left[\lambda_0 z_2^2-\left(\frac{|1+z_2|^{\sigma_1}}{1+z_1}-1-\sigma_1 z_2+z_1\right)\right].$$

Здесь в силу (3.4) и условий (3.6), (3.11), (3.15)

$$\lim_{x\to+\infty} r_{i1}(x,z_1,z_2)=0\ (i=1,2)\ \text{равномерно по}\ (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

и

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{r_{i2}(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0\quad (i=1,2)\quad \text{равномерно по}\quad x\in[x_0,+\infty),$$

где $x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_0)|$. Кроме того, алгебраическое уравнение (2.17) имеет вид

$$\rho^2-\frac{\beta(\lambda_0+1-\sigma_1)}{1-\lambda_0}\rho+\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{(1-\lambda_0)^2}=0.$$

Это уравнение ввиду условий $\lambda_0\neq 0$, $\lambda_0\neq 1$, $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$ и (1.10) не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому, согласно лемме 3, система дифференциальных уравнений (3.16) имеет по крайней мере одно решение $(z_i)_{i=1}^2 : [x_2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$, где $x_2\geq x_0$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$, причем существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$, и двупараметрическое — в случае, когда $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ и $\beta(\lambda_0-1)(1+\lambda_0-\sigma_1)>0$. Каждому такому решению системы (3.16) в силу замен (3.3), (3.4) и асимптотического соотношения (1.9) соответствует решение $y:[t_2,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$, где $t_2\in[t_0,\omega[$, дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее асимптотическим соотношениям (1.15), (1.16). Используя эти соотношения, а также условия (1.11)–(1.14), нетрудно убедиться в том, что любое такое решение уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением.

Теорема полностью доказана.

Заключение. В настоящей заметке для нового класса дифференциальных уравнений второго порядка, в некотором смысле близких к обобщенным уравнениям типа Эмдена-Фаулера, получены необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические при $t\uparrow\omega$ представления т. н. $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решений в неособом случае, когда $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Ввиду произвольности выбора $Y_i\in\{0,\pm\infty\}$ $(i=0,1)$ и $\omega\leq+\infty$ эти решения охватывают различные типы правильных и сингулярных монотонных решений. В отличие от работ [9-11], в которых рассматривался частный случай уравнения (1.1) ($\psi(t,y,y')\equiv 0$), здесь сняты ограничения на гладкостные свойства функций φ_i $(i=0,1)$. Добиться этого удалось благодаря более полному использованию свойств непрерывных правильно меняющихся функций, а также установлению новых результатов (леммы 1–3) о существовании исчезающих в бесконечности решений у систем квазилинейных дифференциальных уравнений.

1. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции [текст] / Сенета Е. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
2. **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / И. Т. Кигурадзе , Т. А. Чантурия. – М.: Наука, 1991. – 430 с.
3. **Костин А. В.** Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена-Фаулера [текст] / А. В. Костин // Докл. АН СССР. – 1971. – 200, № 1. – С. 28–31.
4. **Костин А. В.** Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения [текст] / А. В. Костин , В. М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1976. – 231, № 5. – С. 1059–1062.
5. **Евтухов В. М.** Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка [текст] / В. М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233, № 4. – С. 531–534.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена-Фаулера: Дисс.канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Дифференциальные уравнения и математическая физика" [текст] / В. М. Евтухов. – Одесса, 1980. – 154 с.
7. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, № 3. – С. 473–476.
8. **Евтухов В. М.** Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов // Math.Nachr. – 1984. – 115. – P. 215–236.
9. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // УМЖ. – 2008. – 60, № 3. – С. 310–331.
10. **Белозерова М. А.** Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / М. А. Белозерова // Мат. студії. – 2008. – Т. 29, № 1. – С. 52–62.
11. **Білозерова М. О.** Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих [текст] / М. О. Білозерова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: Рута. – 2008. – Вип. 374. – С. 34–43.
12. **Coppel W. A.** Stability and asymptotic behaviour of differential equations [text] / W. A. Coppel. – Boston, Heats and company, 1965.
13. **Евтухов В. М.** Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов // Дифференц.уравнения. – 2003. – 39, № 4. – С. 433–444.
14. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, В. М. Харьков // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 1311–1323.
15. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: автореф. дис. док-ра физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Дифференциальные уравнения" [текст] / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 294 с.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 75–90

УДК 517.925

А. А. Козьма
Одесский государственный экономический университет

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Козьма О. О. Ознаки існування одного класу розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Встановлено асимптотичні зображення для розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків із нелінійностями більш загального виду, ніж нелінійності типу Емдена-Фаулера.
Ключові слова: рівняння Емдена-Фаулера, асимптотичні зображення, неколивні розв'язки.

Козьма А. А. Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Установлены условия существования и асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части нелинейности более общего вида, чем нелинейности типа Эмдена-Фаулера.
Ключевые слова: уравнение Эмдена-Фаулера, асимптотические представления, неколеблющиеся решения.

Kozma A. A. Existence conditions for one class solutions of second-order nonlinear differential equations. We find asymptotic representations for solutions of second-order differential equations that have righthand sides containing nonlinearities of a more general form than the Emden-Fowler type nonlinearities.
Key words: Emden-Fowler equations, asymptotic representations, nonoscillation solutions.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{io}(y)\varphi_{i1}(y'), \qquad (1)$$

в котором $\alpha_i \in \{-1; 1\}$ $(i = 1, ..., m)$, $p_i : [a, \omega) \to (0, +\infty)$ $(i = 1, ..., m; -\infty < < a < \omega \le +\infty^1)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ $(i = \ = 1, ..., m)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \to \omega} r_i(t) = 0 \qquad (i = 1, ..., m), \qquad (2)$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \longrightarrow (0, +\infty)$ $(k = 0, 1;\ i = 1, \dots, m)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции,

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо} & [y_k^0, Y_k), \\ \text{либо} & (Y_k, y_k^0], \end{cases} \quad y_k^0 \in \mathbb{R}, \quad Y_k = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty \end{cases} \qquad (k = 0, 1)^2, \qquad (3)$$

[1] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$
[2] При $Y_k = +\infty$ $(Y_k = -\infty)$ считаем, что $y_k^0 > 0$ $(y_k^0 < 0)$.

причем φ_{ik} таковы, что при каждом $k \in \{0,1\}$

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0, \quad 0 \le \varphi_{ik}^0 \le +\infty \quad (i = 1, \dots, m) \tag{4}$$

и если $\varphi_{ik}(z) \not\equiv const$ на промежутке Δ_k, то

$$\begin{array}{c} \varphi'_{ik}(z) \ne 0 \ \text{ при } z \in \Delta_k, \lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = const, \\ \limsup_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \left| \frac{z\varphi''_{ik}(z)}{\varphi'_{ik}(z)} \right| < +\infty. \end{array} \tag{5}$$

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Определение 1. *Решение y уравнения (1) называется $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям*

$$y^{(k)} : [t_0, \omega) \to \Delta_k, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = Y_k \quad (k = 0, 1), \tag{6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0 \ \textit{ и при } \ \mu_0 = \pm\infty \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t) y(t)}{[y'(t)]^2} = 1. \tag{7}$$

Разобъем множество $M = \{1, 2, ..., m\}$ на четыре непересекающиеся подмножества

$$M_1 = \{i \in M : \varphi_{ik}^0 = const \ne 0, k = 0, 1\},$$
$$M_2 = \{i \in M \backslash M_1 : \varphi_{i1}^0 = const \ne 0\}, \ M_3 = \{i \in M \setminus M_1 : \varphi_{i0}^0 = const \ne 0\},$$
$$M_4 = M \backslash (M_1, M_2, M_3).$$

В [1] для каждого $i \in M_{2+k}$ $(k = 0, 1)$ приведены условия, при выполнении которых в случае $\mu_0 \in \mathbb{R}$ на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решении уравнения (1) правая его часть асимптотически эквивалентна i-му слагаемому. При соблюдении этих условий там же для $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ были сформулированы необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решений, а также асимптотические представления этих решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$. Однако остались неисследованными те $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решения, для которых $\mu_0 \in \{-1; 0\}$. Именно им посвящена данная работа.

Основные результаты.

Приведем сначала два априорных свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решений.

Лемма 1. *Пусть $y : [t_0, \omega) \to \Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решение уравнения (1). Тогда имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 1 + \mu_0 \quad \textit{при} \ |\mu_0| < +\infty,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty \quad \textit{при} \ \mu_0 = \pm\infty.$$

Лемма 2. *Пусть* $|\mu_0| < +\infty$, $M_{2+k} \neq \varnothing$ $(k \in \{0,1\})$ *и для некоторого* $i \in M_{2+k}$ *соблюдаются условия*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < \xi_{ij}^0 \quad \textit{при} \quad j \in M \setminus \{i\}, \tag{8}$$

где

$$\xi_{ij}^0 sign\pi_\omega(t) = \begin{cases} (1-k+\mu_0)\sigma_{ik}, & \textit{если} \quad j \in M_1, \\ (1-k+\mu_0)(\sigma_{ik}-\sigma_{jk}), & \textit{если} \quad j \in M_{2+k}, \\ (1-k+\mu_0)\sigma_{ik} - (k+\mu_0)\sigma_{j1-k}, & \textit{если} \quad j \in M_{3-k}, \\ (1-k+\mu_0)(\sigma_{ik}-\sigma_{jk}) - (k+\mu_0)\sigma_{j1-k}, & \textit{если} \quad j \in M_4. \end{cases}$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *— решения уравнения (1) выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in M\backslash\{i\}. \tag{9}$$

Доказательство леммы 1 при различных значениях Y_0 и μ_0 содержится в работах [2,3] , а леммы 2 — в работе [1].

Теперь при $k \in \{0,1\}$, $i \in M_{2+k}$ и $\sigma_{ik} \neq 1$ введем функцию

$$\Phi_{ik}(s) = \int_{B_{ik}}^{s} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)},$$

где

$$B_{ik} = \begin{cases} y_k^0, & \text{если} \quad |\int_{y_k^0}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}| = +\infty, \\ Y_k, & \text{если} \quad |\int_{y_k^0}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}| < +\infty. \end{cases}$$

Для этой функции существует обратная функция Φ_{ik}^{-1} , определенная при $B_{ik} = y_k^0$ на бесконечном промежутке

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} [0;+\infty), & \text{если} \quad (1-\sigma_{ik})y_k^0 > 0, \\ (-\infty;0], & \text{если} \quad (1-\sigma_{ik})y_k^0 < 0, \end{cases} \tag{10}$$

и при $B_{ik} = Y_k$ на конечном промежутке

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} (0;b_{ik}], & \text{если} \quad (1-\sigma_{ik})y_k^0 > 0, \\ (b_{ik};0), & \text{если} \quad (1-\sigma_{ik})y_k^0 < 0, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$b_{ik} = \int_{Y_k}^{y_k^0} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}.$$

Для функций Φ_{ik} и Φ_{ik}^{-1} имеют место предельные соотношения

$$\lim_{s\to Y_k}\Phi_{ik}(s)=\infty\,,\ \lim_{z\to\infty}\Phi_{ik}^{-1}(z)=Y_k \quad (\text{при}\, B_{ik}=y_k^0), \tag{12}$$

$$\lim_{s\to Y_k}\Phi_{ik}(s)=0\,,\ \lim_{z\to 0}\Phi_{ik}^{-1}(z)=Y_k \quad (\text{при}\, B_{ik}=Y_k). \tag{13}$$

Кроме того, применяя правило Лопиталя, с учетом первого из предельных соотношений (5) получаем

$$\lim_{\substack{s\to Y_k\\ s\in\Delta_k}}\frac{\Phi_{ik}(s)}{\frac{s}{\varphi_{ik}(s)}}=\frac{1}{1-\sigma_{ik}} \quad (k=0,1). \tag{14}$$

Для формулировки основных результатов введем вспомогательные обозначения

$$I_{i1}(t)=\int_{I_{i1}^0}^{t}p_i(s)ds,\ \ Q_{i1}(t)=\int_{Q_{i1}^0}^{t}I_{i1}(s)ds,$$

$$I_{i2}(t)=\int_{I_{i2}^0}^{t}\pi_\omega(s)p_i(s)ds,\ \ Q_{i2}(t)=\int_{Q_{i2}^0}^{t}\frac{p_i(t)}{I_{i2}(s)}ds,$$

где пределы интегрирования $I_{ik}^0,\ Q_{ik}^0$ $(k=1,2)$ равны a или ω и выбраны так, чтобы соответствующие интегралы стремились при $t\uparrow\omega$ либо к нулю, либо к бесконечности (аналогично B_{ik}).

Теорема 1. *Пусть* $\mu_0=-1$, $M_2\neq\varnothing$ *и для некоторого* $i\in M_2$ *соблюдаются условия (8) и* $\sigma_{i0}\neq 1$. *Тогда для существования у уравнения (1)* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ *— решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_0=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}}=+\infty,\\[2ex] 0, & \text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}}=0,\end{cases}$$
$$Y_1=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если } \omega<+\infty,\\[2ex] 0, & \text{если } \omega=+\infty,\end{cases} \tag{15}$$

при $t\in(a,\omega)$ *выполнялись неравенства*

$$-\alpha_i(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)y_0^0>0, \quad -\alpha_i\pi_\omega(t)y_1^0>0, \tag{16}$$

имели место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)}=0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)Q'_{i2}(t)}{Q_{i2}(t)}=-1. \tag{17}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\begin{gathered}\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = -\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)[1+0(1)],\\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)\pi_\omega(t)}{(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)}[1+0(1)].\end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ – решение уравнения (1). Тогда из первого из условий (7) вытекает справедливость второго из условий (15). В силу (8) и $\sigma_{i0}\neq 1$ из уравнения (1) с учетом леммы 2 следует, что

$$y''(t) = \alpha_i\varphi_{i1}^0 p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))[1+0(1)] \quad \text{при } t\uparrow\omega. \tag{19}$$

Отсюда, принимая во внимание первое из условий (7), получим

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = -\alpha_i\varphi_{i1}^0 p_i(t)\pi_\omega(t)[1+0(1)] \quad \text{при } t\uparrow\omega, \tag{20}$$

из чего следует выполнение второго из неравенств (16).
Далее, применяя правило Лопиталя в форме Штольца, с учетом (20), второго из (5) и условия $\sigma_{i0}\neq 1$ получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)}{I_{i2}(t)\varphi_{i0}(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\left(1-\frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}\right)}{p_i(t)\pi_\omega(t)} = -\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})$$

или

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = -\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)[1+0(1)] \quad \text{при } t\uparrow\omega. \tag{21}$$

Из последнего соотношения вытекает справедливость первого из неравенств (16) и первого из асимптотических представлений (18).
В силу (20) и (21)

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)\pi_\omega(t)}{(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)}[1+0(1)] \quad \text{при } t\uparrow\omega. \tag{22}$$

Из (22) следует выполнение первого из условий (15) и второго из асимптотических представлений (18). В свою очередь, из второго из асимптотических представлений (18) с учетом леммы 1 вытекает справедливость первого из предельных соотношений (17).
Из (19) и (21) находим

$$\frac{y''(t)}{y(t)} = -\frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)}[1+0(1)] \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{23}$$

Поскольку $\frac{y''}{y} = (\frac{y'}{y})' + (\frac{y'}{y})^2$, то, учитывая (22),(23) и первое из условий (17), получим

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' = -\frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)}[1+0(1)].$$

Из этого представления с учетом определения $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ — решения следует, что

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{Q_{i2}(t)}{1-\sigma_{i0}}[1+0(1)].$$

Сравнивая это соотношение с (22), получим второе из условий (17).

Достаточность . Пусть выполняются условия (15)–(17). В силу (10)–(13), а также (15) и (16) однозначно определяются значения Y_k и промежутки Δ_k, Δ_{ik} $(k = 0, 1)$. Установив Y_k и Δ_k $(k = 0, 1)$, докажем существование у уравнения (1) хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ — решения, которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (18). Для этого применим к уравнению (1.1) преобразование

$$\Phi_{i0}(y(t)) = -\alpha_i \varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)[1+v_1(x)], \ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{-1}{1-\sigma_{i0}} Q_{i2}(t)[1+v_2(x)], \tag{24}$$

$$x = \beta \ln |I_{i2}(t)|, \quad \text{где} \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad I_{i2}^0 = a, \\ -1, & \text{если} \quad I_{i2}^0 = \omega. \end{cases}$$

В силу первых из условий (15) и (16) можно выбрать $t_1 \in [t_0, \omega)$ так, что $-\alpha_i I_{i2}(t)\varphi_{i1}^0 \subset \Delta_{i0}$ при $t \in [t_1, \omega)$. Тогда из первого соотношения (24) и свойств функции Φ_{i0} следует, что при $t_\in [t_1, \omega)$, $|v_1| \le \frac{1}{2}$ имеет место равенство $y(t) = Y_i(t, v_1)$, в котором

$$Y_i(t, v_1) = \Phi_{i0}^{-1}(-\alpha_i \varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)[1+v_1]), \tag{25}$$

где t-функция, обратная к $x = \beta \ln |I_{i2}(t)|$.
Для функции Y_i, в силу (10)–(13), имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y_i(t, v_1) = Y_0 \ \text{ равномерно по } \ v_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], \tag{26}$$

$$Y_i(t, v_1) \subset \Delta_0 \quad \text{ при } \ t \in [t_1, \omega), v_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]. \tag{27}$$

Кроме того, при каждом фиксированном значении $v_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ имеем

$$(Y_i(t, v_1))'_t = \varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))(-\alpha_i \varphi_{i1}^0 \pi_\omega(t) p_i(t)[1+v_1]). \tag{28}$$

Тогда, применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1)) I_{i2}(t)} = -\alpha_i(1-\sigma_{i0})\varphi_{i1}^0[1+v_1]$$

или

$$Y_i(t, v_1) = -\alpha_i(1-\sigma_{i0})\varphi_{i1}^0 \varphi_{i0}(Y_i(t, v_1)) I_{i2}(t)[1+v_1][1+0(1)] \tag{29}$$

при $t \uparrow \omega$ и фиксированном $v_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
Из (28) и (29) с учетом первого из (17) получим (при любом фиксированном

$v_1 \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$) предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_i(t,v_1))'_t}{Y_i(t,v_1)}=\frac{1}{1-\sigma_{i0}}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)}=0. \tag{30}$$

Введем также функцию

$$Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)=-\frac{Q_{i2}(t)}{1-\sigma_{i0}}Y_i(t,v_1)[1+v_2], \tag{31}$$

определенную при $t\in[t_1,\omega)$, $|v_k|\le\frac{1}{2}$ $(k=1,2)$.
Для нее имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)}=\lim_{t\uparrow\omega}(\frac{\pi_\omega(t)Q'_{i2}(t)}{Q_{i2}(t)}+\frac{\pi_\omega(t)(Y_i(t,v_1))'_t}{Y_i(t,v_1)})=-1 \tag{32}$$

при фиксированных $v_k\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$, $k=1,2$.
В силу (29) и (31) при $t\uparrow\omega$

$$Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)=\alpha_i\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)Q_{i2}(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,v_1))[1+v_1][1+v_2][1+0(1)]. \tag{33}$$

Из (32) и (33) с учетом второго из неравенств (16), второго из предельных соотношений (17), представления (31) и монотонности функции Y_i по переменной v_1 получим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)=Y_1 \text{ равномерно по } v_k\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}],\ k=1,2, \tag{34}$$

$$Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\subset\Delta_1 \text{ при } t\in[t_2,\omega)\,,\text{ где } t_2\in[t_1,\omega). \tag{35}$$

В силу условий (3)–(5), (26), (27), (34), (35) следует, что равномерно по $|v_k|\le\frac{1}{2}$, ($k=1,2$) имеют место пределы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi'_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}=\sigma_{j0},\ j=\overline{1,m}, \tag{36}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}=\sigma_{j1},\ j=\overline{1,m}, \tag{37}$$

причем если $\lim\limits_{\substack{Y\to Y_k\\ Y\in\Delta_k}}\varphi_{jk}=const\ne0$, то $\sigma_{jk}=0$ ($k\in\{0,1\}$).

Поскольку выполняются условия (26), (27), (30), (32), (34)–(37), то при фиксированных $|v_k|\le\frac{1}{2}$ ($k=1,2$) функции $Y_i(t,v_1)$ и $Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)$ обладают всеми теми свойствами $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ — решений, которые использовались при доказательстве леммы 2 и, следовательно,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}=0,\quad j\in M\setminus\{i\}. \tag{38}$$

В результате преобразования (24) получим заданную на множестве

$$\Omega=[x_0;+\infty)\times D,\ x_0=\beta\ln|I_{i2}(t_3)|,\ D=\{(v_1,v_2):|v_k|\le\frac{1}{2},\ k=1,2\}$$

систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1'=\beta\left[-[1+v_1]+\dfrac{\alpha_i g_i(t)Y_i(t,v_1)}{\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,v_1))}[1+v_2]\right], \\ v_2'=\dfrac{\beta}{h_i(t)}\left[[-[1+v_2]+\dfrac{g_i(t)h_i(t)}{1-\sigma_{i0}}[1+v_2]^2+\dfrac{(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)}{p_i(t)Y_i(t,v_1)}\times\right. \\ \left.\times\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j[1+r_j(t)]p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t,v_1))\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2))\right], \end{cases} \tag{39}$$

в которой t — функция, обратная к $x=\beta\ln|I_{i2}(t)|$, $h_i(t)=\pi_\omega(t)Q_{i2}(t)$, $g_i(t)=\dfrac{I_{i2}(t)Q_{i2}(t)}{I_{i2}'(t)}$.

Заметим, что в силу условия (17) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}h_i(t)=0,\ \lim_{t\uparrow\omega}g_i(t)=-1. \tag{40}$$

На множестве Ω функции $\dfrac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_{i0}(Y_i(t,v_1))}$ и $\dfrac{\varphi_{j0}(Y_i(t,v_1))\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{Y_i(t,v_1)}$ являются непрерывными и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным v_1 и v_2. Разложим эти функции при каждом фиксированном t по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $(0,0)$ с целью выделения линейных частей. С учетом этих разложений перепишем систему (39) в виде

$$\begin{cases} v_1'=\beta[f_1(x)+c_{11}(x)v_1+c_{12}(x)v_2+V_1(x,v_1,v_2)], \\ v_2'=\frac{\beta}{h_i(t)}[f_2(x)+c_{21}(x)v_1+c_{22}(x)v_2+V_2(x,v_1,v_2)]. \end{cases} \tag{41}$$

В силу (26)–(38) и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}c_{11}(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}c_{12}(x)=1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f_2(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}c_{21}(x)=-1,\quad \lim_{x\to+\infty}c_{22}(x)=-1,$$

а функции $V_1(x,v_1,v_2)$ и $V_2(x,v_1,v_2)$ таковы, что $\lim\limits_{|v_1|+|v_2|\to0}\frac{V_k(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|}=0$ $(k=1,2)$ равномерно по $x\in[x_0;+\infty)$.
Приведем систему (41) к почти треугольному виду, используя дополнительное преобразование

$$v_1(x)=w_2(x)-h_i(t)w_1(x),\ v_2(x)=w_1(x). \tag{42}$$

В результате этого преобразования система (41) примет вид

$$\begin{cases} w_1' = \beta[F_1(x) + C_{11}(x)w_1 + C_{12}(x)w_2 + W_1(x, w_1, w_2)], \\ w_2' = \frac{\beta}{h_i(t)}[F_2(x) + C_{21}(x)w_1 + C_{22}(x)w_2 + W_2(x, w_1, w_2)], \end{cases} \tag{43}$$

$$F_1(x) = f_2(x),\ C_{11}(x) = c_{22}(x) - c_{21}(x)h_i(t(x)),\ C_{12}(x) = c_{21}(x),$$

$$W_1(x, w_1, w_2) = V_1(x, w_2(x) - h_i(t(x))w_1(x)1, w_1),\ F_2(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$C_{21}(x) = 1 + g_i(t) - c_{21}(x)h_i(t(x)) + c_{22}(x) - c_{11}(x)h_i(t(x)) + c_{12}(x),$$

$$C_{22}(x) = c_{21}(x) + c_{11}(x),\ W_2(x, w_1, w_2) = V_1(x, w_2(x) - h_i(t(x))w_1(x), w_1)+$$

$$+V_2(x, w_2(x) - h_i(t(x))w_1(x), w_1).$$

В силу (40) и указанных выше свойств функций $f_i\,(i = 1, 2)$,
$c_{ij}\,(i = 1, 2; j = 1, 2)$, $V_i\,(i = 1, 2)$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} C_{ii}(x) = -1,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{F_i(x)}{C_{ii}(x)} = 0\ (i = 1, 2),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{C_{12}(x)}{C_{11}(x)} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{C_{21}(x)}{C_{22}(x)} = 0,\ \lim_{|w_1|+|w_2|\to 0} \frac{W_k(x, w_1, w_2)}{|w_1| + |w_2|} = 0\ (k = 1, 2)$$

равномерно по $x \in [x_1; +\infty)$, где $x_1 \geq x_0$ — некоторое достаточно большое число. Кроме того, имеем

$$\int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{dx}{h_i(t(x))} = \beta \int_{t_3}^{\omega} \frac{p_i(t)dt}{Q_{i2}(t)I_{i2}(t)} = \beta \ln|Q_{i2}(\omega)| - \beta \ln|Q_{i2}(t_3)| = \pm\infty.$$

Таким образом, для системы (43) выполнены все условия теоремы 1.3 из работы [4]. Согласно этой теореме, система дифференциальных уравнений (43) имеет по крайней мере одно решение, исчезающее на бесконечности. Ему в силу замен (42),(24) соответствует решение дифференциального уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (18). Используя эти представления и условия теоремы, нетрудно показать, что данное решение уравнения (1) является $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ — решением. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании у уравнения (1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ — решений. В силу условия $\mu_0 = 0$ и леммы 1 каждое такое решение представимо в виде

$$y(t) = \gamma\pi_\omega(t)L(t), \tag{44}$$

где $\gamma = signy_1^0$, L(t) — медленно меняющаяся при $t \uparrow \omega$ функция.

Будем говорить, что функция φ_{i0} $(i \in M)$ удовлетворяет условию S_i, если для функции $\psi_{i0}(y) = \frac{\varphi_{i0}(y)}{|y|^{\sigma_{i0}}}$ имеет место соотношение

$$\psi_{i0}(\gamma\pi_\omega(t)L(t)) = \psi_{i0}(\gamma\pi_\omega(t))[1 + 0(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{45}$$

В силу представления (44) существует $a' \in (a, \omega)$ такое, что $\gamma\pi_\omega(t) \in \Delta_0$ при $t \in [a', \omega)$. Обозначим

$$I_{i3}(t) = \int\limits_{I_{i3}^0}^{t} p_i(s)|\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}}\psi_{i0}(\gamma\pi_\omega(s))\,ds,$$

где

$$I_{i3}^0 = \begin{cases} a', & \text{если } \int_{a'}^{\omega} p_i(s)|\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}}\psi_{i0}(\gamma\pi_\omega(s))\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_{a'}^{\omega} p_i(s)|\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}}\psi_{i0}(\gamma\pi_\omega(s))\,ds < +\infty. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $\mu_0 = 0, M_2 \neq \emptyset$ *и для некоторого* $i \in M_2$ *соблюдаются условия (8) и* $\sigma_{i0} \neq 1$. *Пусть, кроме того, функция* φ_{i0} *удовлетворяет условию* S_i. *Для существования у уравнения (1)* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ *— решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty & , \textit{если } \omega = +\infty, \\ 0 & , \textit{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$
$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty & , \textit{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_{i3}(t)|^{1-\sigma_{i0}} = +\infty, \\ 0 & , \textit{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_{i3}(t)|^{1-\sigma_{i0}} = 0, \end{cases} \tag{46}$$

при $t \in (a, \omega)$ *выполнялись неравенства*

$$\alpha_i(1-\sigma_{i0})\pi_\omega(t)I_{i3}(t)y_0^0 > 0, \quad \alpha_i(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)y_1^0 > 0, \tag{47}$$

имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)} = 0. \tag{48}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \pi_\omega(t)J_i(t)[1 + 0(1)], \;\; y'(t) = J_i(t)[1 + 0(1)], \tag{49}$$

где

$$J_i(t) = |\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}}} sign(\alpha_i(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ — решение уравнения (1). Тогда из первого из (7) с учетом леммы 1 вытекает справедливость предельного соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 1 \tag{50}$$

и, следовательно, первого из условий (46).
В силу (8) и $\sigma_{i0} \neq 1$ из уравнения (1) с учетом леммы 2 и (50) получаем

$$y''(t) = \alpha_i \varphi_{i1}^0 p_i(t) \varphi_{i0}(\pi_\omega(t) y'(t)[1 + 0(1)])[1 + 0(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega$$

или, принимая во внимание представление функции φ_{i0},

$$y''(t) = \alpha_i \varphi_{i1}^0 p_i(t) |\pi_\omega(t) y'(t)|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}(\pi_\omega(t) y'(t))[1 + 0(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{51}$$

Так как функция $y'(t)$ является медленно меняющейся (в силу первого из (7)), то из (51) с учетом (45) следует, что

$$\frac{y''(t)}{|y'(t)|^{\sigma_{i0}}} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 p_i(t) |\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}(\gamma \pi_\omega(t))[1 + 0(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{52}$$

Проинтегрировав (52) от t_0 до t, в силу определения $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ — решения и свойств функции I_{i3} получаем

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}}}{1 - \sigma_{i0}} sign y'(t) = \alpha_i \varphi_{i1}^0 I_{i3}(t)[1 + 0(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{53}$$

Из (53) с учетом (50) вытекает справедливость неравенств (47), асимптотических представлений (49) и второго из условий (46).
В силу (52) и (53)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{1 - \sigma_{i0}} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)}$$

и, следовательно, с учетом первого из условий (7), имеет место предельное соотношение (48).

Достаточность. Пусть выполняются условия (46)–(48). В силу условий (10)–(13), а так же (46) и (47) однозначно определяются значения Y_k и промежутки Δ_k, Δ_{ik} $(k = 0, 1)$. Установив Y_k и Δ_k $(k = 0, 1)$, докажем существование у уравнения (1) хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ — решения, которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (49). Для этого применим к уравнению (1.1) преобразование

$$y(t) = Y_i(t, v_1(x)), \;\; y'(t) = Y_i^{[1]}(t, v_2(x)), \tag{54}$$

где

$$Y_i(t, v_1(x)) = \pi_\omega(t) J_i(t)[1 + v_1(x)], \;\; Y_i^{[1]}(t, v_2(x)) = J_i(t)[1 + v_2(x)],$$

$$x = \beta \ln |I_{i3}(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad I_{i3}^0 = a', \\ -1, & \text{если} \quad I_{i3}^0 = \omega. \end{cases}$$

Так как

$$J_i'(t) = \alpha_i \varphi_{i1}^0 |\varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) I_{i3}(t)|^{\frac{\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}}} I_{i3}'(t),$$

то, с учетом предельного соотношения (48),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_i'(t)}{J_i(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)|\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)|^{\frac{\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}}}\alpha_i\varphi_{i1}^0I_{i3}'(t)}{|\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}}}sign(\alpha_i(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t))}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi_{i1}^0\pi_\omega(t)I_{i3}'(t)}{|\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)|sign((1-\sigma_{i0})I_{i3}(t))}=$$

$$=\frac{1}{1-\sigma_{i0}}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)}=0. \tag{55}$$

Исследуем свойства функций Y_i и $Y_i^{[1]}$ при $t\uparrow\omega,\ |v_k|\le\frac12\ (k=1,2)$.
В силу вторых из условий (46)–(47) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y_i^{[1]}(t,v_2)=Y_1 \text{ равномерно по } v_2\in[-\frac12,\frac12] \tag{56}$$

и для некоторого $t_1\in[t_0,\omega)$

$$Y_i^{[1]}(t,v_2)\in\Delta_1 \text{ при } t\in[t_1,\omega),\ v_2\in[-\frac12,\frac12]. \tag{57}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_i^{[1]}(t,v_2))_t'}{Y_i^{[1]}(t,v_2)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_i'(t)[1+v_2]}{J_i(t)[1+v_2]}=0 \tag{58}$$

равномерно по $v_2\in[-\frac12,\frac12]$.
Так как

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_i(t,v_1))_t'}{Y_i(t,v_1)}=1+\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_i'(t)}{J_i(t)}=1, \tag{59}$$

то в силу первого из условий (46)

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y_i(t,v_1)=Y_0 \text{ равномерно по } v_1\in[-\frac12,\frac12]. \tag{60}$$

Более того, с учетом первого из неравенств (47), существует $t_2\in[t_0,\omega)$ такое, что

$$Y_i(t,v_1)\in\Delta_0 \text{ при } t\in[t_2,\omega),\ v_1\in[-\frac12,\frac12]. \tag{61}$$

В силу условий (3)–(5), (56)–(57) и (60)–(61) равномерно по $v_k\in[-\frac12,\frac12]\ (k=1,2)$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_{j0}'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}=\sigma_{j0},\ j=\overline{1,m}, \tag{62}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i^{[1]}(t,v_2)\varphi_{j1}'\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}=\sigma_{j1},\ j=\overline{1,m}, \tag{63}$$

причем если $\lim\limits_{\substack{Y\to Y_k\\ Y\in\Delta_k}} \varphi_{jk} = const \neq 0$, то $\sigma_{jk}=0$ ($k\in\{0,1\}$).

Поскольку выполняются условия (56)–(63), то функции $Y_i(t,v_1)$ и $Y_i^{[1]}(t,v_2)$ обладают всеми теми свойствами $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ — решений, которые использовались при доказательстве леммы 2 и, следовательно, равномерно по $v_k\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $(k = 1,2)$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}=0,\quad j\in M\setminus\{i\}. \tag{64}$$

Кроме того, из (55) вытекает, что функция $J_i(t)$ удовлетворяет (44). Тогда, в силу (45),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))}{J_i'(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}|J_i(t)|^{\sigma_{i0}}\psi_{i0}(\pi_\omega(t))}{J_i'(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_{i3}'(t)|\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)|^{\frac{\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}}}}{|\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})I_{i3}(t)|^{\frac{\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}}}\alpha_i\varphi_{i1}^0I_{i3}'(t)}=\frac{1}{\alpha_i\varphi_{i1}^0}. \tag{65}$$

В результате преобразования (54) получим заданную на множестве $\Omega=[x_0;+\infty)\times \times D$, $x_0=\beta\ln|I_{i3}(t_3)|$, $t_3=max\{t_1,t_2\}$, $D=\{(v_1,v_2):|v_k|\le\frac{1}{2},\ k=1,2\}$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1'=\dfrac{\beta}{h_i(t)}\left[-\dfrac{\pi_\omega(t)J_i'(t)}{J_i(t)}-\left(1+\dfrac{\pi_\omega(t)J_i'(t)}{J_i(t)}\right)v_1+v_2\right],\\[2ex] v_2'=\dfrac{\beta}{1-\sigma_{i0}}\left[1+v_2+\dfrac{1}{J_i'(t)}\times\right.\\ \left.\times\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j[1+r_j(t)]p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t,v_1))\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t,v_2))\right], \end{cases} \tag{66}$$

в которой t — функция, обратная к $x=\beta\ln|I_{i3}(t)|$, $h_i(t)=\dfrac{\pi_\omega(t)I_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)}$.

Заметим, что в силу условия (48) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}h_i(t)=0. \tag{67}$$

На множестве Ω функции $\varphi_{j0}(Y_i(t,v_1))\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t,v_2))$ $(j=1,...,m)$ являются непрерывными и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным v_1 и v_2. Разложим эти функции при каждом фиксированном t по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $(0,0)$ с целью выделения линейных частей. С учетом этих разложений перепишем систему (66) в виде

$$\begin{cases} v_1'=\frac{\beta}{h_i(t)}[f_1(x)+c_{11}(x)v_1+v_2],\\[2ex] v_2'=\frac{\beta}{1-\sigma_{i0}}[f_2(x)+c_{21}(x)v_1+c_{22}(x)v_2+V(x,v_1,v_2)]. \end{cases} \tag{68}$$

В силу (56)–(65) и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x)=-1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x)=\sigma_{i0}, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x)=-1,$$

а функция $V(x,v_1,v_2)$ такова, что $\lim\limits_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|}=0$ равномерно по $x\in$ $\in[x_0;+\infty)$.

Приведем систему (68) к почти треугольному виду, используя дополнительное преобразование

$$v_1=w_1, \;\; v_2=\rho(x)w_1+w_2, \tag{69}$$

где $\rho:[x_1,+\infty)\to\mathbb{R}$ $(x_1\geq x_0)$ — исчезающее на бесконечности решение дифференциального уравнения

$$\rho'(x)=\beta\left[\frac{c_{21}(x)}{1-\sigma_{i0}}+\left(\frac{1}{h_i(t(x))}+\frac{1+c_{22}(x)}{1-\sigma_{i0}}\right)\rho(x)-\frac{1}{h_i(t(x))}\rho^2(x)\right], \tag{70}$$

существующее в силу условий на основании теоремы 1.3 работы [4].

В результате этого преобразования получим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} w_1'=\frac{\beta}{h_i(t(x))}[F_1(x)+C_1(x)w_1+w_2], \\ \\ w_2'=\frac{\beta}{1-\sigma_{i0}}[F_2(x)+C_2(x)w_2+W(x,w_1,w_2)], \end{array}\right. \tag{71}$$

где

$$F_1(x)=f_1(x), \;\; C_1(x)=c_{11}(x)+\rho(x), \;\; F_2(x)=f_2(x)+\rho(x), \;\; C_2(x)=c_{22}(x)-$$
$$-\frac{(1-\sigma_{i0})\rho(x)}{h_i(t(x))}, \;\; W(x,w_1,w_2)=V(x,w_1,\rho(x)w_1+w_2).$$

С учетом условия $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(x)=0$ и свойств функций f_i $(i=1,2)$, c_{ij} $(i=$ $=1,2; j=1,2)$, V имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F_i(x)}{C_i(x)}=0, \;\; \lim_{x\to+\infty} C_1(x)=-1,$$

$$\lim_{|w_1|+|w_2|\to 0}\frac{W(x,w_1,w_2)}{|w_1|+|w_2|}=0 \text{ равномерно по } x\in[x_1;+\infty).$$

Из (70) следует, что

$$\frac{(1-\sigma_{i0})\rho(x)}{h_i(t(x))}=-\frac{c_{21}(x)}{1-\rho(x)}-\frac{(1+c_{22}(x))\rho(x)}{1-\rho(x)}+\frac{\beta(1-\sigma_{i0})\rho'(x)}{1-\rho(x)}$$

и, таким образом,

$$C_2(x) = c_{22}(x) + \frac{c_{21}(x)}{1-\rho(x)} + \frac{(1+c_{22}(x))\rho(x)}{1-\rho(x)} - \frac{\beta(1-\sigma_{i0})\rho'(x)}{1-\rho(x)}.$$

При этом

$$\lim_{x\to+\infty}\left(c_{22}(x) + \frac{c_{21}(x)}{1-\rho(x)} + \frac{(1+c_{22}(x))\rho(x)}{1-\rho(x)}\right) = -1+\sigma_{i0} \neq 0,$$

а

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(1-\sigma_{i0})\rho'(x)dx}{1-\rho(x)} = const.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{h_i(t(x))} = \beta \int\limits_{t_3}^{\omega} \frac{dt}{\pi_\omega(t)} = \pm\infty.$$

Таким образом, для системы (71) выполнены все условия теоремы 1.3 из работы [4]. Согласно этой теореме, система дифференциальных уравнений (71) имеет по крайней мере одно решение, исчезающее на бесконечности. Ему в силу замен (54) и (69) соответствует решение дифференциального уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (49). Используя эти представления и условия теоремы, нетрудно показать, что данное решение уравнения (1) является $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ — решением. Теорема полностью доказана.

Заключение. В настоящей работе для каждого $i \in M_{2+k}$ ($k \in \{0,1\}$) приведены условия, при выполнении которых в случае $\mu_0 \in \mathbb{R}$ на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решении уравнения (1.1) правая его часть асимптотически эквивалентна i-му слагаемому. При соблюдении этих условий в случае $k=0$ и $\mu_0 \in \{-1; 0\}$ установлены необходимые и достаточные признаки существования у уравнения (1.1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ — решений, а также асимптотические представления таких решений при $t \uparrow \omega$.

1. **Козьма О. О.** Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [текст] / О. О. Козьма // Наук. вісник Чернів. ун-ту: Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 55–65.
2. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, В. А. Касьянова // Укр. мат. журнал. – 2005. – № 3. – С. 338–355.
3. **Касьянова В. А.** Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [текст] / В. А. Касьянова // Наук. вісник Чернів. ун-ту: Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 5–19.

4. **Евтухов В. М.** Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 2003. – № 4. – С. 433–444.

УДК 512

Ю. Г. Леонов
Одесская национальная академия связи имени А. С. Попова

ГРУППЫ ОТМЕЧЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И САМОПОДОБНЫЕ ГРУППЫ

Леонов Ю. Г. Групи вiдзначених багаточленiв та самоподiбнi групи. В роботi узагальнюється теорiя таблиць Калужнiна. За допомогою нової конструкцiї розглядається вiдома самоподiбна група Григорчука як подгрупа iнверсного лiмiту скiнченних груп спецiального виду.
Ключовi слова: самоподiбна група, автоморфiзм дерева, група Калужнiна.

Леонов Ю. Г. Группы отмеченных многочленов и самоподобные группы. В работе обобщается понятие таблиц Калужнина. С помощью новой конструкции рассматривается известная самоподобная группа Григорчука в виде подгруппы обратного предела конечных групп специального вида.
Ключевые слова: самоподобная группа, автоморфизм дерева, группа Калужнина.

Leonov Yu. G. Groups of labelled polynomials and self-similar groups. The theory of Kaloujnine's tableau is generalized in this paper. Using new construction we obtain the Grigorchuk group as a subgroup of inverse limit of finite group of special type.
Key words: self-similar group, tree automorphism, Kaloujnine group.

Введение.

Удивительная природа самоподобных групп способствует широкому и активному развитию ее теории, особенно в последнее время (яркий пример: [1]). Отдельные экземпляры самоподобных групп изучаются еще с 80-х годов в связи с проблемой Бернсайда о периодических группах ([2], [3]).

Пусть T_p — регулярное корневое бесконечное дерево (от каждой вершины вниз исходит ровно p ребер). Любое поддерево этого дерева также является в свою очередь деревом T_p. Пусть G — подгруппа группы автоморфизмов $Aut\,T_p$. Группа G называется самоподобной, если множество сужений действий ее элементов на любое поддерево образует саму группу G (после отождествления корней дерева и его поддерева).

Другим языком изучения групп автоморфизмов регулярных деревьев является более алгебраический язык многочленов, разработанный Л. А. Калужниным. В теории самоподобных групп применяются и геометрические подходы (язык автоморфизмов деревьев и др.) и алгебраические (язык таблиц Калужнина). Однако, последний (алгебраический) подход в чистом виде технически усложнен в связи со сложной природой самоподобных групп.

В данной работе предлагается несколько расширить идею таблиц Калужнина по направлению к самой природе самоподобных групп. При этом мы получаем некоторые механизмы работы с группой, более свойственные ее природе, оставаясь в рамках строгой алгебраической конструкции. Построенные примеры приведены для случая $p = 2$, показана связь с известной самоподобной группой — группой Григорчука.

Назовем группой Калужнина $P_{2,n}$ n-кратное сплетение групп порядка 2, построенное в [4]. Множество этих групп можно определить рекуррентно следующим образом. Положим

$$P_{2,0} = \mathbb{Z}_2, P_{2,n} = P_{2,n-1} \wr \mathbb{Z}_2, \text{ при } n > 0.$$

Эти группы достаточно хорошо изучены, они занимают одно из центральных мест в теории групп, так как являются силовскими 2-подгруппами симметрических групп степени 2^{n+1} (см. например, [5], [6]).

Согласно [5], каждый элемент группы Калужнина $y \in P_{2,n}$ можно представить в виде таблицы

$$y = [y_{0,1}, y_{1,1} + y_{1,2}t_1, \ldots, y_{n,1} + y_{n,2}t_1 + \cdots + y_{n,2^n}t_1 \cdots t_n].$$

Здесь на k месте ($k = 0, 1, \ldots, n$) в таблице стоят многочлены $y_k(t_1, \ldots, t_k)$ (от коммутируемых переменных $t_1, \ldots, t_k$), которые являются представителями минимальной степени классов смежности кольца многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_k]$ по модулю идеала, порожденного многочленами вида $t_1^2 - t_1, \ldots, t_k^2 - t_k$. Такие многочлены называются редуцированными. Операция произведения в таблицах, согласованная с операцией сплетения, определяется следующим образом:

$$[y_0, y_1(t_1), y_2(t_1, t_2), \ldots] \cdot [z_0, z_1(t_1), z_2(t_1, t_2), \ldots] =$$

$$= [y_0 + z_0, y_1(t_1 + z_0) + z_1(t_1), y_2(t_1 + z_0, t_2 + z_1(t_1)) + z_2(t_1, t_2), \ldots].$$

Основные результаты.

1. Отмеченные многочлены.

Пусть L — конечная 2-группа. Для фиксированного n рассмотрим кольцо редуцированных многочленов $M_2(n) \leq \mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_n]$ и множество $L(n)$ пар вида

$$xu(t_1, \ldots, t_n), x \in L, u(t_1, \ldots, t_n) \in M_2(n).$$

Обозначим для удобства последовательность $\bar{t}_n = t_1, \ldots, t_n$. Множество $L(n)$ дополним формальными (некоммутативными) суммами конечного числа слагаемых произвольных пар вышеописанного вида:

$$x_1u_1(\bar{t}_n) \dotplus x_2u_2(\bar{t}_n) \dotplus \ldots.$$

Таким образом, множество $L(n)$ состоит из элементов вида

$$g(\bar{t}_n) = \dot{\sum_i} x_iu_i(\bar{t}_n),\ x_i \in L,\ u_i(\bar{t}_n) \in M_2(n).$$

Потребуем для любых $x, y \in L$, $u(\bar{t}_n) \in M_2(n)$ выполнения следующего соотношения в $L(n)$:

$$xu(\bar{t}_n) \dotplus yu(\bar{t}_n) = (xy)_L u(\bar{t}_n). \tag{1}$$

Зафиксируем $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Z}_2$. Тогда $u(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ равно либо 0, либо 1. Применяя последовательно (слева направо) правило (1) к сумме $g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, получаем равенство $g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = l1$ для некоторого $l \in L$. Это позволяет нам дать

Определение 1. *Два элемента* $g(\bar{t}_n)$ *и* $h(\bar{t}_n)$ *эквивалентны в* $L(n)$ *(* $g(\bar{t}_n) \sim h(\bar{t}_n)$ *), если для любой последовательности элементов* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Z}_2$ *выполняется:*

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = h(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Это определение корректное (все соотношения эквивалентности удовлетворяются). Кроме того, из него следует, что в $L(n)$ конечное число неэквивалентных элементов. Из определения эквивалентности следует, для любых $x \in L$, $u(\bar{t}_n) \in M_2(n)$

$$x0 \sim e_L u(\bar{t}_n) \sim 0_{L(n)},$$

где 0 – нулевой многочлен в $M_2(n)$, e_L – нейтральный элемент в группе L, а $0_{L(n)}$ – нейтральный элемент относительно операции $\dot{+}$ в $L(n)$.

Во множестве $L(n)$ определим операцию умножения элемента на многочлен из $M_2(n)$:

$$(\dot{\sum_i} x_i u_i(\bar{t}_n))v(\bar{t}_n) = \dot{\sum_i} x_i(u_i(\bar{t}_n)v(\bar{t}_n)).$$

Лемма 1. *Во множестве* $L(n)$ *операция* $\dot{+}$ *ассоциативна. Кроме того,*
1. Если многочлены $u(\bar{t}_n)$ *и* $v(\bar{t}_n)$ *удовлетворяют соотношению*

$$u(\bar{t}_n)v(\bar{t}_n) = 0,$$

то

$$xu(\bar{t}_n) \dot{+} yv(\bar{t}_n) \sim yv(\bar{t}_n) \dot{+} xu(\bar{t}_n), \tag{2}$$

для любых $x, y \in L$.
2. Если $|x| = 2$, *то*

$$x(u(\bar{t}_n) + v(\bar{t}_n)) \sim xu(\bar{t}_n) \dot{+} xv(\bar{t}_n), \tag{3}$$

для любых $u(\bar{t}_n)$, $v(\bar{t}_n) \in M_2(n)$.

Доказательство. Ассоциативность в $L(n)$ является следствием ассоциативности групповой операции в группе L, при условии (1) и определения эквивалентности.

В случае $u(\bar{t}_n)v(\bar{t}_n) = 0$ получается, что для любого набора $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Z}_2$, либо $u(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, либо $v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Отсюда следует свойство (2).

При $|x| = 2$, в случае $u(\xi_1, \ldots, \xi_n) = v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ выражение слева и справа в (3) эквивалентно $0_{L(n)}$. Если $u(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$, $v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, либо $u(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, $v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$, то слева и справа получаем элемент $x1$.

В оставшемся случае, при $u(\xi_1, \ldots, \xi_n) = v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$, имеем слева $x(1+1) = x0 \sim 0_{L(n)}$ и справа: $x1 \dot{+} x1 = x^2 1 = e1 \sim 0_{L(n)}$. Учитывая равенство выражений для каждой фиксированной последовательности, получаем справедливость (3). Лемма доказана.

Множество $L(n)$ является группой относительно операции $\dot{+}$ по фактору эквивалентности $\sim$. Элементы группы $L(n)$ будем называть отмеченными многочленами. Обозначим для удобства $L(0) = L$.

2. Таблицы отмеченных многочленов.

Пусть δ — гомоморфизм 2-группы L в $\mathbb{Z}_2$. Продолжим этот гомоморфизм до гомоморфизма $\Delta_n(\delta)$ из $L(n)$ в $M_2(n)$ естественным образом, полагая

$$\Delta_n(\delta)\,:\,\dot{\sum_i} x_i u_i(\bar{t}_n) \mapsto \sum_i \delta(x_i) u_i(\bar{t}_n).$$

Для заданного n рассмотрим множество $B_\delta(L,n)$ последовательностей вида

$$[l_0, l_1(t_1), \dots, l_n(\bar{t}_n)],\ l_i(\bar{t}_i) \in L(i),\ i = 0, 1, \dots, n.$$

На множестве $B_\delta(L,n)$ рассмотрим соотношение эквивалентности, считая две последовательности $\bar{l} = [l_0, l_1(t_1), \dots, l_n(\bar{t}_n)]$ и $\bar{l'} = [l'_0, l'_1(t_1), \dots, l'_n(\bar{t}_n)]$ множества $B_\delta(L,n)$ эквивалентными ($\bar{l} \sim \bar{l'}$), если выполняется эквивалентность

$$l_i(\bar{t}_i) \sim l'_i(\bar{t}_i)$$

в группах $L(i)$, для всех $i = 0, 1 \dots, n$. Несложно видеть, что это определение корректное.

По аналогии с операцией умножения в таблицах Калужнина, зададим операцию умножения во множестве $B_\delta(L,n)$:

$$[l_0, l_1(t_1), \dots, l_n(\bar{t}_n)] \cdot [l'_0, l'_1(t_1), \dots, l'_n(\bar{t}_n)] =$$

$$= [l_0 \dotplus l'_0, l_1(t_1 + \delta(l'_0)) \dotplus l'_1(t_1), l_2(t_1 + \delta(l'_0), t_2 + \Delta_1(\delta)(l'_1(t_1))) \dotplus l'_2(t_1, t_2), \dots].$$

Заданная операция превращает $B_\delta(L,n)$ в группу (по фактору эквивалентности) с очевидным нейтральным элементом $[0_L, 0_{L(1)}, \dots, 0_{L(n)}]$.

Пусть ρ_n — гомоморфизм из $P_{2,n}$ в $P_{2,n-1}$, полученный вычеркиванием последней координаты таблицы Калужнина. Тогда можно рассмотреть группу P_2, полученную в результате обратного предела групп $P_{2,n}$, относительно системы гомоморфизмов $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогично, обратный предел групп $B_\delta(L,n)$ относительно системы гомоморфизмов $\rho'_n\,:\,B_\delta(L,n) \to B_\delta(L,n-1)$, полученных в результате вычеркивания последних координат таблиц, является группой $B_\delta(L)$. Ее элементы могут быть заданы, по аналогии с конечным случаем, таблицами, но с неограниченными (справа) последовательностями редуцированных многочленов.

Рассмотрим отображение $\Omega\,:\,B_\delta(L) \to P_2$ по правилу:

$$\Omega([l_0, l_1(t_1), \dots, l_n(\bar{t}_n), \dots]) = [\delta(l_0), \Delta_1(\delta)(l_1(t_1)), \dots, \Delta_n(\delta)(l_n(\bar{t}_n)), \dots].$$

Групповая операция в группе $B_\delta(L)$ задана таким образом, что Ω – гомоморфизм. Гомоморфизмом является также отображение $\Omega_n\,:\,B_\delta(L,n) \to P_{2,n}$, заданное равенством, аналогичным Ω на первых n координатах таблиц.

Заметим, что, как следует из определения, при $L = \mathbb{Z}_2$ и изоморфизме δ, группа $B_\delta(L,n)$ изоморфна группе Калужнина $P_{2,n}$. Назовем группы $B_\delta(L,n)$ и $B_\delta(L)$, соответственно, конечными и бесконечными таблицами отмеченных многочленов (по аналогии с таблицами Калужнина).

Пусть $\psi : L \to L(1)$ — некоторый мономорфизм. Так как

$$\psi(l) = \dot{\sum_i} x_i u_i(t),\ x_i \in L,\ u_i(t) \in M_2(1),$$

для каждого $l \in L$, то на отображение ψ можно смотреть как на функцию $\psi = \psi_t$ с двумя параметрами, пробегающими множества L и $\mathbb{Z}_2$.

По заданному гомоморфизму ψ_t, для $n \geq 1$ рассмотрим гомоморфизм

$$\psi_{t,n} : L(n-1) \to L(n)$$

по правилу:

$$\dot{\sum_i} x_i u_i(\bar{t}_{n-1}) \mapsto \dot{\sum_i} \psi_t(x_i) u_i(\bar{t}_{n-1})$$

(переменные $t_1, \ldots, t_{n-1}, t$ независимо пробегают $\mathbb{Z}_2$).

Обозначим, $\psi(n) = \psi_{t_n,n} \circ \cdots \circ \psi_{t_1,1}$. Пусть S — множество порождающих элементов группы L. В группе $B_\delta(L,n)$ выделим подгруппу $B_\delta(L,\psi,n)$, порожденную элементами вида

$$[x, \psi(1)(x), \ldots, \psi(n)(x)],\ x \in S.$$

Выделим в группе $B_\delta(L)$ конечно-порожденную подгруппу $B_\delta(L,\psi)$, порожденную элементами вида (неограниченная последовательность)

$$[x, \psi(1)(x), \psi(2)(x), \ldots],\ x \in S.$$

Такую группу назовем отмеченной группой с базой L и гомоморфизмом ψ, или более коротко, – группой отмеченных многочленов.

Если рассмотреть гомоморфизм $\rho'_{\psi,n}$ из $B_\delta(L,\psi,n)$ в $B_\delta(L,\psi,n-1)$ по аналогии с гомоморфизмом ρ'_n, то из коммутативности соответствующей диаграммы следует, что группа $B_\delta(L,\psi)$ является также подгруппой обратного предела групп $B_\delta(L,\psi,n)$ относительно системы гомоморфизмов $\{\rho'_{\psi,n}\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Группа Григорчука как группа отмеченных многочленов.

Первая группа Григорчука Gr, построенная в работе [2], является одной из наиболее известных конечно-порожденных бесконечных 2-групп. Построение этой группы позволило ответить на ряд известных проблем (проблема Милнора о групповом росте и т. п.). Большинство ее свойств хорошо изучены в последние годы (см. например, [7], [8]), однако, в то же время интерес к этой группе не ослабляется, благодаря многим уникальным ее свойствам. По-прежнему остается большое число нерешенных проблем, связанных с этой группой.

Группа Григорчука Gr является подгруппой группы автоморфизмов $AutT_2$ дерева T_2. Группа Gr [2] порождается элементами a', b', c' с операцией суперпозиции преобразований. Элемент a' переставляет два поддерева первого уровня между собой. Остальные порождающие определяются рекуррентно следующим образом: $b' = (a', c'),\ c' = (a', d'),\ d' = (e, b')$, где e — нейтральный элемент группы, а (g_0, g_1) означает действие элемента g_i на поддерево с кодом корневой вершины i. Очевидно $a'^2 = b'^2 = c'^2 = d'^2 = b'c'd' = e$.

Группа Григорчука является самоподобной группой. Пусть v — код некоторой вершина дерева T_2. Множество кодов вершин дерева задается множеством конечных последовательностей X^* алфавита $X=\{0,1\}$. Будем считать, что для вершины с кодом v (иногда для краткости будем отождествлять саму вершину и ее код v) левый и правый непосредственный потомок это, соответственно, вершины с кодом $v0$ и $v1$. Ясно, что $g|_v \in Gr$. Факт перестановки между собой поддеревьев с вершинами $v0$ и $v1$ элементом g, можно отметить элементом $g\{v\} \in \mathbb{Z}_2$. Если g переставляет эти поддеревья между собой, то положим $g\{v\}=1$ и, если не переставляет, то положим $g\{v\}=0$. Так, $a'\{\varnothing\}=1$, $b'\{\varnothing\}=0$, где $\varnothing$ — корень дерева T_2. Отметим, что если $g_1, g_2 \in AutT_2$, то $(g_1g_2)|_v = g_1|_{v'}\, g_2|_v$, где вершина $v' = g_2 v$ — образ действия автоморфизма g_2 на вершину v. Будем говорить, что вершина дерева, код которой задается последовательностью над алфавитом X длины n, является вершиной уровня n.

Пусть $T_{2,n}$ — конечное двоичное дерево, являющееся началом дерева T_2 с вершинами до уровня n включительно. Рассмотрим отображение $\lambda_n\colon AutT_{2,n} \to P_{2,n}$, определенное следующим образом.

Пусть $\iota : X \to \mathbb{Z}_2$ — биекция по закону $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$. Для $g \in Aut\,T_{2,n}$ и $i \le n$ рассмотрим (единственный) многочлен $y_i(\bar t_i)$ множества $M_2(i)$, который обладает свойством $g\{v\} = y_i(\iota(v_1),\ldots,\iota(v_i))$, для всех вершин $v \in X^i$, $v = v_1\ldots v_i$. Положим

$$\lambda_n(g) = [y_0, y_1(t_1), \ldots, y_n(t_1,\ldots,t_n)].$$

Так, заданное отображение есть изоморфизм рассматриваемых нами 2-групп. Корректность этого выбора основывается на теории таблиц Калужнина.

Пусть $\lambda : AutT_2 \to P_2$ — прямой предел изоморфизмов λ_n, $n=1,2\ldots$. Очевидно, λ — также изоморфизм.

Обозначим $a=\lambda(a')$, $b=\lambda(b')$, $c=\lambda(c')$. Рассмотрим группу $G=\langle a,b,c\rangle$. Нетрудно получить интерпретацию ее порождающих элементов в терминах таблиц [9]. Имеем,

$$a=[1,0,0,\ldots],$$

$$z=[0, C(z,1)(t_1+1), C(z,2)t_1(t_2+1), \ldots, C(z,i)t_1t_2\ldots t_{i-1}(t_i+1), \ldots],$$

где $C(z,i) \in \mathbb{Z}_2$, $z \in \{b,c\}$ и

$$C(b,i) = \begin{cases} 0 & , \quad i \equiv 0 \mod 3 \\ 1 & , \quad i \not\equiv 0 \mod 3 \end{cases}, \quad C(c,i) = \begin{cases} 0 & , \quad i \equiv 2 \mod 3 \\ 1 & , \quad i \not\equiv 2 \mod 3 \end{cases}.$$

Рассмотрим конечную группу $L=\langle l_a, l_b, l_c\rangle$, изоморфную группе $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. Зададим гомоморфизм $\delta : L \to \mathbb{Z}_2$, определив значения на порождающих следующим образом:

$$\delta(l_a)=1,\ \delta(l_b)=0,\ \delta(l_c)=0.$$

Обозначим, $l_d = l_b l_c = l_c l_b$. Пусть $\psi=\psi_t : L \to L(1)$ — гомоморфизм, заданный на порождающих группы L следующим образом:

$$l_a \mapsto 0, \quad l_b \mapsto l_a(t+1) \dotplus l_c t, \quad l_c \mapsto l_a(t+1) \dotplus l_d t.$$

Теорема 1. *Группа Григорчука Gr изоморфна группе $B_\delta(L,\psi)$, с указанными выше группой L и отображениями δ и ψ.*

Доказательство. На группе $\langle l_b, l_c\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ рассмотрим изоморфизм μ, заданный следующим образом:

$$\mu(l_b)=l_c,\quad \mu(l_c)=l_d,\quad \mu(l_d)=l_b.$$

Пусть

$$\tau(x)=[x,\psi(1)(x),\psi(2)(x),\dots],\ x\in\{l_a,l_b,l_c\}.$$

Рассмотрим порождающие элементы группы $B_\delta(L,\psi)$. Очевидно,

$$\tau(l_a)=[l_a,0,0,\dots].$$

Заметим, что $\psi(l_d)=\psi(l_b)\cdot\psi(l_c)\sim l_bt$. Следуя свойствам ψ, δ и определению группы отмеченных многочленов, имеем

$$\tau(l_b)\sim[l_b,l_a(t_1+1)\dotplus l_ct_1,(l_a(t_2+1)\dotplus l_dt_2)t_1,l_bt_3t_2t_1,\dots],$$

$$\tau(l_c)\sim[l_c,l_a(t_1+1)\dotplus l_dt_1,l_bt_2t_1,(l_a(t_3+1)\dotplus l_ct_3)t_2t_1,\dots].$$

В общем случае

$$\tau(l_z)=[l_z,\psi(1)(z),\dots,\psi(i)(z),\dots]\sim$$

$$[l_z,l_aC(z,1)(t_1+1)\dotplus l_{\mu(z)}t_1,\dots,(l_aC(z,i)(t_i+1)\dotplus l_{\mu^i(z)}t_i)t_{i-1}\cdots t_1,\dots],$$

где $C(z,i)$ – функция, определенная выше.

Из определений следует, что $\Omega(\tau(l_a))=a$ и

$$\Delta_i(\delta)(\psi(i)(z))=C(z,i)t_1t_2\dots t_{i-1}(t_i+1),\quad z=b,c.$$

Отсюда

$$\Omega(\tau(l_z))=z,\quad z=b,c.$$

Отметим, что для так заданной конструкции с помощью отображений δ и ψ, гомоморфизм Ω – является мономорфизмом. Из сказанного выше следует, что $\Omega(B_\delta(L,\psi))=\lambda(Gr)$, а значит группы $B_\delta(L,\psi)$ и Gr изоморфны. □

Заключение.

Предлагаемый подход может быть применен к любой самоподобной группе для простых p.

Интересно также ставить обратную задачу. Зафиксировать необходимую p-группу L, соответствующие гомоморфизмы δ и ψ и изучить свойства полученной конечно-порожденной группы. Конструкция допускает множество обобщений, что дает нам возможность получить класс (не обязательно самоподобных) групп с, возможно, наперед выбранными свойствами.

1. **Bondarenko I.** Classification of groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet [Электронный ресурс] / Bondarenko I., Grigorchuk R., Kravchenko R., Muntyan Y., Nekrashvich V., Savchuk D., Sunic Z. // Матем. архив. – 2008. – 151 с. – Режим доступа к статье: http://arxiv.org/abs/0803.3555v1
2. **Григорчук Р. И.** К проблеме Бернсайда о периодических группах [текст] / Григорчук Р. И. // Функц. анализ и его прилож. – 1980. – Т. 14. – Вып. 1. – С. 53–54.
3. **Гупта Н.** Some infinite p-groups [текст] / Гупта Н., Сидки С. // Алгебра и логика. – 1983. – Т. 22. – № 5. – С. 584–589.
4. **Калужнин Л. А.** Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрических групп [текст] / Л. А. Калужнин // *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* – 1951. – № 2. – С. 197–221.
5. **Калужнин Л. А.** Избранные главы теории групп [текст] / Калужнин Л. А. – Киев: Изд-во КГУ, 1979. – 52 с.
6. **Ceccherini-Silberstein T.** Generalized Kaloujnine groups, uniseriality and height of automorphisms [text] / Ceccherini-Silberstein T., Leonov Yu. G. , Scarabotti F., Tolli F. // Intern. Journal of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15. – No. 3. – P. 503–527.
7. **Григорчук Р. И.** Автоматы, динамические системы и группы [текст] / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский // Тр. Матем. инс-та им. В. А. Стеклова. – 2000. – № 231. – С. 134–214.
8. **Grigorchuk R.** Solved and unsolved problems around one group [text] / Grigorchuk R. // Progress in Math. – 2005. – Vol. 248. – P. 117–218.
9. **Леонов Ю. Г.** Проблема сопряженности в одном классе 2-групп [текст] / Леонов Ю. Г. // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – Вып. 4. – С. 573–583.

УДК 515.126.83:517.925.51

Я. М. Ліндер, В. В. Пічкур
Київський національний університет імені Т. Г. Шевченко

ВЛАСТИВОСТІ МАКСИМАЛЬНОЇ ЗА ВКЛЮЧЕННЯМ МНОЖИНИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Ліндер Я. М., Пічкур В. В. Властивості максимальної за включенням множини практичної стійкості диференціальних включень з імпульсним впливом. У роботі вивчаються властивості максимальної за включенням множини практичної стійкості диференціального включення з імпульсним впливом. Доведено критерій належності точки до границі такої множини, а також одержано її функціонал Мінковського, опорний функціонал і обернений функціонал Мінковського у лінійному випадку.
Ключові слова: диференціальне включення, практична стійкість, системи з імпульсним впливом.

Линдер Я. Н., Пичкур В. В. Свойства максимального по включению множества практической устойчивости дифференциальных включений с импульсным воздействием. В работе исследованы свойства максимального по включению множества практической устойчивости дифференциального включения с импульсным воздействием, доказан критерий принадлежности точки границе этого множества. Получен функционал Минковского, опорный функционал и обратный функционал Минковского для этого множества в линейном случае.
Ключевые слова: дифференциальное включение, практическая устойчивость, системы с импульсным воздействием.

Linder Y. M., Pichkur V. V. Properties of maximal by inclusion set of practical stability of differential inclusions with impulse impact. In this paper properties of maximal by inclusion set of practical stability of differential inclusion with impulse impact are analyzed. Also we state the conditions which hold, when a point belongs to the border of maximal set. Further, Minkowski functional, support functional and inverse Minkowski functional in linear case are obtained.
Key words: differential inclusion, practical stability, systems with impulse impact.

Вступ. У ряді прикладних задач виникає ситуація, коли на систему діють зовнішні сили, тривалістю дії яких можна знехтувати. У цьому випадку приходимо до системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом [8]. Такі системи досить добре вивчені на даний час. Зокрема, в роботах [3, 4, 7] досліджувались задачі практичної стійкості, побудовано критерії практичної стійкості систем з імпульсним впливом, одержано алгоритми побудови екстремальних областей початкових умов та їх оптимальних оцінок. Разом з тим для систем при постійно діючих збуреннях, з розривною правою частиною, із заданою структурою права частина системи диференціальних рівнянь набуває багатозначного характеру [5, 9]. Для таких систем врахування короткострокових поштовхів приводить до задач аналізу розв'язків диференціальних включень з імпульсним впливом [8]. Задачі, пов'язані з диференціальними включеннями з імпульсним впливом, на даний момент інтенсивно досліджуються. Разом з тим задачі практичної стійкості диференціальних включень з імпульсним впливом залишаються мало дослідженими. В статті описуються властивості максимальної за включенням множини початкових умов, для яких розв'язки диференціального включення з імпульсним впливом не покидають задані фазові обмеження. Імпульсні впливи розглядаються в задані моменти часу. У випадку лінійного диференціального включення одержано критерій належності точки до границі оптимальної множини, для неї знайдено функціонал Мінковського і опорний функціонал.

Будемо використовувати такі позначення: $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^n$; $comp\left(\mathbb{R}^n\right)$ — сукупність всіх непорожніх компактних множин з $\mathbb{R}^n$; $conv\left(\mathbb{R}^n\right)$ — сукупність всіх непорожніх опуклих компактів з $\mathbb{R}^n$; $f\left(x^-\right), f\left(x^+\right)$ — відповідно ліва та права границі функції f у точці $x \in \mathbb{R}^1$; $int\, A$ — внутрішність, ∂A — границя, $A^\varepsilon = A + K_\varepsilon(0)$ — ε-розширення множини A; $A \overset{*}{-} B = \{x \in \mathbb{R}^n : x + B \subseteq \subseteq A\}$ — різниця Мінковського множин A і B; $\Gamma(F)$ — графік відображення F; $\Delta(F)$ — трубка відображення F.

Розглянемо диференціальне включення з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} \in F_i\left(x,t\right), \quad t \in \left[\tau_{i-1}, \tau_i\right), \quad i \in \{1, 2 \ldots N\}, \tau_0 = t_0, \tau_N = T, \tag{1}$$

$$x\left(\tau_i^+\right) = g_i\left(x\left(\tau_i^-\right)\right), \quad i \in \{1, 2 \ldots N-1\}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазових координат, $(x,t) \in D$, D — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, функції $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ локально гомеоморфні на D. У випадку диференційовності функцій g_i, ця умова еквівалентна тому, що якобіан функцій $g_i(x)$ ненульовий на D. Крім того, для будь-якого $i \in \{1, 2 \ldots N\}$ відображення $F_i : D \to \to conv(\mathbb{R}^n)$ задовольняє основним умовам на $\left[\tau_{i-1}, \tau_i\right)$, тобто множина його значень непорожня, обмежена, замкнена і опукла, а саме відображення напівнеперервне зверху за t. Крім того, існують неперервні додатні функції $L(t)$ такі, що $\alpha\left(F_i(u,t), F_i(v,t)\right) \leq L(t)\|u - v\|$, $(u,t) \in D$, $(v,t) \in D$, де $\alpha(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа.

Розв'язком диференціального включення з імпульсним впливом (1),(2) назвемо абсолютно неперервну на $\left(\tau_{i-1}, \tau_i\right)$, $i = \overline{1, N}$ функцію $x\left(t, x_0, t_0\right)$, яка задовольняє диференціальному включенню (1) у всіх точках, крім τ_i, а у точках τ_i задовольняє умови $x\left(\tau_i^+, x_0, t_0\right) = g_i\left(x\left(\tau_i^-, x_0, t_0\right)\right)$.

Задамо багатозначне відображення $\Phi\colon \mathrm{t} \longmapsto \Phi(\mathrm{t})$, яке описує фазові обмеження, $t \in [t_0, T]$. Множина $\Phi(\mathrm{t}) \subset \mathbb{R}^n$ компактна при $t \in [t_0, T]$ і графік $\Gamma(\Phi) \subset D$, $0 \in int\Phi(\mathrm{t})$, $0 \in F_i(0,t)$, $t \in \left[\tau_{i-1}, \tau_i\right)$, $i \in \{1, 2 \ldots N\}$. Крім того, $g_i(0) = 0$, $i \in \{1, 2 \ldots N-1\}$. Тобто, точка 0 належить внутрішності $\Phi(\mathrm{t})$ для всіх $t \in [t_0, T]$ і є розв'язком диференціального включення (1),(2).

Означення 1. *Нульовий розв'язок диференціального включення (1),(2) називається* $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ *— стійким, якщо для довільної точки* $x_0 \in G_0$ *виконується включення* $x\left(t, x_0, t_0\right) \in \Phi(t)$ $\forall t \in [t_0, T]$ *для довільного розв'язку* $x\left(t, x_0, t_0\right)$ *включення (1),(2).*

Означення 2. *Множина* $G_* \subseteq \Phi(t_0)$ *називається максимальною за включенням множиною при дослідженні практичної стійкості розв'язку* $x(t) \equiv 0$ *включення (1),(2) з фазовими обмеженнями, заданими відображенням* Φ*, якщо* *нульовий розв'язок* $\{G_*, \Phi(t), t_0, T\}$ *— стійкий і* $G_0 \subseteq G_*$ $\forall G_0 \subseteq \Phi(t_0)$ *, для яких має місце* $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ *— стійкість розв'язку* $x(t) \equiv 0$ *включення (1),(2). Іншими словами, множина* G_* *складається з усіх початкових умов, для яких відповідні розв'язки (1),(2) належать значенням відображення* Φ *на інтервалі* $[t_0, T]$ *.*

Метою дослідження є аналіз властивостей множини G_* . Ми будемо вважати, що $0 \in intG_*$. Має місце така теорема.

Теорема 1. *Якщо* $\Phi\colon [t_0, T] \longmapsto comp(\mathbb{R}^n)$ *компактозначне відображення, то множина* G_* *— компакт,* $t \in [t_0, T]$ *.*

Доведення. Обмеженість G_* випливає з обмеженості $\Phi(t_0)$, тому що $G_* \subseteq \subseteq \Phi(t_0)$. Виберемо послідовність $\{x_k\} \subset G_*, \lim x_k = x_0$, де $k \to \infty$. Покажемо, що $x_0 \in G_*$. Припустимо від супротивного, що існує $\tau \in (t_0, T]$ таке, що деякий розв'язок $z = x(\tau, x_0, t_0) \notin \Phi(\tau)$. Позначимо $r = \min_{y \in \Phi(\tau)} \| z - y \|$ і зафіксуємо $\varepsilon = r/2$. Нехай $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Згідно теореми про неперервну залежність від початкових умов, для траєкторії $x(t, x_0, t_0)$ $\exists\, x(t, x_k, t_0)$: $\|x(\tau, x_0, t_0) - x(\tau, x_k, t_0)\| < \varepsilon$. Таким чином, значення $x(\tau, x_k, t_0) \notin \Phi(\tau), k > > k_0$. Одержали протиріччя. Теорему доведено. □

Позначимо $M(t) = \bigcup_{x_0 \in M_0} X(t, x_0, t_0)$ — множина досяжності диференціального включення (1),(2), що відповідає початковим умовам з M_0 . $X(t, x_0, t_0)$ — множина досяжності диференціального включення (1),(2), що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$. Іншими словами, $X(t, x_0, t_0) = \bigcup x(t, x_0, t_0)$, де об'єднання здійснюється за всіма розв'язками диференціального включення (1), (2). Нехай $(p, t_0) \in D$. Позначимо

$$M_r(t) = \bigcup_{x_0 \in K_r(p)} X(t, x_0, t_0).$$

З позначення випливає, що $M_r(t) \subseteq M_h(t)$, $r < h$, $t \in [t_0, T]$. Має місце наступне твердження.

Лема 1. *Виконується включення* $M_r\ (t) \subseteq intM_h(t)$, $r < h$, $t \in [t_0, T]$.

Доведення. На півінтервалі $[\tau_0, \tau_1)$ лема виконується, виходячи з властивостей розв'язків диференціальних включень [1, 9]. У момент часу $t = \tau_1$ маємо $M_r\ (\tau_1 - 0) \subseteq intM_h(\tau_1 - 0)$. Згідно з властивостями гомеоморфних функцій

$$M_r(\tau_1) = g_1(M_r(\tau_1 - 0)) \subseteq intg_1(M_h(\tau_1 - 0)) = M_h(\tau_1).$$

З $M_r(\tau_1) \subseteq M_h(\tau_1)$ за властивостями розв'язків диференціальних включень одержуємо $M_r\ (t) \subseteq intM_h(t)$, $t \in [\tau_1, \tau_2)$ Далі послідовно переходимо з інтервалу $[\tau_1, \tau_2]$ на $[\tau_2, \tau_3]$ і т. д. до $[\tau_{N-1}, \tau_N]$. Лему доведено. □

Теорема 2. *Нехай* Φ *— напівнеперервне зверху компактозначне відображення. Для того, щоб* $x_0 \in \partial G_*$ *, необхідно і достатньо, щоб*

$$\Gamma(X(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi), \Delta(X(x_0)) \cap \Delta(\Phi) \neq \emptyset.$$

Доведення. Необхідність. Нехай $x_0 \in \partial G_*$, $X = X(x_0)$. Припустимо, що $\Delta(X(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \emptyset$. Зафіксуємо $r = \rho(\Delta(X(x_0)), \Delta(\Phi))$. Тут $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$. Покажемо, що відображення $X^r(x_0) : t \longmapsto (X(t, x_0, t_0))^r$ напівнеперервне зверху на кожному інтервалі (τ_{i-1}, τ_i) і $\forall t \in [t_0, T]$ множина $(X(t, x_0, t_0))^r$ — компакт. Дійсно, на першому інтервалі відображення $X(x_0)$ напівнеперервне зверху і компактозначне в кожній точці [2], а отже $X^r(x_0)$ теж володіє цими властивостями. Отже, $(X(t, x_0, \tau_1))^r$ — компакт, і $g_1((X(t, x_0, \tau_1))^r)$ — теж компакт, беручи до уваги неперервність функції $g(\cdot)$. Продовжуючи міркування, доводимо справедливість твердження на кожному інтервалі (τ_{i-1}, τ_i). Отже, існує $\rho > 0$, для якого $\Gamma(X^r(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi)$, $\Delta(X^r(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \emptyset$ при $r \in [0, \rho]$. Таким способом, $(X(t, x_0, t_0))^r \subset int\Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$, $r \in [0, \rho]$. Згідно теореми про неперервну залежність від початкових умов [5], виберемо таке $\delta > 0$, що як тільки $\|x_0 - y_0\| < \delta$, $y_0 \notin G_*$, для розв'язку $x(t, x_0, t_0)$ існує розв'язок $x(t, y_0, t_0)$, для якого $\| x(t, x_0, t_0) - x(t, y_0, t_0) \| \leq r$. Отже, $x(t, y_0, t_0) \in int\Phi(t)$. Одержали протиріччя до означення G_*.

Достатність (від супротивного). Нехай

$$\Gamma(X(x_0)) \subseteq \Gamma(\Phi), \Delta(X(x_0)) \cap \Delta(\Phi) \neq \emptyset,$$

але $x_0 \notin \partial G_*$. Тоді існує окіл $x_0^r \subset intG_*$. Згідно леми 1 $int\ M_r(t) \supset X(t, x_0, t_0)$, $t \in [t_0, T]$. Відображення $M_r(t)$ — кусково неперервне за Хаусдорфом, $t \in [t_0, T]$. Оскільки $\Gamma(X(x_0)) \subseteq \Gamma(M_r) \subseteq \Gamma(\Phi)$, $\Delta(X(x_0)) \cap \Delta(M_r) = \emptyset$, то $\Delta(X(x_0)) \cap \Delta(\Phi) = \emptyset$, $t \in [t_0, T]$. Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Нехай $G_*^{(i)}$ — максимальні за включенням множини практичної стійкості диференціального включення*

$$\frac{dx}{dt} \in F_i(x, t), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i).$$

Тоді $x_0 \in \partial G_* \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, 2 \dots N\}$ *виконується* $X(\tau_i, x_0, t_0) \subseteq G_*^{(i)}$ *і* $\exists i \in \{1, 2 \dots N\}$ *таке, що* $X(\tau_i, x_0, t_0) \cap \partial G_*^{(i)} \neq \emptyset$.

Наслідок 2. *Точка* $x_0 \in int\ G_*$ *тоді і лише тоді, коли для кожного* $i \in \{1, 2 \dots N\}$ *справджується* $X(\tau_i, x_0, t_0) \subseteq intG_*^{(i)}$.

Розглянемо лінійне диференціальне включення з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} \in A_i(t)\, x + U_i(t), \tag{3}$$

$$x(\tau_i^+) = B_i\, x(\tau_i^-) + h_i,\ i \in \{1, 2 \dots N-1\}, \tag{4}$$

де $A_i(t), B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h_i \in \mathbb{R}^n$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$. Крім того, $A_i(t)$ — неперервні на (τ_{i-1}, τ_i), B_i — невироджені матриці.

Позначимо $Q_i(t) = \int_{\tau_i}^t \Theta_i(t, s)\, U_i(s)\, ds$, де $\Theta_i(t, s)$ — фундаментальна матриця системи $\frac{dx}{dt} = A_i(t)\, x$, нормована в точці *s*, інтеграл розглядаємо у сенсі Аумана [2]. Будемо аналізувати систему (3) на практичну стійкість, припускаючи, що відображення Φ: t $\longmapsto \Phi$ (t), що задає фазові обмеження, є опуклозначним, неперервним за Хаусдорфом на (τ_{i-1}, τ_i).

На інтервалі $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$ розв'язок матиме вигляд

$$\begin{gathered}X\left(t,x_0,t_0\right)=\left\{\Theta_i\left(t,\tau_i\right)\left(\prod_{j=1}^{i-1}B_j\Theta_{\mathrm{j}}\left(t,\tau_{j-1}\right)\right)x_0\right\}+\\+\sum_{k=0}^{i-1}Q_k\left(\tau_k\right)\prod_{j=i}^{k+2}\Theta_{\mathrm{j}}\left(t,\tau_{j-1}\right)B_{j-1}+\\+\sum_{k=1}^{i-1}\Theta_i\left(t,\tau_i\right)\left(\prod_{j=i-1}^{k+2}\Theta_{\mathrm{j}}\left(t,\tau_{j-1}\right)B_j\right)h_k\,.\end{gathered}$$

Якщо $\mathrm{k}>i$, то матриці $\Theta_{\mathrm{k}}\left(\cdot,\cdot\right)$, B_k вважаються нульовими. Спрощуючи, запишемо $X\left(t,x_0,t_0\right)=\left\{H\left(t\right)x_0\right\}+M(t)$, де

$$H\left(t\right)=\Theta_i\left(t,\tau_i\right)\left(\prod_{j=1}^{i-1}B_j\Theta_{\mathrm{j}}\left(t,\tau_{j-1}\right)\right),$$

$$M\left(t\right)=\sum_{k=0}^{i-1}Q_k\left(\tau_k\right)\prod_{j=i}^{k+2}\Theta_{\mathrm{j}}\left(t,\tau_{j-1}\right)B_{j-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{i-1}\Theta_i\left(t,\tau_i\right)\left(\prod_{j=i-1}^{k+2}\Theta_{\mathrm{j}}\left(t,\tau_{j-1}\right)B_j\right)h_k\,.$$

Теорема 3. *Множина* G_* *— опукла.*

Доведення. Візьмемо дві довільні точки a і b з множини G_*. Оскільки $X\left(t,a,t_0\right)\subseteq\Phi\left(t\right)$, $X\left(t,b,t_0\right)\subseteq\Phi\left(t\right)$, то внаслідок опуклості множини $\Phi\left(t\right)$, $\lambda X\left(t,a,t_0\right)+(1-\lambda)X\left(t,b,t_0\right)\subseteq\Phi\left(t\right)$. З іншої сторони, $\lambda X\left(t,a,t_0\right)+(1-\lambda)X\left(t,b,t_0\right)=H\left(t\right)\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+M\left(t\right)$, $\lambda\in[0,1]$. Отже, $\lambda a+(1-\lambda)b\in G_*$. Теорему доведено. □

Нехай $c\left(A,\psi\right)=\sup_{a\in A}\left(a^T\psi\right)$ — опорна функція множини А, $\psi\in S$, $S=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$, Т — знак транспонування. Згідно теореми 2, для того, щоб $x_0\in\partial G_*$, необхідно і достатньо, щоб $X\left(t,x_0,t_0\right)\subseteq\Phi\left(t\right)$ і $\exists i,\exists t\in[\tau_{i-1},\tau_i)$ такі, що $\partial\left(X\left(t,x_0,t_0\right)\right)\cap\partial(\Phi)\neq\emptyset$. Отже, виходячи з властивостей опорної функції, отримаємо:

$$c\left(X\left(t,x_0,t_0\right),\psi\right)\le c\left(\Phi\left(t\right),\psi\right),\ \forall\psi\in S,t\in[t_0,T]. \tag{5}$$

Але, з іншого боку, існує $\xi\in S$ таке, що

$$c\left(X\left(t,x_0,t_0\right),\xi\right)=c\left(\Phi\left(t\right),\xi\right). \tag{6}$$

Випишемо опорний функціонал для $X\left(t,x_0,t_0\right)$. Одержуємо

$$\begin{gathered}c\left(X\left(t,x_0,t_0\right),\psi\right)=c\left(\left\{H\left(t\right)x_0\right\},\psi\right)+c\left(M\left(t\right),\psi\right)=\\=\psi^T\left\{H\left(t\right)x_0\right\}+c\left(M\left(t\right),\psi\right).\end{gathered}$$

Із співвідношень (5),(6) одержуємо

$$\psi^T\left\{H\left(t\right)x_0\right\}\le c\left(\Phi\left(t\right),\psi\right)-c\left(M\left(t\right),\psi\right),\forall\psi\in S,\ \forall t\in[t_0,T] \tag{7}$$

та існує $\xi \in S$ таке, що

$$\xi^T \left\{ H\left(t\right) x_0 \right\} = c\left(\Phi\left(t\right), \xi\right) - c\left(M\left(t\right), \xi\right). \tag{8}$$

Систему (7),(8) за умови

$$c\left(\Phi\left(t\right), \psi\right) - c\left(M\left(t\right), \psi\right) > 0 \tag{9}$$

можна переписати у вигляді

$$\frac{\psi^T \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j \Theta_{\mathrm{j}}\left(t, \tau_j\right) \right) x_0}{c\left(\Phi\left(t\right), \psi\right) - c\left(\mathrm{M}\left(t\right), \psi\right)} \leq 1,\ t \in \left[t_0, T\right], \psi \in S,$$

при цьому $\frac{\psi^T \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j \Theta_{\mathrm{j}}(t, \tau_j) \right) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - c(\mathrm{M}(t), \psi)} = 1$ для деякого $\xi \in S$. Умова (9) еквівалентна належності нульової точки множині G_*.

Критерій 1. *Для того, щоб $x_0 \in \partial G_*$ необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення*

$$\max_{i \in \{1,2\ldots N\}} \max_{t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j \Theta_{\mathrm{j}}\left(t, \tau_j\right) \right) x_0}{c\left(\Phi\left(t\right), \psi\right) - c\left(\mathrm{M}\left(t\right), \psi\right)} = 1, \tag{10}$$

де

$$M\left(t\right) = \sum_{k=0}^{i-1} Q_k\left(\tau_k\right) \prod_{j=i}^{k+2} \Theta_{\mathrm{j}}\left(t, \tau_{j-1}\right) B_{j-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i-1} \Theta_i\left(t, \tau_i\right) \left(\prod_{j=i-1}^{k+2} \Theta_{\mathrm{j}}\left(t, \tau_{j-1}\right) B_j \right) h_k.$$

Наслідок 1. *Функція*

$$m_*\left(x_0\right) = \max_{i \in \{1,2\ldots N\}} \max_{t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j \Theta_{\mathrm{j}}\left(t, \tau_j\right) \right) x_0}{c\left(\Phi\left(t\right), \psi\right) - c\left(\mathrm{M}\left(t\right), \psi\right)}$$

є функцією Мінковського множини G_* , при цьому

$$G_* = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : m_*\left(x_0\right) \leq 1 \right\}.$$

Наслідок 2. *Функція деформації множини G_* має вигляд*

$$k_*\left(l\right) = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{c\left(\Phi\left(t\right), \psi\right) - c\left(\mathrm{M}\left(t\right), \psi\right)}{\psi^T \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j \Theta_{\mathrm{j}}\left(t, \tau_j\right) \right) l}, \quad l \in S. \tag{11}$$

Тоді $G_* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : k = kl, k \in \left[0, k_*\left(l\right)\right], l \in S \right\}$.

Зауваження. *Якщо опуклозначне відображення* Φ *є кусково неперервним на відрізку* $[t_0,T]$, $\Phi(t^-)$, $\Phi(t^+)$ *— обмежені,* $t\in[t_0,T]$, *то формула (10) має вигляд*

$$\max_{i\in\{1,2\dots N\}}\max_{t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]}\max_{\psi\in S}\max\left\{K^-(t,i,\psi),K^+(t,i,\psi)\right\}=1,$$

де

$$K^-(t,i,\psi)=\frac{\psi^T\left(\prod_{j=1}^{i-1}B_j\Theta_{\mathrm{j}}(t,\tau_j)\right)x_0}{c\left(\Phi\left(t^-\right),\psi\right)-c\left(\mathrm{M}\left(t\right),\psi\right)},$$

$$K^+(t,i,\psi)=\frac{\psi^T\left(\prod_{j=1}^{i-1}B_j\Theta_{\mathrm{j}}(t,\tau_j)\right)x_0}{c\left(\Phi\left(t^+\right),\psi\right)-c\left(\mathrm{M}\left(t\right),\psi\right)},$$

причому $c\left(\Phi\left(t^-\right),\psi\right)-c\left(M\left(t\right),psi\right)>0$, $c\left(\Phi\left(t^+\right),\psi\right)-c\left(M\left(t\right),\psi\right)>0$, $t\in\in[t_0,T]$, $\psi\in S$. *У цьому випадку функція деформації множини* G_* *записується у такий спосіб*

$$\overline{k}\left(l\right)=\min_{t\in w_t}\min_{\psi\in w_s}\frac{\min\left\{c\left(\Phi\left(t^-\right),\psi\right)-c\left(\mathrm{M}\left(t\right),\psi\right),\left(\Phi\left(t^+\right),\psi\right)-c\left(\mathrm{M}\left(t\right),\psi\right)\right\}}{\psi^T\left(\prod_{j=1}^{i-1}B_j\Theta_{\mathrm{j}}(t,\tau_j)\right)l}.$$

Із (7) випливає, що $\psi_0^Tx_0\le c\left(\Phi\left(t\right),\psi\right)-c\left(M\left(t\right),\psi\right)$, де $\psi_0=H^T\psi$, $\psi\in\in S$, $t\in[t_0,T]$. Матриця $H\left(t\right)$ є невиродженою, тому $\psi=\left(H^{-1}\left(t\right)\right)^T\psi_0$. Далі одержуємо

$$\psi_0^Tx_0\le c\left(\Phi\left(t\right),\left(H^{-1}\left(t\right)\right)^T\psi_0\right)-c\left(M\left(t\right),\left(H^{-1}\left(t\right)\right)^T\psi_0\right),\ t\in[t_0,T],$$

$$\psi_0^Tx_0\le\inf_{t\in[t_0,T]}c\left(\Phi\left(t\right),\left(H^{-1}\left(t\right)\right)^T\psi_0\right)-c\left(M\left(t\right),\left(H^{-1}\left(t\right)\right)^T\psi_0\right)\ \forall\psi_0\in\mathbb{R}^n.$$

Функція у правій частині нерівності є додатньо однорідною, і ця нерівність однозначно визначає точки з множини G_*. Тому за властивостями опорного відображення [6]

$$\begin{aligned}c\left(G_*,\psi_0\right)=\overline{co}\inf\nolimits_{t\in[t_0,T]}\left(c\left(\Phi\left(t\right),\left(H^{-1}\left(t\right)\right)^T\psi_0\right)-\right.\\ \left.-c\left(M\left(t\right),\left(H^{-1}\left(t\right)\right)^T\psi_0\right)\right).\end{aligned}\tag{12}$$

Тут $\bar{co}(\cdot)$ є обопукленням функції [6]. У такий спосіб отримуємо наступне твердження.

Теорема 4. *Опорна функція множини* G_* *має вигляд (12).*

Виходячи із співвідношення (11), можна запропонувати чисельний алгоритм знаходження множини G_*. Він полягає у тому, що на одиничній сфері та часовому проміжку вводяться сітки, на яких здійснюється апроксимація G_* згідно наслідку 1 критерію 1.

Висновки. В даній роботі аналізуються властивості максимальної за включенням множини практичної стійкості диференціальних включень з імпульсним впливом. Обґрунтовано компактність та теорему про внутрішні та граничні точки множини G_*, доведено критерій для граничної точки множини G_* у випадку лінійного диференціального включення з лінійним імпульсним впливом, знайдено функціонал Мінковського, функцію деформації такої множини та опорну функцію. Результати можуть бути розвинені на випадок багатозначних функцій імпульсного впливу.

1. **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація [текст] / Башняков О.М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление [текст] / Благодатских В. И. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.
3. **Гаращенко Ф. Г.** Практическая устойчивость импульсных систем [текст] / Гаращенко Ф.Г., Хитько И. В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2003. – Вип. 138. – С. 48–56.
4. **Гаращенко Ф. Г.** Критерії практичної стійкості для динамічних систем з імпульсним впливом [текст] / Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. // Вісник. Кібернетика. – 2002. – Вип. 3. – С. 35–37.
5. **Импульсные** дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью [текст] / Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. – К.: інститут математики, 2007. – 428 с.
6. **Половинкин Е. С.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа [текст] / Половинкин Е. С., Балашов М. В. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.
7. **Розвиток** методів і технологій моделювання та оптимізації складних систем [текст] / [Гаращенко Ф. Г., Волошин О. Ф., Кириченко М. Ф. та ін.]. – К.: Сталь, 2009. – 668 с.
8. **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием [текст] / Самойленко А. М., Перестюк Н. А. – К.: Выща школа, 1987. – 228 с.
9. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения [текст] / Филиппов А. Ф. // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2003. – С. 265–288.

УДК 517.928

А. К. Осадчий
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБОБЩЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ Н. Н. БОГОЛЮБОВА НА СЛУЧАЙ СИСТЕМ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Осадчий О. К. Узагальнення другої основної теореми М. М. Боголюбова на випадок систем з розривною правою частиною. В статті доведено існування періодичних розв'язків для систем з розривною правою частиною та близькість статичного розв'язку усередненої системи і періодичного розв'язку розривної системи, а отже, отримано узагальнення другої основної теореми М. М. Боголюбова для розривних систем.
Ключові слова: диференціальні рівняння з розривною правою частиною, періодичні розв'язки, усереднення.

Осадчий А. К. Обобщение второй основной теоремы Н. Н. Боголюбова на случай систем с разрывной правой частью. В статье доказано существование периодических решений для систем с разрывной правой частью и близость статического решения усредненной системы и периодического решения разрывной системы, а следовательно, получено обощение второй основной теоремы Н. Н. Боголюбова для разрывных систем.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, периодические решения, усреднение.

Osadchij A. K. The generalization of the second fundamental N. Bogolubov's theorem for the systems with the discontinuous right-hand side. The existing of the periodic solutions for the systems with the discontinuous right-hand side is proved in the article. The proximity of the static solution of the average system and the periodic solution of the discontinuous system is established, hence, the generalization of the second fundamental N. Bogolubov's theorem for the discontinuous system is obtained.
Key words: differential equations with discontinuous right-side, periodic solution, averaging.

Введение. Вопрос о существовании, единственности и устойчивости периодического решения для уравнений в стандартной форме, когда правые части системы и их частные производные по x ограничены и равномерно непрерывны, рассматривался Н. Н. Боголюбовым [1].

Ю. А. Митропольским [2] и А. М. Самойленко [4] было доказано существование периодических решений для систем с недифференцируемыми правыми частями.

В настоящей работе доказывается аналогичная теорема для систем с разрывной правой частью.

Итак, будем рассматривать систему стандартного вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x), \tag{1}$$

где x, X — n-мерные вектор функции, $X(t,x)$ — вещественная вектор-функция, определенная в области

$$Q_{n+1} = \{(t,x) \mid t \geq 0,\ x \in Q_n \subset E^n\}.$$

В точках поверхности S, заданной уравнением $\Phi(t,x) = 0$, правые части системы терпят разрыв, т. е.

$$X(t,x) = \begin{cases} X_1(t,x) \text{ при } \Phi(t,x) \leq 0, \\ X_2(t,x) \text{ при } \Phi(t,x) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Системе (1) ставится в соответствие следующая усредненная система

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{X}(\xi), \tag{3}$$

где

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{I_1(x)} X_1(t,x)\,dt + \int_{I_2(x)} X_2(t,x)\,dt\right];$$
$$I_1(x) = \{t \in [0,2\pi] \mid \Phi(t,x) \leq 0\}, \quad I_2(x) = [0,2\pi] \setminus I_1(x).$$

Введем в рассмотрение следующие области

$$\mathcal{D}_1 = \left\{x \in E^n \mid \max_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t,x) = \Phi_1(x) \leq 0\right\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{x \in E^n \mid \min_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t,x) = \Phi_2(x) > 00\right\},$$

$$\mathcal{D}_3 = Q_n \setminus (\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2).$$

Теорема 1. *Пусть в области* Q_{n+1} *выполнены следующие условия:*

1. Функции $X_i(t,x)$, $i = 1,2$ *являются непрерывными периодическими по* t *с периодом* 2π *и непрерывно дифференцируемыми по* x.

2. Система усредненных уравнений

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{X}(\xi), \quad \tau = \varepsilon t$$

имеет изолированное статическое решение $\xi = \xi_0$, *принадлежащее с некоторой выпуклой* $\rho-$ *окрестностью* U_ρ *области* $\mathcal{D}_3$.

3. Функция $\frac{\partial X(x)}{\partial x}$ *локально удовлетворяет условию Липшица по* x *при* $x \in \in U_\rho$.

4. $det\left|\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right| \neq 0$ *для* $x \in U_\rho$.

5. Функция $\Phi(t,x)$ 2π*-периодична по* t *и непрерывно дифференцируема по* t *и по* x, *причем* $\left|\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right| \geq \delta > 0$ *при* $(t,x) \in S$, $x \in U_\rho$.

6. На отрезке $[0,2\pi]$ *функция* $\Phi(t,x)$ *имеет конечное число* K *простых нулей при* $x \in U_\rho$, *где* $K = \max_{x\in U_\rho} K(x)$.

Тогда для любого $\eta > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *существует* 2π*-периодическое решение* $x(t)$ *системы (1) и*

$$\|x(t) - \xi_0\| \leq \eta. \tag{4}$$

Доказательство. Сделаем в (1) замену переменных

$$x = \xi_0 + h$$

и перейдем к системе уравнений

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon \overline{X}\left(\xi_0 + h\right) + Z\left(t, \xi_0 + h\right), \tag{5}$$

где

$$Z(t,x) = X(t,x) - \overline{X}(x). \tag{6}$$

По системе (5) запишем систему интегральных уравнений

$$h(t) = h(0) + \varepsilon \int_0^t \overline{X}\left(\xi_0 + h(\tau)\right) d\tau + \varepsilon \int_0^t Z\left(\tau, \xi_0 + h(\tau)\right) d\tau. \tag{7}$$

В силу условий теоремы для любого $x \in U_\rho$ корни $t_1(x), \ldots, t_K(x)$ функции $\Phi(t,x)$ непрерывно дифференцируемы. Следовательно, непрерывно дифференцируема функция

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{K} \int_{t_i(x)}^{t_{i+1}(x)} X_{K_i}(t,x)\, dt,$$

где

$$t_0(x) = 0,\ t_{K+1}(x) = 2\pi\ K_0 = 1 + \theta\left(-\frac{\partial\Phi\left(t_1(x), x\right)}{\partial t}\right),$$

$K_i = 1 + \theta\left(\frac{\partial\Phi(t_i(x),x)}{\partial x}\right)$ при $i = \overline{1,K}$, θ – функция Хевисайда.

Тогда для решения $h(t)$ системы (7), принадлежащего ρ-окрестности U_ρ нуля $h(t) \equiv 0$, имеет место

$$\int_0^t \overline{X}\left(\xi_0 + h(r)\right) dr = \overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right) t + \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} (h(\tau) - h(0))\, d\tau =$$

$$= \overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right) \cdot t + \tag{8}$$

$$+\varepsilon \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} \cdot \left[\int_0^\tau \overline{X}\left(\xi_0 + h(s)\right) ds + \int_0^\tau Z\left(s, \xi_0 + h(s)\right) ds\right] d\tau),$$

где $\tilde{h}$ – некоторая постоянная $\tilde{h} \in [h(0), h(t)]$. В силу (8) систему (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} h(t) = h(0) + \varepsilon \overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right) \cdot t + \\ +\varepsilon^2 \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} \cdot \int_0^\tau \overline{X}\left(\xi_0 + h(s)\right) ds\, d\tau + \\ +\varepsilon^2 \int_0^t \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{h}\right)}{\partial x} \int_0^{\tilde{t}} Z\left(s, \xi_0 + h(s)\right) ds\, d\tau + \varepsilon \int_0^t Z\left(\tau, \xi_0 + h(\tau)\right) d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

Потребовав периодичность решения $h(t)$ с периодом 2π

$$h(2\pi) = h(0), \tag{10}$$

получим

$$\begin{aligned}\varepsilon\overline{X}\left(\xi_0 + h(0)\right)\cdot 2\pi + \varepsilon^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\cdot\int_0^t\overline{X}\left(\xi_0+h(\tau)\right)d\tau\,dt + \\ +\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\cdot\int_0^t Z\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)d\tau\,dt + \\ +\varepsilon\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0+h(t)\right)dt = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Из (11), записанного в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+h^*\right)}{\partial x}h(0) = \frac{1}{2\pi}\left\{\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\times\right.\\ \left.\times\int_0^t\left[\overline{X}\left(\xi_0+h(\tau)\right)+Z\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\right]d\tau\,dt + \varepsilon\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0+h(t)\right)dt\right\},\end{aligned}\tag{12}$$

где h^* – некоторая постоянная $h^*\in[0,h(0)]$, следует

$$\begin{aligned}h(0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+h^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\left\{\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\times\right.\\ \left.\times\int_0^t\left[\overline{X}\left(\xi_0+h(\tau)\right)+Z\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)\right]d\tau\,dt + \varepsilon\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0+h(t)\right)dt\right\}.\end{aligned}\tag{13}$$

Подставляя $h(t)$ из (7) в последнее слагаемое (13), получаем

$$\begin{aligned}h(0) = \tfrac{1}{2\pi}\left[\tfrac{\partial\overline{X}(\xi_0+h^*)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\left\{\varepsilon\textstyle\int_0^{2\pi}\tfrac{\partial\overline{X}(\xi_0+\tilde{h})}{\partial x}\cdot\textstyle\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)d\tau\,dt+\right.\\ \left.+\textstyle\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0+h(0)+\varepsilon\textstyle\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)d\tau\right)dt\right\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Подставив (14) в (7), получим следующую систему уравнений для определения $h(t)$, удовлетворяющего условию (10):

$$\begin{aligned}h(t) = \varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)d\tau + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+h^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\varepsilon\,\cdot\\ \cdot\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{h}\right)}{\partial x}\times\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)d\tau\,dt+\right.\\ \left.+\int_0^{2\pi}Z\left(t,\xi_0=h(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+h(\tau)\right)d\tau\right)dt\right\}.\end{aligned}\tag{15}$$

Покажем, что при сделанных выше предположениях, уравнение (15) для $t \in [0, 2\pi]$ имеет решение в некоторой η-окрестности U_η нуля $h(t) = 0$, $\eta \le \rho$.

Действительно, пусть T – шар непрерывных функций на $[0, 2\pi]$

$$\|\varphi(t)\| \le \eta. \tag{16}$$

Определим на T оператор U_t, задав его равенством

$$\begin{aligned} U_t\varphi = \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right) d\tau + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \cdot \varepsilon \cdot \\ \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{\varphi}\right)}{\partial x} \times \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right) d\tau\, dt + \\ + \int_0^{2\pi} Z\left(t, \xi_0 + \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right) d\tau\right) dt. \end{aligned} \tag{17}$$

Проверим, что оператор $U_t\varphi$ вполне непрерывный в пространстве непрерывных функций. Имеем:

1) оператор $U_t\varphi$ переводит шар T в компактную его часть, что следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|U_t\varphi\| \le \varepsilon \left\|\int_0^{2\pi} X\left(t, \xi_0 + \varphi(t)\right) dt\right\| + \frac{1}{2\pi}\left\|\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \times \right. \\ \left. \times \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{\varphi}\right)}{\partial x} \times \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right) d\tau\, dt\right\| + \frac{1}{2\pi}\left\|\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \times \right. \\ \times \left\{\int_0^{2\pi}\left[X\left(t, \xi_0 + \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right) d\tau\right) - \right.\right. \\ \left.\left.\left. - \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right) d\tau\right)\right] dt\right\}\right\|. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$I_i^{12}\left(x_1, x_2\right) = I_i\left(x_1\right) \cap I_i\left(x_2\right), \quad I_i^1\left(x_1, x_2\right) = I_i\left(x_1\right) \setminus I_i^{12},$$

$$I_i^2\left(x_1, x_2\right) = I_i\left(x_2\right) \setminus I_i^{12}, \quad i = 1, 2.$$

На основании [3] для нулей функции $\Phi(t, x)$ справедливо неравенство

$$\left|t_i\left(x_1\right) - t_i\left(x_2\right)\right| \le D\left\|x_1 - x_2\right\|,$$

где D – некоторая постоянная. Тогда

$$\varepsilon \left\|\int_0^{2\pi} X\left(t, \xi_0 + \varphi(t)\right) dt\right\| \le \varepsilon 2\pi M;$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\left[\frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1} \cdot \varepsilon \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}\left(\xi_0 + \tilde{\varphi}\right)}{\partial x} \int_0^t X\left(\tau, \xi_0 + \varphi(\tau)\right) d\tau\, dt\right\| \le 2\pi M_2 M_1 \varepsilon;$$

$$\frac{1}{2\pi}M_2\left\{\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\|\right\}\leq$$

$$\leq M_2\frac{1}{2\pi}\left\{\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-\overline{X}\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]dt\right\|+\right.$$

$$+\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|+$$

$$\left.+\left\|\int_0^{2\pi}\left[\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)\right)-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\|\right\}. \qquad (18)$$

Оценим в (18) каждое слагаемое в отдельности

$$\left\|\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-X\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|\leq$$

$$\leq\left\|\int_{I_1^{12}(\varphi(t),\varphi(0))}\left[X_1\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)-X_1\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|+$$

$$+\left\|\int_{I_1^{1}(\varphi(t),\varphi(0))}X_1\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)\,dt\right\|+\left\|\int_{I_1^{2}(\varphi(t),\varphi(0))}X_1\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\,dt\right\|+$$

$$+\left\|\int_{I_2^{12}(\varphi(t),\varphi(0))}\left[X_2\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)-X_2\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\right]\,dt\right\|+$$

$$+\left\|\int_{I_2^{1}(\varphi(t),\varphi(0))}X_2\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)\,dt\right\|+\left\|\int_{I_2^{2}(\varphi(t),\varphi(0))}X_2\left(t,\xi_0+\varphi(0)\right)\,dt\right\|\leq$$

$$\leq 4\pi\lambda\varepsilon 2\pi M+M\left(mesI_1^1+mesI_1^2+mesI_2^1+mesI_2^1\right)\leq$$

$$\leq 8\pi^2\lambda\varepsilon M+2M\left(mesI_1^1+mesI_1^2\right);$$

$$\left\|\int_0^{2\pi}\left[\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)\right)-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X(\tau,\xi_0+\varphi(\tau))\,d\tau\right)\right]\,dt\right\|\leq M_2 4\pi^2 M\lambda\varepsilon.$$

Окончательно имеем

$$\|U_t\varphi\|\leq 2\pi M\varepsilon+2\pi M_2M_1M\varepsilon+M_2 4\pi\lambda M\varepsilon+M_2 4M^2DK\varepsilon+M_2^2\lambda M\varepsilon. \qquad (19)$$

Выберем $\varepsilon_0>0$ из условия

$$\varepsilon_0<\eta/\left(2\pi M+2\pi M_2M_1M+M_2 4\pi\lambda M+M_2 4M^2DK+M_2^2\lambda M\right).$$

Тогда из (19) следует, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ оператор переводит шар T в компактную его часть.

2) оператор $U_t\varphi$ непрерывен, что следует из неравенства

$$\|U_t\varphi_n-U_t\varphi\|\leq\varepsilon\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi_n(t)\right)-X\left(t,\xi_0+\varphi(t)\right)\right]\,dt\Big\|+$$

$$+\left\|\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}_n\right)}{\partial x}\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi_n(\tau)\right)\,d\tau\,dt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi^*\right)}{\partial x}\right]_{-1}\cdot\varepsilon\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}\right)}{\partial x}\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\,dt\right\}\right\|+$$

$$+\left\{\left\|\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi_n(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi_n(\tau)\right)\,d\tau\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi_n(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\}-\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi^*\right)}{\partial x}\right]^{-1}\times\right.$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left[X\left(t,\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\overline{X}\left(\xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X\left(\tau,\xi_0+\varphi(\tau)\right)\,d\tau\right)\right]\,dt\right\}\right\|.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi_n^*\right)}{\partial x}\to\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\varphi^*\right)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}_n\right)}{\partial x}\to\frac{\partial\overline{X}\left(\xi_0+\tilde{\varphi}\right)}{\partial x}$$

при $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$, и выполнив оценки интегралов, входящих в правую часть неравенства (20), аналогично тому, как это сделано при доказательстве условия сжатия оператора $U_t\varphi$, получим:

$$\lim_{\varphi_n\to\varphi}\|U_t\varphi_n-U_t\varphi\|=0.$$

Условия 1) и 2) означают, что оператор вполне непрерывный в пространстве непрерывных функций и, следовательно, в силу теоремы Шаудера [5] имеет неподвижную точку в шаре T. Это равносильно тому, что исходное уравнение (1) имеет в η-окрестности U_η точки $x=\xi_0$ периодическое с периодом 2π решение.

Заключение. Таким образом, доказано существование периодических решений для систем с разрывной правой частью и близость статического решения усредненной системы и периодического решения разрывной системы, т. е. получено обощение второй основной теоремы Н. Н. Боголюбова для разрывных систем. Полученные результаты имеют прикладное значение.

1. **Боголюбов Н. Н.** О некоторых статистических методах в математической физике [текст] / Н. Н. Боголюбов. – Львов: АН УССР, 1945. – 139 с.
2. **Митропольский Ю. А.** О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не дифференцируемы [текст] / Ю. А. Митропольский. – УМЖ, 1959. – Т. 9, № 4. – С. 366–379.

3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления [текст] / В. А. Плотников. – К.: Лыбидь, 1992. – 188 с.
4. **Самойленко А. М.** К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями [текст] / А. М. Самойленко. – УМЖ, 1963. – Т. 15, № 3. – С. 7–12.
5. **Shauder J.** Der Fixpunktsatz in Functional Raumen [text] / J. Shauder. – Studia Math., 1930. – Bd. 2. – P. 171–180.
6. **Самойленко А. М.** Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [текст] / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк // Диф. ур-ние. – 1974. – Т. 10, № 11. – С. 2001–2010.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 115–122

УДК 517.91

Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ТЕОРЕМА КРАСНОСЕЛЬСКОГО–КРЕЙНА ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Скрипник Н. В. Теорема Красносельського–Крейна для нечітких диференціальних рівнянь. У статті розглядається можливість обгрунтування теореми про неперервну залежність розв'язків від параметра і методу усереднення для нечітких диференціальних рівнянь у випадку, коли права частина не задовольняє умові Липшиця по фазовій змінній.
Ключові слова: нечіткі рівняння, усереднення.

Скрипник Н. В. Теорема Красносельского–Крейна для нечетких дифференциальных уравнений. В статье рассматривается возможность обоснования теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра и метода усреднения для нечетких дифференциальных уравнений в случае, когда правая часть не удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной.
Ключевые слова: нечеткие уравнения, усреднение.

Scripnik N. V. The Krasnoselskij–Krein theorem for fuzzy differential equations. In this article the possibility of the substantiation of the theorem of continuous dependence of solutions on parameter and the averaging method for fuzzy differential equations in the case when the right-hand side does not satisfy the Lipshitz condition on the phase variable is considered.
Key words: fuzzy equations, averaging.

Введение. В работах Н. Н. Боголюбова [1], А. Н. Филатова [9], В. А. Плотникова [5] рассмотрено обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. M. Kisieliwicz [13] и А. В. Плотников [6] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для дифференциальных уравнений с производной Хукухары [10, 11]. При этом существенно использовалось выполнение условия Липшица по фазовой переменной для исходного или усредненного уравнения.

В связи с этим представляет интерес теорема о непрерывной зависимости решения от параметра при менее ограничительных условиях, доказанная М. А. Красносельским и С. Г. Крейном [4] для обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет получить обоснование метода усреднения для более широкого класса дифференциальных уравнений. В [7] доказан аналог теоремы Красносельского-Крейна для дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары.

В данной работе рассмотрим возможность переноса полученных результатов на нечеткие дифференциальные уравнения, теория которых активно развивается в последнее время [15]-[23].

Основные результаты. Пусть $conv(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(F,G)$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

2) x нечетко выпукло, т. е. для любых $y, z \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\}$;

3) x полунепрерывно сверху, т. е. для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $||y - y_0|| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α — срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.*

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D(x, v) = \sup\limits_{0 \leq \alpha \leq 1} h([x]^\alpha, [v]^\alpha)$.

Определение 2 [19]. *Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным в точке $t_0 \in I$, если для любого $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ непрерывно в точке $t_0 \in I$. Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным на I, если оно слабо непрерывно в каждой точке $t \in I$.*

Определение 3 [19]. *Интегралом от отображения $f : I \to \mathbb{E}^n$ по промежутку I называется элемент $g \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[g]^\alpha = \int\limits_I f_\alpha(t)dt$ для всех $\alpha \in (0,1]$, где интеграл от многозначного отображения $f_\alpha(t)$ понимается в смысле Ауманна [14].*

Определение 4 [19]. *Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in I$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре [8] в точке t_0, его производная равна $D_H f_\alpha(t_0)$ и семейство множеств $\{D_H f_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ определяет элемент $f'(t_0) \in \mathbb{E}^n$. Если отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ дифференцируемо в точке $t_0 \in I$, то $f'(t_0)$ называют нечеткой производной $f(t)$ в точке t_0. Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым на I, если оно дифференцируемо в каждой точке $t \in I$.*

Определение 5. *Отображение $f : G \to \mathbb{E}^n$ называется равномерно непрерывным на $G \subset \mathbb{E}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x, y \in G$, удовлетворяющих неравенству $D(x, y) < \delta$, справедлива оценка $D(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Под нечетким дифференциальным уравнением будем понимать уравнение вида

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $f : I \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$.

Определение 6. *Отображение $x : I_0 \to \mathbb{E}^n$ называется решением задачи (1) на $I_0 \subset I$, если оно слабо непрерывно на I_0 и для всех $t \in I_0$ удовлетворяет интегральному уравнению $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.*

Имеют место следующие теоремы существования и единственности решений нечетких дифференциальных уравнений.

Теорема 1 [8]. *Пусть в области*

$$Q = \{(t, x) : t_0 \le t \le t_0 + a,\ D(x, x_0) \le b\}$$

выполнены следующие условия:

1) $f(\cdot, x)$ сильно измеримо по t при любом фиксированном x;

2) $f(t, \cdot)$ слабо непрерывно по x при почти всех t;

3) существует суммируемая функция $m(t)$ такая, что $D(f(t, x), \hat{0}) \le m(t)$ для почти всех t.

Тогда на отрезке $[t_0, t_0 + d]$ существует решение задачи (1), где $d > 0$ таково, что $d \le a$, $\varphi(t_0 + d) \le b$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds$.

Теорема 2 [8]. *Пусть в области Q отображение $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x, т. е. существует постоянная $L > 0$ такая, что $D(f(t, x), f(t, y)) \le LD(x, y)$ для всех $(t, x), (t, y) \in Q$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение.*

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости решения от параметра.

Теорема 3. *Пусть для нечеткого дифференциального уравнения*

$$x' = f(t, x, \lambda), \tag{2}$$

где отображение $f(t, x, \lambda)$, принимающее значения в $\mathbb{E}^n$, определено при $t \in \in [0, T], x \in G, G$ — ограниченная область в $\mathbb{E}^n, \lambda \in \Lambda, \Lambda$ — некоторое множество значений параметра λ, имеющее $\lambda_0 \in \Lambda$ предельной точкой, выполнены следующие условия:

а) отображение $f(t, x, \lambda)$ равномерно ограничено, слабо непрерывно по t, равномерно непрерывно по x равномерно относительно t и λ;

б) отображение $f(t, x, \lambda)$ интегрально непрерывно по λ в точке λ_0, т. е. для любых $t_1, t_2 \in [0, T], t_1 < t_2$ и любого $x \in G$ выполняется условие:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} D\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s, x, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} f(s, x, \lambda_0) ds\right) = 0; \tag{3}$$

в) решения $x(t, \lambda_0)$ уравнения

$$x' = f(t, x, \lambda_0), \tag{4}$$

удовлетворяющие начальному условию $x(0, \lambda_0) = x_0 \in G^1 \subset G$, определены при $t \in [0, T]$ и лежат вместе с некоторой $\rho-$ окрестностью в области G.

Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, что при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для любого решения $x(t, \lambda)$ уравнения (2), определенного при $t \in [0, T]$ и удовлетворяющего начальному условию $x(0, \lambda) = x_0$, существует такое решение $x(t, \lambda_0)$ уравнения (4), что справедливо неравенство

$$D(x(t, \lambda), x(t, \lambda_0)) < \eta, \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Из условий а), б) теоремы и ограниченности области G следует, что сходимость в (3) является равномерной относительно t_1, t_2 и x.

Покажем, что пределом любой равномерно сходящейся последовательности решений уравнения (2) является решение уравнения (4).

Пусть $x(t,\lambda)$ $(\lambda \to \lambda_0,\ \lambda \in \Lambda)$ — равномерно сходящаяся последовательность решений (2), удовлетворяющих начальному условию $x(0,\lambda) = x_0$. Следовательно, существует такое слабо непрерывное отображение $y(t)$, что

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\max_{t\in[0,T]} D(x(t,\lambda),y(t)) = 0.$$

В силу определения решения нечеткого дифференциального уравнения отображение $x(t,\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t,\lambda) = x_0 + \int\limits_0^t f(s,x(s,\lambda),\lambda)\,ds. \tag{5}$$

Перейдем в (5) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$. Для этого сначала покажем, что для любого $t \in [0,T]$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^t f(s,x(s,\lambda),\lambda)ds = \int_0^t f(s,y(s),\lambda_0)ds. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение кусочно-постоянное отображение $\overline{y}(t)$ такое, что $\max\limits_{t\in[0,T]} D(y(t),\overline{y}(t)) < \delta$, где δ выбираем из условия равномерной непрерывности правой части таким образом, чтобы при всех $x,y \in G$, удовлетворяющих условию $D(x,y) < \delta$, выполнялось неравенство

$$D(f(s,x,\lambda),f(s,y,\lambda)) < \frac{\varepsilon}{4T}.$$

Выберем окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 так, чтобы при $\lambda \in U(\lambda_0)$ и любых $s \in [0,T]$ была справедлива оценка $D(x(s,\lambda),y(s)) < \delta$. Тогда

$$I_1 = D\left(\int_0^t f(s,x(s,\lambda),\lambda)ds, \int_0^t f(s,y(s),\lambda)ds\right) \le$$

$$\le \int_0^t D(f(s,x(s,\lambda),\lambda),f(s,y(s),\lambda))ds \le \frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_2 = D\left(\int_0^t f(s,y(s),\lambda)ds, \int_0^t f(s,\overline{y}(s),\lambda)ds\right) \le$$

$$\le \int_0^t D(f(s,y(s),\lambda),f(s,\overline{y}(s),\lambda))ds < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_4 = D\left(\int_0^t f(s,y(s),\lambda_0)ds, \int_0^t f(s,\overline{y}(s),\lambda_0)ds\right) \le$$

$$\le \int_0^t D(f(s,y(s),\lambda_0),f(s,\overline{y}(s),\lambda_0))ds < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сузим окрестность $U(\lambda_0)$, используя условие б) теоремы так, чтобы при $\lambda \in \in U(\lambda_0)$ выполнялось неравенство

$$I_3 = D\left(\int_0^t f(s, \overline{y}(s), \lambda)ds, \int_0^t f(s, \overline{y}(s), \lambda_0)ds\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом,

$$D\left(\int_0^t f(s, x(s,\lambda), \lambda)ds, \int_0^t f(s, y(s), \lambda_0)ds\right) \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < \varepsilon,$$

т. е. предельное равенство (6) доказано.

Тогда, переходя в (5) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$, получаем

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(s, y(s), \lambda_0)ds,$$

т. е. отображение $y(t)$ является решением нечеткого дифференциального уравнения (4).

Следовательно, показано, что предел любой равномерно сходящейся последовательности решений (2) является решением уравнения (4).

Покажем, что для любого η существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого решения $x(t,\lambda), \lambda \in U(\lambda_0)$ уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию $x(0,\lambda) = x_0$, существует решение $x(t,\lambda_0)$ уравнения (4) такое, что

$$D(x(t,\lambda), x(t,\lambda_0)) < \eta, \quad t \in [0,T].$$

Предположим противное. Тогда существуют η_0 и последовательность решений $x(t,\lambda_k)$, $\lambda_k \in U(\lambda_0)$, $\lambda_k \to \lambda_0$, $k \to \infty$ уравнения (2) такая, что

$$\max_{t\in[0,T]} D(x(t,\lambda_k), x(t,\lambda_0)) \ge \eta_0 \tag{7}$$

для всех решений $x(t,\lambda_0)$ уравнения (4).

Так как семейство $x(t,\lambda)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то по теореме Асколи [2] из него можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой в силу доказанного выше будет решение (4), что противоречит (7).

Замечание 1. Если $x(t,\lambda_0)$ — некоторое решение нечеткого дифференциального уравнения (4), то может не существовать последовательности решений (2), сходящейся к $x(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x' = \sqrt{x} + \lambda^2 f, \quad x(0,\lambda) = \hat{0}, \tag{8}$$

где

$$[\sqrt{x}]^\alpha = \left[\sqrt{\min_{z\in[x]^\alpha} z}, \sqrt{\max_{z\in[x]^\alpha} z}\right], \ [f]^\alpha = [1+\alpha, 4-\alpha].$$

Тогда при $\lambda_0 = 0$ уравнение (8) имеет вид

$$x' = \sqrt{x}, \quad x(0,0) = \hat{0}. \tag{9}$$

Очевидно, что решения $x(t,\lambda)$ уравнения (8) сходятся при $\lambda \to 0$ к решению $x(t,0)$ уравнения (9) такому, что $[x(t,0)]^\alpha = \left\{\frac{t^2}{4}\right\}$. В то же время не существует последовательности $x(t,\lambda)$ решений уравнения (8), сходящейся к тривиальному решению уравнения (9).

Замечание 2. Если уравнение (4) имеет единственное решение, то любая последовательность решений $x(t,\lambda)$ уравнения (2) сходится к этому решению при $\lambda \to \lambda_0$.

Из этой теоремы непосредственно следует теорема о методе усреднения.

Теорема 5. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ x \in G, G$ *— ограниченная область в* $\mathbb{E}^n\}$ *для нечеткого дифференциального уравнения*

$$x' = \varepsilon f(t,x) \tag{10}$$

выполнены следующие условия:

а) отображение $f(t,x)$ *равномерно ограничено, слабо непрерывно по* t *и равномерно непрерывно по* x *равномерно относительно* t;

б) для всех $x \in G$ *существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds = f_0(x); \tag{11}$$

в) решения $y(\tau),\ \tau = \varepsilon t$ *уравнения*

$$y' = f_0(y), \quad y(0) = x_0 \in G^1 \subset G \tag{12}$$

определены при $\tau \in [0,L]$ *и лежат вместе с* $\rho-$ *окрестностью в* G.

Тогда для любого $\eta > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *для любого решения* $x(t,\varepsilon)$ *уравнения (10), удовлетворяющего условию* $x(0,\varepsilon) = x_0$, *существует решение уравнения (12) такое, что на промежутке* $[0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$D(x(t,\varepsilon), y(\varepsilon t)) < \eta.$$

В справедливости этой теоремы легко убеждаемся, если в уравнении (10) произведем замену $\varepsilon t = t_1,\ \varepsilon = \lambda$. Вместо (10) имеем уравнение

$$x' = F(t_1, x, \lambda), \tag{13}$$

где принято обозначение $f\left(\frac{t_1}{\lambda}, x\right) = F(t_1,x,\lambda)$.

Существование среднего (11) эквивалентно интегральной непрерывности по λ в точке $\lambda = 0$ правой части уравнения (13), т. е. эквивалентно соотношению

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^t F(t_1,x,\lambda)\,dt_1 = \int_0^t f_0(x)dt_1. \tag{14}$$

Действительно, полагая в левой части соотношения (14) $\frac{t_1}{\lambda} = s$, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^t F(t_1,x,\lambda)\,dt_1 = \lim_{\lambda\to 0}\int_0^t f\left(\frac{t_1}{\lambda},x\right)dt_1 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^t f\left(\frac{t_1}{\lambda},x\right)d\left(\frac{t_1}{\lambda}\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \lambda \int_0^{\frac{t}{\lambda}} f(s,x)\, ds = t \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\frac{t}{\lambda}} \int_0^{\frac{t}{\lambda}} f(s,x)\, ds =$$

$$= t \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s,x) ds = t f_0(x) = \int_0^t f_0(x) dt_1.$$

Заключение. Результаты данной статьи являются продолжением результатов, полученных авторами: Комлевой Т. А., Плотниковым А. В., Плотниковой Л. И. в [3].

1. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. **Келли Дж. Л.** Общая топология [текст] / Дж. Л. Келли. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
3. **Комлева Т. А.** Усреднение нечетких дифференциальных уравнений [текст] / Т. А. Комлева, А. В. Плотников, Л. И. Плотникова // Труды Одесского политехнического университета. – 2007. – Вып. 1 (27). – С. 185–190.
4. **Красносельский М. А.** О принципе усреднения в нелинейной механике [текст] / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // Успехи матем. наук. – 1955. – Т. 10, № 3 (65). – С. 147–152.
5. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления [текст] / В. А. Плотников. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
6. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
7. **Скрипник Н. В.** Теорема Красносельского-Крейна для дифференциальных уравнений и включений с многозначными решениями [текст] / Н. В. Скрипник // Вiсник Харк. нац. ун-ту, серiя "Математика, прикладна математика i механiка". – 2008. – № 826. – С. 87–99.
8. **Скрипник Н. В.** Нечеткие дифференциальные уравнения [текст] / Н. В. Скрипник, М. С. Сасонкина // Наукова конференцiя молодих вчених i студентiв з диференцiальних рiвнянь та їх застосувань, присвячена 100-рiчневому ювiлею Я. Б. Лопатинського: Тези доповiдей (11-14 листопада 2008 р.). – Донецк, 2008. – С. 97.
9. **Филатов А. Н.** Усреднение в системах дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [текст] / А. Н. Филатов. – Ташкент: Фан, 1971. – 280 с.
10. **de Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat.Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4-5. – P. 491–501.
11. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat.Ital. – 1970. – V. 4. – P. 534–538.
12. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / M. Hukuhara // Functial. Ekvac. – 1967. – № 10. – P. 205–223.

13. **Kisielewicz M.** Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions [text] / M. Kisielewicz // Rend. Mat. – 1976. – Vol. 9, № 3. – P. 397–408.
14. **Aumann R.J.** Integrals of set - valued functions [text] / R.J. Aumann // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – № 12. – P. 1–12.
15. **Hullermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system [text] / E. Hullermeier // Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge - Based Systems. – 1997. – № 7. – P. 117–137.
16. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] / O. Kaleva // Fuzzy sets and systems. – 1987. – Vol. 24, № 3. – P. 301–317.
17. **Kaleva O.** The Cauchy problem for fuzzy differential equations [text] / O. Kaleva // Fuzzy sets and systems. – 1990. – Vol. 35, № 3. – P. 389–396.
18. **Laksmikantham V.** Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations [text] / V. Laksmikantham, A.A. Tolstonogov // Nonlinear Anal. – 2003. – Vol. 55.– P. 255–268.
19. **Park J.Y.** Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations [text] / J.Y. Park, H.K. Han // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, № 2. – P. 271–279.
20. **Puri M.L.** Differential of fuzzy functions [text] / M.L. Puri, D.A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – Vol. 91. – P. 552–558.
21. **Puri M.L.** Fuzzy random variables [text] / M.L. Puri, D.A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol. 114, № 2. – P. 409–422.
22. **Seikkala S.** On the fuzzy initial value problem [text] / S. Seikkala // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – Vol. 24, № 3. – P. 319–330.
23. **Song S.J.** Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations [text] / S.J. Song, C.X. Wu // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 111. – P. 55–67.
24. **Zadeh L.** Fuzzy sets [text] / L. Zadeh // Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338–353.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 123–134

УДК 517.91

Є. М. Страхов, А. Т. Яровий
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ БАГАТОКРОКОВОГО МЕТОДУ

Страхов Є. М., Яровий А. Т. Дослідження збіжності багатокрокового методу. У статті розглядається двокроковий алгоритм мінімізації функцій багатьох змінних при відсутності обмежень.
Ключові слова: багатокроковий метод, мінімізація, збіжність.

Страхов В. М., Яровой А. Т. Исследование сходимости многошагового метода. В статье рассматривается двухшаговый алгоритм минимизации функций многих переменных при отсутствии ограничений.
Ключевые слова: многошаговый метод, минимизация, сходимость.

Strahov E. M., Yarovoy A. T. Researching of a multi-stepped optimization algorithm. Considered a two-stepped multi-variable optimization algorithm for the problems without constraints.
Key words: multi-step algorithm, minimization, convergence.

Вступ. Задачі математичного програмування знаходять застосування у різноманітних областях людської діяльності, де є необхідним вибір одного з можливих способів дії, наприклад, при вирішенні проблем керування та планування виробничих процесів, у проектуванні і перспективному плануванні, у військовій справі і т. д. Задача математичного програмування полягає, як правило, у знаходженні екстремуму деякої функції на множині, що визначається лінійними та нелінійними обмеженнями у формі рівностей чи нерівностей. На сучасному етапі розвитку науки вже розроблено та досліджено багато підходів до розв'язку таких задач, одним з яких є методи спуску. Загальний принцип цих методів полягає у побудові послідовних напрямків спуску (тобто зменшення значень функції), виходячи з певної початкової точки (початкового наближення). Різні класи методів спуску визначаються, в першу чергу, способами побудови напрямків спуску.

Розрізняють методи нульового (при обчисленнях використовуються тільки значення функції в точках простору), першого (крім значень функції, обчислюється її перша похідна), другого (використовується друга похідна) порядків. Також методи поділяють на однокрокові та багатокрокові. Однокрокові алгоритми на (k+1)-й ітерації враховують лише ті значення функції та її похідних, які були отримані на попередньому кроці. Багатокрокові алгоритми використовують додатково інформацію, отриману на більш ранніх етапах процесу оптимізації. Класичним методом першого порядку є градієнтний метод.

Перед тим, як перейти до розв'язування конкретної екстремальної задачі, необхідно з'ясувати, якому з методів мінімізації віддати перевагу в даному випадку. На це питання однозначної відповіді немає, якщо тільки вона не є добре відомою тестовою задачею. Таким чином, перед нами постає питання порівняння методів. Один з можливих шляхів — порівнювати методи на основі досвіду та достатнього числа експериментів. Без цього не обходиться жоден спеціаліст, який використовує сучасну обчислювальну техніку. Другий шлях, який при цьому не виключає перший, — порівнювати якість методів на певних класах задач. Важливу роль тут відіграють апріорні характеристики методів. Ці характеристики повинні враховувати такі фактори, як об'єм та складність обчислень, швидкість збіжності, стійкість методу до похибок у обчисленнях, тривалість розрахунків та інші. Відзначимо, що дуже часто при розв'язуванні задач математичного програмування доводиться використовувати не один конкретний метод мінімізації, а їх комбінацію. Але, знову ж таки, через відсутність регулярного способу вибору напрямків, досвід та інтуїція все ще відіграють суттєву роль при чисельному розв'язуванні реальних задач. З іншого боку, ця "біла пляма" залишає широкий простір для подальших досліджень.

У даній статті пропонується новий двокроковий метод першого порядку, який можна застосовувати до задач мінімізації функцій при відсутності обмежень. Алгоритм, що буде розглянутий, у певному розумінні є комбінацією відомих класичних алгоритмів — методів змінної метрики та методу спряжених градієнтів. Будуть наведені основні характеристики цього алгоритму, виявлені деякі важливі його властивості, а також доведені теореми збіжності при різних умовах, що накладаються на цільову функцію.

1. Обчислювальна схема методу

Розглянемо задачу оптимізації деякої функції без обмежень

$$f(x) \to min, x \in R^n. \tag{1.1}$$

Для її розв'язання пропонується двокроковий метод з таким алгоритмом:

$$x_{k+1} = x_k + \beta_k s_k, k = 0, 1, ...,$$

$$s_0 = -f'(x_0), s_k = -H_k f'(x_k) + \xi_k s_{k-1}, \tag{1.2}$$

де $x_0, x_1, ..., x_k, ...$ — послідовні наближення, $s_0, s_1, ..., s_k, ...$ — напрямки спуску, β_k та ξ_k — числові параметри, H_k — матриці, що обчислюються рекурентним способом, як і у методах змінної метрики. У якості H_0 можна взяти довільну симетричну строго додатньо означену матрицю, наприклад, одиничну. Через певну кількість кроків проводиться операція відновлення матриці, тобто покладаємо $H_{k+1} = H_0$.

На практиці були розглянуті два варіанти обчислення матриць:

1) метод Девідона-Флетчера-Пауелла (ДФП)

$$H_{k+1} = H_k + \frac{r_k r_k^T}{r_k^T e_k} - \frac{H_k e_k [H_k e_k]^T}{e_k^T H_k e_k}; \tag{1.3}$$

2) метод Бройдена-Флетчера-Шенно (БФШ)

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\rho_k r_k r_k^T - r_k e_k^T H_k - H_k e_k r_k^T}{(e_k r_k)}. \tag{1.4}$$

У цих формулах та надалі будемо позначати

$$r_k = x_{k+1} - x_k, e_k = f'(x_{k+1}) - f'(x_k).$$

Параметр ξ_k обчислювався наступним чином [2]:

$$\xi_k = \frac{(f'(x_k) - f'(x_{k-1}), f'(x_{k-1}))}{(s_{k-1}, f'(x_{k-1}))}. \tag{1.5}$$

Опишемо алгоритм обчислення параметру β_k. Нехай $\beta_0 = 1$. На k-му кроці спочатку покладаємо $\beta_k = \beta_{k-1}$. Якщо при цьому $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, то або переходимо до наступної ітерації, або покладаємо $\beta_k = 2\beta_{k-1}$. Якщо значення $f(x)$ менше за попереднє, то процес подвоєння продовжуємо до тих пір, поки спадання не припиниться. Якщо ж $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, то покладаємо $\beta_k = 0.5\beta_{k-1}$. Якщо $f(x_k + 0.5\beta_{k-1}s_k) < f(x_k)$, то переходимо до наступної ітерації. Якщо ж $f(x_k + 0.5\beta_{k-1}s_k) \geq f(x_k)$, то покладаємо $\beta_k = 0.25\beta_{k-1}$ і т.д.

2. Основні властивості алгоритму

Були встановлені такі властивості алгоритму (1.2)–(1.3).

1. Матриця H_k — симетрична.

Цей факт встановлюється по індукції. Представимо матрицю H_1 у вигляді $H_1 = H_0 + \Delta H_0$ згідно з формулою (1.3). Матриця H_0 – симетрична, обидві матриці, що утворюють ΔH_0, також симетричні (друга з них – згідно симетрії H_0), тому H_1 буде симетричною матрицею. Аналогічні міркування справедливі при довільному k=2,...,n.

1. Матриця H_k — строго додатньо означена.

Доведення проводиться методом індукції. Матриця H_0 — строго додатньо означена. Нехай H_k — строго додатньо означена матриця. Тоді при довільному $x \in R^n$

$$(H_{k+1}x, x) = (H_k x, x) + \frac{(r_k, x)^2}{(r_k, e_k)} - \frac{(H_k e_k, x)^2}{(H_k e_k, e_k)} =$$
$$= \frac{(H_k x, x)(H_k e_k, e_k) - (H_k e_k, x)^2}{(H_k e_k, e_k)} + \frac{(r_k, x)^2}{(r_k, e_k)}.$$

Згідно припущення щодо матриці H_k існує квадратний корінь $H_k^{1/2}$. Отже, з урахуванням симетричності матриці H_k

$$(H_k x, x) = (H_k^{1/2} H_k^{1/2} x, x) = (H_k^{1/2} x, H_k^{1/2} x) = (y, y).$$

Аналогічно

$$(H_k e_k, e_k) = (H_k^{1/2} e_k, H_k^{1/2} e_k) = (z, z),$$
$$(H_k e_k, x) = (H_k^{1/2} e_k, H_k^{1/2} x) = (z, y).$$

Враховуючи ці співвідношення та нерівність Коші–Буняковського, встановлюємо справедливість нерівності

$$(H_k x, x)(H_k e_k, e_k) - (H_k e_k, x)^2 = (y, y)(z, z) - (z, y)^2 \geq 0,$$

причому рівність має місце лише у випадку $z = y$, тобто, враховуючи невиродженість H_k, лише за умови $x = e_k$. Але при цьому $(r_k, x) = (r_k, e_k) = (r_k, Ar_k) > 0$. Таким чином, при будь-якому $x \neq 0$:

$$(H_{k+1}x,x) = \frac{(y,y)(z,z)-(z,y)^2}{(H_k e_k,e_k)} + \frac{(r_k,x)^2}{(r_k,e_k)} > 0,$$

що доводить справедливість індуктивних міркувань.

Означення 1. *Вектори* $s_0,...,s_{n-1}$ *називаються* A *-ортогональними (спряженими), якщо вони задовольняють умовам*

$$(s_i, As_j) = 0, i \neq j. \tag{2.1}$$

3. Напрямки спуску, визначені за схемою (1.2), є спряженими.

Розглянемо квадратичну функцію вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) + (b,x) + c, \tag{2.2}$$

де A — симетрична строго додатньо означена матриця розміру nxn з постійними елементами: $(Ax,x) > 0$ при будь-якому $x \neq 0$, b — вектор, c — скаляр; градієнт дорівнює $f'(x) = Ax + b$.

З'ясуємо, чи будуть напрямки, визначені за схемою (1.2), спряженими для квадратичної функції вигляду (2.1). Для цього розглянемо

$$(s_k, As_j) = (-H_k^T f'(x_k) + \xi_k s_{k-1}, As_j) = (-H_k^T f'(x_k), As_j) + \xi_k(s_{k-1}, As_j).$$

Для того, щоб цей вираз дорівнював нулеві (тобто, щоб виконувалася умова спряженості), повинні виконуватися дві рівності

$$(f'(x_k), H_k As_j) = 0 \text{ та } (s_{k-1}, As_j) = 0 \text{ для будь-якого k}.$$

Друга рівність еквівалентна умові $(f'(x_{k-1}), H_{k-1}As_j) = 0$. Матриця H_k побудована так, щоб виконувалася умова $(f'(x_k), H_k As_j) = 0, 0 \leq j \leq k-1$. Так як ця умова повинна мати місце при будь-якому k, отримаємо, що рівність $(f'(x_{k-1}), H_{k-1}As_j) = 0$ також виконується. Отже, напрямки спуску, побудовані за алгоритмом (1.2), будуть спряженими для задачі мінімізації квадратичної функції.

3. Дослідження збіжності

Спочатку сформулюємо деякі допоміжні означення та теореми, які будуть використані при доведенні збіжності алгоритму.

Означення 2. *Функція* $f(x)$ *, визначена на опуклій множині* X*, називається опуклою, якщо для довільних* $x, y \in X$ *та всіх* $\alpha \in [0,1]$ *виконується нерівність*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Якщо для будь-якого $\alpha \in [0,1]$ нерівність строга, то функцію називають строго опуклою.

Означення 3. *Функція* $f(x)$ *, визначена на деякій множині* X *, називається сильно опуклою, якщо існує константа* $\rho > 0$ *така, що для будь-яких* $x, y \in X$ *таких, що* $[x, y] \subset X$ *, і для будь-якого* $\alpha \in [0, 1]$ *буде виконуватися нерівність*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \alpha(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2.$$

Величину ρ називають параметром сильної опуклості.

Означення 4. *Функція* $f(x)$ *, означена та диференційована на деякій множині* X*, належить класу* $C^{1,1}(X)$*, якщо існує така константа* $L > 0$ *, що для будь-яких* $x, y \in X$ *таких, що* $[x, y] \subset X$ *, виконується нерівність*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \le L\|x-y\|.$$

Будемо далі припускати, що цільова функція $f(x)$ та допустима множина X опуклі.

Позначимо через α_k величину косинусу кута між напрямком антиградієнта $-f'(x_k)$ (тобто напрямком найшвидшого спадання функції $f(x)$ в точці x_k) і напрямком спуску s_k з цієї ж точки:

$$\alpha_k = \frac{(-f'(x_k), s_k)}{\|f'(x_k)\|\|s_k\|}. \tag{3.1}$$

Умова $\alpha_k > 0$ є необхідною умовою вибору напрямку спуску.

Множину $X^* = \{x^* : f'(x^*) = 0\}$ будемо називати множиною стаціонарних точок. Також визначимо множини $X_0 = \{x : f(x) \le f(x_0)\}$ і $X_0^* = X^* \cap X_0$.

Для деякого числа $\varepsilon > 0$ визначимо множину

$$U_\varepsilon = \{x : \rho(x, X_0^*) < \varepsilon\}\text{, де } \rho(x, X_0^*) = \inf_{x^* \in X_0^*} \|x - x^*\|^2 .$$

Умова, що гарантує збіжність релаксаційної послідовності, полягає в наступному: для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x_k \in$ $\in X_0^* \backslash U_\varepsilon$ буде

$$\|f'(x_k)\| \ge \delta. \tag{3.2}$$

Припущення. Відносно функції $f(x)$ припустимо, що:

1) $f(x) \in C^{1,1}(R^n)$;
2) $X_0^* \neq \emptyset$;
3) $f(x)$ обмежена знизу на множині X_0.

Відносно послідовності $\{x_k\}$ припустимо, що:

4) x_0 – будь-яка точка;
5) $x_{k+1} = x_k + \beta_k s_k, k = 0, 1, ...$;
6) $\alpha_k \ge \alpha > 0, k = 0, 1, ...$;
7) виконується умова

$f(x_k + \beta_k s_k) \le (1 - \lambda_k) f(x_k) + \lambda_k \omega_k$ при $0 < \lambda \le \lambda_k \le 1$.

Теорема 1. *[1] Якщо виконуються припущення 1) – 7) та умова (3.2), то*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, X_0^*) = 0. \tag{3.3}$$

Перейдемо до оцінювання швидкості збіжності методів спуску для розв'язку задач безумовної мінімізації опуклих та сильно опуклих функцій. Ці оцінки для опуклих функцій вдається побудувати при доволі жорсткій умові обмеженості множини X_0.

Основне співвідношення, яке гарантує спадання функції $f(x)$ і якому повинна задовольняти величина кроку β_k у напрямку спуску [1]:

$$f(x_k + \beta_k s_k) \le (1 - \lambda_k) f(x_k) + \lambda_k \omega_k, \tag{3.4}$$

де $\omega_k = \inf\limits_{\beta \ge 0} f(x_k + \beta s_k), \lambda_k \le \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{f(x_k) - \omega_k}$.

Теорема 2. *[1] Нехай:*
1) опукла функція $f(x)$ належить класу $C^{1,1}(R^n)$;
2) $diam X_0 = \eta < \infty$;
3) послідовність $\{x_k\}$ будується за формулою $x_{k+1} = x_k + \beta_k s_k$;
4) $\alpha_k > 0, k = 0, 1, ...$
Якщо виконується умова (3.4), то

$$f(x_m) - f(x^*) \le \mu_0 \left[1 + C\mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2 \right]^{-1}, m = 1, 2, ... \tag{3.5}$$

для будь-якого $0 < C \le \frac{1}{2L\eta^2}$.

Теорема 3. *[1] Нехай:*
1) сильно опукла функція $f(x)$ належить класу $C^{1,1}(R^n)$;
2) послідовність $\{x_k\}$ будується за формулою $x_{k+1} = x_k + \beta_k s_k$;
3) $\alpha_k > 0, k = 0, 1, ...$
Якщо виконується умова (3.4), то

$$f(x_m) - f(x^*) \le \mu_0 exp \left\{ -\frac{\rho}{2L} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2 \right\}, m = 1, 2, ...,$$

$$||x_m - x^*|| \le \frac{2}{\rho} \mu_0 exp \left\{ -\frac{\rho}{2L} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2 \right\}, m = 1, 2, ...$$

Враховуючи співвідношення (3.5), ясно, що найбільш точні оцінки виникають при α_k і λ_k, близьких до одиниці. Однак це потребує високої точності обчислення градієнта функції $f(x)$ в точках x_k, а також високої точності одновимірної мінімізації, що часто знижує ефективність обраного процесу мінімізації.

Припустимо тепер, що при виборі напрямку спуску виконується умова $\alpha_k \ge \ge \alpha > 0$, а точність обчислення β_k така, що $0 < \lambda \le \lambda_k < 1$. У цьому випадку з співвідношення (3.5) випливає оцінка вигляду

$$f(x_m) - f(x^*) < C\frac{1}{m}, m = 1, 2, ...,$$

а з теореми 3.3 — оцінки вигляду

$$f(x_m) - f(x^*) \leq \mu_0 exp\{-Cm\}, m = 1, 2, ...,$$

$$\|x_m - x^*\| \leq \frac{2}{\rho}\mu_0 exp\{-Cm\}, m = 1, 2, ...,$$

де у якості C виступають константи, що не залежать від номеру m та величини μ_0.

Перейдемо до розгляду питання про збіжність алгоритму (1.2)–(1.3). Припустимо, що крок β_k визначається співвідношенням

$$\beta_k = \arg\min\{f(x_k + \beta s_k) : \beta \geq 0\}, k = 0, 1, ... \qquad (3.6)$$

Умова (3.6) визначає наступні дві особливості послідовності $\{x_k\}$.

Лема 1. *Для диференційованої функції $f(x)$ послідовність $\{x_k\}$, побудована за схемою (1.2), (1.3), (3.6), є такою, що виконуються наступні співвідношення:*

$$(f'(x_{k+1}), s_k) = 0, k = 0, 1, ..., \qquad (3.7)$$

$$(f'(x_k), s_k) = -(H_k f'(x_k), f'(x_k)), k = 0, 1, ... \qquad (3.8)$$

Доведення. З умови (3.6) випливає, що при $\beta_k > 0$ буде

$$\frac{d}{d\beta} f(x_k + \beta s_k)|_{\beta=\beta_k} = 0,$$

а при $\beta_k = 0$ буде

$$\frac{d}{d\beta} f(x_k + \beta s_k)|_{\beta=0} \geq 0.$$

Якщо $\beta_k > 0$, то

$$0 = \frac{d}{d\beta} f(x_k + \beta s_k)|_{\beta=\beta_k} - (f'(x_k + \beta_k s_k), s_k) = -(f'(x_{k+1}), s_k).$$

Доведення того, що співвідношення (3.7) справедливе і для $\beta_k = 0$, проведемо по індукції. Якщо $\beta_0 = 0$, то з $x_1 = x_0$ та $s_0 = -f'(x_0)$ отримуємо

$$0 \leq \frac{d}{d\beta} f(x_0 + \beta s_0)|_{\beta=0} - (f'(x_1), s_0) = \|f'(x_0)\|^2,$$

звідки випливає рівність

$$(f'(x_1), s_0) = 0.$$

Нехай справедливе співвідношення $(f'(x_k), s_{k-1}) = 0$. Доведемо, що

$$(f'(x_{k+1}), s_k) = 0$$

при $\beta_k = 0$. Так як $x_{k+1} = x_k$, то з (1.2) отримуємо

$$0 \leq \frac{d}{d\beta} f(x_k + \beta s_k)|_{\beta=0} - (f'(x_{k+1}), s_k) = -(f'(x_k), s_k) =$$

$$= -(f'(x_k), -H_k f'(x_k) + \xi_k s_{k-1}) = (H_k f'(x_k), f'(x_k)).$$

Так як матриця H_k додатньо означена, то $(H_k f'(x_k), f'(x_k)) \geq 0$, а звідси

$$f'(x_{k+1}), s_k) = 0.$$

Рівність (3.8) є очевидним наслідком рівностей (1.2) та (3.7). Лему доведено.

Припустимо, що норма матриць H_k рівномірно обмежена зверху: $||H_k|| \leq \leq \zeta (k = 0, 1, ...)$, а всі власні числа цих матриць обмежені знизу числом $\nu > 0$. Тоді для довільних x буде

$$(H_k x, x) \geq \nu_k (x, x) \geq \nu ||x||^2, k = 0, 1, ...,$$

де ν_k — найменше власне число матриці H_k.

Також припустимо, що для деякого $C > 0$

$$|\xi_k| \leq C \frac{||f'(x_k)||}{||s_{k-1}||}, k = 1, 2, ...$$

Враховуючи ці припущення та лему 1, розглянемо кут між напрямком спуску та антиградієнтом, який ми позначили через α_k .

$$\alpha_k = \frac{(-f'(x_k), s_k)}{||f'(x_k)|| ||s_k||} = \frac{(-f'(x_k), -H_k f'(x_k) + \xi_k s_{k-1})}{||f'(x_k)|| || - H_k f'(x_k) + \xi_k s_{k-1}||} \geq$$

$$\geq \frac{(f'(x_k), H_k f'(x_k)) - \xi_k (f'(x_k), s_{k-1})}{||f'(x_k)|| (|| - H_k f'(x_k)|| + ||\xi_k s_{k-1}||)}.$$

З леми 1 випливає, що $(f'(x_k), s_{k-1}) = 0$. Тоді, враховуючи зроблені припущення, отримаємо

$$\alpha_k \geq \frac{\nu ||f'(x_k)||^2}{||H_k|| ||f'(x_k)||^2 + |\xi_k| ||f'(x_k)|| ||s_{k-1}||} \geq \frac{\nu ||f'(x_k)||^2}{\zeta ||f'(x_k)||^2 + ||f'(x_k)||^2} = \frac{\nu}{\zeta + 1} > 0.$$

Отже, $\alpha_k > 0$. Тоді для алгоритму (1.2)–(1.3) виконуються всі умови теореми 1, з якої випливає збіжність методу. В цей же час теореми 2 та 3 дають оцінки швидкості збіжності для алгоритму (1.2)–(1.3).

Більш точні оцінки швидкості збіжності можна отримати для сильно опуклої двічі диференційованої функції, для якої виконуються умови

$$\forall x, y \in R^n : m ||y||^2 \leq (f''(x) y, y) \leq M ||y||^2, m > 0. \tag{3.9}$$

В якості H_0 обирається симетрична строго додатньо означена матриця

$$\forall x, y \in R^n : m_0||y||^2 \leq (H_0 y, y) \leq M_0||y||^2, m_0 > 0. \tag{3.10}$$

Будемо розглядати процес (1.2)–(1.3), який здійснюється або з відновленням матриці H_k через скінчену кількість кроків, або без відновлення матриці.

Зауваження 1. *Якщо здійснюється процес з відновленням матриці H_k через скінчену кількість кроків, то для будь-якого з методів спряжених напрямків буде виконуватися умова*

$$\lim_{k \to \infty} ||f'(x_k)|| = 0. \tag{3.11}$$

Цей факт випливає з того, що кожний перший крок процесу після відновлення є кроком градієнтного спуску, для якого виконуються умови збіжності градієнтних методів, а на наступних кроках між відновленнями проводиться спуск до мінімуму функції в напрямку руху. Виконання умови (3.11) для строго опуклої функції означає, що будь-який метод спряжених напрямків, який здійснюється з відновленням матриці через скінчену кількість кроків, збігається до розв'язку x^*. Тому для процесів з відновленням для виявлення їх ефективності важливо отримати оцінку швидкості збіжності. Для процесів без відновлення матриці H_k сам факт збіжності алгоритму потребує обґрунтування, і так само важливо отримати оцінки для швидкості збіжності.

Теорема 4. *Нехай для мінімізації функції $f(x)$, яка задовольняє умовам (3.9), використовується процес (1.2), в якому побудова матриці H_k здійснюється за методом (1.3), причому через n кроків здійснюється відновлення H_k. Тоді, якщо значення β_k визначається з умови мінімуму функції у напрямку s_k, то послідовність $\{x_k\}$ незалежно від вибору початкової точки x_0 збігається до розв'язку зі зверхлінійною швидкістю.*

Загальна схема доведення. Використовується метод від супротивного. Припускається, що твердження теореми невірне, тобто для описаного ітераційного процесу при довільному виконується умова

$$||x_{k+1} - x^*|| \geq \lambda ||x_k - x^*||, \tag{3.12}$$

де $\lambda > 0$ — константа.

Для функції, яка задовольняє умовам (3.9), справедлива нерівність

$$||f'(x)|| = ||f'(x) - f'(x^*)|| \leq M||x - x^*||, \tag{3.13}$$

з якої випливає, що умова (3.12) еквівалентна наступній:

$$||f'(x_{k+1}|| \geq \delta ||f'(x_k||, \tag{3.14}$$

де $\delta > 0$ — константа. Далі, враховуючи умову (3.14), встановлюється справедливість наступних оцінок:

$$C||f'(x_k)|| \leq ||r_k|| \leq N||f'(x_k)||, \tag{3.15}$$

де C, N – константи, що не залежать від k, $C > 0$, та

$$(e_{\xi n+i}, r_{\xi n+j}) = o(\|e_{\xi n+i}\|\|r_{\xi n+j}\|), i \neq j, 0 \leq i, j \leq n-1. \qquad (3.16)$$

Далі можна показати, що при виконанні оцінок (3.15), (3.16) послідовність (1.2) збігається до розв'язку зі зверхлінійною швидкістю, що суперечить вихідному припущенню (3.12). Використовуючи цей факт, встановлюється справедливість теореми.

4. Практичні результати

Для перевірки практичних результатів для нового методу був проведений чисельний експеримент, у якому результати роботи запропонованого алгоритму порівнювалися з тими результатами, що були отримані для тих самих умов за допомогою методу спряжених градієнтів. Результати експерименту вказують на те, що запропонований метод є більш ефективним за такими показниками, як точність отриманого розв'язку та кількість проведених ітерацій.

На практиці розглядалися тестові функції з числом змінних $n = 2, 3, 4, 5, 7, 10$. Мінімізація проводилася при 10 різних початкових точках для кожної тестової функції. Для більш наглядного представлення процесу мінімізації були побудовані графіки відхилення i-го наближення від точного розв'язку в залежності від номеру ітерації.

Наведемо приклад застосування розглянутого методу мінімізації для тестової функції трьох змінних [5] при 8 початкових точках. Відновлення методів здійснювалося через кожні 4 ітерації. Пунктирною лінією на графіках позначений процес мінімізації за алгоритмом (1.2) з перерахунком матриць методом ДФП (1.3) (він позначений як М-ДФП), суцільною – метод спряжених градієнтів (СГ). Додатково застосовувався перерахунок матриць методом БФШ (1.4).

$$f(x) = 100\left[x_3 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2\right]^2 + (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2, n = 3.$$

Точний розв'язок — $x^* = (1; 1; 1)^T$, значення функції в цій точці $f(x^*) = 0$.

Розглядалися початкові точки $(-1.2; 2; 0)^T$, $(0; 0; 0)^T$, $(2; 2; 2)^T$, $(0; 0; 0.5)^T$, $(-0.5; 1.5; 0.5)^T$, $(-0.5; -0.5; -0.5)^T$, $(0; 1.2; -2)^T$, $(-10; -10; 10)^T$. Результати обчислень показали, що для перших семи вказаних точок метод (1.2)–(1.3) дає більш точний розв'язок (тобто значення цільової функції ближче до оптимального) при значно меншій кількості проведених ітерацій. При цьому на початкових ітераціях процесу суттєвої різниці у роботі алгоритмів, як правило, не простежується. Наведемо графік відхилення i-го наближення цільової функції від точного розв'язку для початкової точки $x_0 = (-1.2; 2; 0)^T$.

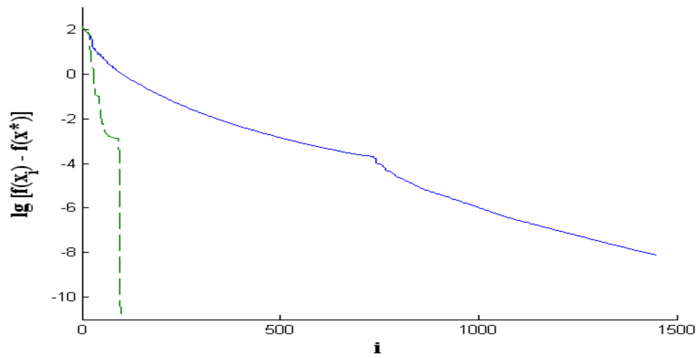

Рис. 1. $x_0 = (-1.2; 2; 0)^T$

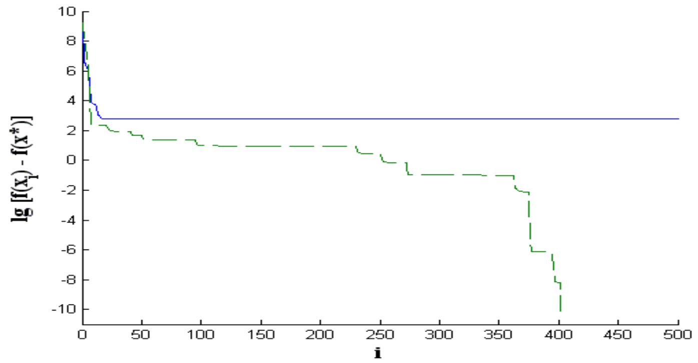

Рис. 2. $x_0 = (-10; -10; 10)^T$

На графіку рис. 1 видно, що метод СГ збігається до розв'язку повільніше (лінія більш полога), і при цьому точність отриманого розвязку, про яку можна судити за ординатою кінцевої точки, є гіршою порівняно з методом М-ДФП.

При початковій точці $x_0 = (-10; -10; 10)^T$ відбулося зациклювання методу СГ у неоптимальній точці $(3.0498; 3.0498; 9.3056)^T$, у той час як методи М-ДФП та М-БФШ прийшли до розв'язку за 403 та 203 ітерації відповідно. Цей процес також проілюструємо графічно.

На графіку рис. 2 бачимо, що з деякого моменту лінія методу СГ є паралельною до осі абсцис, тобто відбулося зациклювання алгоритму.

Слід також зазначити, що варіант перерахунку матриць (1.4) дає покращення результатів за кількістю ітерацій та значенням функції у 3 випадках з 8, а ще у трьох випадках він покращує тільки кінцеве значення функції.

Висновки. У статті був запропонований новий двокроковий метод мінімізації функцій багатьох змінних при відсутності обмежень. Розглянуті основні властивості цього алгоритму, доведені теореми збіжності. Приведені результати застосування алгоритму до задачі мінімізації функції трьох змінних.

1. **Карманов В. Г.** Математическое программирование [текст] / В. Г. Карманов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
2. **Ларичев О. И.** Методы поиска локального экстремума овражных функций [текст] / О. И. Ларичев, Г. Г. Горвиц. – Москва: Наука, 1989. – 95 с.
3. **Поляк Б. Т.** Введение в оптимизацию [текст] / Б. Т. Поляк. – Москва: Наука, 1983. – 384 с.
4. **Пшеничный Б. Н.** Численные методы в экстремальных задачах [текст] / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – Москва: Наука, 1975. – 320 с.
5. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование [текст] / Д. Химмельблау. – Москва: Мир, 1975. – 536 с.

Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 135–144

М Е Х А Н І К А

УДК 62-50

Л. Д. Акуленко*, А. Л. Рачинская*, Я. С. Зинкевич**, Д. Д. Лещенко****

*Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского
Российской Академии наук
**Одесская государственная академия строительства и архитектуры
***Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Акуленко Л. Д., Рачинська А. Л., Зінкевич Я. С., Лещенко Д. Д. Оптимальне гальмування обертань симетричного твердого тіла з внутрішньою ступеню вільності в середовищі з опором. Досліджується задача про оптимальне по швидкодії гальмування обертань вільного твердого тіла. Припускається, що тіло містить рухому масу, яка з'єднана з тілом пружним зв'язком з квадратичною дисипацією. Крім того, на тверде тіло діє гальмуючий момент сил лінійного опору середовища. Вважається, що в недеформованому стані тіло динамічно симетричне, а маса знаходиться на осі симетрії. Визначені оптимальний закон керування для гальмування обертань несучого твердого тіла в формі синтезу, час швидкодії та фазові траєкторії.
Ключові слова: оптимальне гальмування, тверде тіло, обертання, середовище з опором.

Акуленко Л. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С., Лещенко Д. Д. Оптимальное торможение вращений симметричного твердого тела с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением. Исследуется задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит подвижную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а масса находится на оси симметрии. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.
Ключевые слова: оптимальное торможение, твердое тело, вращение, среда с сопротивлением.

Akulenko L. D., Rachinskaya A. L., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D. Rotations of a satellite with cavity filled with a viscous fluid under the action of gravitational and light torques. We investigate the problem of response-optimal braking of the rotations of a free rigid body. It is assumed that the body contains a moving mass connected to the body by an elastic coupling with square – law friction dissipation. Furthermore the braking moment of the forces of linear resisting medium is acted on the rigid body. It is supposed that the body is dynamically symmetrical in nondeformed state and mass can be found at axis of symmetry. Optimal control law for braking of rotations of

a rigid body in the form of synthesis, time of speed and phase trajectories are determined.
Key words: optimal braking, rigid body, rotation, resisting medium.

Введение. Анализ гибридных систем, т. е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Разработаны подходы и получены значительные результаты для систем, содержащих "квазитвердые" тела. Модели последних предполагают, что в определенном смысле их движение близко движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.). Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела. Анализу пассивных движений твердого тела, несущего подвижную массу, соединенную с телом упругой связью при наличии вязкого или квадратичного трения, и в сопротивляющейся среде уделялось значительное внимание [1-7]. Проблеме управления вращениями "квазитвердых тел" посредством сосредоточенных (приложенных к корпусу) моментов сил, имеющей значение для приложений, уделялось недостаточное внимание. Удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения метода сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа "временных погранслоев" [2, 8-11].

Ниже исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений симметричного тела, соединенного в точке на оси симметрии с массой относительно малых линейных размеров посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сопротивления среды. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая модель обобщает исследованные ранее в работах [2, 8-11]. В работах [2, 11] решена задача об оптимальном по быстродействию стабилизации динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, соединенных вязкоупругой связью. В статье [8] рассматривается управляемое движение динамически симметричного твердого тела с подвижной точечной массой, соединенных упругой связью при наличии квадратичного трения. В работах [9, 10] исследуется оптимальное по быстродействию торможение вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, в [9] считается, что тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. В [10] твердое тело с полостью, заполненной вязкой жидкостью, соединено с подвижной массой посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. В монографии [11] показано, что функциональное неравенство Шварца оказывается весьма полезным для построения синтеза закона торможения "квазитвердых" тел. Получены приближенные решения возмущенных задач оптимального по быстродействию торможения вращений твердых тел относительно центра масс, в том числе объектов с внутренними степенями свободы, имеющих приложения в динамике космических и летательных аппаратов. Свойство инвариантности неуправляемой системы по отношению к величине кинетического момента наблюдается для ряда механических моделей. Изучено торможение тел, содержащих полость с вязкой жидкостью. Рассмотрены случаи осесимметричного и несимметричного в невозмущенном состоянии тел со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Исследовано торможение возмущенных вращений твердого тела, близкого к сферически симметричному, под действием момента сил линейного сопротивления среды, направленного против вектора угловой скорости тела. Изучена задача оптимального по быстродействию торможения возмущенных вращений несимметричного твердого тела под действием момента сил линейного трения.

Основные результаты.

1. Постановка задачи. На основе подхода [2, 11] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [2, 4, 5, 10, 11]

$$\begin{gathered} A\dot{p} + (C - A)\,qr = M_p + FG^2qr + Spr^6\omega - \chi Ap, \\ A\dot{q} + (A - C)\,pr = M_q - FG^2pr + Sqr^6\omega_\perp - \chi Aq, \\ C\dot{r} = M_r - AC^{-1}Sr^5\omega_\perp^3 - \chi Cr. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости ω на связанные оси, $\mathbf{J} = diag(A, A, C)$ — тензор инерции невозмущенного тела, $M_{p,q,r}$ — проекции вектора момента управляющих сил $\mathbf{M}$; кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\omega$, его модуль

$$G = |\mathbf{G}| = \left[A^2\omega_\perp^2 + C^2r^2\right]^{1/2}, \quad \omega_\perp^2 = p^2 + q^2.$$

Для упрощения задачи в систему (1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил линейного сопротивления среды пропорционален тензору момента сил инерции, т. е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{M}^r = -\chi J\omega, \tag{2}$$

где χ — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами χAp, χAq, χCr [4, 5]. Такое предположение не является противоречивым.

Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил $\mathbf{M}$ ограничены сферой [11]

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}, \quad |\,\mathbf{u}\,| \le 1; \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \le b < b^* < \infty, \tag{3}$$

где b — скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t, $\mathbf{G}$ согласно уравнениям (3). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$.

Введенные в (1) обозначения $F,\ S$ выражаются через параметры системы следующим образом:

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}, \quad S = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}d\,|d|\,C^4A^{-4}, \quad d = 1 - CA^{-1}. \qquad (4)$$

Коэффициенты F, S характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием упругого элемента. Здесь m — масса подвижной точки, ρ — радиус-вектор точки O_1 крепления подвижной массы, находящейся на оси симметрии. Постоянные $\Omega^2 = {}^c/_m$, $\lambda = {}^\mu/_m = \Lambda\Omega^3$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c — жесткость; μ — коэффициент квадратичного трения.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ и Ω таковы, что "свободные" движения точки m, вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот. Движение твердого тела близко к движению Эйлера-Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением, будут малы. Предполагается, что

$$\Omega \gg \omega. \qquad (5)$$

Неравенство (5) позволяет ввести малый параметр в (4) и считать указанные возмущающие моменты в (1) малыми с целью применения асимптотических методов усреднения. Заметим, что величина массы m может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Итак в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и квадратичным трением демпфера, определяются мономами компонент вектора $\omega = (p,\, q,\, r)^{\mathrm{T}}$ четвертой и восьмой степени соответственно. Малый тормозящий момент сопротивления среды является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, \quad T \to \min_{\mathbf{u}}, \quad |\,\mathbf{u}\,| \le 1. \qquad (6)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t,\,\omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстродействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W = T(t,\omega) - t$.

2. Решение задачи оптимального торможения. Отметим, что момент сил, обусловленный движением подвижной массы, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды — внешним.

На основе динамического программирования синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [11]

$$M_p = -b\frac{Ap}{G}, \quad M_q = -b\frac{Aq}{G}, \quad M_r = -b\frac{Cr}{G}, \quad b = b\,(t, G)\,. \qquad (7)$$

Здесь для дальнейшего упрощения полагаем $b = b\,(t, G)$, $0 < b_1 \le b \le b_2 < < \infty$.

Домножим первое уравнение (1) на Ap, второе — на Aq, третье — на Cr и сложим. Получим уравнение вида, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b\,(t, G) - \chi G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T,\, t_0,\, G^0) = 0,$$

$$T = T\left(t_0, G^0\right), \quad W\,(t, G) = T\,(t, G) - t.$$

В предположении $b = b\,(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\chi(t-t_0)} - \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\chi(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\chi t_0} \int\limits_{t_0}^{T} b(\tau) e^{\chi\tau} d\tau, \qquad (8)$$
$$T = T\left(t_0, G^0\right).$$

Здесь t — текущее время процесса торможения, T — время быстродействия.

При $b = \mathrm{const}$ решение уравнения и краевой задачи (8) записывается следующим образом

$$G(t) = \frac{1}{\chi}\left[\left(G^0\chi + b\right)\exp(-\chi t) - b\right],\ T = \frac{1}{\chi}\ln\left(G^0\frac{\chi}{b} + 1\right),\ t_0 = 0. \qquad (9)$$

Далее детально анализируется случай (9).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1) приводит к нелинейному уравнению относительно r следующего вида

$$\dot{r} = -r\left[bG^{-1} + A^{-2}C^{-2}Sr^4\left(G^2 - C^2r^2\right)^{3/2} + \chi\right]. \qquad (10)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R — неизвестная функция, уравнение (10) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = -A^{-2}C^{-2}SG^4R^5\left[G^2\left(1 - C^2R^2\right)\right]^{3/2}. \qquad (11)$$

Вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $Cr = G\cos\theta$, где θ — угол нутации. В результате для неизвестной R получается соотношение $CR = \cos\theta$. Уравнение (11) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\dot{\theta} = A^{-2}C^{-6}S\sin\theta|\sin\theta|\cos^5\theta\chi^{-7}|\left(G^0\chi + b\right)\exp\left(-\chi t\right) - b|^7,\ \theta(0) = \theta^0. \qquad (12)$$

Его решение записывается следующим образом:

$$2\sec^4\theta\mathrm{cosec}\theta + 5\left(\sec^2\theta - 3\right)\mathrm{cosec}\theta - 2\sec^4\theta^0\mathrm{cosec}\theta^0 -$$
$$-5\left(\sec^2\theta^0 - 3\right)\mathrm{cosec}\theta^0 + 15\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)tg^{-1}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta^0}{2}\right)\right| = K(t), \qquad (13)$$

где

$$K(t) = \pm 8A^{-2}C^{-6}S\chi^{-7}\left\{-\frac{\left(G^0\chi+b\right)^7}{7\chi}\left[\exp(-7\chi t)-1\right]+\right.$$

$$+\frac{7b\left(G^0\chi+b\right)^6}{6\chi}\left[\exp(-6\chi t)-1\right]-\frac{21b^2\left(G^0\chi+b\right)^5}{5\chi}\left[\exp(-5\chi t)-1\right]+$$

$$+\frac{35b^3\left(G^0\chi+b\right)^4}{4\chi}\left[\exp(-4\chi t)-1\right]-\frac{35b^4\left(G^0\chi+b\right)^3}{3\chi}\left[\exp(-3\chi t)-1\right]+$$

$$\left.+\frac{21b^5\left(G^0\chi+b\right)^2}{2\chi}\left[\exp(-2\chi t)-1\right]-\frac{7b^6\left(G^0\chi+b\right)}{\chi}\left[\exp(-\chi t)-1\right]-b^7t\right\}.$$

Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежат первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq {}^{\pi}/_{2}$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то угол нутации в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0,\ {}^{\pi}/_{2}$ — стационарные точки уравнения (12).

При $A \approx C$, а также θ^0 в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta\,(t) = \theta^0 + \frac{1}{8}\sin^2\theta^0\cos^5\theta^0 K(t). \tag{14}$$

Формула (14) позволяет провести анализ угла нутации во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p , q согласно первым двум уравнениям (1). Введем переменную $N = A\omega_\perp$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (1) на ApN^{-1} , а второе — на AqN^{-1} и складывая, получим для N нелинейное однородное уравнение вида

$$\dot{N} = -d(t)N + f(t)N^2, \quad d\,(t) = \frac{b(t)}{G\,(t)} + \chi, \quad f\,(t) = A^{-2}Sr^6(t). \tag{15}$$

Это — уравнение Бернулли (см. [12], с. 297). Интегрируя (15), находим

$$N^{-1} = -E(t)A^{-2}S\int r^6(t)E^{-1}(t)dt, \quad E(t) = \exp\left[\int d(t)dt\right]. \tag{16}$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде

$$G^2 = N^2 + C^2r^2.$$

Отсюда легко получить выражение для N

$$N = \left(G^2 - C^2 r^2\right)^{1/2}$$

или, учитывая соотношение $Cr = G\cos\theta$,

$$N = G\left|\sin\theta\right|. \tag{17}$$

При $b = \mathrm{const}$ с учетом (8) имеем

$$N = \frac{1}{\chi}\left[\left(G^0\chi + b\right)\exp(-\chi t) - b\right]\left|\sin\theta\right|. \tag{18}$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п. 5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p, q (1) к виду уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только "гироскопические" и "диссипативные" члены с коэффициентами $g(t)$, $d(t)$ и $f(t)$ соответственно

$$\begin{gathered}\dot N = -\left[d(t) - f(t)N(t)\right]\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (Ap, Aq)^T, \\ g(t) = A^{-1}r(t)\left(A - C + FG^2(t)\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь I — симплектическая матрица, а "коэффициенты диссипаци" $d(t)$ и $f(t)$ определены в (15), а функция $N = N(t)$ задана согласно (16–18).

Уравнение (17) для $\mathbf{N}$ интегрируется в явном виде [12]. Действительно, полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ — орт вектора $\mathbf{N}$, получим для неизвестной $\mathbf{n}$ уравнение

$$\dot{\mathbf{n}} = g(t)I\mathbf{n}.$$

Начальное значение $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}^0$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0\mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv |\mathbf{n}(t_0)| = \left|\mathbf{n}^0\right| = 1$ для всех $t \in [t_0, T]$.

Введем аргумент δ так, чтобы $\mathbf{n}' = I\mathbf{n}$; имеем

$$\mathbf{n}(t) = \Pi(\delta)\,\mathbf{n}^0, \quad \delta = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau, \quad \Pi(\delta) = \begin{Vmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{Vmatrix}, \tag{20}$$

где $\Pi(\delta)$ — матрица поворота (начального вектора $\mathbf{n}^0$) на угол δ. Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (16), (19). Существенное значение при этом, как отмечалось, имеет знание переменных $G(t)$ и $r(t)$, которые определялись в разд. 2, 3.

5. Численный анализ и выводы. Обратимся вновь к задаче определения угла нутации $\theta(t)$ в частном случае $b = \mathrm{const}$ согласно (12). Проведем обезразмеривание уравнения (12). Введем обозначения

$$\tau = \chi t, \quad k^* = \frac{kS^{1/7}}{A^{2/7}C^{6/7}\chi^{1/7}}, \quad G_0^* = \frac{G_0 S^{1/7}}{A^{2/7}C^{6/7}\chi^{1/7}}, \quad k = b\chi^{-1}. \tag{21}$$

В результате этих преобразований получим уравнение для угла нутации θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \mathrm{sign} d \left| \left(G^{0*} + k^*\right) \exp(-\tau) - k^* \right|^7 \sin\theta \left|\sin\theta\right| \cos^5\theta. \tag{22}$$

Уравнение (22) было численно проинтегрировано для произвольных различных значений G^{0*}, k^* и начального угла $\theta^0 = \pi/4$ *рад*. Графики изменения угла нутации θ представлены на рис. 1–3. Рис. 1, 2 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 3 — сплюснутому.

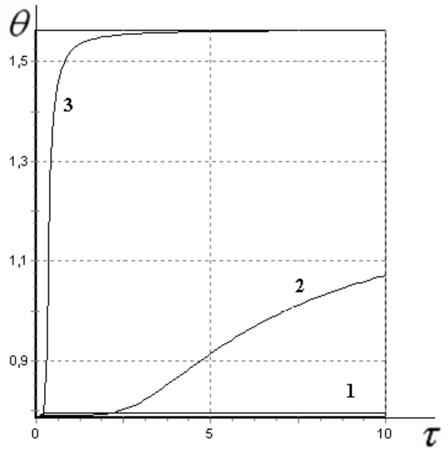

Рис. 1

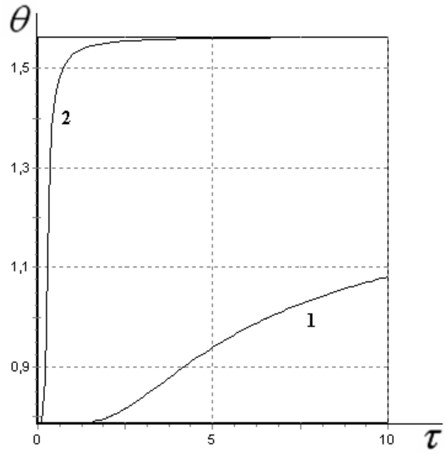

Рис. 2

Рис. 1 соответствует безразмерному начальному значению кинетического момента $G^{0*} = 1$. Кривые 1, 2 и 3 численно построены при различных значениях величины $k^* = 0.1,\ 1,\ 10$ соответственно. Согласно проведенному расчету, для динамически вытянутого твердого тела ($A > C$) угол нутации стремится к предельному значению $\pi/2$ *рад*. На рис. 1 приведен расчетный интервал безразмерного времени $\tau \leq 10$. Согласно кривой 3, видно, что при существенном влиянии безразмерного коэффициента момента управляющих сил ($k^* = 10$) угол нутации быстро достигает предельного значения. При этом тело успевает затормозиться, так как время быстродействия в этом случае на порядок меньше выбранного расчетного времени. Чем меньше величина k^*, тем медленнее ось симметрии тела стремится к предельному положению. Однако во всех приведенных случаях за расчетный промежуток времени тело успевает затормозиться.

Кривые 1 и 2 рис. 2 соответствуют $k^* = 1,\ 10$ при значении $G^{0*} = 0.1$. На рисунке не представлена кривая для значения $k^* = 0.1$, так как за выбранное расчетное время величина угла нутации практически не изменяется. Видно, что чем больше значение k^*, тем быстрее тело стремится к устойчивому предельному положению оси вращения.

Аналогичный характер поведения для функции $\theta(t)$ получен в работах [8-10].

Численно исследовано изменение угла нутации для динамически сплюснутого твердого тела ($A < C$). На рис. 3 приведены графики изменения функции $\theta(t)$ при значении $G^{0*} = 1$. Кривая 1 соответствует величине $k^* = 0.1$, а кривая 2 — $k^* = 1$, кривая 3 — $k^* = 10$. Согласно кривым 2 и 3, динамически сплюснутое тело стремится к своему предельному устойчивому положению оси вращения, соответствующему $\theta = 0$. Видно, что характер стремления зависит от величины безразмерного коэффициента момента управляющих сил. Чем больше этот коэффициент, тем быстрее ось тела стремится к предельному положению. При этом время быстродействия существенно уменьшается.

Численный расчет показал, что характер поведения функции $\theta(t)$ в данной задаче совпадает с характером поведения функции изменения угла нутации для твердого тела с подвижными внутренними массами [1].

Таким образом, направление вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции.

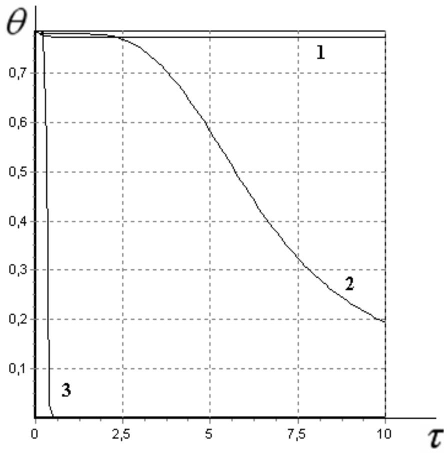

Рис. 3

Заключение. Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения, в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и угол нутации, установлены качественные свойства оптимального движения.

1. **Черноусько Ф. Л.** О движении твердого тела с подвижными внутренними массами [текст] / Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 33–44.
2. **Акуленко Л. Д.** Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 5. – С. 29–34.
3. **Лещенко Д. Д.** Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Д. Д. Лещенко, С. Н. Саллам // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 8. – С. 58–63.
4. **Раус Э. Дж.** Динамика системы твердых тел [текст] / Эдвард Джон Раус. – М. : Наука, 1983. – Т. II. – 544 с.

5. **Кошляков В. Н.** Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы [текст] / Владимир Николаевич Кошляков. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
6. **Акуленко Л. Д.** Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
7. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
8. **Акуленко Л. Д.** Некоторые задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Механика гироскопических систем. – 1983. – Вып. 2. – С. 90–97.
9. **Акуленко Л. Д.** Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 2. – С. 115–122.
10. **Лещенко Д. Д.** Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Д. Д. Лещенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 1. – С. 80–85.
11. **Акуленко Л. Д.** Асимптотические методы оптимального управления [текст] / Леонид Денисович Акуленко. – М. : Наука, 1987. – 368 с.
12. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [текст] / Эрих Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка" має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті та короткі повідомлення, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямками:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Короткі повідомлення.
4. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сайті журналу www.visnyk_math.onu.edu.ua або які можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок, а короткого повідомлення — 5–6 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме та список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України "Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України" від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65026

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти на сайті:

www.visnyk_math.onu.edu.ua