

**Odessa State University Herald**

**Вестник Одесского  
государственного университета**

**ВІСНИК  
ОДЕСЬКОГО  
ДЕРЖАВНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ  
(фізико-математичні науки)**

**3 - 1998**

# ВІСНИК ОДЕСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

№ 3, 1998

(Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу  
масової інформації: серія КВ № 1763 від 4.11.1995 р.).

Мова видання: українська, російська, англійська.

**Редакційна колегія:** В.А.Сминтина (головний редактор), Є.Л.Стрельцов (заступник головного редактора), М.П.Коваленко (заступник головного редактора), Асланов С.К., Адамян В.М., Білоус В.М., Булитко В.К., Варбанець П.Д., Коляда В.І., Костін А.В., Плотников В.А., Попов Г.Я., Чесноков М.Н. Відповідальний секретар — Москаленко Н.А.

Статті фізичного розділу "Вісника ОДУ" — результат нових наукових досліджень, зроблених співробітниками фізичного факультету в галузі фізики твердого тіла, фізики напівпровідників, астрономії, а також аналізу історії розвитку в Одесському університеті фізики невпорядкованого стану.

Математичний розділ містить оригінальні дослідження, що належать до різних галузей сучасного стану теоретичної та прикладної математики і механіки.

Це праці з диференціальних рівнянь та математичної фізики, математичного аналізу та методів захисту інформаційних масивів, механіки твердого тіла, та загальної механіки (в тому числі — питання її методології). "Вісник ОДУ" №3 може бути інтересним для спеціалістів відповідних напрямів фізики та математики.

Статті фізического раздела "Вестника ОГУ" — итог новых научных исследований, сделанных сотрудниками физического факультета в области физики твердого тела, физики полупроводников, астрономии, а также анализа истории развития в Одесском университете физики неупорядоченного состояния.

Математический раздел представлен оригинальными исследованиями, принадлежащими к различным областям современного состояния теоретической и прикладной математики и механики. Это работы по дифференциальным уравнениям и математической физике, по механике твердого деформируемого тела и общей механике (включая вопросы ее методологии), по математическому анализу и методам защиты информационных массивов. "Вестник ОГУ" № 3 может быть интересен для специалистов соответствующих направлений физики и математики.

The articles in the phisics part of the Odessa University Journal is the crowning of recent scientific resevrches, fulfilled by the staff members of Physical Department of the University in the realm of physics of solid body, physics of semiconductors, astronomy and analysis of historical development of physics of disordered systems in Odessa State University.

The mathematical section is represented by original investigations, which are relative to different topics of modern theoretical and applied mathematics and mechanics. This includes papers on differential equations and mathematical physics, on mechanics of deformed rigid body and general mechanics, including its methodology problems, on mathematical analysis and methods of data base protection. "Odessa State University Bulletin" № 3 may be interesting for the specialists of corresponding trends of physics and mathematics.

# ЗМІСТ

## ФІЗИКА

1. Коваленко М. П.  
*Наукові дослідження з фізики невпорядкованого стану  
в Одеському університеті* ..... 3
2. Ваксман Ю. Ф.  
*Допорно-акцепторні центри випромінювання в монокристалах  
селеніду цинку* ..... 10
3. Андронов І. Л.  
*Магнітні поля у вибухових подвійних зорях* ..... 14
4. Vashpanov Yu. A.  
*The electronic properties and the adsorption sensitivity to oxygen of semiconductor  
films of cadmium selenide with real surface which contains atoms  
of heavy metals and S, SE, TE* ..... 18
5. Стукалов С. А.  
*Особливості лазерного легування фосфіду галію елементами I та III груп* ..... 27
6. Mikhailovskaya L. V.  
*Electronic temperature in gas discharge small diameter tube with account  
of direct and stepped ionization* ..... 31
7. Михо В. В., Семенюк Л. М., Горшкова О. В., Тимофесва О. Ю.  
*Генерація ЕРС та струму в системі  
метал — напівпровідник — електроліт* ..... 35

## МАТЕМАТИКА

8. Асланов С. К.  
*Методология и эволюция принципа относительности* ..... 39
9. Мінгальський В. И., Реут В. В.  
*О напряженном состоянии коробчатой оболочки, ослабленной трециной* ..... 43
10. Керекеша П. В.  
*Об условиях разрешимости задачи Галина* ..... 50

- 11. Щоголєв С. А., Черната О. П.**  
*Про підвищення порядку коливних доданків у лінійних системах,  
які містять повільно змінні параметри* ..... 55
- 12. Kisil V. V.**  
*Harmonic Analysis and Localization Technique* ..... 60
- 13. Бондаренко В. В.**  
*Про одну змішану задачу теплопровідності для луники* ..... 64
- 14. Каспар'янц А. А., Лещенко Д. Д.**  
*Збурені обертання гіроскопа Лагранжа при наявності дисипації  
та дебалансу тяги* ..... 69
- 15. Колев И., Александров Б.**  
*Осуществление защиты информационных массивов при помощи  
корректирующих кодов и дополнительных контрольных слов* ..... 72

---

# ФІЗИКА

---

## НАУКОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ З ФІЗИКИ НЕВПОРЯДКОВАНОГО СТАНУ В ОДЕСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

*M. П. Коваленко*

Дослідження фізики невпорядкованого стану в ОДУ почали інтенсивно розвиватися як самостійний напрямок у 60-ті роки. До цього часу основними об'єктами досліджень були кристалічні тверді тіла, хоча виконувалися й роботи, пов'язані із невпорядкованими системами. У післявоєнні роки, коли кафедрою загальної фізики завідував професор Г. Л. Міхневич, велись дослідження кристалізації переохолодження рідин та, дещо пізніше, — кінетики утворення кристалічних злитків на частинках домішок. Можна впевнено назвати час, коли дослідження невпорядкованих систем стали одним із провідних напрямів на фізичному факультеті. Це сталося наприкінці 1963 р., коли на кафедру теоретичної фізики прийшов новий завідувач — професор І. З. Фішер, що переїхав в Одесу з Білоруського університету. Початок роботи професора Фішера в ОДУ збігся із загальним підйомом досліджень з фізики невпорядкованого стану в Україні, перш за все, у великих університетських центрах — Києві, Харкові, Львові, Одесі.

У Києві органіційним центром стала кафедра молекулярної фізики, якою керував тоді проф. О. З. Голик, у Львові — акад. НАН І. Р. Юхновський. Союз теоретиків (Одеса, Львів) та експериментаторів (Київ, Харків) виявився дуже плідним і започаткував кілька наукових шкіл, які успішно працюють і сьогодні. Особливо треба відмітити організаторську діяльність проф. О. З. Голика, який значною мірою сприяв об'єднанню фахівців з фізики рідкого стану, створивши відповідну наукову раду при Мінвузі та запровадивши регулярні всесоюзні конференції. У наш час роль координаторів таких наукових зустрічей відіграють акад. І. Р. Юхновський, проф. Л. А. Булавін.

Ці об'єктивні умови в Україні збіглися із деякими обставинами (іншого плану) в ОДУ, а саме — із значним омолодженням викладачів фізичного факультету. Зокрема, на кафедрі теоретичної фізики викладачами стали вчорашні аспіранти, які із запалом сприйняли свіжі ідеї проф. Фішера і, ще не маючи сталих наукових інтересів, активно поринули у новий для них напрям. Треба сказати,

що фізика рідкого стану не належала тоді (та, власне кажучи, й сьогодні теж) до престижних напрямків серед фізиків взагалі та, зокрема в ОДУ, де головні сили були сконцентровані у першу чергу на фізиці напівпровідників. Але, оглядаючись у минуле, можна з упевненістю констатувати, що саме поява нового напряму на фізичному факультеті сприяла загальному підвищенню його рівня як університетського наукового осередка.

З робіт тих років видно, що зусилля вчених зосереджувалися, в першу чергу, на фізиці рідкого стану — як класичних, так і квантових рідин. Слід відмітити кілька серйозних фундаментальних результатів, які стосуються простих класичних рідин. Однією з найважливіших характеристик кореляційної структури та властивостей цих систем є структурний фактор  $S(x)$ . Ендербі, Гескелом та Марчем [14, 217-221] було показано, що  $S(x)$  як функція дійсної змінної  $x$  є неаналітична в точці  $x = 0$  функція, що має поблизу цієї точки розклад

$$S(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_3 |\bar{x}|^3 + \dots$$

із розривною третьою похідною. Такий характер неаналітичності  $S(x)$  був отриманий у зв'язку із тим, що на далеких відстанях парні дисперсійні сили спадають за законом  $r^{-6}$ . Фішер звернув увагу на ту обставину, що в дійсності асимптотика для міжчастинкового потенціалу (беручи до уваги кінцеву швидкість розповсюдження електромагнітних взаємодій) має вигляд  $\Phi(r) \sim r^{-7}$ , замість  $r^{-6}$ , що відповідає електростатичному наближенню. В цьому випадку асимптотична поведінка радіальної функції має вигляд [12.1548-1558]

$$g(r) - 1 \equiv A k T \left( \frac{\partial n}{\partial p} \right)_T \frac{1}{r^7}, \quad (r \rightarrow \infty),$$

(де  $K$  — ізотермічна стисливість), а статичний структурний фактор  $S(x)$  поблизу  $x = 0$  може бути представлений у вигляді суми трьох функцій:

$$S(x) = S_0(x) + S_1(x) + S_2(x).$$

Функція  $S_0(x)$  регулярна в точці  $x = 0$ , парна і має розклад

$$S_0(x) = S(0) + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \dots$$

Функція  $S(x)$  має логарифмічну особливість у четвертій похідній при  $x = 0$ , парна і має особливості

$$S_1(x) = -AnkT \left( \frac{\partial n}{\partial p} \right)_T x^4 \ln|x| [B + Cx^2 + Dx^4 + \dots].$$

Функція  $S_2(x)$  має розривну п'яту похідну в точці  $x = 0$ , парна і має особливість

$$S_2(x) = -ankT \left( \frac{\partial n}{\partial p} \right)_T^2 |x|^5 (\beta + \gamma x^2 + \dots)$$

Подальші результати стосуються встановлення поведінки багаточастинкових кореляційних функцій поблизу критичної точки. Аналіз критичних флюктуацій, як правило, обмежують вивченням тільки двочастинкових кореляцій. Між тим, суттєвий інтерес представляють також і багаточастинкові далекодіючі кореляції поблизу критичної точки або точок фазових переходів другого роду. Їх аналіз важливий тому, що багато термодинамічних похідних виража-

ються саме через багаточастинкові кореляційні функції. Якщо взяти тричастинкову функцію розподілу

$$F_3(r_1, r_2, r_3) = F_3(r, R, \cos \theta)$$

( $r, R$  — довжини сторін трикутника,  $\theta$  — кут між ними)

та застосувати розклад у ряд за поліномами Лежандра, то для  $R \gg r$  можна одержати [3]:

$$F_3(r, R, \cos \theta) = g(r) + \sum_i A_i(r, R) P_i(\cos \theta).$$

Для коефіцієнта  $A_0(r, R)$  поблизу критичної точки можна отримати:

$$A_0(r, R) = \left[ 2g(r) + n \frac{\partial g(r)}{\partial n} \right] [g(R) - 1] + Q_0(r, R),$$

де  $Q_0$  — короткодіюча інтегрована функція. Останній вираз вирішує питання про виділення повільно спадаючої частини функції  $A_0(r, R)$  поблизу критичної точки.

Аналогічно можна знайти поведінку  $A_1(r, R)$ :

$$A_1(r, R) = \frac{r}{2} \left[ 2g(r) + n \frac{\partial g(r)}{\partial n} \right] g'(R) + 3Q_1(r, R),$$

де функція  $Q_1$  інтегрована по всьому простору.

Слід підкреслити специфічний вигляд повільно спадаючих вкладів у функції  $F_3$ , при  $R \rightarrow \infty$  у критичній точці. Це призводить до неправильності часто використовуваних апроксимацій для  $F_3$ , зокрема, суперпозиційного наближення Кіркуда.

Аналогічно можна розглянути поведінку  $F_4(r_1, r_2, r_3, r_4)$  поблизу критичної точки [6, 2336-2348].

Дослідючи квантові рідини (рідкі Не II,  $^3\text{He}$  та їх розчини), співробітники ОДУ отримали кілька досить загальних результатів, що покращили наше розуміння про складні явища у названих системах.

Відомо, що розвіваний розчин  $\text{He}^3$  у  $\text{He}^4$  нижче  $\lambda$ -кривої є надплинним і в ньому можуть виникати квантові вихрові нитки. Виявляється, що квазічастинки, які належать нормальній компоненті і відповідають домішковим атомам, ефективно взаємодіють із вихровими лініями. Знак взаємодії відповідає силам притягання [8, 722-731]:

$$U(r) \sim -\frac{a(T)}{r^2}, \quad a > 0.$$

Тому в рівноважних умовах має виникнути адсорбція домішкових атомів на вихрових лініях. Якщо температура досить низька, то насичення областей поблизу вихрових ліній домішковими атомами може виявитись значним [8, 722-731].

Найбільш цікавим наслідком цієї картини є можливість утворення лінійної фермі-рідинної системи, що розташована повзводж лінії вихру, із поперечними розмірами порядку  $10^{-7}$  см чи більше, в залежності від початкової концентрації розчину. Існуюче притягання між домішковими частинками призводить до посилення ефекту адсорбції та підвищення стійкості виниклої фермі-рідинної нитки.

1957 р. відкрив новий етап у теорії рідин — цього року стали застосовувати

ЕОМ для моделювання та розрахунку кінетичних і статистичних властивостей систем багатьох частинок. Оскільки детально розробленої теорії рідин на той час не існувало, проведення машинних "експериментів" давало можливість отримувати нові результати, недосяжні для аналітичних методів, а це, в свою чергу, давало поштовх новим зусиллям у теоретичних дослідженнях. В уже класичному тепер машинному експерименті Рамана [15, 405-412] ЕОМ вирішувала задачу поведінки 864 частинок з масою атомів аргону, що були розміщені в кубічному "ящику", на гранях якого було накладено періодичні граничні умови. В початковий момент частинки розташовувалися довільно, а подальша еволюція системи визначалась шляхом інтегрування рівнянь руху Ньютона для всіх взаємодіючих частинок. Пам'ять машини зберігала всю інформацію про положення та швидкості частинок уздовж траекторій, а потім ці дані використовувалися для знаходження середніх значень. Знайдений таким чином розподіл за швидкостями виявився максвелівським з великою точністю. Зокрема, була знайдена автокореляційна функція швидкості однієї частинки

$$\phi(t) = \langle v(0)v(t) \rangle / \langle v^2 \rangle,$$

на графіку якої добре видно осциляційний характер поведінки цієї функції, що відповідає коливальному рухові частинок у рідинах за малі проміжки часу. Період френкелівських коливань, визначений за відстанню до першого нуля, дорівнював  $1,3 \cdot 10^{-12}$  сек. Спостерігається надзвичайно швидке затухання автокореляційної функції, практично воно відбувається за час  $t = 2 \cdot 10^{-12}$ , що відповідає встановленню максвелівського розподілу швидкостей уже після одного-двох періодів френкелівських коливань. Дещо пізніше (1970) Алдер та Вайнрайт показали існування степеневих асимптотик  $\phi(t) \sim t^{-3/2}$  при  $t \rightarrow \infty$ , що було інтерпретовано авторами як гідродинамічний ефект [13, 982]. Фішер із співпрацівниками запропонували теорію автокореляційної функції швидкостей, яка не тільки пояснила вищезгадані результати, але й призвела до нового якісного розуміння молекулярного руху в рідині [11, 1647]. Якщо розглядати низькочастотну частину швидкості теплового руху окремої молекули в рівноважній рідині, то ясно, що це буде інвидкість її дрейфу у полі теплових гідродинамічних флуктуацій. Молекула із своїм оточенням утворює "рідку частинку" у лагранжевому формулуванні рівнянь гідродинаміки, а самі ці рівняння якраз описують повільний рух середовища. Якщо  $\dot{a}(t)$  і  $\ddot{a}(t)$  — миттєві положення та швидкість "рідкої частинки", то лагранжева кореляційна функція  $\langle a(0) a(t) \rangle$  із значеннями  $t$ , характерними для гідродинаміки, є правильною асимптотичною оцінкою для молекулярної кореляції функції  $\phi(t)$  для великих  $t$ :

$$\phi(t) \rightarrow \langle \dot{a}(0)\dot{a}(t) \rangle, \quad t \rightarrow \infty.$$

Можна побудувати теорію флуктуацій у лагранжевих змінних. Наприклад, найпростіша модель нестисливості рідини із постійним коефіцієнтом в'язкості дає для поперечної складової автокореляційної функції швидкості

$$\phi(t) = \frac{2kT}{\rho[4\pi(v + D')t]^{\frac{3}{2}}}$$

( $v$  — кінематична в'язкість,  $\rho$  — густина).

Були отримані важливі якісні результати. Було показано, що область можливого застосування асимптотичної оцінки (отриманої за допомогою гідродинаміки) продовжується в бік малих часів несподівано далеко. Іншими словами,

можна сказати, що ми маємо справу із незвичайно швидким виходом молекулярної динаміки в простій рідині на гідродинамічний режим. Це не збігається із традиційним уявленням про "стрибковий" ефект самодифузії молекул у простій рідині, оскільки вихід молекулярної динаміки на гідродинамічний режим реалізується раніше, ніж молекула, в середньому, виконав один стрибок, і, при характерному її зміщенні, менший за середню довжину стрибка. Цей ефект повинен бути приписаний неперервному дрейфові молекули у полі теплових гідродинамічних флюктуацій. Повний експериментальний коефіцієнт самодифузії складається із суми "стрибкового" та дрейфового гідродинамічних внесків. При цьому колективний гідродинамічний внесок у процес самодифузії виявляється не менш важливим, ніж індивідуальний "стрибковий" внесок.

Аналогічним чином можна знайти гідродинамічну асимптомотику кореляційних функцій обертального руху молекул у рідині [10, 297].

Подальший розвиток кінетичних процесів у рідинах, які складаються вже з анізотропних молекул, у рамках концепції колективних ефектів, розробляється в роботах Фішера, Маломужа, Пелішенка, Латушкіна, Фісенка та ін. Якщо розглядати анізотропні молекули, то кожна молекула, крім "односчастинкового" зміщення — поворотів відносно сусідніх молекул, ще бере участь у полі теплових гідродинамічних флюктуацій. Флюктуаційні мікроструми впливають на розподіл напрямків анізотропних молекул, подібно до дії зовнішніх зсувних струмів. Можна показати, що колективний поворот виділеної молекули та її найближчих сусідів призводить до уточнення дебаївського закону дисперсії діелектричної проникності:

$$\frac{\epsilon(\omega) - \epsilon(\infty)}{\epsilon(0) - \epsilon(\infty)} = \left[ 1 - i\omega\tau + \alpha \frac{D^k(\omega)}{D} \right]^{-1},$$

де  $D^k(\omega) = 1/3 <\Omega(0)\Omega(t)>$  — автокорелятор кутових швидкостей обертання ланцюжкових частинок,  $\tau$  — час релаксації високочастотних поперечних мод.  $D^k(0)$  є колективна складова коефіцієнта обертальної дифузії молекули.

У працях Затовського та його співробітників теорія колективних ефектів була поширена на опис колективних збуджень макромолекул та їх прояву в різних явищах. На відміну від простих рідин, скажімо, в білкових макромолекулах, наявні внутрішні рухи з амплітудами від 0,1 до 1 Å. Затовським була запропонована модель внутрішнього руху макромолекул, яка враховує низькочастотні теплові коливання, зсув і повороти молекулярних груп та фрагментів. Це призводить до експериментально спостережуваних ефектів, скажімо, в інтенсивності деполяризованого розсіяння світла, що дає можливість, зокрема, визначити параметри глобул [1, 435].

З 70-х років у Одеському університеті починає інтенсивно розвиватися фізика рідких металів (Ю. П. Красний, М. П. Коваленко). Рідкий метал, як невпорядкована система заряджених частинок, є фактично густою плазмою, властивості якої визначаються далекодіючими кулонівськими системами. Це визначає методи дослідження рідких металів, які спираються на теорію електронної фермі-рідини, класичної плазми та на теорію простих рідин як густих систем без малого параметра, в яких кінетична і потенціальна енергія мають один порядок величини.

У наш час якісні уявлення про основні електронні та іонні процеси, що відпо-

відають за макроскопічні властивості простих (тобто лужних та полівалентних) рідких металів, уже склалися. Прогрес у теоретичних дослідженнях зобов'язаний головним чином методу псевдопотенціалу, який дозволяє спростити проблему визначення властивостей простих металів за рахунок існування в теорії малого параметру і характеризує ефективну слабкість взаємодії електронної та іонної підсистем металу.

Наявність квазівільних електронів призводить до ефективної міжіонної взаємодії, відмінної від кулонівської, та до появи непарних сил ковалентного типу, що зв'язують у металі більше ніж два іони [7, 1194; 2, 34; 3,239].

Якщо говорити про багаточастинкові ефекти, то вони виявляються не тільки в тому, що в потенціальній енергії з'являються неприводимі внески від трьох та більшого числа іонів. Як у теорії рівноважних, так і в теорії кінетичних властивостей, навіть у наближенні адитивно-бінарної взаємодії, міжчастинкові потенціали сильно залежать від густини, тобто фактично є багаточастинковими [7, 1194].

Наступний період розвитку досліджень з фізики невпорядкованого стану в ОДУ, який почався у вісімдесятіх роках, розглянемо у подальших поблікаціях.

### Резюме

Розглянуто напрямки розвитку в ОДУ фізики невпорядкованого стану в післявоєнні роки. У ретроспективі найбільш важомі результати в 60-70-ті роки отримані у фізиці класичних та квантових рідин, що пов'язуються з виникненням школи фізики рідкого стану під керівництвом Й.З.Фішера.

### Література

1. Затовський А.В., Салистра Г.И. К теории деполяризованного рассеяния света //Укр. физ. журнал. — 1973. — Т.18. — №3. — С.435-439.
2. Коваленко Н.П., Кузьмина Л.М. Межионное взаимодействие в жидкых металлах с учетом многочастичных эффектов //Физика жидкого состояния. — 1981. — №9. — С.34-37.
3. Коваленко Н.П., Кузьмина Л.М., Майер Г. К вопросу о межионном взаимодействии в металлическом водороде // Письма в ЖЭТФ. — 1978. — Т.28. — В.4. — С.239-242.
4. Коваленко Н.П., Швец В.Т. Электропроводность жидких металлов с учетом многоионных корреляций //Физика жидкого состояния. — 1979. — №7. — С.52-60.
5. Коваленко Н.П., Кузьмина Л.М. К теории электропроводности жидких металлов (роль многочастичных эффектов) // Укр. физ. журнал. — 1979. — Т.24. — №8. — С.1220-1222.
6. Маломуж Н.П., Олейник В.П., Фишер И.З. Многочастичные корреляции вблизи критической точки //ЖЭТФ. — 1972. — Т.63. — В.6 (12). — С.2336-2348.
7. Онищенко В.П., Красный Ю.П. Термодинамические свойства жидких натрия и калия //Укр. физ. журнал. — 1973. — Т.14. — №2. — С.1194-1201.
8. Рейт Л.С., Фишер И.З. Адсорбция атомных примесей на квантовых вихрях в жидком гелії-II //ЖЭТФ. — 1968. — Т.55. — В.2(8). — С.722-731.

9. Фишер И.З. *О поведении структурного фактора классической жидкости при малых волновых числах* //ЖЭТФ. — 1970. — Т.59. — В.10. — С.1336-1342.
10. Фишер И.З., Затовский А.В., Маломуж Н.П. *Гидродинамическая асимптотика корреляционных функций вращательного движения молекулы в жидкости* //ЖЭТФ. — 1973. — Т.65. — В.1.— С.297-306.
11. Фишер И.З. *Гидродинамическая асимптотика автокорреляционной функции скорости молекулы в классической жидкости* //ЖЭТФ. — 1971. — Т.61. — В.4(10). — С.1647-1659.
12. Фишер И.З. *Дальние трехчастичные корреляции в критической точке* //ЖЭТФ. — 1972. — Т.62. — В.4.— С.1548-1558.
13. Alder B.J., Wainright T.E. *Velocity autokorrelations for hard spheres* //Phys. Rev. Letters. — 1967. — V.18. — №23. — P. 988-990.
14. Enderby J., Gaskell T., March H. *Asymptotic form of correlation functions in classical fluids and in liquid helium 4* //Proc. Phys. Soc. — 1965. — V.85. — P.2. — №544. — P.217-221.
15. Rahman A. *Correlations in the motion of atoms in liquid Ar* //Phys. Rev. — V.A136. — №2. — P.405-412.

# ДОНОРНО-АКЦЕПТОРНІ ЦЕНТРИ ВИПРОМІНЮВАННЯ В МОНОКРИСТАЛАХ СЕЛЕНІДУ ЦИНКУ

Ю. Ф. Ваксман

Дослідження люмінесценції широкозонних напівпровідників свідчить про те, що значний вплив на їх фізичні властивості (люмінесценцію, оптичне поглинання, фотопровідність та ін.) мають не точкові, а більш складні — асоціативні дефекти, що містять у собі два і більше іонів. Серед них найбільш поширеними є донорно-акцепторні центри, які складаються з одно- або двозарядних іонів донорів і акцепторів.

Асоціативні дефекти енергетично є більш вірогідними порівняно з точковими. Дійсно, енергія зв'язку донорно-акцепторного центру визначається із співвідношення [7,500]:

$$E = E_s + E_d - e^2/(\epsilon R) + J, \quad (1)$$

де:  $E_s$ ,  $E_d$  — енергії іонізації акцептора і донора, відповідно;  $-e^2/\epsilon R$  енергія кулонівської взаємодії донора і акцептора, відстань між якими  $R$ ;  $e$  — заряд електрона;  $\epsilon$  — відносна діелектрична проникність напівпровідника;  $J$  — кулонівський інтеграл взаємодії електрона з акцептором, дірки з донором, дірки з електроном.

Для донорно-акцепторних пар, в яких величина  $R > a$  ( $a$  — постійна кристалічної гратки), величиною  $J$  можна знехтувати [7.501]. З рівняння (1) видно, що збільшення відстані між донором і акцептором приводить до зростання енергії зв'язку асоціативного центру. Для неасоційованих донорів і акцепторів вона складає максимальну величину ( $E_s + E_d$ ).

Залежність енергії зв'язку донорно-акцепторних центрів від відстані  $R$  між їх компонентами призводить до складної енергетичної структури відповідних їм рівнів рекомбінації і спричиняє неелементарність спектрів люмінесценції, оптичного поглинання, фотопровідності.

Нами досліджувалися монокристали селеніду цинку, ширина забороненої зони якого складає 2.82 еВ при 77 К. Цей напівпровідник, будучи прямозонним, має високу ефективність крайового випромінювання в синьо-голубій області спектру. Крім цього, формування в кристалах значної кількості власних та домішкових дефектів призводить до люмінесценції даного матеріалу в різних інтервалах видимої та близької інфрачервоної областей спектру. Метою даної

роботи є визначення впливу донорно-акцепторних центрів на рекомбінаційні процеси в монокристалах селеніду цинку.

Слід відзначити, що вихідні кристали мають низьку інтенсивність люмінесценції, а тому можливості їх дослідження вкрай обмежені. Для формування в кристалах донорно-акцепторних центрів здійснювалось їх легування донорними домішками алюмінію, індію чи галію. Дифузія домішок відбувалась у процесі відпалу кристалів у розплаві цинку і 0,1-5 мол.% алюмінію, індію чи галію. Тривалість відпалу складала від 10 до 70 годин, а температура — 1170 К.

Спектр люмінесценції кристалів ZnSe: D (D — донор, яким може бути іон алюмінію, індію чи галію) являє собою широку смугу, що перекриває область довжин хвиль від 500 до 1000 нм. Встановлено [6, 175], що зміна умов збудження фотолюмінесценції (інтенсивність чи довжина хвилі збуджуючого світла, температура кристалу і т. ін.) викликає значну зміну контура широкої смуги люмінесценції, що спостерігається при експерименті. Зокрема, в деяких випадках форма смуги випромінювання безпосередньо вказує на її неелементарність. Подібним чином впливають на спектр випромінювання і технологічні фактори легування кристалів (температура і тривалість відпалу, вміст домішок у розплаві, режим охолодження після відпалу кристалів і т. ін.). Виходячи з цього, можна зробити висновок про неелементарність широкого спектру люмінесценції кристалів ZnSe: Al. У відповідності з цим виникає проблема визначення складу елементарних смуг випромінювання та природи центрів, що зумовлюють їх. Застосування методики [5,3] дозволило виділити в спектрі випромінювання ZnSe: Al смуги з максимумами на 535, 560, 580, 625, 675, 780, 850 нм при температурі кристалів 77 К.

При розгляді питання про природу центрів випромінювання враховувалось, що значення напівширини всіх елементарних смуг, як і характер їх температурних залежностей напівширини та положення максимумів, виявились тотожними. Це вказує на наявність однакової складової, що містять відповідні центри люмінесценції. Як показують розрахунки рівноважної концентрації дефектів у досліджуваних кристалах [1, 26], такою загальною складовою може бути власний акцептор — вакансія цинку ( $V_{Zn}$ ). Крім того, інтенсивність випромінювання в області 560, 580, 625, 675, 780 нм значно зростає при введенні в кристали співактиваторів алюмінію, індію чи галію. Це свідчить про наявність останніх у складі відповідних центрів люмінесценції.

Таким чином, центри, що відповідають смугам випромінювання в області 560, 580, 625, 675, 780 нм, мають у своєму складі власні акцептори — вакансії цинку і донори співактиваторів. Такі центри можуть бути як нейтральними, так і зарядженими. До складу нейтральних центрів входять однозарядні донори і акцептори. Такі центри обумовлюють відносно широку смугу випромінювання в області 560 нм при температурі кристалу 77 К. Нейтральні донорно-акцепторні центри в даному випадку характеризуються відстанями між їх компонентами в межах  $1,6 > R > 0,8$  нм [2, 11], тобто є досить віддаленими ( $R \gg a$ ). Відповідний спектр випромінювання проявляє довгохвильовий зсув при зменшенні інтенсивності збуджуючого світла в 100-1000 разів.

Заряджені донорно-акцепторні центри містять у собі однозарядні донори та двозарядні власні акцептори — вакансії цинку. Відповідні асоціативні центри ( $V_{Zn}^{\pm}D$ ) мають негативний заряд, а відстань між їх компонентами знаходитьться в межах від 0,2 до 1,4 нм [6, 177]. У даному разі енергія зв'язку центрів з наймен-

шими значеннями R значно змінюється, що забезпечує можливість розподілу в спектрі випромінювання відповідних їм смуг. Зокрема, 4 смуги з максимумами в області 580, 625, 675, 780 нм ідентифіковано як обумовлені однозарядними донорно-акцепторними центрами випромінювання. Параметри відповідних центрів люмінесценції наведено в табл. I.

*Таблиця I.*

**Параметри однозарядних донорно-акцепторних центрів люмінесценції в монокристалах селеніду цинку.**

$\lambda$ , нм	$e^2/\varepsilon R$ , еВ	$E_0$ , еВ	$E_a$ , еВ	$E^*$ , еВ
580	0,635	2,46	0,42	0,40
625	0,395	2,28	0,58	0,54
675	0,279	2,16	0,72	0,62
780	0,110	1,95	0,93	-

Енергії оптичної іонізації ( $E_0$ ) та активації ( $E_a$ ) центрів випромінювання розраховані за методикою [3, 2398]. З таблиці видно відповідність розрахованих величин  $E_a$  і експериментально визначених енергій активації  $E^*$ . Останні одержано з температурної залежності інтенсивності люмінесценції.

Слід підкреслити, що донорно-акцепторні центри, виконуючи роль центрів випромінювання, значно впливають і на фотопровідність досліджуваних кристалів. Зокрема, для ZnSe: Al характерна широка смуга спектру фотопровідності, що обіймає область від 450 до 700 нм [4, 296]. Ця смуга має складну структуру, а окрім компонентів її обумовлені оптичними переходами, що здійснюються в межах донорно-акцепторних центрів. Встановлено також прямий зв'язок між структурою спектрів фотопровідності та спектрів збудження фотolumінесценції. Зокрема, оптичні переходи з енергією  $E_0 = 2,46$  і  $2,28$  еВ мають місце як при збудженні фотolumінесценції, так і фотопровідності. Як видно із таблиці I, ці переходи виникають у найближчих донорно-акцепторних центрах, вірогідність формування яких максимальна.

Виходячи з наведених результатів роботи, можна зробити висновок, що донорно-акцепторні центри в монокристалах ZnSe виконують функції ефективних центрів випромінювальної рекомбінації, які обумовлюють люмінесценцію в області довжин хвиль від 500 до 1000 нм. Донорно-акцепторні центри є центрами повільної рекомбінації, що обумовлює довгохвильову фоточутливість кристалів. Процеси збудження фотolumінесценції і фотопровідності пов'язані з оптичними переходами, що здійснюються через енергетичні рівні донорно-акцепторних центрів.

### Резюме

Показано, що в монокристалах селеніду цинку визначальну роль в процесах рекомбінації відіграють асоціативні центри, до складу яких входять власні акцептори — вакансії цинку та донорні домішки співактиваторів. Ідентифіковано ряд смуг люмінесценції з урахуванням можливості формування в кристалах нейтральних та однозарядніх донорно-акцепторних центрів рекомбінації.

## Література

1. Ваксман Ю.Ф., Краснов А.Н., Хуан Ф.Родригес, Сердюк В.В. Расчет концентраций равновесных дефектов в монокристаллах  $ZnSe$ , отожженных в расплаве индия //Сб. Фотоэлектроника. — 1992. — №5. — С.18-29.
2. Ваксман Ю.Ф., Краснов А.Н. Люминесценция селенида цинка в желто-зеленой области спектра //Сб. Фотоэлектроника. — 1996. — №6. — С.8-12.
3. Копылов А.А., Пихтин А.Н. Форма спектров поглощения и люминесценции на глубоких центрах в полупроводниках (кислород в фосфиде галлия) //ФТП. — 1974. — Т.8, №12. — С.2398-2404.
4. Корнева Н.Н., Ваксман Ю.Ф., Сердюк В.В. Механизмы возбуждения самоактивированной фотолюминесценции монокристаллов селенида цинка //ЖПС. — 1980. — Т.32, в.2. — С.294-298.
5. Фок М.В. Разделение сложных спектров на индивидуальные полосы при помощи обобщенного метода Аленцева //Тр. ФИАН СССР. — 1972. — Т.59. — С.3-24.
6. Serdyuk V.V., Korneva N.N., Vaksman Yu.F. Studies of long-wave luminescence of zinc selenide monocrystals //Phys. Stat. Sol. (a). — 1985. — V.91, №1. — P.173-183.
7. Williams F.E. Donor-acceptor pairs in semiconductors //Phys. Stat. Sol. — 1968. — V.25, №2. — P.403-511.

# МАГНІТНІ ПОЛЯ У ВИБУХОВИХ ПОДВІЙНИХ ЗОРЯХ

*I. L. Андронов*

Одним з найважливіших напрямків сучасної астрофізики є дослідження будови та еволюції тісних подвійних систем. Інтерес до цієї проблеми значно виріс в останній час у зв'язку з розвитком рентгенівської астрономії на базі спеціалізованих космічних літальних апаратів. У багатьох подвійних системах спостерігається перетікання речовини з однієї зорі на іншу, яке називається в астрофізиці акрецією. Незважаючи на єдність такої основної моделі, конкретні прояви дуже відрізняються в різних типах систем, у залежності від їхніх характеристик та структури акреційного утворення.

Рух плазми значно ускладнюється, якщо, крім гравітаційних сил, у системі існують магнітні поля з напругою, достатньою для впливу на акрецію. Такі зоряні системи містять компактний об'єкт — нейтронну зорю або білий карлик. Якщо супутником білого карлика є червоний карлик, що заповнює свою поверхню Роша, така система називається вибуховою, а її розмір (кілька сотень тисяч кілометрів) набагато менший, ніж у системах з нейтронними зорями. Орбітальні періоди становлять від тільки 82 хвилин до 4-5 годин, хоча кілька систем мають більш тривалі періоди.

Згідно із стандартною моделлю, у вибухових подвійних системах речовина оболонки супутника перетікає через околиці внутрішньої точки Лагранжа, де тяжіння супутника та центробіжна сила врівноважуються силою тяжіння білого карлика. Далі, під впливом цих сил і сили Коріоліса, трасекторія руху відхиляється від лінії центрів у напрямі орбітального руху супутника, а потім навколо компактної зорі формується газовий "акреційний" диск [22, 85].

Взаємодія між внутрішніми частинами диску, що швидко обертаються, та білого карлика веде до прискорення обертання білого карлика, періоди якого містяться в інтервалі від 33 секунд в AE Aqr до 4022 секунд в EX Hya. В інших системах відношення періоду обертання до орбітального становить від 0,01 до 0,1.

Однак, найбільш сильні магнітні поля спостерігаються у зорях типу AM Her, які називають "полярами", оскільки їх випромінювання характеризується наявністю великої колової і лінійної поляризації, яка синхронно змінюється з потоком у широкому діапазоні довжин хвиль від рентгенівського до радіо та з

профілями емісійних ліній. “Стандартна модель” поляра була запропонована [16, L13], і, згідно з нею, білій карлик має настільки сильне магнітне поле (десятки та сотні мегагаус), що: а) запобігає формуванню акреційного диску, потік переходить в акреційну колону поблизу магнітного полюса білого карлика; б) синхронізує період обертання з орбітальним; в) веде до залежності поляризації від довжини хвилі.

Першу таку систему відкрив Tapia [19, L125] у 1976 р. Зараз відомо 37 зірок типу AM Her. Зроблено огляд даних спостережень полярів [7, 3], розглянуто їх теоретичні моделі [17, 195]. На жаль, спостереження полярів у більшості випадків проводяться тільки протягом короткого часу після відкриття чергового об'єкта, і часто після “миттєвої зйомки” та попередньої моделі дослідження об'єкта припинялось. У деяких випадках (MR Ser) це привело до неможливості визначення точного значення періоду за спостереженнями, отриманими з перервою у кілька років.

Регулярні спостереження AM Her, розпочаті в 1978 р. в Одеському університеті за ініціативою В.П.Цесевича (1907-1983), довели, що існують “тонкі” ефекти, які потребують подальшого розвитку “стандартної моделі”. З 1988 р. проводиться міжнародна програма “Поляр”. Розглянемо основні результати.

У переходній зоні між поверхнями Роша компонентів рух речовини визначається фізичними характеристиками оболонки супутника, силами тяжіння та напрямом магнітного поля. Потік маси найбільший, коли кут між магнітною віссю білого карлика та лінією центрів дорівнює 0, та прямує до нуля, коли дорівнює прямому кутові (модель “магнітного клапана” [1, 165]). Поблизу положення рівноваги збуджуються коливання орієнтації магнітної осі з характерним часом 1-10 років, під час яких змінюється потік маси (модель диполя, вісь якого “похитується” [10, 557]). Фазова крива близьку залежить від середнього рівня [2, 203].

Багаторічні спостереження AM Her та QQ Vul показують циклічні зміни фази мінімума з характерним часом відповідно 3 та 12 років. Такі коливання можуть бути інтерпретовані моделлю диполя, вісь якого “похитується”, з півамплітудою зміни кута між проекцією осі колонн на орбітальну площину та лінією центрів  $17 \pm 3$  градусів у AM Her, в той час як зміни широти мають повну амплітуду близько 11 градусів [20, 148].

Для виявлення траєкторії руху магнітного полюса білого карлика необхідні багаторічні регулярні спостереження не тільки фазових кривих потоку, а й поляризації випромінювання.

Коли система яскрава, акреційний потік найбільший, що підтверджується як великою амплітудою зміни поляризації, так і корельованістю швидких змін потоку випромінювання, пов'язаних із “спалахами” нейлонідностей потоку при падінні на білій карлик [20, 148].

Траєкторії руху плазми в магнітних тісних подвійних системах, у яких орбітальний та обертальний рух білого карлика асинхронні, з урахуванням впливу гравітації червоного супутника (“пропелер” у подвійній системі [5, 97]), показують, що падіння на білій карлик можливе тільки у тому випадку, коли початкова швидкість (у напрямі до диполя) перевищує деяку граничну. В протилежному випадку речовина розганяється додатковим прискоренням від білого карлінка, та залишає систему, втрачаючи зв'язок із силовими лініями за межами магнітосфери.

Втрата моменту імпульсу веде до синхронізації орбітального та обертального рухів білого карліка з характерним часом  $<1000$  років. За цей час з системи викидається  $<10^{-5}$  мас Сонця. Далі білій карлік обертається практично синхронно з орбітальним рухом. Відомо тільки 2 об'єкти з швидкою синхронізацією — V1500 Cyg [9, 169] та BY Cam [18, 216]. Такі системи є еволюційними попередниками “справжніх” полярів, у той час як “проміжні поляри” становлять паралельну гілку еволюції, яка характеризується меншою напругою магнітного поля та присутністю акреційного диску.

Урахування неоднорідності розподілу щільності акреційної колони виявило, що “ефективний радіус” колони залежить від її оптичної товщини. Це веде до появи поляризації випромінювання навіть при великій оптичній товщині в обох поляризаційних модах [6, 117]. Урахування неоднорідності магнітного поля дозволило розробити модель “веселкової колони”, згідно з якою випромінювання створюється переважно на гармоніках циклотронної частоти, величина якої залежить від висоти над поверхнею білого карліка. Розроблені методи оцінки орієнтації колони відносно супутника за фазовими кривими колової поляризації [13, 21], потоку м'якого рентгенівського випромінювання [4, 508], інтегральних характеристик компонент спектральних ліній, які виникають поблизу колони [13, 21]. Асиметрія колони [12, 107] та її нахил [3, 274] ведуть до виникнення асиметрії фазових кривих поляризації та близьку. Неоднорідність акреційного потоку веде до виникнення різних типів нестабільності з характерним часом близько секунди [11, 229].

“Сонцеподібна” активність червоного супутника спричиняє повільні [15, 1941] або різкі [14, 237] зміни швидкості акреції у вибухових системах різних типів, але беспрецедентний спалах AM Her 28 серпня 1992 р. [21, 237] довів, що можливі прояви значно більш енергійної змінності типу UV Cet [8, 3].

### Резюме

Представлено огляд спостережуваних властивостей вибухових систем, в яких радіус магнітосфери білого карліка перевищує відстань до внутрішньої крапки Лагранжа. Запропоновані теоретичні моделі показують, що у випадку значної асинхронності обертального та орбітального рухів білого карліка відбувається викид речовини з системи і швидка синхронізація з характерним часом  $<1000$  років. До цього класу можуть бути віднесені V 1500 Лебедя і BY Жирафа. Після синхронізації відтворюються зорі типу АМ Геркулеса, в яких зміна орієнтації магнітної осі білого карліка відносно червоного супутника відбувається за кілька років, модулюючи потік маси через околиці крапки Лагранжа. У акреційній колоні збуджуються зміни будови за рахунок кількох типів нестабільності.

### Література

1. Андронов И.Л. О влиянии ориентации магнитного поля на скорость акреции в тесных двойных системах //Астрофизика. — 1984. — Т.20, № 1. — С.165-177.
2. Андронов И.Л. О зависимости кривой блеска АМ Геркулеса от светимости // Письма в Астрономический Журнал. — 1985. — Т.11, № 3. — С.203-207.
3. Андронов И.Л. Влияние наклона акреционной колонны на асимметрию кривых блеска поляров. Геометрические эффекты //Астрономический Журнал. — 1986. — Т.63, № 2. — С.274-278.

4. Андронов И.Л. Определение ориентации магнитной оси белого карлика по орбитальным кривым рентгеновского потока //Астрономический Журнал. — 1986. — Т.63, № 3. — С.508-515.
5. Андронов И.Л. О движении плазмы в магнитных тесных двойных системах. Учет кривизны магнитных силовых линий //Астрономический Журнал. — 1987. — Т.64, № 1. — С.97-107.
6. Андронов И.Л. О влиянии неоднородности аккреционной колонны на поляризацию и спектр ее излучения //Астрофизика. — 1990. — Т.32, № 1. — С.117-131.
7. Войханская Н.Ф. Тесные двойные системы типа АМ Геркулеса. Обзор наблюдательных данных //Астрофиз. Исследов.. — 1990. — Т. 30. — С.3-77.
8. Гершберг Р.Е., 1976. Вспыхивающие звезды малых масс. М., 1978. — 240 с.
9. Павленко Е.П., Пельт Я.О. О синхронизации компонентов магнитной Новой V1500 Cyg //Астрофизика. — 1991. — Т.34. — С.169-174.
10. Andronov I.L. "Swinging Dipoles" in Magnetic Close Binary Systems// Astrophysics and Space Science. — 1987. — V.131.P.557-570.
11. Andronov I.L. On the mechanism of the 'Noisar' Phenomenon in Magnetic Close Binary Systems// Astronomische Nachrichten. — 1987. — B.308. — №.4. — P.229-234.
12. Andronov I.L. On the Polarizational Properties of the Accretion Columns in Magnetic Cataclysmic Variables// Astron. Astrophys. Transact. — 1992. — V.1. — № 2. — P.107-117.
13. Andronov I.L. Determination of the orientation of the accretion columns in magnetic cataclysmic variables// Odessa Astronomical Publications. — 1993. — V.6. P.21-30.
14. Andronov I.L., Shakun L.I. Alternating Cycle Durations in Dwarf Novaell // Astrophysics and Space Science. — 1990. — V.169. — P.237.240.
15. Bianchini A., Solar-type cycles in close binary systems// Astron.J. — 1990. — V.99. № 6. — P.1941-1952.
16. Chanmugam G., Wagner R. L. The remarkable system AM Herculis/3U 1809+50// Astrophys. J. — 1977 — V.213. — P.L13-L16.
17. Cropper M. The polars// Space Sci Revs. — 1990. — 54. — 3/4. — P.195-295.
18. Mason P.A., Chanmugam G., Evidence for synchronization of the polar BY Cam// ASP Conference Series. — 1992. — V.29. P.216-221.
19. Tapia S. Discovery of a magnetic compact star in the AM Herculis (3U 1809+50 system)// Astrophys. J.. — 1977 — 212 — P.L125-L129.
20. Shakhovskoy N.M., Kolesnikov S.V., Andronov I.L.: AM Herculis at the low state: The circular polarization disappeared //in: "Stellar Magnetism". — St. Petersburg. — 1992. — P.148-154.
21. Shakhovskoy N.M., Alexeev I.Yu., Andronov I.L., Kolesnikov S.V. Unprecedented flare at red secondary component of AM Herculis// Annals of the Israel Physical Society. — Vol.10. — 1993. — P.237-240.
22. Warner B. Observations of Dwarf Novae// In: P.P.Eggleton, S.Mitton, J.A.Whelan (eds.). The Structure and Evolution of Close Binary Systems. — Dordrecht. — Holland. — 1976. — P.85-140.

# THE ELECTRONIC PROPERTIES AND THE ADSORPTION SENSITIVITY TO OXYGEN OF SEMICONDUCTOR FILMS OF CADMIUM SELENIDE WITH REAL SURFACE WHICH CONTAINS ATOMS OF HEAVY METALS AND S, SE, TE

*Vashpanov Yu. A.*

The physical mechanism of adsorption sensitivity is a subject of intensive study at the present time [1-3]. The surface doping of semiconductor materials is one of the most effective methods of change of electronic and adsorption parameters of the surface of solids [4]. Despite extensive information about influences of surface doping on electronic properties of real surface of semiconductors, presented in monograph [5], the research of influence of surface doping on the adsorption processes on surfaces practically was not paid attention to. It is known that the condensation of metals on surfaces of solids is accompanied by formation clusters and small particles, physical and chemical properties of which are considerable different from of properties of bulky materials [6,7]. The change of chemical nature changes the spectrum of electron states on surfaces of solids. For CdSe films of the specific interest are the atoms of heavy metals Ag, Cd, In, Sn, Sb, close on weight to own atoms of cadmium in structure CdSe. The atoms of S, Se, Te are close on the chemical properties to oxygen. Therefore on surface of material is formed the cluster structure. The influence of such cluster formations on adsorption sensitivity of real surface of semiconductors have been not practically investigated. The comparison of parameters of initial and doping surface, finding out of features of properties of real surface at such doping is important for understanding of mechanism of electronic and adsorption properties of the surface of solids. The experimental research of such materials presents the significant interest and it is important at understanding of mechanism of adsorption sensitivity of solid sensors.

## **The methods of sample manufacturing and measurements**

As a semiconductor films it we selected cadmium selenide, possessing high sensitivity to oxygen adsorption [8]. Doping of surface executed by method of

condensation of very pure metals in vacuum  $10^{-5}$  Pa and directly afterwards condensation of semiconductor. The technology of surface doping and measurements is described in [9].

### Results and discussions.

On fig. 1 are submitted the data on relative change of effective values of electron concentration under surface doping in their the range of concentration  $N_s$  from  $10^{13}$  to  $10^{17}$  cm $^{-2}$ . As it is seen from data of fig. 1 with growth of doping degree  $N_s$ , we observed the increase of effective value of electrons concentration on several orders under doping by atoms of metals. It is interesting to note that these metals on surfaces are as univalent donors of electrons. The inlet of oxygen in nitrogen with concentration 53 vol% in measuring chamber results in reduction of value of electron concentration in semiconductor (fig. 2). Only under high doping degrees  $N_s$ , the concentration of electrons slightly decreases. The received data testifies that free electrons, appearing at surface doping by metals, are located on levels of adsorption oxygen. As well as in work [10] the quantity  $D_n$  testifies about increase of adsorption abilities of surface under doping by atoms of metals.

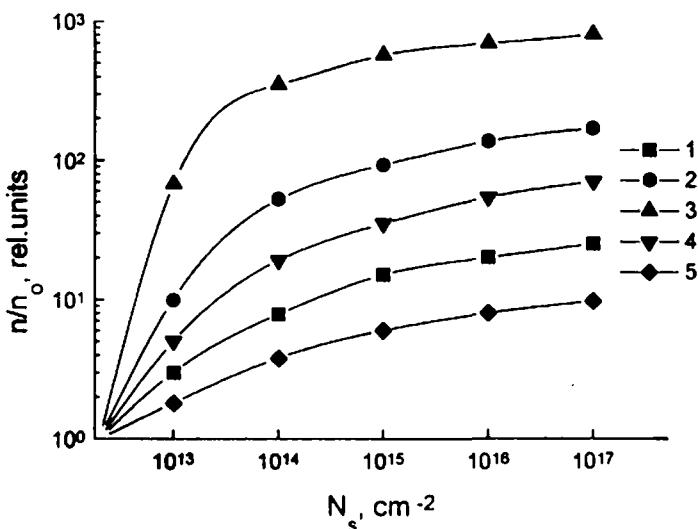


Fig. 1 The relative dependence of electrons concentration in CdSe films from concentration  $N_s$  of Ag (1), Cd (2), In (3), Sn (4), Sb (5) atoms in vacuum  $10^{-5}$  Pa.

The magnitude of change of electronic properties of material under surface doping and subsequent interaction with oxygen depends on the type of ligand at other equal conditions. The measurement method [11] of bond energy of oxygen  $E_b$  with doped surface of CdSe samples has shown that the value of  $E_b$  depends from the doping degree and the type of ligand (table 1).

As it is seen from these data with growth of ligand concentration at all investigated samples the changes of parameter  $E_b$  are observed. The heaviest reduction  $E_b$  takes place for indium atoms. The physical reason of change of bond energy with surface of material can be the interaction between adatoms and adsorption centres at increase of concentration  $N_s$ . As far as under doping the metals on surfaces form the donors

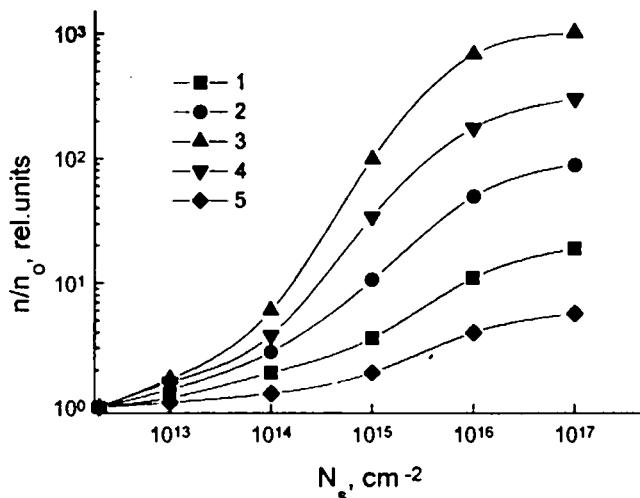


Fig.2 The relative dependence of electrons concentration  $n/n_0$  in CdSe films from concentration  $N_s$  of Ag (1), Cd (2), In (3), Sn (4), Sb (5) atoms under oxygen adsorption.

centres, and under oxygen adsorption the acceptor levels are formed, and as a result of such interaction, can be formed the donor- acceptor complexes  $D^+ \cdot A^-$ . The degree of charge transfer in the complex depends on the nature and concentration of donor centres. At the concentration of ligand atoms equal  $10^{16} \text{ cm}^{-2}$  after the oxygen adsorption practically the total restoration of the reference value  $n$  is observed.

Table 1.

The dependence of parameter  $E_a$  from doping degree  $N_s$ .

Element \ $N_s, \text{cm}^{-2}$	$10^{12}$	$10^{13}$	$10^{14}$	$10^{15}$	$10^{16}$
Ag	0,83	0,84	0,82	0,80	0,76
Cd	0,85	0,92	0,89	0,86	0,83
In	0,80	0,81	0,78	0,70	0,65
Sn	0,82	0,84	0,81	0,79	0,76
Sb	0,80	0,82	0,80	0,78	0,75
S	0,80	0,82	0,84	0,86	0,89
Se	0,81	0,83	0,85	0,88	0,89
Te	0,79	0,80	0,82	0,84	0,86

As far as at higher doping degrees the process of ionization of newly arriving ligand atoms is braked and under oxygen adsorption the transition of electron from neutral atom of metal on the adparticle of oxygen is probable. The valuations of the value of the  $\delta$  on formula  $\delta = \Delta n d / N_s$  show that at the concentration  $N_s = 10^{14} \text{ cm}^{-2}$  by atoms Ag, Cd, In, Sn, Sb the degree of the charge transfer  $\delta$  makes accordingly 0,04, 0,08, 0,12, 0,90, 0,12. As is shown in work [12] energy of interaction between surface dipoles is defined on formula  $E_{\text{dip-dip}}(R) = 2p^2 R^{-3}$ , where  $p = q(a + l/k\epsilon_0)$  is the dipolar

moment of the complex. If one takes into account that the charge in the complex goes incomplete at large doping degrees, then  $q = \delta q_0$ . Here  $q_0$  is the maximal degree of charge transfer in complexes. The dipole-dipole interaction is observable on distances more than the lattice constant. On distances about the lattice constant adatoms can repel on the law:  $E_{d,stat}(R) = 2q^2/R(\epsilon_0 + 1)$  [12]. As it is seen from these formulas the magnitudes of energy of interaction can be from 0,01 eV to 0,3 eV in dependence on distance R between complexes. At growth of concentration N, the distance R should decrease in case of doping by metals. Experimental data received for E<sub>d</sub> show that already at concentration  $N = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  the influence of interaction between by adsorption complexes on magnitudes of bond energy of oxygen with surface is observed. And with the growth of their concentration to  $10^{16} \text{ cm}^{-2}$  the parameter E<sub>d</sub> decreases on 0,25–0,3 eV at the doping by metals. Thus the heaviest influence surface doping is marked for indium atoms, at which the degree of the charge transfer in complexes is maximal of all investigated metals.

It is interesting to note that the observable bond energy of oxygen with surface of semiconductor under surface doping by metals correlates with magnitudes of their potentials of ionisation [13]. Thus also is observed with growth of number of atoms in clusters the reduction of the magnitude of potential of ionisation on 0,4 eV [14]. The heaviest significance of energy E<sub>d</sub> is observed for surface with cadmium atoms.

The clusters formation on surface in intermediate range of values N, is the reason of the mentioned dependence  $\mu(T)$ . The physical reason of occurrence of a barrier for electrons can be the non-uniform distribution of impurity, resulting in fluctuation of the band gap. The second reason can be the tunnel barrier, formed between clusters at small distances between them. As far as clusters are formed on semiconductor surface, the first factor should prevail. The inlet of oxygen in the measuring chamber in addition is resulted in the reduction of parameter  $\mu$  in seven times. The measurement of temperature dependence of  $\mu$  has shown that at N, greater  $10^{14} \text{ cm}^{-2}$  the growth of  $\mu$  is observed at the increase of temperature with activation energy  $E_a = 0,3 \text{ eV}$ .

It is known under condensation of particles of metals with concentration more  $10^{15} \text{ cm}^{-2}$  the formation on surface clusters and small particles happens [15]. The size and shape of clusters depends on type of doping atoms and properties of surface. The study of morphology of surface with the help of electronic microscopy has shown that on surface of material clusters are formed. In dependence on doping degree the size and shape of clusters change from granular to filamentary at coagulation of parts of growing particles. Especially it is expressed at condensation of indium atoms which form filamentary clusters parallel and perpendicular to the surfaces. Such type of clusters results in that at less value N, there take place the least distances between parts of clusters. If one thinks the clusters to be the conducting structure then the sharp increase of conductivity on channels of such structures is possible. Thus the least value of distance between clusters and, hence, the largest energy of dipole interaction on surface of material takes place.

In literature the comparative data of sensitivity to oxygen with various centres on surfaces are absent. The change of nature of the atom of impurity on surface must be reflected on parameters of donor-acceptor complex and levels in the band gap of semiconductor. If the shallow levels of donors on surfaces are created, according to accounts the magnitude of adsorption sensitivity will be maximum at other equal conditions. The levels, created by atoms of impurity of metals on surfaces, depend on

chemical nature of doping atoms. The received experimental results allowed to determine that the donors levels  $E_d$ , connected with atoms Ag, Cd, In, Sn, Sb, are 0,2, 0,3, 0,09, 0,2, 0,4 eV. From analysis of data dependence of adsorption sensitivity (AS)  $\beta = G^{-1} dG/dc$  ( $G$  is the conductivity of samples.  $c$  is the concentration of oxygen) [16] at comparison with received experimental data it is possible to obtain the qualitative agreement with calculations of model AS [16]. Indeed, maximal values of  $\beta$ , received under other identical conditions accordingly for of doping atoms studied make 0,08, 0,04, 0,2, 0,07, 0,03 rel.units/vol%. Thus the maximal magnitude is observed under doping by indium atoms.

As far as in the result of surface doping of CdSe thin films by the atoms of metals the main form becomes the molecular form according, to the theory of AS [16], the reduction of sensitivity  $\beta_n$  and  $\beta_\mu$ , stipulated by reduction of parameter  $E_d$ , should happen. On the other hand under doping the concentration of adsorption centres and the adsorption ability of surface grows consequently that there should be the increase AS.

If the doping atoms of metal create the donor levels, located above the Fermi level, they will be on surface as ions, the positive charge of which partially compensates the negative charge of adsorption particles. In that case there should take place with growth of concentration  $N_s$  for metals the reduction of a surface potential barrier for electrons, which results in growth of AS. At the increase of concentration  $N_s$  to  $10^{15}$  cm<sup>-2</sup> the reduction measured was observed at room temperature by the Kelvin method of the surface bend of the band gap on 13 kT. Thus we expect the increases of AS with growth of the doping degree by atoms of metals. From all investigated samples the samples with indium atoms surface doping have the heaviest magnitude of sensitivity.

The occurrence of appreciable sensitivity to oxygen, is experimentally found out at temperatures 333 K, 343 K, 353 K and 363 K (fig. 3, curve 1÷4), for CdSe films at concentration  $N_s = 10^{13}$  cm<sup>-2</sup>, which with the growth of the doping degree grows and after the achievement of maximum ( $N_s = 5 \times 10^{15}$  cm<sup>-2</sup>) decreases. The layers of cadmium selenide in this range of temperatures practically did not react on change of

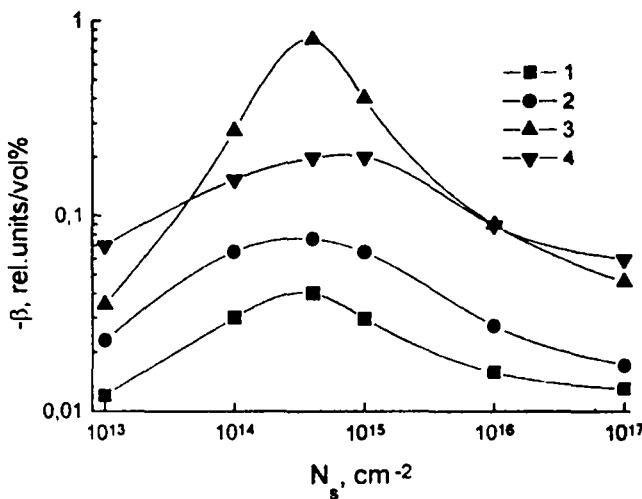


Fig.3 The dependence of adsorption sensitivity  $\beta$  to oxygen against indium concentration on surface of CdSe films at 333 K (1), 343 K (2), 353 K (3), 363 K (4).

concentration of oxygen in measuring chamber. Their areas of sensitivity were in the range of temperatures more than 500 K.

The increase of  $N, 5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$  is accompanied by the increase of electron concentration in conductivity-band down to degeneration of conductivity. Thus the electrons located on oxygen centres lead to decrease of concentration free electrons remaining in conducting-band and the magnitude of AS decreases. With the growth of temperature of measurements from 323 K to 373 K the degree of ionisation of bulk donor states in semiconductor is increased. The number of electrons in conductivity-band and as a consequence the bulk conductivity component grows. According to results of calculations growth of this quantity leads to the fall in the magnitude of sensitivity. With growth of temperature the desorption of adsorbates grows exponentially that should lead to reduction of concentration of oxygen particles and, hence, to reduction AS.

However the growth of the adsorption sensitivity at increase of measurement temperature from 323 K to 353 K is experimentally observed (Fig. 4, 1-4). The increase of concentration of indium atoms on surface results in the increase of concentration of ions of oxygen on surface. Specifically, that the less concentration of metal atoms on film surface the more abruptly the dependence of sensitivity from temperature is displayed to draw attention that on films surface at  $N_i < 10^{14} \text{ cm}^{-2}$  the chemisorption  $O_2$  and  $O$  is observed, and on surface CdSe layers with  $N_i > 10^{14} \text{ cm}^{-2}$  experimentally is found out only the chemisorption form of molecular oxygen it becomes obvious that the increase of AS in the range of investigated temperatures is stipulated by the growth of concentration and depth of oxygen levels at the expense of formation of atomic oxygen as a result of dissociation  $O_2$  on surface film.

At the growth of concentration of S, Se, Te atoms the reduction conductivity of samples to the value of doping atoms concentration close to  $N_i = 10^{15} \text{ cm}^{-2}$  was

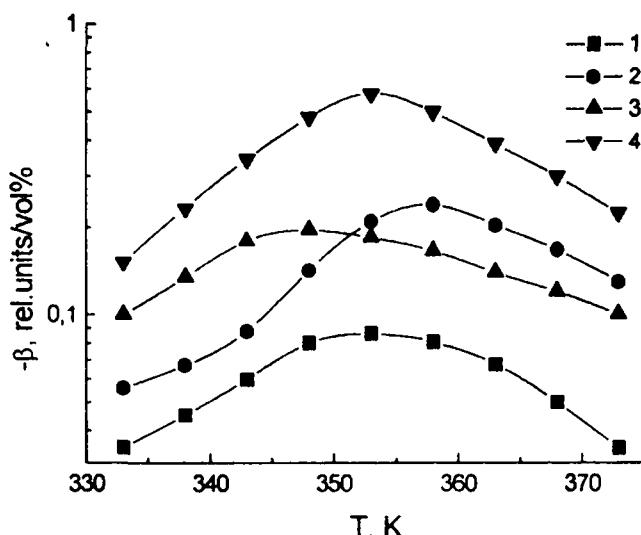


Fig. 4 The dependence of adsorption sensitivity  $\beta$  to oxygen of CdSe films from temperature of measurements for  $N_i 10^{13} \text{ cm}^{-2}$  (1),  $5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$  (2),  $10^{14} \text{ cm}^{-2}$  (3),  $10^{15} \text{ cm}^{-2}$  (4).

observed. It is connected with acceptor influence of adsorption particles on conductivity of p-type CdSe. The heaviest changes were observed at condensation of selenium atoms. Subsequent adsorption of oxygen led to reduction of response of conductivity changes and adsorption sensitivity (fig.5, curve 1).

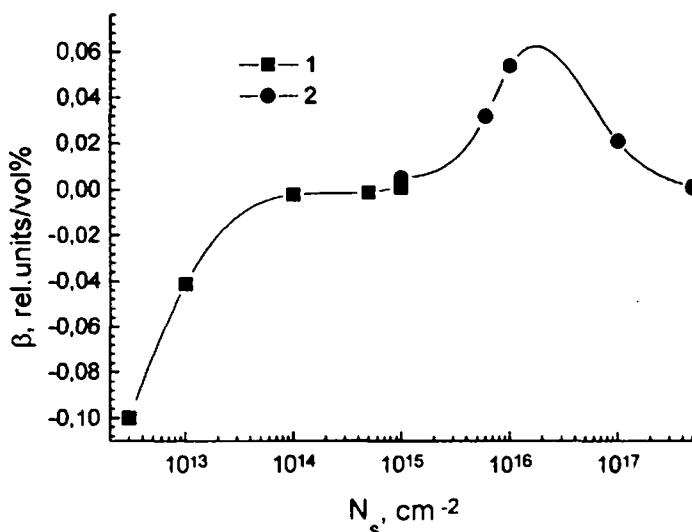


Fig.5 The dependence of AS to oxygen of semiconductor films of CdSe from surface doping  $N_s$  of selenium atoms.

By method [7] the bond energy of oxygen with doping surface of CdSe samples are measured. The magnitude of  $E_b$  with growth of doping degree up to  $N_s = 10^{15} \text{ cm}^{-2}$  increases from 0,78 eV to 0,86 eV. At concentration of selenium atoms more  $10^{15} \text{ cm}^{-2}$  the change of conductivity after heat treatment at temperature 353 K was observed. On the surface of material with the help of electron microscopy we observed the linear clusters structures. It is known that the adsorption of selenium atoms have the form of tetragonal rings ( $\text{Se}_4$ ) [17]. At temperatures in the ranges of 343- 348 K in [17] there was observed the breaking of rings and the formation of linear amorphous polymers of selenium. At higher temperatures there are formed the chain molecules of selenium. It is known that selenium has the p-type of conductivity. Therefore the change the character conductivity of samples is possible to interpret as the inversion of conductivity on surface of material and the formation molecular filaments of selenium along surface of semiconductor.

The oxygen adsorption on surface of CdSe:Se structures results in growth of p-type conductivity already at room temperatures of measurements. Times of transition processes on change of oxygen concentration were  $\approx 20$  seconds. On fig.5, curve 2, are shown the data of adsorption sensitivity with the growth of the doping degree. The received result has the important significance as at room temperature of measurements the response under oxygen adsorption has been observed. The increase of adsorption sensitivity can be interpreted by the increase of the number of polymer chains of selenium participating in conductivity.

The measurement of the activation energy of a trap for CdSe:Se samples by

method [11] has resulted in the value  $0,3 \pm 0,4$  eV. As it was shown the physical reason of change of bond energy with surface of material to values  $N_s$  less  $10^{15} \text{ cm}^{-2}$  is the change of energy the interaction between adsorption atoms and adsorption centres of oxygen at the increase of doping atom concentration.

As far as under metalloid doping on surface the concentration of own donor centres (adsorption centres of oxygen [10]) decreases, degree of the charge transfer in complexes  $D^{\pm}A^{\mp}$  decreases that results in the reduction of energy of interaction and accordingly in growth of bond energy of oxygen with semiconductor surface. The valuations of the value of  $\delta$  show that at concentration  $N_s = 10^{14} \text{ cm}^{-2}$  of atoms S, Se, Te the parameter  $\delta$  makes correspondingly 0.1, 0.3, 0.05. In this area of concentration the observable changes of bond energy finds the confirmation in the framework of the model for CdSe:In. At the growth of concentration  $N_s$  the distance R under metalloid doping will increase that results in the growth of energy  $E_s$ . The received experimental result confirms the conclusions of the model of adsorption sensitivity about the existence of high sensitivity to oxygen adsorption of the inversion channels on surfaces of semiconductors. But besides it there happens the formation of selenium nanowire structures on surfaces of material, the conductivity of which changes under oxygen adsorption.

The reduction AS with the growth of doping degree  $N_s = 10^{15} \text{ cm}^{-2}$  is probably connected with the increase of bend of the band gap, at which the reduction of sensitivity should happen. The increase of acceptor concentration of biographic origin should cause also the fall of AS at other equal conditions. The reduction of bond energy which is observable under doping of selenium atoms in p-type should cause the reduction of  $\beta$ . The experimental observable reduction AS for  $N_s$  more than  $10^{15} \text{ cm}^{-2}$  testifies that the increase of the absolute value of the surface potential to values, at which the stabilisation of its value is observed, is main reason of recession of  $\beta$ .

### Abstract

The electronic properties and adsorption sensitivity to oxygen of semiconductor CdSe thin films under surface doping of Ag, Cd, In, Sn, Sb S, Se, Te atoms have been investigated. The clusters and nanowires have been found out. The change of bond energy  $E_s$  of oxygen with doping of the surface has been discovered. The physical mechanism of change of  $E_s$  and of adsorption sensitivity of material with doped surface is discussed.

### References

1. Demidovich V.M., Demidovich G.B., Karabljanz V.P., Kozlov S.N.// Russ. technical phys. 1998, v.68, p.118-122.
2. Polishuk V.M., Strikha V.I., Sutera E., Marten D.// Ukr.J. of phys., 1997, v. 42, n2, p.216-219.
3. Brynzari V., Dmitreer S., Korotchenkov G.// Proc. of internationale conference "Eurosensors XI", 1997, Warshaw, Poland, v.2, p.91-94.
4. Brilson L.J. Interface states in "Contacts to semiconductors" Noyes data corporation, New Jersey 1993, 680 p.
5. Primachenko V.E., Snitko O.V. Physics of metal doping surface semiconductors, Kiev, 1988, 230 p.

6. Petrov Yu.I. *Clasters and small particles*, Moskow, 1988, 367 p.
7. Cohen M., Knight W.D. //*Phys. Today*, 1990, v.43, n12, p.42-50.
8. Smyntyna V.A., Serdjuk V.V.//*J.Phys.Chem.*, 1976, v.50, n7, p.1836-1838.
9. Vashpanov Yu.A., Smyntyna V.A., Serdjuk V.V. //*J.Phys.Chem.*, 1982, v.56, n1, p.198-200.
10. Vashpanov Yu.A., Smyntyna V.A., Serdjuk V.V. //*Poverchnost.*, 1984, n1, p.93-98.
11. Smyntyna V.A. //IL NUOVO CIMENTO, 1981, v.63B, n2, p.642-650.
12. Braun O.M., Medvedev V.K. //*Uspechi phisicheskich nauk*, 1989, v.157, n4, p.631-666.
13. Smitls J. *Metals. Reference book*, Moscow, 1980, 446 p.
14. Seel M. //*J.of Quantum Chem.*, 1988, n22, p.265- 274.
15. Borzjak P.G., Kulupin Yu.A. *Electronic processes in islets metals films*, Kiev, 1980, 239 p.
16. Waschpanow Yu.A. //*Festkörperchemie oxidischer Systeme*, Greifswald, Germany, 1990, s.170-180.
17. Sobolev V.V., Shyrokov A.M. *The electronic structure of S, Se, Te materials*, Moskow, 1988, 224 p.

пазону досягається рівномірне перемішування розплавлених мас, а глибоке прогрівання сповільнює швидкість процесу кристалізації і дозволяє уникнути аморфізації здобутого легованого шару. Таким чином, у результаті лазерного опромінювання утворювалася прямокутна ділянка, яка відрізнялась від неопромінених областей  $B(III) GaP$  морфологією поверхні. Для усунення залишків пілівки легуючих металів зразки травилися у розчині  $HNO_3$ .

Дослідження модифікованих шарів здійснювались рентгенодифракційним (зйомка кривих качання у схемі двокристального спектрометра) і мікроструктурним (дослідження поверхні  $GaP$  у відбитому та поляризованому світлі) методами. Рентгенодифракційні криві були одержані на дифрактометрі ДРОН-УМ1 на  $CuK_{\alpha 1}$  — випромінюванні. Кристалом-монохроматором був досконалій монокристал  $Si(III)$ . Застосування вузьколімінованого пучка рентгенівських променів прямокутної форми розмірами  $0,05 \times 2,0 \text{ mm}^2$  дозволяло проводити послідовний ряд зйомок уздовж довгої сторони опроміненої ділянки з кроком  $0,5 \text{ mm}$ . Таким чином, криві 1 та 7, представлена на рис. 1а, одержані поза зоною опромінення фосфідугалію, легованого індієм; 2, 3 — на межі та 4, 5, 6 — у зоні опромінення. Значна асиметрія кривих 2—6 з боку малих кутів вказує на появу додаткового піка, що говорить про утворення у зоні лазерного опромінення шару з іншою сталовою граткою, ніж у підкладки. Кутове положення дифракційного максимуму, визначене з використанням методу розділення кривих Аленцева-Фолка, відповідає сталій гратці  $a=5,449 \text{ \AA}$ , що на  $0,002 \text{ \AA}$  перевищує значення для нелегованого  $GaP$  ( $a=5,447 \text{ \AA}$ ). Помилка у визначенні сталої гратки не перевищувала  $2 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$ . Розрахунок, виконаний у відповідності з законом Вегарда у наближенні нескінченно розбавлених розчинів, дозволив визначити концентрацію  $In$  у приповерхневому шарі у зоні опромінення —  $0,47 \text{ at.\%}$ , що відповідає числу атомів  $5.8 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Напівширина виділених дифракційних максимумів у межах помилки експерименту збігалася з напівшириною вихідного  $GaP$  ( $\sim 20.5^\circ$ ), що говорить про відсутність напруженості, викликаної імплантациєю індію і відповідає густині дислокацій, визначеній за підрахунками ямок травлення  $N_d = 2 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-2}$ .

Дифракційні криві, одержані від поверхні  $GaP$ , імплантованої мідю (Рис. 1б), досить сильно відрізняються від кривих, одержаних від поверхні  $GaP<In>$ . Пере дусім ця різниця стосується величини напівширини максимуму інтенсивності ( $0.8^\circ$ ), що відповідає шару, підданому лазерній обробці, і є притаманна для полікристалів. Кутове положення максимуму відповідає середньому значенню сталої гратки шару  $GaP<Cu>$   $a=5.630 \text{ \AA}$ , яка відрізняється від сталої гратки нелегованого  $GaP$  на  $0.183 \text{ \AA}$ . Відповідно [6, 286] атоми  $Cu$  входять у гратку сполук групи  $A^3B^5$  у міжузловини, а у [1, 451] наводяться дані про акцепторну природу атомів  $Cu$  в  $GaP$ . Таким чином,  $Cu$  може поводити себе як амоторна домішка у сполуках групи  $A^3B^5$ . Розрахунок концентрації атомів  $Cu$ , проведений за методом моделювання гіпотетичної структури з використанням закону Вегарда, привів до дуже великих значень концентрації  $Cu$ , як у випадку утворення розчинів заміщення, так і у випадках розчинів проникнення. Що не відповідає добре знайомим фактам поганої розчинності у ковалентних кристалах домішок з іншим типом хімічного зв'язку. Крім того, велика напівширина дифракційних ліній свідчить також про їх складний характер. Відповідно до [5, 276] введення значної кількості потужних дефектів (укрупнених частинок нової фази, або дислокаційних петель), що викликають великі порушення, призводять до появи дифузного, досить розширеного, максимуму

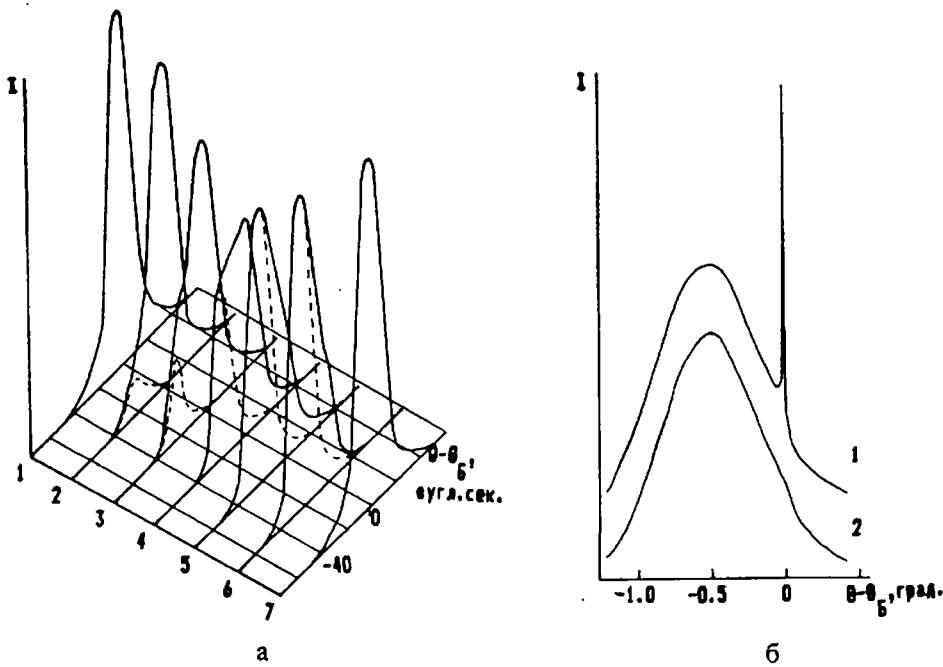


Рис. 1а. Дифракційні криві опромінених областей GaP (111), ( $Q_b = 14.177^\circ$ : а) — GaP<In>, 1, 7 — отримані поза зоною опромінення; 2, 3 — на межі зони опромінення; 4, 5, 6 — у зоні опромінення.

Рис. 1б. — GaP<Cu>: 1 — на межі зони опромінення; 2 — у зоні опромінення.

му, зміщеного по відношенню до вихідного. При цьому напівширина лінії вихідного максимуму не змінюється, а інтенсивність його зменшується, що і спостерігалось у нашому випадку.

Дійсно, мікроструктура поверхні GaP<Cu> (Рис. 2 а) містить значну кількість некубічних блоків розміром до 35 мкм, що може бути пов'язано з утворенням мікровключень другої фази. На кристалах GaP<In> подібний ефект був значно слабшим. Крім того, для поверхні IaP<Cu> характерне утворення сітки тріщин (Рис. 2б) Тут же, на окремих ділянках проявляється періодична структура мікроельєфу поверхні з кроком між смугами рельєфу 265 мкм, яка, відповідно до [3, 1237; 7, 1537], утворюється в твердій фазі при температурі, достатній для переходу напівпровідника у пластичний стан.

### Резюме

Таким чином, можна зробити висновки, що за допомогою мілісекундних імпульсів випромінювання неодимового лазера можна одержати леговані індієм шари GaP, які за досконалістю структури практично не відрізняються від матеріалу підкладки. У той самий час, легування міддю супроводжується утворенням сітки тріщин та значним порушенням структури, які виражаються у роздрібненні та значному розвороті блоків мозаїки у зоні опромінення внаслідок утворення мікровключень другої фази.



а



б

Рис. 2 а. Мікроструктура GaP<Cu> у зоні опромінення:

а) — збільшення 175, у поляризованім світлі, поляризатори схрещені;  
Рис. 2б. — збільшення 400, у відбитому світлі.

### Література

1. Берг А., Дин П. Светодиоды. — М., — 1979. — 686с.
2. Болдыревский П.Б., Данильцев В.М., Краснов А.А., Оболенский Б.А. Свойства арсенида галлия при воздействии лазерного излучения с длиной волны 1.06 мкм //Физ. и хим. обработка материалов. — 1982. — № 3. — С.33.
3. Вейко В.П., Имас Я.А., Либенсон М.Н., Шандыбина Г.Д., Яковлев Е.Б. Формирование периодических структур на поверхности кремния под действием миллисекундного импульса неодимового лазера //Изв. Ак. наук СССР, сер. физическая. — 1985. — Т.49, № 6. — С.1236.
4. Дитрих Т., Чеченин Н.Г. Образование структур пятен кратеров и волн на поверхности GaP при импульсном лазерном воздействии //ЖТФ. — 1988. — Т.58, в.8. — С.1537.
5. Кривоглаз М.А. Дифракция рентгеновских лучей и нейтронов в неидеальных кристалах. — К., 1983. — 408 с.
6. О. Маделунг Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп — М., — 1967. — 477с.
7. Модификация и легирование поверхности лазерными, ионными и электронными пучками — М., — 1987. — 424с.

# ОСОБЛИВОСТІ ЛАЗЕРНОГО ЛЕГУВАННЯ ФОСФІДУ ГАЛІЮ ЕЛЕМЕНТАМИ І ТА ІІІ ГРУП

*Стукалов С. А.*

Модифікація приповерхневих шарів напівпровідниківих матеріалів із застосуванням лазерного випромінювання дозволяє отримати бажані властивості у таких традиційно "нетехнологічних" матеріалів як фосфід галію, зацікавленість до якого не зменшується завдяки широкому його застосуванню у пристроях відображення інформації. Для використання фосфіду галію як одного з основних матеріалів оптоелектроніки видимої області спектру необхідно забезпечити високий ступінь досконалості та максимальну однорідність легування тонких приповерхневих шарів. При цьому надзвичайно привабливим методом виявляється лазерне легування в зв'язку з його простотою, економічністю і можливістю імплантації атомів у концентраціях, що значно перевищують рівноважні [7, 16]. Поряд з цим у роботах [7, 90; 2, 34] було показано, що обробка приповерхневих шарів напівпровідників імпульсним лазерним випромінюванням дозволяє значно модифіковати поверхню і покращити ступінь досконалості структури опромінених шарів. Застосування цього методу стримується недостатньою дослідженістю процесів дефектоутворення у GaP при лазерному опроміненні та ролі режимів обробки на ефективність лазерного легування домішками різних елементів.

У даній роботі досліджувалась можливість імплантациї у фосфід галію елементів III групи — In та I групи — Си під впливом імпульсного лазерного випромінювання. Були використані кристали GaP, вирощені методом Чохральського, товщиною 400 мкм, вирізані паралельно площині (III). Плівки імплантованих домішок товщиною 0,35 мкм наносились на В(III) — поверхню GaP методом термовакуумного напилення. Розгонка домішок у глибину зразків здійснювалась під впливом випромінювання Nd-лазера з густиною енергії  $2,5 \text{ Дж}/\text{мм}^2$ , тривалістю імпульсів  $0,2 \cdot 10^{-3}$  с та діаметром пучка 0,1 мм, що працював у режимі вільної генерації, шляхом построкового сканування зразків з боку напиленої плівки. Площа поверхні, підданої лазерному опроміненню, становила  $6 \times 3 \text{ мм}^2$ . Як показано [7, 40], лазерне випромінювання практично повністю поглинається у шарі металевої плівки внаслідок великої густини електронів провідності, викликаючи її миттєве нагрівання і подальше плавлення разом з поверхневим шаром підкладки. При використанні імпульсів мілісекундного діа-

# ELECTRONIC TEMPERATURE IN GAS DISCHARGE SMALL DIAMETER TUBE WITH ACCOUNT OF DIRECT AND STEPPED IONIZATION

*Mikhailovskaya L. V.*

Mean electron's energy  $\bar{\epsilon}$  is one of the main characteristic of the gas discharge positive column. It is confronted by the electronic temperature  $T_e$  by means of expression  $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} k T_e$  in the case of Maxwell electrons distribution on energies.

Electronic temperature is an internal parameter of positive column and is determined by the processes occurred there. In the diffusion positive column the value of  $T_e$  is determined by the charged particles balance condition. According to it the number of appeared (as a result of ionization) charged particles is equal the number of electrons and ions disappeared on account of their withdrawals towards the tube walls.

We will write the balance equation of the number of charged particles in discharge controlled by diffusion with account of direct and stepped ionizations.

According to [3,118], when there is a Maxwell spectrum of electron's energy, the frequencies of the direct ionization is possible to be written as following:

$$v_i = \bar{v}_e C_i (\epsilon_i + 2kT_e) \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT_e}\right) \cdot N_g = k_i \cdot N_g, \quad (1)$$

where  $\bar{v}_e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi M}}$  — mean heat electron's velocity,  $C_i$  — appropriate constant for the given process,  $\epsilon_i$  — potential of ionization,  $k_i$  — constant of velocity of atom direct ionization from the ground condition,  $N_g$  — atoms density in the ground state.

Frequency of the stepped ionization is defined by means of Tomson's equation [3,62] for the cross-section of process and is written as following:

$$v_m = \frac{C_{mi} \cdot v_e}{kT_e \cdot \epsilon_{mi}} \left( \exp\left(-\frac{\epsilon_{mi}}{kT_e}\right) - \frac{\epsilon_{mi}}{kT_e} \int_{\frac{\epsilon_{mi}}{kT_e}}^{\infty} e^{-t} dt \right) \cdot N_m = k_{mi} \cdot N_m. \quad (2)$$

Here  $\varepsilon_m$  — energy of excitation,  $C_m$  — Tomson constant,  $k_{m1}$  — constant of velocity of atom stepped ionization from the metastable state,  $N_m$  — atom density in excited (metastable) state. The latter is defined by the following expression:

$$N_m = \frac{k_m N_e(0)}{k_{m1} N_e(0) + k_{m0} N_e(0) + v_{md}}. \quad (3)$$

Here  $k_m$  — constant of velocity of the metastable condition excitation in consequence of electronic impact,  $k_{m0}$  — constant of atom transition velocity in the ground state,  $v_{md}$  — frequency of the metastable atoms diffusion withdrawals onto the tube's walls,  $N_e(0)$  — electrons density in the centre of tube. Distribution of electrons density in a cross-section is a Bessel function:  $N_e(r) = N_e(0) \cdot J_0(2.405r/r_i)$  in diffusion positive column of glowing discharge. So, when the value of discharge current  $I_r$  is given and using the expression  $j = e N_e v_{dr}$  for the discharge current density with drift velocity of electrons  $v_{dr} = \frac{eE}{mv_m}$  ( $N_e$  — electrons concentration in discharge,)  $v_m$  — efficient frequency of electrons collisions) it is not difficult to get the following expression for  $N_e(0)$ :

$$N_e(0) = \frac{0.46 \cdot 10^{19} \cdot I_r}{r_i^2 \cdot v_{dr}}. \quad (4)$$

Electrons energy balance equation that is the base for determination intensity of the longitudinal electric field that has been stood in discharge, includes a power expended by a gas heating as a result of elastic collisions of electrons with atoms, the power carried out by the charged particles onto the tube's wall and the power expended for excitation and ionization of atoms. Under that, all electrons energy losses depend on electron temperature. For one electron this expression can be written as following:

$$\frac{e^2 E^2}{mv_m} = v_c \cdot \Delta \varepsilon_k + v_w \cdot \Delta \varepsilon_u + \sum_i v_i \cdot \Delta \varepsilon_i. \quad (5)$$

Here  $v_c$  — frequency of elastic collisions of electrons with neutral atoms,  $\Delta \varepsilon_k$  — losses of electron's energy in the elastic collisions with neutral atoms,  $v_w$  — frequency of collisions with walls of discharge tube,  $\Delta \varepsilon_u$  — energy losses in the collisions with walls,  $v_i$  — frequency of inelastic collisions of electron with atom that result to excitation or ionization of atom,  $\Delta \varepsilon_i$  — losses of electron's energy for excitation or ionization of atoms. In elastic collisions electron gives atom the energy

$\Delta \varepsilon_k = \frac{2m}{M} \cdot \frac{3}{2} k T_e$ . The frequency of elastic collisions depends in common from electronic temperature and density of atoms. The power emitted near the tube's wall consists from the energy of recombination of positive ions and electrons and also from the kinetic energy they possessed before the recombination. It is equal [2,1119]:

$$\Delta \varepsilon_u = \varepsilon_i + W_p + 2kT_e. \quad (6)$$

Here  $\varepsilon_i$  — potential of ionization of recombining atom,  $2kT_e$  and  $W_p$  — mean electron's and ion's kinetic energies when they are reaching a wall. The proper frequency for the diffusion regime of burning discharge is equal to the frequency of electrons diffusion withdrawal onto the walls, e.i.  $v_w = v_d$ , where the following

expression is true:  $v_d = \left( \frac{2.405}{r_1} \right)^2 \cdot D_{am}$ ,  $D_{am} = \frac{kT_e}{e} \mu_i$  — coefficient of ambipolar diffusion,  $\mu_i$  — ions mobility.

As a result we can write the equation that jointly with expressions (1) - (6) is used for determination the electronic temperature  $T_e$  in the discharge tube with radius  $r_1$ , with account of direct and stepped ionization:

$$k_i N_g + k_{mi} N_m = \mu_i \frac{kT_e}{e} \left( \frac{2.405}{r_1} \right)^2. \quad (7)$$

Then the obtained equations for the discharge in helium is applied. In this we will take into account the gas heat displacements from the working zone into ballast volumes that are always presented in the modern gas discharge tubes [1, 239]. That means that the atom density is established in the working zone in dependence on the temperature  $N(T) = p/kT$ .

According to [3, 59], for helium  $C_i = 0.12 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^3/\text{eV}$ ,  $C_m = 0.45 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^3/\text{eV}$ ,  $C_{mm} = 6.5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{eV}$ ,  $\epsilon_i = 24.6 \text{ eV}$ ,  $\epsilon_m = 20 \text{ eV}$ ,  $\epsilon_{mm} = 4.6 \text{ eV}$ . Taking the dimensionless temperature  $t = T/273$ , we will obtain  $N_i(t) = 3.538 \cdot 10^{16} p/t$ . Collisions frequency  $\nu_{mm} = \nu_i = 2.4 \cdot 10^9 p/t$ , diffusion of metastable atoms withdrawals towards the walls

$$\nu_{md} = 326 \cdot \frac{t}{p} \left( \frac{2.405}{r_1} \right)^2, \text{ ions mobility } \mu_i = 8 \cdot 10^3 \cdot t p. \text{ Here the pressure dimension}$$

is torr, the density dimension is  $\text{cm}^{-3}$ .

Calculations were done with the changes of gas temperature for tube with the following data: radiiuses  $r_1 = 0.05 \text{ cm}$ , pressure  $p = 3 \text{ torr}$ , discharge current  $I = 4 \text{ mA}$ .

Some calculated dependencies of the electronic temperature from the gas temperature and the electronic density from gas pressure in the discharge tube of are represented on the figures.

It is seen, that it is the processes of direct ionization dominate in narrow tubes with low pressure and the ones of stepped ionization dominate in tubes with high pressure in the helium discharge. More over, the processes of the gas heat displacement from the working zone into ballast volumes play the significant role.

### Abstract

The modified expression of ionization balance for the determination of electronic temperature in gas discharge positive column with account of direct and stepped ionization was obtained. Intensity of the longitudinal electric field was obtained with account of electrons energy losses in the volume and on the surface of tube. Numerical calculations has been done for the discharge in helium.

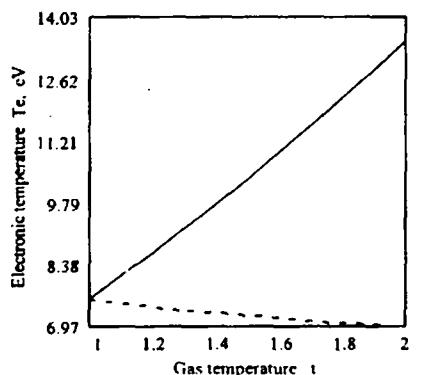


Fig.1. Dependence of electronic temperature from gas temperature for tube with gas pressure 3 torr .

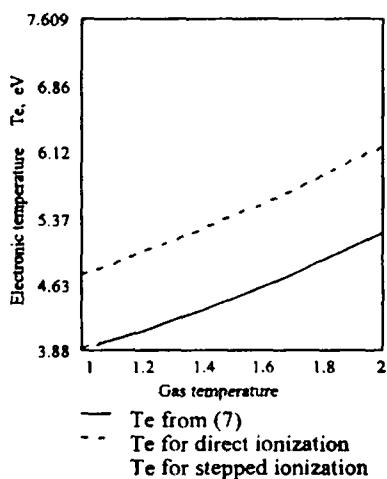


Fig.2. Dependence of electronic temperature from gas temperature with pressure 9 torr ,  $N_g=p/t$

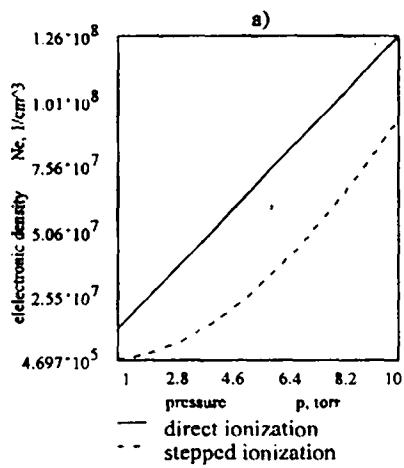


Fig.3. Dependence of electronic density from gas pressure with accounting the heat displacements of gas  
a)  $p = 3$  torr,  $T_e = 8$  eV; b)  $p = 9$  torr,  $T_e = 6$  eV.

### References

1. Grimblatov V.M., Kalugin V.V., Mikhailovskaya L.V., Zuniga V.L. "Express-control method of frequency nonreproductibility sources in frequency stabilised He-Ne lasers". Proceedings SPIE. 1993. Vol. 2113, P. 236-242.
2. Klyarfeld B.N. "Measurment of power loosed on the walls of positive column," Journal of the Technical Physics . 1937. Vol. 7, N 10, P. 1017-1038.
3. Raiser Y.P. "Gas discharge physics". — Moscow 1987.

# ГЕНЕРАЦІЯ ЕРС ТА СТРУМУ В СИСТЕМІ МЕТАЛ — НАПІВПРОВІДНИК — ЕЛЕКТРОЛІТ

*Mихо В. В., Семенюк Л. М., Горшкова О. В., Тимофеєва О. Ю.*

У роботах [2, 1276; 3, 472; 4, 57] встановлено виникнення ЕРС у структурах на основі плівок оксиду алюмінію і танталу, одержаних електрохімічним способом, на які нанесені шари  $\text{SnO}_2$ , що виконують роль другого електрода. Запропонована модель, яка пояснює виникнення ЕРС дисоціацією адсорбованих молекул води на каталітично активних центрах поверхні мікропор окислу та просторовим розподілом по товщині оксидної плівки різноіменно заряджених іонів, які утворюються при цьому, внаслідок різних коефіцієнтів дифузії [3, 472; 4, 56]. У [5, 1210] запропоновано уточнений механізм, який ураховує захоплення електронів уловлювачами при утворенні просторового заряду і виникнення ЕРС.

Виникнення ЕРС можна очікувати, якщо металічну фольгу, на яку нанесена напівпровідникова плівка, помістити в електроліт. У цьому випадку каталітичні властивості поверхні вже не мають суттєвого значення, тому що до поверхні плівки поступають уже не нейтральні молекули, а іони з електроліту. Тому оксидну плівку можна замінити напівпровідниковою, поверхня якої не є каталітично активною.

Становило інтерес з'ясувати можливість застосування запропонованого [3, 5] механізму виникнення ЕРС в оксидних плівках алюмінію в атмосфері, яка містить пари води, до органічних плівок. Для цього треба встановити вплив товщини плівки на величину ЕРС, визначити наявність уловлювачів, а також з'ясувати їх роль в утворенні просторового заряду.

Вимірювання проводились із срібною фольгою, на яку нанесена плівка з полістиролу. Товщина плівки оцінювалась за кількістю нанесеного на фольгу розчину полістиролу в толуолі і змінювалась у інтервалі 0,5–10 мкм. Площа зануреної в електроліт частини фольги складала 3 см, а її маса — 2 мг. Як другий електрод використовувались танталова пластина, золота і срібна фольга, графітовий стержень.

При уміщенні структури, що досліджується, в дистильовану воду, у водні розчини солей, кислот, основ, у розчин КІ у глицерині спостерігалося виник-

нення ЕРС, величина якої складала 0.3-0.9 В. Значення ЕРС залежало від матеріалу протиелектрода та електроліту, але в усіх випадках електрод з плівкою набуває негативного потенціалу.

Із зростанням товщини плівки при малих товщинах значення ЕРС спочатку зростає, але починаючи з 3 мкм, при подальшому збільшенні, величина ЕРС не змінюється (Рис.1).

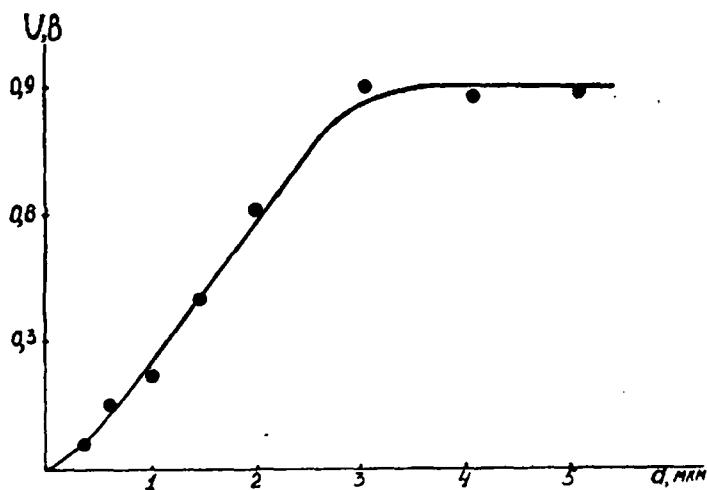


Рис. 1. Залежність ЕРС від товщини полістирольної плівки

Для з'ясування наявності уловлювачів у досліджуваних плівках з полістиролу здійснювались вимірювання вольтамперних характеристик (далі ВАХ). Як показали вимірювання, ВАХ мають вигляд, характерний для протікання струмів, обмежених просторовим зарядом при наявності уловлювачів [1, 110]. Аналізуючи температурні залежності ВАХ, ми визначили енергетичну глибину розташування уловлювачів та їх концентрацію. Ці величини склали 0.3 В та  $2 \cdot 10^{20}$  м<sup>-3</sup> відповідно.

За допомогою диференційної мідь-константанової термопарі були проведені вимірювання різниці температур поблизу плівки і на відстані від неї. Вимірювання показали, що відбувається охолодження шару електроліту, який прилягає до плівки. Виявилось, що різниця температур пропорційна потужності, яка виділяється на навантажувальному опорі (Рис. 2). При проведенні випробувань з системою Ag — полістирол — дистильована вода — Ag виявилось, що за час проведення експерименту (40 діб) через підключений до неї опір навантаження пройшов заряд близько 70 Кл. В результаті проходження цього заряду маса срібного електрода зменшилась на 0.8 мг. За законом Фарадея маса срібного електрода повинна зменшитись на 70 мг. Це свідчить про те, що електроліз у даному випадку — не основний процес, який відповідає за виникнення ЕРС та протікання струму в системі.

Одержані експериментальні результати можна пояснити таким чином. Негативно заряджені іони постачають у плівку електрони, які так само як і в [4, 57], дифундуєть углиб плівки, попадають на розташовані в об'ємі плівки уловлюв-

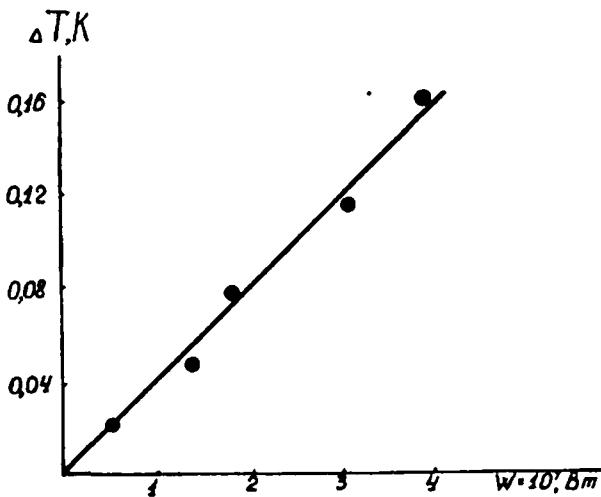


Рис. 2. Залежність різниці температур від корисної потужності, яка віділяється на навантажувальному опорі.

вачі та, збираючись на них, утворюють просторовий заряд. Відход електронів від негативно заряджених іонів у плівку призводить до послаблення зв'язку між плівкою та відповідними радикалами. Це полегшує десорбцію їх з поверхні плівки, що робить можливим прихід до неї нових іонів.

На достатній відстані від електродів процеси дисоціації утворених при цьому іонів урівноважують один одного. Поблизу плівки частина іонів віddaє електрони плівці і тому процеси дисоціації домінують над процесами рекомбінації. Дисоціація молекул здійснюється за рахунок теплової енергії, що призводить до спостережуваного зниження температури електроліту поблизу поверхні полістирольної плівки. Величина ЕРС, яка генерується напівпровідниковою плівкою, як показано в [5, 121], розраховується за виразом:

$$U_0 = (eL^2 n_0 / \epsilon \epsilon_0) [1 - \exp(-d/L)] - (eLn_0 / \epsilon \epsilon_0) \exp(-d/L), \quad (1)$$

де  $L$  — величина, яка має зміст дифузійної довжини,  $n_0$  — концентрація електронів,  $\epsilon$  — діелектрична проникність плівки,  $\epsilon_0$  — електрична стала,  $d$  — товщина плівки.

На рис. 1 наведено експериментально одержані значення ЕРС (точки) та крива, розрахована за виразом (1) пари значень  $n_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  та  $L = 10^{-6} \text{ м}^3$ . Видно, що залежність експериментально одержаної величини ЕРС від товщини може бути описана виразом (1). Це свідчить на користь запропонованого механізму генерування ЕРС у плівках з полістиролу.

### Резюме

Проведено дослідження генерації ЕРС та струму в системі срібна фольга — полістирол — електроліт. Визначено вплив товщини плівки з полістиролу на величину ЕРС, встановлено, що генерація ЕРС супроводжується охолодженням шару електроліту, який прилягає до плівки.

## Література

1. Ламперт М., Марк П. *Інжекціонні токи в твердих телах.* — М., 1973. — 416 с.
2. Михо В.В., Колебошин В.Я. *О природе поляризаціонного состояния в окисных пленках алюминия и tantalа // Электрохимия.* — 1980. — Т.16. — В.12. — С.1276-1281.
3. Михо В.В., Колебошин В.Я. *Поляризационное состояние в окисных пленках алюминия и tantalа в атмосфере паров воды // Журнал физической химии.* — 1982. — Т.56. — В.2. — С.4472-4474.
4. Михо В.В., Колебошин В.Я., Семенюк Л.Н. *ЭДС, возникающая в окисных пленках алюминия в атмосфере паров воды // Фотозелектроника.* — 1996. — №6. — С.56-58.
5. Михо В.В., Колебошин В.Я., Семенюк Л.М. *Генерація ЕРС у плівках оксиду алюмінію // Укр. Фізич. Журнал.* — 1995. — Т.40. — 11. — 12. — С.1209-1211.

## МЕТОДОЛОГИЯ И ЭВОЛЮЦИЯ ПРИНЦИПА ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*Асланов С. К.*

Принцип относительности (*ПО*), введенный Галилеем [1,25] более 350 лет назад с помощью анализа мысленных опытов на движущемся и неподвижном корабле, принадлежит к основаниям не только классической механики, но и всей физической науки. В дальнейшем Ньютон [2,45] дал ему следующую формулировку:

“Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоятся ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения”.

Хотя привычная простота этого принципа может показаться очевидной, однако, чтобы полностью раскрыть его фундаментальное содержание, необходимо проследить за его эволюцией вместе с развитием самой физической науки, что прежде всего связано с изменением пространственно-временных представлений. Диалектика развития *ПО* заслуживает внимания главным образом с точки зрения выяснения универсальности его содержания.

Имея целью вскрыть сущность явлений, происходящих в материальном мире, всякое теоретическое моделирование производится с помощью так или иначе введенных гипотез, которые схематизируют реальную действительность и делают доступным ее количественное описание на языке математики. В основе пространственно-временных представлений классической механики Ньютона как одной из таких теоретических моделей лежит постулат о существовании инерциальных систем отсчета (*ИСО*), которые выделяются из всего возможного их множества по физическому признаку — выполнению в них универсального закона инерции. Другая гипотеза — об абсолютном характере хода времени (независимо от движения наблюдателя) — базируется на признании дальнодействия, или мгновенного распространения материальных сигналов. По отношению к таким системам отсчета (*СО*) трехмерное физическое пространство приобретает модельные свойства глобальной однородности и изотропности в механическом смысле, когда любые положения и направления движения в нем равноправны. Класс *ИСО*, находящихся в прямолинейном равномерном поступательном движении относительно друг друга, ставится в исключительное по-

ложение принципом относительности Галилея, который утверждает полную эквивалентность таких систем для описания механических явлений.

Наиболее глубокий подход к этому важнейшему принципу продемонстрировал, вероятно, А. Пуанкаре [3,95]:

“Движение всякой системы должно подчиняться одним и тем же законам независимо от того, относить ли его к неподвижным осям или подвижным, перемещающимся прямолинейно и равномерно. Это — принцип относительности движения, который внушается нам двумя обстоятельствами: во-первых, его подтверждает самый обыденный опыт, и, во-вторых, противоположное допущение совершенно противоречило бы нашему разуму”.

В связи с этим полная равноправность совокупности *ISO* означает, во-первых, что аналитическая формулировка всех законов механики должна быть инвариантной относительно выбора *CO*, и, во-вторых, что механические явления и процессы протекают одинаково по отношению к любой из них, т.е. для находящихся в них наблюдателей. Это есть, по существу, окончательная формулировка классического принципа Галилея.

Таким образом, *PO* включает в себя два аспекта. С одной стороны, для того, чтобы отражать объективную реальность происходящих явлений, математическая форма выражения их законов не должна зависеть от способа описания, который включает элемент субъективности наблюдателя, выбиравшего ту или иную *CO*. Это необходимое и само собой разумеющееся логическое требование, применимое к любой теории, содержится как раз в первой части обсуждаемой формулировки *PO*. Оно естественно накладывает известное ограничение на вид математической записи общих законов независимо от их специфики. Только в рамках таких законов, инвариантно сформулированных по отношению к выбору *ISO*, достигнутая с их помощью научная истиница может считаться объективной и свидетельствовать об адекватном отражении реальности механической моделью Ньютона. Значит, обсуждаемый аспект *PO* имеет отношение не столько к самому предмету физики, сколько к теории познания.

Диалектический материализм исходит из важнейшего принципа о единстве диалектики, логики и теории познания, выражающего единство законов бытия и мышления. Основой же познания и критерием истины теория познания считает практику: все наши знания есть отражение объективного мира, его связей и закономерностей. Следовательно, *PO* в первой своей части, универсальной по общему смыслу и математически выражющейся инвариантностью законов механики, составляет гносеологический базис всей классической физики как конкретной модели реального мира и, значит, принадлежит к философско-методологическим основам этой науки. Причем, указанный важнейший базис механики построен исключительно для *ISO*, по отношению к которым и сформулированы законы Ньютона. Как только основное уравнение динамики построено, главная теоретико-познавательная проблема оказывается решенной, и далее теоретическое знание добывается в качестве простого следствия этого уравнения.

С другой стороны, поскольку класс *ISO* выделяется по универсальному физическому признаку — закону инерции, постольку единообразие аналитической формы законов внутри этого класса сразу же находит свое непосредственное выражение в их физическом содержании. Другими словами, сами механические явления происходят одинаково во всех *ISO*. Однаковые по отно-

шению к *ИСО* свойства однородности и изотропности пространства выражаются одинаковым представлением свойств движения. Следовательно, во второй части *ПО* предстает уже как физический принцип, основанный на многочисленных экспериментах.

При переходе к специальной теории относительности (*СТО*) как более высокому уровню моделирования, на место абстрактного постулата об абсолютном времени, т.е. признании дальнодействия, ставится основанный на данных опыта постулат о постоянстве величины скорости света в вакууме (независимо от движения его источника). Теперь, наряду с вещественными телами, в рассмотрение включено электромагнитное поле, близкодействием которого объясняется предельный характер конечной величины скорости передачи в нем материальных сигналов. В результате время утрачивает свое универсальное свойство, приобретая собственное значение в каждой *СО*. Вместе с пространством оно образует единый четырехмерный континуум в виде физического поля. Однако, по-прежнему сохраняется постулат о существовании *ИСО*, а значит, остается в силе предопределенность глобальной однородности и изотропности пространственно-временного комплекса, но теперь уже как в механическом, так и в физическом смысле. Поэтому в понятие *ИСО* вместе с законом инерции войдет закон постоянства скорости распространения свободной электромагнитной волны, так что область применения классического *ПО* расширяется, дополнительно включая в себя электродинамические явления. Это означает, во-первых, что аналитическая формулировка всех законов для взаимодействия тел и полей должна быть инвариантной относительно выбора *ИСО*, и, во-вторых, что все физические явления и процессы протекают одинаково в любой из них.

Постулат о существовании *ИСО*, обязательно присутствующий в двух рассмотренных модельных представлениях о материальном мире, непосредственно связан с самостоятельностью закона инерции как физического признака выделения этого класса *СО* в привилегированное положение. Именно последнее является причиной появления конкретно-физического аспекта *ПО*, наряду с универсально-методологическим. За всем этим стоит абстрактная предопределенность глобальной физической однородности и изотропности пространства и времени вне всякой зависимости от материальных взаимодействий. Однако, с общефилософских позиций пространство и время, будучи лишь формами существования материи, должны быть неразрывно связаны со своим содержанием.

Указанный недостаток преодолен на следующем уровне моделирования — в общей теории относительности (*OTO*), где, наряду с электромагнитным полем существенно учитывается поле тяготения. Принципиальное отличие этой теоретической модели от двух предыдущих состоит как раз в том, что свойства пространства-времени уже не задаются наперед своей глобальной однородностью и изотропностью, а определяются для каждого конкретного физического случая по-своему в зависимости от материальных обстоятельств. Математическая структура четырехмерного пространственно-временного комплекса *СТО* расширяется в *OTO* на базе римановой (неевклидовой) геометрии с неопределенными метрическими коэффициентами, изменяющимися от точки к точке (от события к событию). Такая геометрическая свобода свойств пространства придает ему искривленный характер и естественным образом снимает постулат о существовании глобальных *ИСО*, обязательное применение которых заслоя-

ло раньше физическую сущность пространства и времени. Закон инерции перестает играть роль самостоятельного принципа, необходимого (в механике Ньютона и СТО) для выделения привилегированного класса *СО*. Его место занимает принцип эквивалентности Эйнштейна, который вблизи каждой точки риманова пространства, т.е. для отдельно взятого события, позволяет имитировать поле тяготения полем ускорения соответствующей *СО*: тем самым в *ОТО* утверждается локальная иерархичность сил инерции и тяготения как массовых сил одной и той же природы.

Поскольку теперь класс *ИСО* теряет свою исключительность в описании физических явлений, равноправие приобретают все системы координат. Поэтому *ПО* утрачивает свой конкретно-физический аспект, утверждающий одинаковый характер происходящих явлений. Произвольные системы, не имеющие физически выделенного глобального характера, не являются физически эквивалентными: объективная реальность одного и того же явления получает различное представление по отношению к разным *СО*.

С другой стороны, объективность теоретического отражения действительного мира требует независимости аналитического выражения законов природы от какого-либо выбора координатных систем наблюдателя. Таким образом, принцип относительности окончательно расширяет в *ОТО* область своего действия в виде универсального требования, чтобы аналитическая формулировка всех физических законов для взаимодействий тел и полей (включая гравитационные) была инвариантной по отношению к произвольному выбору *СО*. Последнее целиком относится к философски-методологическим основаниям моделирования, принятого *ОТО*. В этой общей формулировке *ПО* сохранит свое значение и для последующих теоретических моделей реального физического мира, которые придут на смену *ОТО*.

### Резюме

В работе выполнен диалектический анализ принципа относительности как методологического основания физической науки. Сущность проблемы раскрывается в неразрывной связи с развитием фундаментальных понятий о пространстве и времени. Эволюция теоретико-познавательного и конкретно-физического содержания принципа относительности последовательно прослеживается от классической механики Ньютона до общей теории относительности.

### Литература

1. Галилей Г. *Рассуждения о двух новых учениях в механике* (Избранные мес-та). — Л., 1931. — 64 с.
2. Ньютон И. *Математические начала натуральной философии* // пер. с лат. акад. Крылова А. Н.: “Изв. Николаевской морск. акад.”, вып. 4, Петроград, 1915. — 100 с.
3. Планк А. *О науке*. — М., 1990. — 735 с.

# О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ КОРОБЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ

Мигдальский В. И., Рейт В. В.

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния коробчатой оболочки, состоящей из двух полубесконечных пластин, ослабленной трещиной (Рис. 1).

Следует отметить, что хотя коробчатые конструкции широко применяются в строительстве и машиностроении, относительно мало конкретных задач до

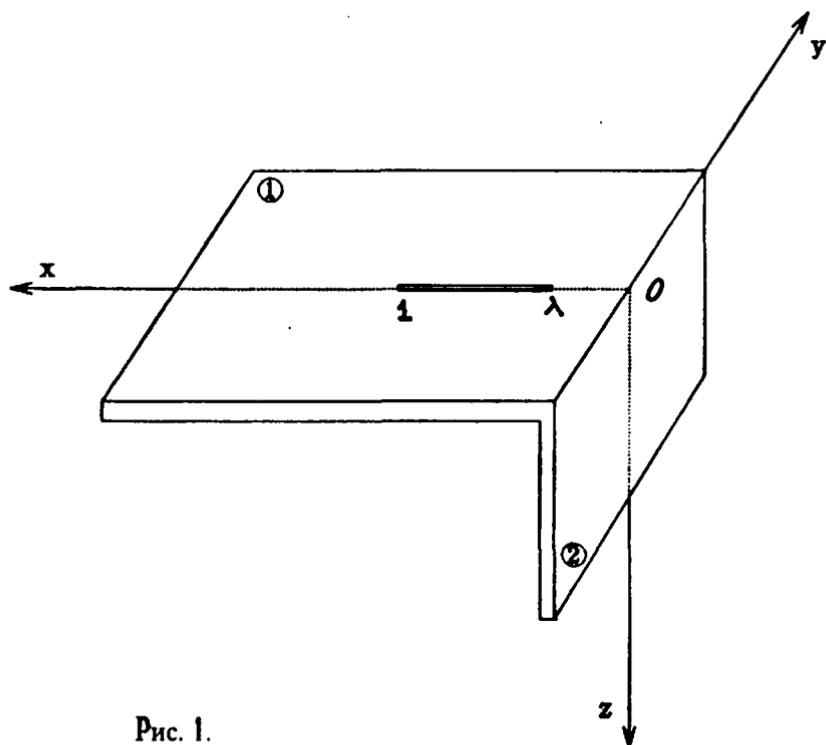


Рис. 1.

настоящего времени исследовано в литературе. Из известных результатов отметим работы В.И.Моссаковского и его учеников, предложивших и разработавших для расчета коробчатых оболочек метод однородных решений. В частности, решена задача о складчатой оболочке [5, 52], приведены результаты сравнения решения задач стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля с приближенной теорией В.З.Власова [4, 33], метод однородных решений [3, 26] был применен к задачам с динамическим загружением. Частные случаи расчета коробчатых оболочек, ослабленных трещинами, описаны также в других работах [6, 328; 8, 291].

Новый подход к расчету коробчатых оболочек, основанный на сведении задачи к совместному плоско-изгибному напряженному состоянию фиктивной пластиинки, в которой роль дефекта выполняет ребро оболочки, был предложен Г. Я. Поповым и В. В. Рейтом [6, 328]. В настоящей работе исследуется поведение коэффициентов интенсивности напряжений вблизи концов трещины с учетом именно этого подхода.

Рассмотрим коробчатую оболочку, образованную двумя полубесконечными пластиинами, состыкованными под прямым углом. Пластины имеют трещины  $h_1$  и  $h_2$  и модули Юнга  $E_1$  и  $E_2$ . В одной из пластиин имеется трещина конечной длины  $1 - \lambda$  ( $\lambda > 0$ ), перпендикулярная ребру и отстоящая от него на величину  $\lambda$ . К берегам трещин приложена разрывающая нагрузка.

Математически такая задача в случае нагрузки, симметричной относительно трещины, сводится к отысканию решения системы уравнений плоской теории упругости.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} &= 0, \\ \Delta(\sigma_x + \sigma_y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющих условиямстыковки

$$\langle V \rangle = 0, \langle h\tau \rangle = 0, \sigma_x^1 = \sigma_x^2 = 0, x = 0, -\infty < y < \infty \quad (2)$$

условиям на трещине

$$\sigma_y = f(x), \tau = 0, y = 0, \lambda < x < 1 \quad (3)$$

и условиям симметрии задачи

$$V = 0, \tau = 0, y = 0, x \in (0, \lambda) \cup (1, \infty). \quad (4)$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют величинам на горизонтальной и вертикальной пластиинках:  $U, V$  — соответственно перемещения точек пластиин вдоль оси  $X$  и  $Y$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — нормальные и касательные напряжения.

Следуя идее работы [6, 328],

$$\begin{aligned} \langle h\tau \rangle &= h_2 \tau|_{x=0} - h_1 \tau|_{x=1}; \\ \langle V \rangle &= V|_{x=0} - V|_{x=1}; \\ (U^{(1)}, V^{(1)}, \sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}; h_1, E_1) &= (U, V, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; h, E)|_{x>0}; \\ (U^{(2)}, V^{(2)}, \sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(2)}, \tau_{xy}^{(2)}; h_2, E_2) &= (U, V, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; h, E)|_{x<0}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$V(x, y)|_{y=0} = \chi(x), \quad \chi(x) = 0, \quad x \in (\lambda, l). \quad (5)$$

Используя обобщенный метод интегральных преобразований

$$\begin{aligned} [\sigma_{xa}, \sigma_{ya}, U_a] &= \int_0^x [\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), U(x, y)] \cos \alpha y dy \\ [V_a, \tau_a] &= \int_0^x [V(x, y), \tau_y(x, y)] \sin \alpha y dy, \end{aligned} \quad (6)$$

задача (1.1) — (1.4) с учетом (5) сводится к одномерной разрывной краевой задаче в трансформантах

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right)^2 \sigma_{xa} &= \alpha^2 E_1 \cdot \chi''(x), \quad \lambda < x < l, \\ \sigma_{xa}|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Введя в рассмотрение скачки производных трансформанты

$$\eta_k = \frac{d^k \sigma_{xa}}{dx^k}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (8)$$

из (2) и соотношений между перемещениями и напряжениями:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = E^{-1}(\sigma_y - v \sigma_x); \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = G^{-1} \frac{\partial \tau_y}{\partial y},$$

(где  $G$  — модуль сдвига,  $v$  — коэффициент Пуассона),

$$\eta_0 = 0;$$

$$\eta_1 = L \sigma_{xa}(-0); \quad \eta_2 = k \sigma_{xa}''(+0). \quad (9)$$

В этом случае разрывная краевая задача (7) — (9) [7] имеет решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{xa}(x) &= \alpha^2 E_1 \int_{-\lambda}^x [G^{0,2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \eta_3 G(x, 0) + \eta_2 G^{0,1}(x, 0) - \\ &- \eta_1 [G^{0,2}(x, 0) - 2\alpha^2 G(x, 0)]], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$G(x, \xi) = (4\alpha^3)^{-1} (1 + \alpha |x - \xi|) \exp(-\alpha |x - \xi|)$$

— фундаментальная функция уравнения (7).

Подставляя выражение (10) в (9) и решая полученную систему относительно  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta_3$ , имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xa}(x) &= \alpha^2 E_1 \int_{-\lambda}^x [G^{0,2}(x, \xi) - \alpha^2 G(x, 0) W_3(\alpha, \xi) + k G^{0,1}(x, 0) W_2(\alpha, \xi) - \\ &- (L M) [G^{0,2}(x, 0) - 2\alpha^2 G(x, 0)] W_1(\alpha, \xi)] \chi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} W_1(\alpha, \zeta) &= G^{1,2}(0, \zeta) + K(4\alpha)^{-1} \left( G^{2,2}(0, \zeta) + \alpha^2 G^{0,2}(0, \zeta) \right); \\ W_2(\alpha, \zeta) &= \alpha(L/M) G^{1,2}(0, \zeta) + (1 + LK/M) \left( G^{2,2}(0, \zeta) + \alpha^2 G^{0,2}(0, \zeta) \right); \\ W_3(\alpha, \zeta) &= 3KL(4\alpha M)^{-1} G^{2,2}(0, \zeta) + (3L/M) G^{1,2}(0, \zeta) + \alpha G^{0,2}(0, \zeta) (4 + 3LK/4M). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $M = 1 - LK$ .

Тогда получаем

$$\sigma_{xa}(x) = \frac{\alpha^2 E_1}{4} \int_{\lambda}^1 K_a(x, \zeta) \chi(\zeta) d\zeta, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} K_a(x, \zeta) &= |x - \zeta| e^{-\alpha|x-\zeta|} + \alpha^{-1} \left( e^{-\alpha(x+\zeta)} - e^{-\alpha(x-\zeta)} \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^2 \alpha^i d_i(x, \zeta) e^{-\alpha(x+\zeta)}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом

$$\begin{aligned} d_0(x, \zeta) &= x(1 - K - LK^2 - LK/2) - \zeta; \\ d_1(x, \zeta) &= x(K + 2)(2L/M) + x\zeta(K/2 - 1 + (K + 1)LK/(4M)); \\ d_2(x, \zeta) &= -x\zeta \frac{2L}{M} (K/4 + 1). \end{aligned}$$

Из уравнения (1) следует связь трансформант  $\sigma_{xa}$  и  $\sigma_{ya}$

$$\sigma_{ya}(x) = -\alpha^{-2} \sigma_{xa}''(x)$$

и, с учетом представления (13), получаем

$$\sigma_{ya}(x) = -\frac{E_1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \int_{\lambda}^1 K_a(x, \zeta) \chi(\zeta) d\zeta. \quad (15)$$

Применяя к (15) обратное преобразование Фурье, получим

$$\sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sigma_{ya}(x) \cos ay da \quad (16)$$

и приходим к сингулярному интегральному уравнению на конечном промежутке относительно функции  $\chi(\zeta)$  — раскрытия трещины

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{\lambda}^1 W(x, \zeta) \chi(\zeta) d\zeta = -\frac{2\pi}{E_1} f(x), \quad \lambda < x < 1, \quad (17)$$

причем

$$W(x, \zeta) = \ln \frac{|x - \zeta|}{|x + \zeta|} + \sum_{i=0}^2 a_i \frac{d_i(x, \zeta)}{(x + \zeta)^{i+1}} \quad (18)$$

$$a_0 = a_1 = 1; \quad a_2 = 2.$$

Дальнейшее решение этого интегрального уравнения будет строиться методом ортогональных многочленов [7, 155]. Осуществляем замену переменных, позволяющую свести интервал  $(\lambda, 1)$  к  $(-1, 1)$

$$\chi = \Psi(z) = \frac{1-\lambda}{2}z + \frac{1+\lambda}{2}, \quad x \in (\lambda, 1), \quad z \in (-1, 1). \quad (19)$$

Переобозначив

$$\hat{\chi}(t) := \chi(\psi(t)), \quad t \in (-1, 1)$$

и представив  $W$  в виде

$$W(\psi(z), \psi(t)) = -\ln \frac{1}{|z-t|} - C(z, t),$$

$$C(z, t) = \ln \left| z + t + 2 \frac{\lambda+1}{1-\lambda} - \sum_{i=0}^2 a_i \frac{d_i(\psi(z), \psi(t))}{(\psi(z) + \psi(t))^{i+1}} \right|, \quad (20)$$

мы можем (17) переписать в виде

$$\frac{d^2}{dz^2} \int_1^1 \left[ \ln \frac{1}{|z-t|} + C(z, t) \right] \hat{\chi}(t) dt = \frac{(1-\lambda)}{E_1} \pi f(\psi(z)), \quad z \in (-1, 1). \quad (21)$$

Следуя общей схеме метода ортогональных многочленов [7, 155], решение (21) будем искать в виде:

$$\hat{\chi}(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j U_j(t). \quad (22)$$

Здесь

$$U_j(t) = \sin((j+1) \arccos t) / \sin(\arccos t)$$

— многочлены Чебышева второго рода.

Подставляя (22) в (21), затем умножив обе части уравнения на  $\sqrt{1-z^2} U_n(z)$ , проинтегрировав по  $z$  на интервале  $(-1, 1)$  и учитывая спектральное соотношение [7, 155]

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_1^1 \left[ \ln \frac{1}{|x-y|} - 1 - y^2 U_n(y) \right] dy = -\pi(n+1) U_n(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (23)$$

мы приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения  $\chi_j$ ,

$$-\frac{\pi^2}{2} (n+1) \chi_n + \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j C_{jn} = f_n, \quad (24)$$

где

$$f_n = \frac{(1-\lambda)\pi}{E_1} \int_1^1 f(\psi(z)) \sqrt{1-z^2} U_n(z) dz;$$

$$C_{jn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C^{2,0}(z, t) \sqrt{1-z^2} \sqrt{1-t^2} U_n(z) U_j(t) dt dz. \quad (25)$$

В силу экспоненциального убывания коэффициентов (25) решение системы (24) может быть получено методом редукции.

Учитывая (10), из представления (16) можно записать

$$\sigma_r(\psi(z), 0) = \frac{E_1}{(1-\lambda)\pi} \frac{d^2}{dz^2} \int_1^1 \left[ \ln \frac{1}{|z-t|} + C(z, t) \right] \hat{\chi}(t) dt. \quad (26)$$

Пользуясь спектральным соотношением [7, 155].

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-\zeta|} U_n(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta = \frac{|x| U_n(x)}{\sqrt{x^2-1}} + \\ + \sqrt{1-x^2} U'_n(x) \operatorname{sgn} x - \frac{n+1}{2} U_n(x), |x| > 1$$

при  $|z| > 1$

$$\sigma_z(\psi(z), 0) = \frac{E_1}{1-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j \left[ \frac{|z| U_j(z)}{\sqrt{z^2-1}} + \sqrt{1-z^2} U'_j(z) \operatorname{sgn} z - (j+1) U_j(z)/2 \right]. \quad (27)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений у обеих вершин трещины определяются следующим образом:

$$K_{I(x \rightarrow 1+0)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi(x-1)} \sigma_z(x, 0) \\ K_{I(x \rightarrow \lambda-0)} = \lim_{x \rightarrow \lambda-0} \sqrt{2\pi(\lambda-x)} \sigma_z(x, 0). \quad (28)$$

Тогда, с учетом (27) и (28),

$$K_{I(x \rightarrow 1+0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2(1-\lambda)}} E_1 \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j U_j(1) \\ K_{I(x \rightarrow \lambda-0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2(1-\lambda)}} E_1 \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j U_j(-1). \quad (29)$$

По этим формулам были проведены вычисления коэффициентов интенсивности напряжений при различных соединениях материалов и стремлении параметра  $\lambda$  к 0.

На основании этих вычислений построены графики зависимости коэффициента интенсивности напряжений у обеих вершин трещины от расстояния до ребра (Рис. 2) для случая постоянной нагрузки. Значения при  $\lambda \gg 0$  совпадают с результатами [1, 74] задачи о бесконечной пластинке, ослабленной трещиной. Для  $\lambda = 0,01$  значения коэффициента интенсивности при  $x \rightarrow 1$  совпадают с результатами, полученными авторами ранее к задаче о трещине, выходящей на ребро коробчатой оболочки.

### Резюме

После применения обобщенного метода интегральных преобразований, задача о напряженном состоянии коробчатой оболочки, ослабленной трещиной, сводится к сингулярному интегральному уравнению на конечном промежутке относительно раскрытия трещины. Решение уравнения строится методом ортогональных многочленов в виде ряда по многочленам Чебышева 1-го рода, коэффициенты разложения которого, — есть решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Построены графики зависимости коэффициента интенсивности напряжений в вершинах трещины в зависимости от ее размеров и расстояния до ребра оболочки.

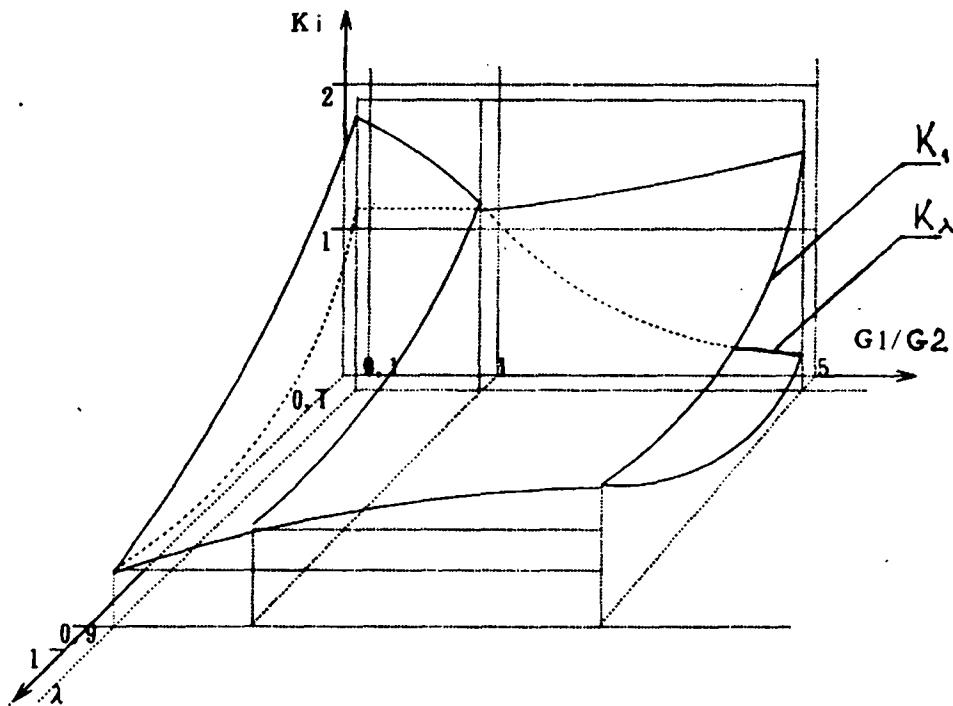


Рис. 2.

### Литература

1. Броек Д. Основы механики разрушения // М., 1980. — 368с.
2. Гришин В. А., Попов Г. Я., Рейт В. В. Расчет коробчатых оболочек прямоугольного профиля // 1980. ПММ, Т. 54, № 8. — С. 605-612.
3. Моссаковский В. И., Куликов Д. В. Метод однородных решений для коробчатых оболочек при динамическом нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А — 1987. — № 1 — С. 24-27.
4. Моссаковский В. И., Пошивалова Е. В. Уточненный метод расчета тонкостенных стержней открытого профиля, находящихся в условиях стесненного кручения // XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек — Таллинн, 1983. — С. 31-35.
5. Мусияка В. Г., Пошивалова Е. В. Применение однородных решений к исследованию напряженного состояния пластинчатых конструкций // Докл. АН УССР. Сер. А — 1980. — № 8. — С. 50-53.
6. Попов Г. Я., Рейт В. В. Расчет коробчатых оболочек // Труды XIV Вс. конф. по теории пластин и оболочек. — Кутаиси. — 1987. — Т. 2. — С. 327-333.
7. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений // М., 1982. — 344 с.
8. Попов Г. Я., Рейт В. В. Асимптотический подход к задачам о напряженном состоянии коробчатых упругих тел // Аннот. докл. VII Вс. съезда по теор. и прикл. механике. — М., 1981. — С. 291-292.

# ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГАЛИНА

*Керекеша П. В.*

## Введение

Впервые задача о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость с участками трения и сцепления под действием центрально приложенной силы была рассмотрена в 1945 г Л.А.Галиным [2,1]. В своей работе он предполагал, что нормальное напряжение под штампом должно быть положительным.

Не рассматривая вопрос существования решения, Л.А.Галин приближенно решил поставленную задачу посредством комбинированного метода задачи Гильберта и конформного отображения.

В работе Д.А.Спенса [9,258] изучался вопрос о существовании решения задачи Галина (далее ЗГ) путем сведения ЗГ к уравнению Фредгольма для функции  $r(x) = \sigma_y(x, 0) - \rho t_{yy}(x, 0)$ , где  $\sigma_y(x, 0)$  — нормальное напряжение,  $t_{yy}(x, 0)$  — касательное напряжение, а  $\rho$  — коэффициент трения. При этом он предполагал, что  $0 < r(x) < \infty$ . Но это не исключает, например, того, что напряжения  $\sigma_y(x, 0)$  и  $t_{yy}(x, 0)$  в окрестности точки  $x = a$  могут иметь осциллирующие сингулярные особенности одного и того же характера.

Следует отметить работу [6,2], в которой ЗГ приближенно решена путем сведения ее к дифференциальному уравнению типа Фукса [4,225]. Приближенное решение ЗГ строится так же в работе [1,1008].

В связи с вышеприведенным вопрос о разрешимости ЗГ остается открытым. Цель настоящей заметки — установление условий разрешимости ЗГ.

## 1. Постановка ЗГ

Рассмотрим штамп с прямолинейным горизонтальным основанием, параллельным оси  $Ox$ , который может перемещаться лишь вертикально. Штамп прижимается к упругой полуплоскости силой  $P$ . Согласно Галину, будем предполагать, что площадка контакта разбивается на три участка, на одном из которых имеет место сцепление, а на других — трение. На свободной поверхности касательные и нормальные напряжения отсутствуют. Через  $l$  обозначим полу值得一ную штампа, а через  $a$  обозначим полудлину участка сцепления. Константа  $a$  заранее неизвестна. Она подлежит определению.

Благодаря симметрии граничные условия ЗГ таковы:

$$\sigma(x,0) = \tau(x,0) = 0, \quad |x| > l \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x,0) + \rho \operatorname{sgn} x \sigma_y(x,0) = 0, \quad v(x,0) = c, \quad a < |x| < l \quad (2)$$

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = c, \quad |x| < a. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_y(x,0)$  и  $\tau_{xy}(x,0)$  — искомые нормальные и касательные напряжения в зоне контакта,  $u(x,0)$  и  $v(x,0)$  — касательные и нормальные перемещения под штампом,  $\rho$  — коэффициент трения,  $c$  — неизвестная заранее постоянная. Разные знаки перед  $\rho \sigma(x,0)$  указывают, что проскальзывание происходит в разных направлениях.

Для однозначной разрешимости ЗГ к граничным условиям (1)-(3) присовокупим условие равновесия штампа

$$\int_{-l}^l \sigma(x,0) dx = p. \quad (4)$$

## 2. Сведение задачи Галина к обобщенному функциональному уравнению Винера-Хопфа и равносильному ему сингуляриому

Задачу (1)-(4) будем решать при помощи гармонических функций Папковича-Нейбера, посредством которых определяются компоненты тензора напряжений и вектора перемещений [8,69]. Переходя от декартовых координат к биполярным:

$x = h \sinh \alpha$ ,  $y = h \sin \beta$ ,  $h = a(\cosh \alpha + \cos \beta)^{-1}$ , краевая задача (1)-(4) сводится к следующей:

$$h^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1-\nu)\psi_2 - \psi_3] = h^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta} [(1-2\nu)\psi_2 - \psi_3] = 0, \quad \beta = \pi, \quad |\alpha| < \alpha_0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [2(1-\nu)\psi_2 - \psi_3] = \phi(\alpha), \quad \beta = \pi, \quad \alpha > |\alpha_0| \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [(1-2\nu)\psi_2 - \psi_3] = -\operatorname{sgn} \alpha \phi(\alpha), \quad \beta = \pi, \quad \alpha > |\alpha_0| \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} = 0, \quad \chi \psi_2 - \psi_3 = c, \quad \beta = 0, \quad -\infty < \alpha < \infty. \quad (8)$$

Здесь  $\psi_{2,3}$  — гармонические в полосе  $-\infty < \alpha < \infty$ ,  $0 < \beta < \pi$  функции,

$\alpha_0 = 2 \operatorname{arctanh} \frac{l}{a}$ , а  $\phi(\alpha)$  — неизвестная функция, определяемая равенством:

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} -\sigma_y \left( \operatorname{acth} \frac{\alpha}{2}, 0 \right) a(\cosh \alpha - 1)^{-1}, & |\alpha| > \alpha_0 \\ 0, & |\alpha| < \alpha_0. \end{cases}$$

При помощи интегрального преобразования Фурье с использованием результатов работы [5,5] краевая задача (5)-(8) сводится к обобщенному функциональному уравнению Винера-Хопфа [7,49]:

$$A(\alpha) \exp(i\alpha \alpha_0) \Phi^+(\alpha) + A(\alpha) \exp(-i\alpha \alpha_0) \Phi^-(\alpha) = \alpha R(\alpha) - R_0(\alpha, C). \quad (9)$$

Тут

$$A(\alpha) = \frac{2(1-\nu) \operatorname{sh} 2\pi\alpha + 2i\rho(1-2\nu) \operatorname{sh}^2 \pi\alpha}{\operatorname{ch} 2\pi\alpha + \operatorname{ch} 2\pi\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcth} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

$$R_0(\alpha, C) = \frac{2(1-2\nu)C \sqrt{2\pi} \operatorname{sh}^3 \pi\alpha}{\operatorname{ch} \pi\alpha (\operatorname{ch} 2\pi\alpha + \operatorname{ch} 2\pi\gamma)} - \frac{2C \sqrt{2\pi} \operatorname{sh} 2\pi\alpha}{\operatorname{ch} 2\pi\alpha + \operatorname{ch} 2\pi\lambda} + C \sqrt{2\pi} \operatorname{th} \pi\alpha,$$

$C$  — искомая постоянная,

$\Phi^+(\alpha)$  — функции аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях,

$R(\alpha)$  — неизвестная целая функция. При этом функции  $\Phi^+(\alpha)$  определяются через искомую функцию  $\phi(\alpha)$  посредством формул

$$\Phi^+(\alpha) = \frac{\exp(i\alpha\alpha_0)}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\infty} \phi(x) \exp(ix\alpha) dx,$$

$$\Phi^-(\alpha) = \frac{\exp(i\alpha\alpha_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\alpha} \phi(x) \exp(ix\alpha) dx.$$

К уравнению (9) применим обратный оператор Фурье

$$V^{-1} : (V^{-1}\Phi)(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \exp(ix\alpha) dx.$$

В результате относительно функции

$$\phi(\alpha) = (V^{-1}\Phi)(\alpha) \quad (\Phi(\alpha) = \exp(i\alpha\alpha_0)\Phi^+(\alpha) + \exp(-i\alpha\alpha_0)\Phi^-(\alpha))$$

получим сингулярное интегральное уравнение (далее СИУ)

$$\begin{aligned} \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu} \operatorname{sgn} \alpha \phi(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma(\alpha-\beta) \phi(\beta) d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\alpha-\beta}{2}} + \\ &+ \frac{\rho}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sin \gamma(\alpha-\beta) \operatorname{sgn} \beta \phi(\beta) d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\alpha-\beta}{2}} + \frac{2C}{1-2\nu} \frac{1-\cos \gamma \alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$(\Gamma = (-\infty; \alpha_0) \cup (\alpha_0; \infty))$$

В свою очередь, уравнение (10) путем замены переменных  $x = \operatorname{acth} \frac{\alpha}{2}$

$y = \operatorname{acth} \frac{\beta}{2}$  сводится к СИУ вида

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(u,i)}(x, 0) \frac{\rho(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{x^2 - a^2} &= -\frac{2C}{1-2\nu} - \frac{C(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^{\gamma} + \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^{-\gamma} + \\ &+ \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^{\gamma} [(\rho-i)J(x, \gamma) + (\rho+i)I(x, \gamma)] + \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^{-\gamma} [(-\rho-i)J(x, -\gamma) + (-\rho+i)I(x, -\gamma)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут  $\sigma_y^{(a,l)}(x,0)$  — искомое нормальное напряжение на участке  $a < |x| < l$ ,

$$J(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^a \frac{\left(\frac{t+a}{t-a}\right)^{-y} \cdot \sqrt{t^2 - a^2} \sigma_y^{(a,l)}(t,0) dt}{t-x},$$

$$I(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^l \frac{\left(\frac{t+a}{t-a}\right)^{-y} \cdot \sqrt{t^2 - a^2} \sigma_y^{(a,l)}(t,0) dt}{t-x}.$$

### 3. Необходимые условия ограниченного неосцилирующего решения уравнения (11)

Несложный анализ структуры уравнения (11) позволяет утверждать, что решение  $\sigma_y^{(a,l)}(x,0)$  будет ограниченным неосцилирующим, если в уравнении произвольную постоянную  $C$  положить равной нулю, а само решение удовлетворить следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_a^l \sin\left(\gamma \ln \frac{t+a}{t-a} + \operatorname{arctg} \rho\right) \frac{\sigma_y^{(a,l)}(t,0) dt}{t^2 - a^2} &= 0, \\ \int_a^l \cos\left(\gamma \ln \frac{t+a}{t-a} + \operatorname{arctg} \rho\right) \frac{t \sigma_y^{(a,l)}(t,0) dt}{t^2 - a^2} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом условие равновесия (4) перейдет в следующее:

$$\int_a^l \sigma_y^{(a,l)}(t,0) dt = \frac{P}{4}. \quad (13)$$

### 4. Асимптотическое поведение решения однородного уравнения в точках раздела граничных условий

Для выяснения характера особенностей решения однородного уравнения (11) в точках  $x = \pm a$  и  $x = \pm l$  решение в указанных точках представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(a,l)}(x,0) &= \frac{\varphi_1(x)}{(l^2 - x^2)^{\omega_1}} \left( \lim_{|x| \rightarrow a} \varphi_1(x) = A \neq 0 \right), \\ \sigma_y^{(a,l)}(x,0) &= \frac{\varphi(x)}{(l^2 - x^2)^{\omega}} \left( \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = B \neq 0 \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда, используя асимптотическое поведение интегралов типа Коши вблизи особых точек [3,71], получим, что параметр  $\omega_1$  определяется по формуле

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\rho(1-2\nu)}{2(1-\nu)}.$$

Что же касается параметра  $\omega$ , то он должен удовлетворять следующее уравнение

$$2(1-\nu) \cos 2\pi\omega + c h 2\pi\gamma \cos 2\pi\omega + c s 2\pi\gamma$$

Одно решение ( $\omega = 0$ ) легко угадать. Действительно, при  $\omega = 0$  соотношение

$$(15) \text{ выполняется автоматически при любом значении } \gamma: \frac{\rho(1-2\nu)}{2(1-\nu)} = \rho \operatorname{th} \pi\gamma.$$

Другим решением уравнения (15) является такое:

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a}{1-a^2}, \quad a = -\frac{2(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}.$$

Оно, согласно (14), указывает на то, что, кроме ограниченного решения однородного уравнения (11), существует и неограниченное.

## • 5. Выводы

На краях штампа нормальное напряжение  $\sigma_y(x, 0)$  имеет интегрируемую особенность вида (14). В точках раздела граничных условий  $x = \pm a$  уравнение (11) допускает ограниченное решение, но при выполнении условий (12). При этом искомое решение  $\sigma_y^{(a,j)}(x, 0)$  фиксируется условием равновесия (13).

## Резюме

Установлены условия разрешимости задачи Галина. Кроме того, получены асимптотические поведения решения задачи Галина в точках раздела граничных условий.

## Литература

1. Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. — 1991. — 55, № 6, С. 1005-1017.
2. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. — 1945. — № 5, С. 413-424.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М., 1963. — 639 с.
4. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М., Л., 1956. — 436 с.
5. Керекеша П. В. К вопросу разрешимости задачи Галина — Одесса, 1983. — 21 с. Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.83, № 615 УК-Л83.
6. Моссаковский В. И., Бискуп Л. Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ДАН СССР, — 1972. — 206, № 5, — С. 1068-1070.
7. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. — М., 1962. — 279 с.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л., 1968. — 402 с.
9. Spence D. A. An Eigenvalue Problem For Elastic Contact with Finite Friction // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1973, 73, № 1. — P. 249-268.

# ПРО ПІДВИЩЕННЯ ПОРЯДКУ КОЛИВНИХ ДОДАНКІВ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ, ЯКІ МІСТЯТЬ ПОВІЛЬНО ЗМІННІ ПАРАМЕТРИ

Щоголєв С. А., Черната О. П.

Системи з повільно змінними коефіцієнтами вивчалися багатьма вченими [1, 397-404; 2, 81-90; 3, 187-190; 4, 31-59]. Наша робота присвячена питанню про підвищення порядків коливних доданків у лінійних системах, коефіцієнти яких мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами і частотою.

Означення. Позначимо через  $S_m$  клас функцій, таких, що:

- 1)  $f: G \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $G = \{t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}$ ,  $\mathbf{R}^+ = ]0, +\infty[$ ,
- 2)  $f \in C^m(\mathbf{R})$  по  $t$ ,
- 3)  $\frac{d^k f(t, \varepsilon)}{dt^k} = \varepsilon^k \cdot f_k^*(t, \varepsilon)$ ,  $\sup_G |f_k^*| < +\infty$  ( $0 \leq k \leq m$ ).

Позначимо через  $B_m$  клас функцій, які мають вигляд

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) e^{int\theta(t, \varepsilon)},$$

де

- 1)  $f_n \in S_m$ ,  $\frac{d^k f_n}{dt^k} = \varepsilon^k \cdot f_{nk}(t, \varepsilon)$
- 2)  $\|\theta\|_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G |f_{nk}(t, \varepsilon)| < +\infty$  ( $0 \leq k \leq m$ ),

$$2) \quad \theta(t, \varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau,$$

$$\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \in S_m, \quad \inf_G |\varphi| = \varphi_0 = \text{const} > 0,$$

$B_m$  перетворюється у повний нормований простір за допомогою норми

$$\|f\|_{B_m} = \sum_{k=0}^m \|f\|_k.$$

Має місце ланцюжок вкладень:  $B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_m$ .

Розглядається лінійна однорідна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = (\Lambda(t, \varepsilon) + \mu P(t, \varepsilon, \theta)) X \quad (1)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1(t, \varepsilon), \dots, \lambda_N(t, \varepsilon)), \quad P = (p_{jk}(t, \varepsilon, \theta)),$$

$$\lambda_j \in S_m, \quad p_{jk} \in B_m \quad (j, k = \overline{1, N}).$$

Постановка задачі. Досліджується питання про існування перетворення вигляду:

$$X = (E + \mu Q_1 + \mu^2 Q_2 + \dots + \mu^\alpha Q_\alpha) Y, \quad (2)$$

де:  $Q_j \in B_m \quad (j = \overline{1, \alpha})$ , яке зводить систему (1) до вигляду:

$$\frac{dY}{dt} = (\Lambda + \mu \Lambda_1 + \mu^2 \Lambda_2 + \dots + \mu^\alpha \Lambda_\alpha + \varepsilon \mu V_1 + \varepsilon \mu^2 V_2 + \dots + \varepsilon \mu^\alpha V_\alpha + \mu^{\alpha+1} W) Y, \quad (3)$$

де  $\Lambda_j \in S_m$ ;  $V_j, W \in B_{m-1}$   $(j = \overline{1, \alpha})$ .

Теорема. Нехай система (1) задовольняє наступній умові:

$$\inf |\lambda_j(t, \varepsilon) - \lambda_k(t, \varepsilon) - i n \varphi(t, \varepsilon)| \geq \gamma > 0, \quad \forall j \neq k, n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді для достатньо малих значень  $\mu$  існує перетворення вигляду (2), яке зводить систему (1) до вигляду (3), у якому

$$Q_j \in B_m, \quad \text{а} \quad V_j \in B_{m-1}, \quad (j = \overline{1, \alpha}).$$

Доведення. Підставимо вираз (2) у систему (1) і будемо вимагати, щоб отримана внаслідок цього система мала вигляд (3). Зрівнюючи коефіцієнти при одинакових степенях  $\mu$  у лівій і правій частинах, отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь відносно матриць  $Q_j$ ,  $(j = \overline{1, \alpha})$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1}{dt} = \Lambda Q_1 + P - Q_1 \Lambda - \Lambda_1 - \varepsilon V_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} = \Lambda Q_2 - Q_2 \Lambda + PQ_1 - Q_1 \Lambda - \Lambda_2 - \varepsilon Q_1 V_1 - \varepsilon V_2 \\ \dots \\ \frac{dQ_a}{dt} = \Lambda Q_a - Q_a \Lambda + PQ_{a-1} - \sum_{k=1}^{a-1} Q_k \Lambda_{a-k} - \varepsilon \sum_{k=1}^{a-1} Q_k V_{a-k} - \varepsilon V_a - \Lambda_a \end{array} \right. , \quad (4)$$

при цьому матриця  $W$  буде мати вигляд:

$$W = (E + \mu Q_1 + \mu^2 Q_2 + \dots + \mu^a Q_a)^{-1} (PQ_a - Q_a((\Lambda_1 + \varepsilon V_1) + \mu(\Lambda_2 + \varepsilon V_2) + \dots + \mu^{a-1}(\Lambda_a + \varepsilon V_a)) - Q_{a-1}((\Lambda_2 + \varepsilon V_2) + \mu(\Lambda_3 + \varepsilon V_3) + \dots + \mu^{a-2}(\Lambda_a + \varepsilon V_a)) + \dots + Q_1(\Lambda_a + \varepsilon V_a)).$$

У подальшому під символом  $(A)_{jk}$  розуміємо елемент  $a_{jk}$  матриці

$$A = (a_{jk}) \quad j, k = \overline{1, N}.$$

Під символом

$$(A)_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A(t, \varepsilon, \theta))_{jk} e^{-in\theta} d\theta.$$

Розглянемо перше рівняння системи (4). Покладемо у цьому рівнянні

$$(Q_1)_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(P)_{jn}}{in\varphi} \cdot e^{in\theta}$$

$$(Q_1)_{jk} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(P)_{jn}}{in\varphi - \lambda_j + \lambda_k} \cdot e^{in\theta}, \quad (j \neq k).$$

$$(\Lambda_1)_j = (P)_{jj}; \quad (\Lambda_1)_{jk} = 0, \quad (j \neq k).$$

$$(V_1)_j = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{(P)_{jn}}{in\varphi} \right) \cdot e^{in\theta}$$

$$(V_1)_{jk} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{(P)_{jn}}{in\varphi - \lambda_j + \lambda_k} \right) \cdot e^{in\theta}, \quad (j \neq k).$$

Далі, для будь-якого  $s = \overline{2, \alpha}$ , покладемо

$$(Q_s)_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\left( PQ_{s-1} - \sum_{v=1}^{s-1} Q_v \Lambda_{s-v} \right)_{jn}}{in\varphi} \right) \cdot e^{in\theta}$$

$$(Q_s)_{jk} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\left( PQ_{s-1} - \sum_{v=1}^{s-1} Q_v \Lambda_{s-v} \right)_{jk}}{in\varphi - \lambda_j + \lambda_k} \right) \cdot e^{in\theta}, \quad (j \neq k).$$

$$(\Lambda_s)_j = \left( PQ_{s-1} - \sum_{v=1}^{s-1} Q_v \Lambda_{s-v} \right)_{jj}; \quad (\Lambda_s)_{jk} = 0, \quad (j \neq k).$$

$$(V_s)_j = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{\left( PQ_{s-1} - \sum_{v=1}^{s-1} Q_v \Lambda_{s-v} \right)_{jn}}{in\varphi} \right) \cdot e^{in\theta} - \sum_{v=1}^{s-1} (Q_v V_{s-v})_j.$$

$$(V_s)_{jk} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{\left( PQ_{s-1} - \sum_{v=1}^{s-1} Q_v \Lambda_{s-v} \right)_{jk}}{in\varphi - \lambda_j + \lambda_k} \right) \cdot e^{in\theta} - \sum_{v=1}^{s-1} (Q_v V_{s-v})_{jk}, \quad (j \neq k); \quad j, k = \overline{1, N}.$$

При такому визначенні цих матриць легко побачити, що

$$Q_s \in \mathbf{B}_m, \text{ а } V_s \in \mathbf{B}_{m-1}.$$

Позначимо

$$R_a(t, \varepsilon, \theta, \mu) = Q_1 + \mu Q_2 + \dots + \mu^{a-1} Q_a.$$

Тоді очевидно, що для існування матриці  $W$  достатньо виконання нерівності:

$$\mu \|R_a\| < 1,$$

де під нормою  $\|A\|$  матриці  $A$  з елементами з  $\mathbf{B}_{m-1}$ , розуміється

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \|(A)_{jk}\|_{\mathbf{B}_{m-1}}^2}.$$

Теорему доведено.

Наслідок. Якщо  $\varepsilon \leq \mu$ , то система (1) за допомогою перетворення (2) зводиться до системи, яка має вигляд:

$$\frac{dY}{dt} = (\Lambda^*(t, \varepsilon, \mu) + \mu^{a+1} W(t, \varepsilon, \theta, \mu)) Y,$$

де  $\Lambda^*$  - діагональна матриця з елементами з  $\mathbf{S}_m$ , а елементи  $W$  з  $\mathbf{B}_{m-1}$ .

### Резюме

Розглядається питання про звідність лінійної системи з коливними коефіцієнтами до системи, коефіцієнти якої близькі до повільно змінних.

## Література

1. Бурд В.Ш. Резонансные почти периодические колебания в нелинейных двумерных системах с медленно меняющимися параметрами // Прикл. матем. и механ. — 1996. — 60, вып.3. — С.397-404.
2. Костин А. В. Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем. — Одесса, 1984. — 95 с.
3. Самойленко А.М. Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — К., 1977. — С.181-191.
4. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — К., 1966. — 251 с.

# HARMONIC ANALYSIS AND LOCALIZATION TECHNIQUE

Kisil V. V.

## 1. Introduction

This paper is devoted to the *local principle*, which is a canonical method for the study of operator algebras. Theorem 2.5 establish the coincidence of the easy to use local principle based on the existence of a central commutative subalgebra [1] and the general local principle constructed on a set of ideals [2].

The second question of this paper is the correspondence between the local principle and the non-commutative Fourier transform. If we have a group  $G$  with the group operation  $*$  and the Haar (=invariant) measure  $dg$ , it seems quite natural to introduce a group algebra  $(\mathfrak{G})$  associated with the group  $G$ . Now the *noncommutative Fourier transformations* established a direct connection between representation of the group algebra  $(\mathfrak{G})$  and representations of the group  $G$  itself (see [3,7]).

On the other hand, the convolution algebra  $(\mathfrak{G})$  has a regular representation in the space of bounded operators  $B(L_2(G))$ . This representation is introduced as the integral of the shift operator  $\pi_r(g)$

$$[\pi_r(g)f](h) = f(h * g)$$

giving rise to the regular representation of the group  $G$  on the space  $L_2(G)$

$$\pi_r : (\mathfrak{G} \rightarrow B(L_2(G))) : k(g) \mapsto K = \int_G k(g) \pi_r(g) dg, \quad (1.1)$$

Therefore the *local principle* from the operator theory can be applied to the operator algebra  $(\mathfrak{G})$ . The two ways lead to the same answer, so a relation between the noncommutative Fourier transformation and the local principle should exist. Note, that harmonic analysis is described in terms of the Plancherel *measure* and sectional representations are constructed in field  $*\text{-topology}$ . The correspondence between these two different mathematical objects is clarified in Theorem 3.2. An application of the

---

Keywords and phrases. Sectional Representations, Local Principle, Fourier Transform, Convolution Algebras.

1991 Mathematical Subject Classification. Primary: 46L45, 22E25; Secondary: 47C15, 47D50.

achieved result to the support of the Plancherel measure is given in Corollary 3.3. All proofs are easy and they are skipped.

## 2. A system of ideals and the algebra center

To apply the local principle from [2] one need to find an appropriate system of ideals. If the algebra under consideration has a non-trivial abelian subalgebra then the answer is given by the following

**Theorem 2.1.** [1, Proposition 4.5.] *If  $\mathfrak{R}$  is a  $C^*$ -algebra,  $Z$  is an abelian  $C^*$ -subalgebra contained in  $\mathfrak{R}$  having maximal ideal space  $M_Z$  and for  $x$  in  $M_Z$ ,  $I_x$  is a closed ideal in  $\mathfrak{R}$  generated by the maximal ideal  $\{Z \in Z : \hat{Z}(m) = 0\}$ , then  $\bigcap_{x \in M_Z} I_x = \{0\}$ .*

In particular, if  $\Phi_x$  is \*-homomorphism from  $\mathfrak{R}$  to  $\mathfrak{R}/I_x$  then  $\sum_{x \in M_Z} \Phi_x$  is \*-isomorphism of  $\mathfrak{R}$  into  $\sum_{x \in M_Z} \Phi_x(\mathfrak{R})$ . Moreover,  $T$  is invertible in  $\mathfrak{R}$  if and only if  $\Phi_x(T)$  is invertible in  $\mathfrak{R}/I_x$  for  $x$  in  $M_Z$ .

In the case of a trivial (or unsuitable) center of the algebra  $\mathfrak{R}$  the following trick is commonly used: one can introduce a larger algebra  $\tilde{\mathfrak{R}} \supset \mathfrak{R}$  with appropriate center  $\tilde{Z}$  and use Theorem 2.1 for the algebra  $\tilde{\mathfrak{R}}$ . Then the description of the algebra  $\mathfrak{R}$  can be obtained as a subalgebra of the algebra  $\sum_{x \in M_Z} \Phi_x(\tilde{\mathfrak{R}})$ .

**Example 2.2.** The algebra  $\mathfrak{L}$  of bisingular operators [6] has only operators of multiplication by a constant in its center. Nevertheless, one can introduce the largest algebra  $\mathfrak{R}$  of operators having the form  $a(x)F^{-1}b(\xi)F$  with  $a(x) \in \dot{\mathbb{R}}^2$  and  $b(\xi)$  be a homogeneous degree zero function whose restriction on  $S^1$  is piecewise continuous. This algebra contains the bisingular operators and have a central commutative (up to compact operators) subalgebra of Calderon-Mikhlin-Zigmund operators with continuous symbols. The application of Douglas' technique allows to obtain the full description of the algebra of symbols of the algebra  $\mathfrak{R}$  (and the algebra  $\mathfrak{L}$  correspondingly).

It is remarkable that this trick may be applied to the general local principle. The following Lemma settles the particular case of regular base  $B$  in the field \*-bundle topology.

**Lemma 2.3.** *Let a  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{R}$  have a system  $B$  of primitive ideals with property  $\bigcap B = 0$  and  $B$  be compact in the field \*-topology. Then there is a  $C^*$ -algebra  $\tilde{\mathfrak{R}}$  with non-trivial center  $\tilde{Z}$  and an embedding of the algebra  $\mathfrak{R}$  on  $\tilde{\mathfrak{R}}$  such that the application of the general local principle by the systems and the method from Theorem 2.1 to the subalgebra  $\tilde{Z}$  give the same result.*

**Remark 2.4.** We come back to the bisingular operator algebra from Example 2.2. again. It is easy to verify it this case that the largest algebra of sections cannot be realized as an operator algebra on the initial Hilbert space  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .

**Theorem 2.5** Let a  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{R}$  have a system  $B$  of ideals such that  $\bigcap B = 0$ . Then there is a  $C^*$ -algebra  $\tilde{\mathfrak{R}}$  with non-trivial center  $\tilde{Z}$  and an embedding of the algebra  $\mathfrak{R}$  on  $\tilde{\mathfrak{R}}$  such that the application of the canonical shelf construction by the systems  $B$  and the method from Theorem 2.1 to the subalgebra  $\tilde{Z}$  give the same result.

### 3. The General Local Principle and the Support of the Plancherel Measure

Operator algebras in analysis usually have rich groups of symmetries, which are a symmetry group of differential equations define the analyticity property. Thus they can be treated as convolutions [5]. We would like to apply the localization technique in such an environment. Let  $B$  be a family of primitive ideals in the group  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{G}$  with the only property:

$$\bigcap B = 0 \quad (3.1)$$

(for example, all ideals generated by all maximal ideals of a central commutative subalgebra of our algebra, see Section 2). Then the following quotient mapping for any  $J_b$ ,

$\pi_i : (\text{convolution with kernel } k) \mapsto (\text{convolution with kernel } k)/J_b$  (3.2) generates a representation of the group algebra. Condition (3.1) ensures that all irreducible representations of the group algebra may be obtain as (sub) representations of (3.2). However, the careful extracting of irreducible representations may be a rather difficult problem (4).

The following Lemma plays fundamental role in the establishment of a correspondence between the local principle and the Fourier transform.

**Lemma 3.1** Let  $G$  be an unimodular type I exponential group, let  $\tilde{G}$  be the support of the Plancherel measure  $d\mu$  in  $\hat{G}$ . Then the family of two-sided ideals

$J(\pi_i) = \{K \mid K \text{ is a convolution with kernel } k \text{ such, that } \pi_i(k) = 0\}, \pi_i \in \tilde{G}$  satisfies the condition (3.1.)

Lemma 3.1 suggests that one may use this family  $J(\pi_i)$  of ideals for localization according to the general local principle. It obviously follows from the definition of the family  $J(\pi_i)$  of ideals that the rules non-commutative Fourier transform and local technique define just the same representations of our group algebra. Thus in the mentioned case the noncommutative Fourier transformation and the local principle give, in fact, the same description of the group convolution algebra. This may be summarized as follows

**Theorem 3.2** Under the assumptions and notations of Lemma 3.1 we have: All representations of the group algebra  $\mathfrak{G}$  given by the Fourier transform

$\pi_i : (\text{convolution with kernel } k \in L_1(G)) \mapsto \pi_i(k)$

are contained (as subrepresentation, possibly) within the representations

$\pi_i : (\text{convolution with kernel } k) \mapsto (\text{convolution with kernel } k)/J(\pi_i),$

where

$J(\pi_i) = \{K \mid K \text{ is a convolution with kernel } k \text{ such, that } \pi_i(k) = 0\}, \pi_i \in \tilde{G}$

The support of the Plancherel measure  $\tilde{G}$  is a dense subset od  $\text{Prim}'\mathcal{C}$  in field  $*$ -topology.

After the remarks made the proof is not necessary. The next result shows how the described correspondence can be applied.

**Corollary 3.3** *Under the assumption of Theorem 3.2, the Plancherel measure of  $\hat{G}$  is supported on those representations of  $G$  which do not contain the center of  $G$  in their kernels.*

The author was partially supported by the INTAS grant 93-0322. During the final preparation of the paper the author was enjoyed the hospitality of University Gent, Varkgroep Wiskundige Analyse, Belgium.

### Abstract

We study the relationships between different formulations of the local principle. Also we establish a connection among the local principle and the non-commutative Fourier transform approach to the investigation of convolution operator algebras.

### References

1. Douglas R.G. *Banach Algebra Techniques in the Theory of Toeplitz Operators*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972.
2. Hofmann K.H. *Representations of algebras by continuous sections*. Bull. Amer. Math. Soc., 78(3): 291-373, 1972.
3. Kirillov A.A. *Elements of the Theory of Representations*, volume 220 of *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1976.
4. Kisil V.V. *Local behavior of two-sided convolution operators with singular kernel on the Heisenberg group*. Mat. Zametki, 56(2): 41-55, 1994 (Russian).
5. Kisil V.V. *Integral representation and coherent states*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 2(5): 529-540, 1995.
6. Simonenko I.B. *Characteristic bisingular equations in spaces of summable functions*. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2:115-120, 1974.
7. Taylor M.E. *Noncommutative Harmonic Analysis*, volume 22 of *Math. Surv. and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1986.

# ПРО ОДНУ ЗМІШАНУ ЗАДАЧУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ЛУНКИ

Бондаренко В. В.

## 1. Постановка задачі

Визначити стаціонарне температурне поле всередині кругової лунки при умові, що на координатній лінії  $\beta = 0$  задана температура, а на лінії  $\beta = \gamma$  відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. При цьому всередині лунки є теплове джерело інтесивністю  $q(x, y)$ .

З математичної точки зору задача полягає у розв'язанні крайової задачі:

$$\Delta v = -\frac{q(x, y)}{k}, \quad (1)$$

$$v(x, y) \Big|_{\beta=0} = v_0 = \text{const}, \quad -a \leq x \leq a, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n_\beta} + \frac{h}{k} (v - v_0) \Big|_{\beta=\gamma} = 0, \quad -a \leq x \leq a. \quad (3)$$

Тут  $k$  — коефіцієнт тепlopровідності,  $h$  — коефіцієнт теплообміну,  $n_\beta$  — нормальнь до координатної лінії  $\beta = \gamma$  — температура навколошнього середовища,  $v(x, y)$  — шукана температура.

Далі, для простоти викладу розглянемо випадок, коли  $\frac{q(x, y)}{k} = 2q_0 = \text{const}$ .

Перейдемо до біполярних координат [4,44], зберігаючи колишнє позначення для функції температури. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді:

$$v(\alpha, \beta) = v_0 + \frac{q_0 a^2}{2} \left( u(\alpha, \beta) + \frac{2 \cos \beta}{\cosh \alpha + \cos \beta} \right). \quad (4)$$

Оскільки у біполярних координатах лунка відображується на нескінченну смугу, видається можливим застосувати інтегральне перетворення Фур'є за зміною  $\alpha$  до отриманих рівнянь та крайових умов.

У результаті отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно образу Фур'є функції  $u(\alpha, \beta)$  з відповідними крайовими умовами:

$$\frac{\partial^2 U(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} - x^2 U(\alpha, \beta) = 0, \quad (5)$$

$$U(x, \beta) + \frac{k}{2ha} \left( \frac{dU(x+i, \beta)}{d\beta} + \frac{dU(x-i, \beta)}{d\beta} + \cos \beta \frac{dU(x, \beta)}{d\beta} \right)_{\beta=\gamma} = G_1(x), \quad (6)$$

$$U(x, 0) = G_2(x), \quad (7)$$

де  $G_1(x) = (V_{\epsilon_1})(x)$ ,  $G_2(x) = (V_{\epsilon_2})(x)$ .

Загальний розв'язок рівняння (5) запишемо у вигляді:

$$U(x, \beta) = A_1(x) \operatorname{sh} x(-\beta) + A_2(x) \operatorname{sh} x(\beta - \gamma). \quad (8)$$

З рівності (7) відразу знаходимо  $A_2(x)$ :

$$A_2(x) = -\frac{G_2(x)}{\operatorname{sh} x\gamma} = -\frac{2 \cdot 2\pi x}{\operatorname{sh} \pi x \cdot \operatorname{sh} x\gamma}.$$

$A_1(x)$  повинна задовольняти таке функціональне рівняння:

$$\begin{aligned} & -A_1(x) \operatorname{sh} x\gamma + \frac{k}{2ha} ((-(x+i) \operatorname{ch} \gamma(x+i) \cdot A_1(x+i) - (x-i) \operatorname{ch} \gamma(x-i) \cdot A_1(x-i) - \\ & - 2 \cos \gamma \cdot \operatorname{ch} \gamma x \cdot A_1(x)) + \frac{k}{2ha} ((x+i) A_1(x+i) + (x-i) A_1(x-i) + 2 \cos \gamma \cdot A_1(x)) = G_1(x). \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\frac{k}{ha} x A_1(x) \operatorname{ch} x\gamma = \Phi(x). \quad (9)$$

Тоді відносно нової шуканої функції  $\Phi(x)$  приходимо до функціонального рівняння

$$\Phi(x+i) + \Phi(x-i) + 2 \left( \cos \gamma + \frac{ah}{k} \frac{\operatorname{th} x\gamma}{x} \right) \Phi(x) = K(x), \quad (10)$$

де

$$K(x) = -2G_1(x) - \frac{k}{ha} \left( \frac{(x+i)G_2(x+i)}{\operatorname{sh}(x+i)\gamma} + \frac{(x-i)G_2(x-i)}{\operatorname{sh}(x-i)\gamma} + 2 \cos \gamma \frac{G_2(x) \cdot x}{\operatorname{sh} x\gamma} \right); \quad (11)$$

$$G_1(x) = 2 \cdot 2\pi \frac{k}{ha} \sin \gamma \cdot \delta(x) - 2 \cdot 2\pi \frac{\operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{sh} x\gamma \cdot \left( \frac{k}{ha} \sin \gamma + 1 \right)}{\operatorname{sh} \pi x}; \quad (12)$$

$$G_2(x) = -2 \cdot 2\pi \frac{x}{\operatorname{sh} \pi x}. \quad (13)$$

Із симетрії поставленої задачі (1)-(3) за зміною  $\alpha$  та внаслідок відношень (8), (9), шукана функція має бути парною до змінної  $x$ .

Можна показати, що функція  $K(x)$  зображенна у вигляді:

$$K(x) = C \delta(x) + K_1(x), \quad (14)$$

де  $\delta(x)$  — узагальнена функція Дірака, а  $K_1(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ .

При цьому, константа  $C$  та функція  $K_1(x)$  у рівності (14) визначається цілком однозначно:

$$c = 4 \cdot 2\pi \frac{k}{ha} \left( \frac{1}{\sin \gamma} - \sin \gamma \right) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} K_i(x) = & - \frac{4 \cdot 2\pi \operatorname{ctg} \gamma \cdot \left( \frac{k}{ah} \sin \gamma + 1 \right)}{\operatorname{sh} \pi x} \operatorname{sh} xy - \\ & - \frac{8 \cdot 2\pi k x (\operatorname{sh} xy \cdot \cos \gamma + \operatorname{ch} xy \cdot \sin \gamma)}{ah \cdot \operatorname{sh} x\pi \cdot (\operatorname{ch} 2xy - \cos 2\gamma)} - \\ & - \frac{8 \cdot 2\pi k (\operatorname{sh} xy \cdot \sin \gamma - \operatorname{sh} xy \cdot \cos \gamma)}{ah \cdot \operatorname{sh} x\pi \cdot (\operatorname{ch} 2xy - \cos 2\gamma)} + \\ & + 4 \cdot \frac{2\pi}{ah} \frac{k}{\cos \gamma} \frac{x^2}{\operatorname{sh} xy \cdot \operatorname{sh} \pi x}. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи, що права частина рівняння (10) містить у собі функцію Дірака, будемо шукати рішення функціонального рівняння у вигляді:

$$\Phi(x) = F(x) + F_0(x), \quad (17)$$

де  $F_0(x)$  задовольняє функціональне рівняння

$$F_0(x+i) + F_0(x-i) = c\delta(x). \quad (18)$$

Звідси

$$(e^x + e^{-x})f_0(x) = \frac{c}{2\pi}, \quad f_0(x) = \frac{c}{2 \cdot 2\pi \operatorname{ch} x}, \quad F_0(x) = V \left( \frac{c}{2 \cdot 2\pi \operatorname{ch} x} \right)(x) = \frac{c}{4 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x}. \quad (19)$$

Тоді відносно нової невідомої функції  $F(x)$  отримуємо задачу Карлемана:

$$F(x+i) + F(x-i) + 2F(x) \left( \cos \gamma + \frac{ah}{k} \operatorname{th} xy \right) = K_i(x). \quad (20)$$

**2. Достатні умови, при яких задача Карлемана (20) має єдиний розв'язок**

Поряд з ЗК (20) розглянемо відповідну їй наближену задачу

$$\tilde{F}(x+i) + \tilde{F}(x-i) + 2\tilde{C}(x)\tilde{F}(x) = \tilde{G}(x). \quad (21)$$

У деяких випадках  $\tilde{C}$  можливо вважати рівною константі

$$\tilde{C} = \cos \gamma + \frac{a}{\mu} \frac{\gamma}{2}. \quad (22)$$

За теоремою про існування та єдність розв'язку [3,7] задача Карлемана (20) буде мати єдиний розв'язок при  $|C(x)| < 2$ . В результаті отримаємо

$$\frac{a}{\mu} < \frac{2 \sin^2 \gamma}{\gamma}. \quad (23)$$

За теоремою про оцінку похибки [3,9], враховуючи, що  $G = \tilde{G}$ , ми одержимо для задачі (21)-(22) умову, необхідну для придатності наближеного розв'язку

$$\frac{a}{\mu} < \frac{2}{\gamma}. \quad (24)$$

Із нерівності (23) та (24) ми бачимо, що коли  $\frac{a}{\mu}$  задовільняє вимоги теореми про існування та єдість, то вона тим наче задовільняє вимоги теореми про оцінку похибки. Застосуємо зворотне перетворення Фур'є до (20), тоді ми отримаємо розв'язок наближеної задачі

$$\tilde{f}(x) = \frac{g(x)}{2 \operatorname{ch} x + \tilde{C}}. \quad (25)$$

### 3. Точний розв'язок задачі Карлемана у випадку $\gamma = \frac{\pi}{2}$ .

Нехай  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , тоді задача Карлемана (20) матиме вигляд:

$$F(x+i) + F(x-i) + \frac{2ah}{k} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} x F(x) = -16 \cdot \frac{2\pi}{\operatorname{sh} \pi x \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x}. \quad (26)$$

Далі використаємо спосіб розв'язування, застосований у роботах [1,66], [22,80].

Враховуючи, що  $\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (x \pm i) = \mp \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (x \pm i)$ , задача Карлемана (26) запишеться у вигляді функціонального рівняння

$$(-ix)(\Psi(x-i) - \Psi(x+i)) + 2\lambda \Psi(x) = G_i(x), \quad (27)$$

де

$$\Psi(x) = \frac{F(x)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x}, \quad (28)$$

$$G_i(x) = -\frac{16}{\lambda} \cdot \frac{2\pi}{\operatorname{sh}^2 \pi x} \frac{x^2}{2}. \quad (29)$$

Потім до рівності (27) застосуємо зворотне перетворення Фур'є. У результаті будемо мати звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції  $\psi(x) = (V\Psi)(x)$ . Оскільки функція  $\psi(x) \in L_2(R)$ , то із загального розв'язання виділимо те, яке задовільняє вказану властивість:

$$\Psi(x) = (V\psi)(x), \quad \psi(x) = \left( \int_0^\infty g_i(t) \left( \operatorname{th} \frac{t}{2} \right)^x dt \right) \left( 2 \operatorname{sh} x \left( \operatorname{th} \frac{x}{2} \right)^x \right)^{-1}. \quad (30)$$

Із формулі (28) знаходимо  $F(x)$ :

$$F(x) = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x \Psi(x).$$

Далі підставляємо знайдене значення до формул (17), (9), (8), (4), застосуємо зворотне перетворення Фур'є, знаходимо функцію  $v(\alpha, \beta)$  і, тим самим  $v(x, y)$ .

### Резюме

Розглядається стаціонарна задача тепlopровідності для лунки при умові, що на одній координатній лінії задані країові умови першого роду (температура), а на другій — третього роду (конвективний теплообмін).

### Література

1. Керекеша П.В. Порівняння точних методів розв'язку задач скруту частково підкріплених стрижнів півкруглого перерізу //ДАН України. — 1997. — № 1. — С. 65-69.
2. Керекеша П.В. Точний розв'язок третьої гармонічної задачі для клину //ДАН України. — 1994. — № 4. — С. 78-83.
3. Керекеша П.В., Отило М.А. Об исследовании задачи Карлемана для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь. //Деп. в ВИНИТИ 2543-79 Одесса.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М., — 1967. — 404 с.

# ЗБУРЕНІ ОБЕРТАННЯ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА ПРИ НАЯВНОСТІ ДИСИПАЦІЇ ТА ДЕБАЛАНСУ ТЯГИ

*Каспар'янц А. А., Лещенко Д. Д.*

Розглянемо рух динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки  $O$  під дією: сили ваги  $mg$ ; сили  $F$ , яка має такі проекції на рухомі осі, жорстко зв'язані з твердим тілом  $(0, F, 0)$ , і прикладена в точці  $N$  з координатами  $(d, 0, h)$ ; дисипативної сили з моментом  $M(-I_1 p, -I_1 q, -I_3 r)$  відносно точки  $O$  (де  $I_1, I_3$  — додатні коефіцієнти, які характеризують дисипацію  $p, q, r$  — проекції вектора кутової швидкості на рухомі осі). Рівняння руху мають вигляд [4, 76; 3, 8]:

$$\begin{aligned} Ap^* + (C - A)qr &= k \sin \theta \cos \varphi + M, \\ Aq^* + (A - C)pr &= -k \sin \theta \sin \varphi + M_2, \\ Cr^* &= M_3, \\ \psi^* &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \theta^* &= p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \varphi^* &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут  $A$  — екваторіальний, а  $C$  — осьовий момент інерції відносно нерухомої точки  $O$ ,  $A \neq C$ ;  $\psi, \theta, \varphi$  — кути Ейлера. В випадку важкої дзиги відновлюючий момент  $k = mgl$ , де  $m$  — маса тіла,  $g$  — прискорення сили ваги,  $l$  — відстань від точки  $O$  до центра ваги тіла. При цьому сила  $F$  відповідає дебалансу тяги. Проекції вектора збурюючого моменту  $M$ , на головні осі інерції, які проходять через точку  $O$ , мають вигляд:

$$\begin{aligned} M_1 &= -Fh - I_1 p, \quad M_2 = -I_1 q, \\ M_3 &= Fd - I_3 r. \end{aligned} \tag{2}$$

У статті, як і в [3, 8], зроблені такі вихідні припущення:

$$p^2 + q^2 \ll r^2, Cr^2 \gg k, |M_i| \ll k \quad (i=1, 2, 3). \quad (3)$$

Припущення (3) означають, що напрям кутової швидкості тіла близький до осі динамічної симетрії; кутова швидкість достатньо велика, так що кінетична енергія тіла набагато більша потенціальної енергії, яка обумовлена відновлюючим моментом; збурюючі моменти малі в порівнянні з відновлюючим. Нерівності (3) дозволяють ввести малий параметр  $\varepsilon \ll 1$  і покласти

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k = mgI = \varepsilon K \\ M_i &= \varepsilon^2 M_i' \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Представлено задачу дослідження асимптотичної поведінки системи (1) при малому  $\varepsilon$ , якщо виконані умови (3), (4). Будемо застосовувати метод усереднення [1, 413] на інтервалі часу порядку  $e^{-1}$ .

Вважаємо, що збурюючі моменти  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) з урахуванням (4) мають вигляд

$$\begin{aligned} M_1 &= -\varepsilon^2 Fh^* - \varepsilon^2 I_1^* P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1^* Q \\ M_3 &= \varepsilon^2 Fd^* - \varepsilon^2 I_3^* r. \end{aligned} \quad (5)$$

Одержано усереднені системи рівнянь руху в першому і другому наближенні за схемою, запропонованою в [3, 12].

Після ряду перетворень розв'язання усередненої системи рівнянь першого наближення для повільних і швидких змінних має вигляд:

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)(a^0 \cos \omega t - b^0 \sin \omega t) \\ b^{(1)} &= \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)(b^0 \cos \omega t + a^0 \sin \omega t) \\ \delta^{(1)} &= -\varepsilon C^{-1} r_0 t + \varepsilon C^{-1} Fd^* t \\ \psi^{(1)} &= \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} t + \psi_0, \quad \theta^{(1)} = \theta_0 \\ \alpha^{(1)} &= CA^{-1} r_0^{-1} t - \omega t - 1/2\varepsilon^2 A^{-1} I_3^* r_0 t^2 + 1/2\varepsilon^2 A^{-1} Fd^* t^2 + \varphi_0 \\ \gamma^{(1)} &= n_0 t - 1/2\varepsilon^2 (C-A) A^{-1} C^{-1} r_0 t^2 + 1/2\varepsilon^2 (C-A) C^{-1} A^{-1} Fd^* t^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $\omega = \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta_0$ ;  $a^0, b^0, n_0$  визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} a &= P_0 - K C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \\ b &= -Q_0 + K C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\ n_0 &= (C-A) A^{-1} r_0 \neq 0, \\ |n_0/r_0| &\leq 1. \end{aligned}$$

$\gamma_0 = n_0 t$ , змінна  $\gamma = \gamma_0$  має зміст фази коливань,  $\alpha = \gamma + \varphi$ ,  $r = r_0 + \varepsilon \delta$ ;  $P_0, Q_0, r_0, \theta_0, \varphi_0$  — початкові значення відповідних змінних при  $t = 0$ .

Відзначимо, що в розв'язання усередненої системи першого наближення (6) входить тільки компонента моменту, сталого в зв'язаних осях, яка прикладена вздовж осі симетрії  $Fd^*$ . Проекція вектора збурюючого моменту —  $Fh^*$  випадає при усередненні.

На основі наведених формул визначена еволюція кутів прецесії і нутації в другому наближенні. Згідно до процедури, яка викладена в [3, 12]:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} t + S^{(1)} \\ S^{(1)} &= \varepsilon^2 t K^2 C^{-3} r_0^{-3} \cos \theta_0 + 1/2 \varepsilon^3 K C^{-2} I_3^* r_0^{-1} t^2 - 1/2 \varepsilon^3 K C^{-2} F d^* r_0^{-2} t^2 - \\ &- \varepsilon C^{-1} A r_0^{-1} \operatorname{cosec} \theta_0 \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1^* t) (a^{02} + b^{02})^{1/2} \sin(\alpha^{(1)} + \sigma) \\ \theta &= \theta_0 + \varepsilon^2 t I_1^* K C^{-2} r_0^{-2} \sin \theta_0 + \varepsilon C^{-1} A r_0^{-1} \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1^* t) (a^{02} + b^{02}) \sin(\alpha^{(1)} - \lambda) \\ \cos \sigma &= \sin \lambda = b^{(1)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1^* t) (a^{02} + b^{02})^{-1/2}.\end{aligned}\quad (7)$$

У виразі (7) для  $\theta$  доданок порядку  $\varepsilon$  є добутком повільно експоненціально спадного співмножника  $\exp(-\varepsilon A^{-1} I_1^* t)$ , обумовленого дисипацією енергії і коливного співмножника  $\sin(\alpha^{(1)} - \lambda)$ . Величину декремента загасання і характер по-вільної зміни фази малих коливань видно з формул (6) для  $b^{(1)}$ ,  $\alpha^{(1)}$ .

У виразі (7) для  $\psi(t)$  доданки  $S^{(1)}(\varepsilon, t)$  мають порядок  $O(\varepsilon)$  на інтервалі часу  $(0, T\varepsilon^{-1})$ . Здобутий вираз  $S^{(1)}(\varepsilon, t)$  уточнює для даної задачі формулу кутової швидкості прецесії  $\omega_p = KC^{-1}r_0^{-1}$ , яка має місце в наближенні теорії гіроскопів [2, 219].

Відзначимо, що якщо в розглянутій задачі обмежитися побудовою першого наближення, то в формулі для кутів нутації і прецесії не вийдуть параметри збурюючих моментів, і тому вплив збурень на регулярну прецесію тіла не буде враховано. Таким чином, побудова другого наближення істотна.

### Резюме

З допомогою методу усереднення в першому і другому наближеннях досліжується еволюція обертань осьосиметричного тіла з нерухомою точкою під дією лінійного зовнішнього дисипативного моменту та дебалансу тяги.

### Література

- Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М., 1974. — 503 с.
- Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. — Ч. 2. — М., 1969. — 332 с.
- Лещенко Д. Д., Шамаев А. С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 6. — С. 8-17.
- Савченко А. Я., Безрученко В. С. Исследование стационарных движений гироскопа Лагранжа при наличии диссипации и дебаланса тяги // Механика твердого тела. — 1993. — Вып. 25. — С. 75-80.

# ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ МАССИВОВ ПРИ ПОМОЩИ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОДОВ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ КОНТРОЛЬНЫХ СЛОВ

*Колев И., Александров Б.  
Технический университет — Габрово*

## 1. Введение

В зависимости от способа сохранения и обмена информации, а также от вида помех, можно использовать различные коды для обнаружения и устранения ошибок. Одним из видов кодов, нашедших широкое применение в компьютерной технике, являются линейные корректирующие коды. Вследствие их особенностей — параллельности процессов кодирования и декодирования — они широко используются для обнаружения и устранения ошибок в оперативных памятях, в которых информация сохраняется параллельно чаще всего в виде 8, 16, 32 ... битовых слов [1,3].

## 2. Защитное кодирование информационных массивов при помощи линейных корректирующих кодов и дополнительных контрольных слов

При линейных корректирующих кодах каждое из слов, которое необходимо сохранить, окомплектовывается с определенным излишком информации —  $r$  контрольных разрядов, с помощью которых при чтении устанавливается наличие (отсутствие) ошибок в данном слове. Увеличение длины линейных кодовых векторов приводит к вероятности появления дублирующихся, а также повторяющихся три и больше раз разрядных ошибок, обнаружение и устранение которых связано со значительным возрастанием числа контрольных разрядов в каждом кодовом векторе. Эти контрольные разряды сохраняются параллельно отдельным словам, чем увеличивается общий объем памяти, необходимой

	$n = k + r$
$X_1$	$u_1, u_2, \dots, u_k$
$X_2$	$U_2$
$X_3$	$U_3$
.	.
.	.
.	.
.	$M_{r1}$

1a

	$n = k + r$
$X_1$	$u_1, u_2, \dots, u_k$
$X_2$	$U_2$
$X_3$	$U_3$
.	.
.	.
.	.
$X_a$	$U_a$
$X_b$	$U_b$
$X_k$	$U_k$
$X_1$	$U_1$
$X_2$	$U_2$
.	.
.	.
$X_a$	$U_a$
$X_b$	$U_b$
$X_k$	$U_k$
$X_1$	$U_1$

16

Рис. 1.

для сохранения информационного массива. Этот способ защиты информации показан на рис. 1 (см. рис. 1a).

Сущность определенного подхода при кодировании заключается в разделении памяти на фрагменты и формировании одного контрольного слова ( $X_i$ ) для каждого отдельного фрагмента (см. рис. 1б), где  $a$  — число слов во фрагменте:

$$X_k = \oplus \sum_{j=1}^a X_j. \quad (1)$$

Каждое из слов во фрагменте представляет собой кодовый вектор, посредством которого можно обнаруживать и устранять ошибки с предварительно выбранной кратностью, использованной при определении числа контрольных разрядов [1]. При возникновении и обнаружении в одном из слов фрагмента ошибок с кратностью выше выбранной, они устраются при помощи контрольного слова для соответствующего фрагмента. Биты  $X_k$  получаются в результате сложения битов с одинаковыми номерами для всех слов фрагмента

$G_{13,8}=$	<table border="1"> <tr><td>10000000 00011</td></tr> <tr><td>01000000 00101</td></tr> <tr><td>00100000 01001</td></tr> <tr><td>00010000 10001</td></tr> <tr><td>00001000 11100</td></tr> <tr><td>00000100 11010</td></tr> <tr><td>00000010 10110</td></tr> </table>	10000000 00011	01000000 00101	00100000 01001	00010000 10001	00001000 11100	00000100 11010	00000010 10110	<table border="1"> <tr><td><math>H_{5,13}=</math></td></tr> <tr><td>00011110 10000</td></tr> <tr><td>00101101 01000</td></tr> <tr><td>01001011 00100</td></tr> <tr><td>10000111 00010</td></tr> <tr><td>11110000 00001</td></tr> </table>	$H_{5,13}=$	00011110 10000	00101101 01000	01001011 00100	10000111 00010	11110000 00001
10000000 00011															
01000000 00101															
00100000 01001															
00010000 10001															
00001000 11100															
00000100 11010															
00000010 10110															
$H_{5,13}=$															
00011110 10000															
00101101 01000															
01001011 00100															
10000111 00010															
11110000 00001															

В примере 1а представлен фрагмент из пяти кодовых векторов. Каждый из них представляет собой кодовый вектор (13, 8, 4) линейного кода с ниже указанными проверяющей и порождающей матрицами.

Процесс декодирования осуществляется в следующей последовательности действий. Синдромно декодируется контрольное для фрагмента слово. В нем, как и во всех остальных словах, возможно возникновение ошибок с кратностью выше той, что выбрана заранее. Для выяснения подхода полагаем, что в  $X_k$  не было таких ошибок.

Примеры 1а и 1б

	1а
$x_1$	0111 1110 01101
$x_2$	1100 0011 11110
$x_3$	0000 0011 11000
$x_4$	1111 0101 01010
$x_5$	1011 0111 11001
$x_k$	1111 1100 11000

	1б
$x_k$	1111 1100 11000 0 0 0 0 0
$x_{k0}$	0000 0000 0000 0 0 0 0 0
$x_1$	0111 1110 01101 0 0 0 0 0
$x_{k1}$	0111 1110 01101 0 0 0 0 0
$x_2$	1100 0011 11110 0 0 0 0 0
$x_{k2}$	1011 1101 10011 0 0 0 0 0
$x_3$	0001 0011 11000 1 0 0 0 1
$x_{k3}$	0000 0011 11000 0 0 0 0 0
$x_4$	1011 1110 01011 0 0 0 0 0
$x_{k4}$	0000 0101 01010 1 1 1 1 0
$x_5$	1111 1100 11000 0 0 0 0 0
$x_{k5}$	0100 0010 10011 0 0 0 0 0
$x_4$	1011 0111 11001 0 0 0 0 0
$x_4$	1111 0101 01010 0 0 0 0 0

Декодируем первое слово фрагмента для обнаружения ошибок, которые можно устраниить с помощью применяемого конкретного линейного кода (пример 1б). Если декодирование осуществлено успешно, формируется первое промежуточное контрольное слово  $X'_{k1}$  (2),

$$X'_{k1} = X'_{k0} + X_1; \quad X'_{k0} = 0. \quad (2)$$

Декодируем следующее слово фрагмента для обнаружения ошибок, которые можно устраниить с помощью конкретного линейного кода. Если при декодировании установлено, что нет ошибок или что такие есть и они устраниены, формируется следующее промежуточное контрольное слово.

$$X'_{k2} = X'_{k1} + X_2; \quad X'_{k3} = X'_{k2} + X_3. \quad (3)$$

Если на определенном этапе при декодировании слов фрагмента будет обнаружено слово  $X_e$  с возникшими в нем ошибками, которые нельзя устраниить с помощью линейного кода, то это слово не может принимать участия в формировании промежуточных контрольных слов. Дальнейшее формирование промежуточных контрольных слов осуществляется таким образом, что на месте  $X_e$  существует  $X_1$ . Процесс продолжается, пока не будет декодировано и последнее слово ( $X_e$ ) фрагмента. Последнее сформированное промежуточное слово совпадает с оригиналом слова, в котором возникла многоразрядная ошибка

$$X_e = X_k - \oplus \sum_{j=1}^n X_j. \quad (4)$$

В примере 1б показано декодирование массива в соответствии с описанным подходом. Единичная ошибка в  $X_3$  устранена вследствие синдромного декоди-

рования. Многоразрядная ошибка в  $X$ , устранена при помощи контрольного для фрагмента слова. Этим способом можно устранять ошибки, которые нельзя устраниить при помощи применяемого линейного кода.

### 3. Заключение

Описанный подход предполагает устранение ошибок с кратностью, для которой линейные корректирующие коды требуют значительно большего числа контрольных разрядов. Особенностью данного подхода является то, что в рамках одного фрагмента после многоразрядной ошибки можно восстанавливать не более одного слова. Для этой цели необходимо подобрать подходящее число слов во фрагменте. Зная вероятность появления двойных, тройных и более кратных ошибок, можно принять решение о том, сколько слов будет участвовать в отдельных фрагментах. Подобный подход кодирования можно описать при помощи параметров  $a, n, k, d$ , где:  $a$  — число слов во фрагменте; параметры  $n, k, d$  — такие же, как при линейных кодах.

В таблице 1 (см. табл. I) указаны количества памяти, необходимые для защиты оперативной памяти, рассматриваемой как совокупность из  $X \cdot 10^5$  слов. Каждое слово содержит 16 информационных битов и определенное число контрольных разрядов для обнаружения и устранения единичных, двойных и тройных ошибок. Указаны также количества памяти ( $M_{r1}$ ), необходимые для сохранения контрольных разрядов при использовании (22,16,4), (25,16,5) и (29,16,7) линейных кодов.

Таблица 1

код\Мк	$X$	$20 \cdot 10^5$ 4 MB	$40 \cdot 10^5$ 8 MB	$60 \cdot 10^5$ 12 MB	$80 \cdot 10^5$ 16 MB	$100 \cdot 10^5$ 20 MB
22, 16, 4	$M_{r1}$	1.5	3	4.5	6	7.5
26, 16, 5		2.5	5	7.5	10	12.5
29, 16, 7		3.25	6.5	9.75	13	16.25
16, 22, 16, 4	$M_{r2}$	1,844	3.688	5.531	7.357	9.219
32, 22, 16, 4		1.672	3.344	5.056	6.688	8.359
64, 22, 16, 4		1.586	3.172	4.758	6.344	7.930
128, 22, 16, 4		1.543	3.086	4.629	6.172	7.715

$$M_{r1} = \frac{X \cdot 10^5}{8} (n - k) [MB]. \quad (5)$$

В этой же таблице даны и количества памяти, необходимые для сохранения контрольных разрядов при использовании (a,22,16, 4) кодов.

$$M_{r2} = \frac{X \cdot 10^5}{8} \left( r + \frac{n}{a} \right) [MB].$$

Вместо того, чтобы использовать коды с расстоянием 5, 6, 7, 8..., позволяющими обнаруживать и устранять двойные, тройные и т.д. ошибки, согласно описанному подходу, целесообразно использовать (a, n, k, 4) коды. Имея в виду возможность (a, n, k, d) кодов устраниить многократные ошибки только в одном

слове фрагмента и зная вероятность появления подобных ошибок, можно подобрать подходящее значение для "a".

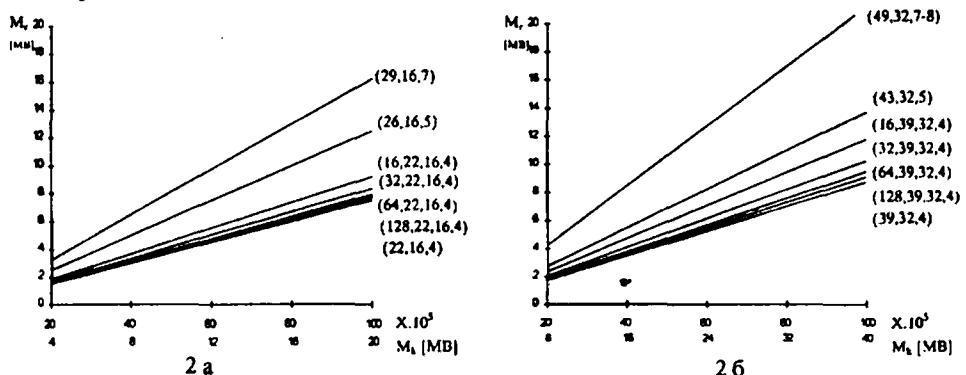


Рис. 2

На рис.2 графически указаны зависимости между числом слов ( $X \cdot 10^3$ ) и количеством памяти, необходимым для сохранения контрольных разрядов при ( $n, k, d$ ) и ( $a, n, k, d$ ) кодах. На рис.2а представлены зависимости для кодов, защищающих 16-разрядные слова от единичных ошибок (22,16,4), от двойных ошибок (26,16,5) и от тройных ошибок (29,16,7). На том же рисунке указаны и аналогичные зависимости для ( $a, n, k, d$ ) кодов, базированных на (22,16,2) линейном коде и на величине фрагмента 16,32,64,128 слов. Из указанной таблицы и графика видно, что (22,16,4) коды с одним более маленьким информационным излишком относительно (26,16,5) кодов позволяют обнаруживать и устранять не только двойные, но и многоразрядные ошибки в одном из слов фрагмента.

При увеличении  $d$  с целью устранения тройных и более кратных ошибок увеличиваются и различия между  $M_{11}$  и  $M_{12}$ , причем при включении большего числа слов в память, эти различия увеличиваются значительно. Так, например, чтобы защитить одну 16 МВ память от тройных ошибок, необходимы  $M_{11} = 13$  МВ дополнительной памяти, а при защите с использованием предложенного подхода необходимы  $M_{12} = 7,357$  МВ, при помощи которых можно устранять по одной многоразрядной ошибке в каждом фрагменте. Зная вероятность появления двойных и многоразрядных ошибок, можно найти "a", для которого  $M_{12} < M_{11}$ . Из представленных графических зависимостей видно, что уменьшение величины фрагмента не влияет существенно на различия между  $M_{12}$ , тогда как различия между  $M_{11}$  становятся значительно больше при использовании кодов, позволяющих обнаруживать двойные, тройные и более разрядные ошибки.

Предложенный подход кодирования может быть применен для защиты оперативных памятей, работающих в условиях помех, которые приводят к одновременному модифицированию нескольких битов в рамках одного кодового вектора. Зная модуль помех, можно определить и величину фрагментов, которая обеспечивает определенную защищенность информации, хранимой в соответствующей памяти.

Предложенный подход можно мультилицировать к циклическим кодам. Его можно использовать при обмене информации между ресурсами в компьютерных сетях. Этот подход может быть применен с успехом и при информационном обмене в промышленных компьютерных средах, работающих в условиях различных помех, отличающихся высокой интенсивностью появления.

### Резюме

В данной работе описан подход, при котором, посредством разделения памяти на фрагменты и формирования контрольных слов для каждого отдельного фрагмента, становится возможным обнаружение и устранение ошибок с кратностью выше кратности ошибок, обнаруживаемых и устраниемых при помощи линейного кода.

### Литература

1. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки — М., 1986. — 255 с.
2. Brouwer A., Verhoeff T. An updated table of minimum distance for binari linear codes. IEEE Transaction on Information Theory. num. 2, 1993. — P. 20-25.
3. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоен А. Х. Теория и практика кодов, исправляющих ошибки. — М., 1979. — 186 с.