ISSN 2304—1579

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Математика і механіка

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

Том 18. Випуск 2 (18). 2013

Одеса
«Астропринт»
2013

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

І. М. Коваль (головний редактор)
О. В. Запорожченко (заступник головного редактора)
В. О. Іваниця (заступник головного редактора)
Є. Л. Стрельцов (заступник головного редактора)

С. М. Андрієвський
Ю. Ф. Ваксман
В. В. Глєбов
Л. М. Голубенко
Л. М. Дунаєва
В. В. Заморов
В. Є. Круглов
В. Г. Кушнір
В. В. Менчук
О. В. Сминтина
В. І. Труба
О. В. Тюрін
Є. А. Черкез
Є. М. Черноіваненко

Редакційна колегія серії
Математика і механіка

В. Є. Круглов (науковий редактор)
В. М. Євтухов (заступник наукового редактора)

A. Ashyralyev
L. Fridman
I. Kátai
A. Laurinčikas
С. К. Асланов
Р. Д. Банцурі
В. І. Берник
О. А. Бойчук
Н. Д. Вайсфельд
П. Д. Варбанець
О. В. Вербицький
О. Н. Вітюк
Г. О. Воропаєв
І. М. Гашененко
Д. В. Дмитришин
А. А. Дороговцев
В. Й. Жуковський
М. І. Іванчов
А. Й. Калінін
В. О. Капустян
І. Т. Кігурадзе
П. І. Когут
Ан. О. Кореновський
О. В. Костін
О. Ф. Кривий
Д. Д. Лещенко
А. Д. Мілко
С. М. Мхитарян
О. В. Онищук
О. Г. Наконечний
Ю. В. Нестеренко
А. П. Петравчук
В. В. Пічкур
А. В. Плотніков
В. Г. Самойленко
О. М. Станжицький
Е. О. Стороженко
В. І. Сущанський
Ю. В. Теплінський
Р. С. Хапко
І. М. Черевко
В. В. Шарко
І. А. Шевчук
Г. А. Шинкаренко
С. А. Щоголєв

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко

«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка» внесений до Переліку наукових фахових видань України постановою Президії ВАК України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2013

ISSN 2304—1579

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

VISNYK
ODESKOHO NATSIONALNOHO UNIVERSYTETU

(Odesa National University Herald)

Matematyka i Mekhanika
(Mathematics and Mechanics)

Scientific journal

Published four times a year

Series founded in January, 1997

Volume 18. Issue 2 (18). 2013

Odesa
«Astroprint»
2013

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

I. M. Koval (Editor-in-chief)
O. V. Zaporozhchenko (Deputy Editor-in-chief)
V. O. Ivanytsia (Deputy Editor-in-chief)
Ye. L. Streltsov (Deputy Editor-in-chief)

S. M. Andrievskyi
Yu. F. Vaksman
V. V. Glebov
L. M. Golubenko
L. M. Dunaeva
V. V. Zamorov
V. Ye. Kruglov
V. G. Kushnir
V. V. Menchuk
O. V. Smyntyna
V. I. Truba
O. V. Tiurin
Ye. A. Cherkez
Ye. M. Chernoivanenko

Editorial board of the series
Mathematics and mechanics

V. Ye. Kruglov (Scientific Editor)
V. M. Evtukhov (Deputy Scientific Editor)

A. Ashyralyev
L. Fridman
I. Kátai
A. Laurinčikas
S. K. Aslanov
R. D. Bantsuri
V. I. Bernik
O. A. Boichuk
N. D. Vaysfeld
P. D. Varbanets
O. V. Verbitsky
O. N. Vitjuk
G. O. Voropaev
I. M. Gashenenko
D. V. Dmitrishin
A. A. Dorogovtsev
V. I. Zhukodsky
M. I. Ivanchov
A. I. Kalinin
V. O. Kapustyan
I. T. Kiguradze
P. I. Kogut
An. O. Korenovskyi
O. V. Kostin
O. F. Kryvyy
D. D. Leshchenko
A. D. Milko
S. M. Mkhitaryan
O. V. Onishchuk
O. G. Nakonechny
Yu. V. Nesterenko
A. P. Petravchuk
V. V. Pichkur
A. V. Plotnikov
V. G. Samoilenko
O. M. Stanzhytskyi
E. O. Storozhenko
W. I. Sushchansky
Yu. V. Teplinskyi
R. S. Hapko
I. M. Cherevko
V. V. Sharko
I. A. Shevchuk
G. A. Shynkarenko
S. A. Schogolev

Executive Editor — O. D. Kichmarenko

© Odesa I. I. Mechnikov National University, 2013

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

Закирова Г. А., Кириллов Е. В. Регуляризованный L-след одного возмущенного оператора 7

Замышляева А. А., Муравьев А. С. Численное исследование математической модели Буссинеска – Лява 14

Зима Г. С. Існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією 20

Кичмаренко О. Д., Плотников А. А. Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью и их свойства 29

Сагадеева М. А., Шулепов А. Н. Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа . 35

Страхов Є. М. Метод динамічного програмування в задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи керування . 44

Gaiko V. A. Chaos transition in the Lorenz system 51

Mykhailenko A. V. Fractional boundary-value problem 59

Osadcha O., Skripnik N. Partial averaging of impulsive hybrid systems 67

Shchogolev S. A. On existence of a special kind's integral manifold of the nonlinear differential system with slowly varying parameters . . . 80

МЕХАНІКА

Архипенко К. М., Кривий О. Ф. Тріщина та включення за умов повного зчеплення в кусково-однорідній анізотропній площині . . 97

Забуга А. Г., Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В. К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием 105

Фесенко А. А. Задача стационарной теплопроводности для полубесконечного слоя 122

ХРОНІКА

Кичмаренко О. Д. Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова 131

CONTENTS

MATHEMATICS

Zakirova G. A., Kirillov E. V. L-regularized trace of one of the perturbed operator 7

Zamyshlyaeva A. A., Muravyov A. S. Numerical study of mathematical models of Boussinesq – Love 14

Zima G. S. Existence of optimal controls for some classes of the systems of differential equations with an impulsive action 20

Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A. Nonlinear differential inclusions with variable dimension and their properties 29

Sagadeyeva M. A., Shulepov A. N. About one nonlinear model based on relatively radial equation of Sobolev type 35

Strakhov E. M. Dynamic programming in a structural and parametric optimization problem of a discrete control system 44

Gaiko V. A. Chaos transition in the Lorenz system 51

Mykhailenko A. V. Fractional boundary-value problem 59

Osadcha O., Skripnik N. Partial averaging of impulsive hybrid systems 67

Shchogolev S. A. On existence of a special kind's integral manifold of the nonlinear differential system with slowly varying parameters . . . 80

MECHANICS

Arkhypenko K. M., Kryvyi O. F. Crack and inclusion under full contact in the non-uniform anisotropic plane 97

Zabuga A. G., Antonyuk E. Ya., Bobukh I. A., Sokolov E. V. About impact dynamics of perfectly rigid bodies in complex systems with friction interaction 105

Fesenco A. A. The problem of the stationary heat-conduction for the semi-infinite layer 122

CHRONICLE

Kichmarenko O. D. International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov 131

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 2(18).–С. 7–13

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 47F05, 47A10
УДК 517.94

Г. А. Закирова, Е. В. Кириллов
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ L-СЛЕД ОДНОГО ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

Закірова Г. А., Кирилов Є. В. Регуляризований L-слід одного збуреного оператора. В роботі за допомогою модифікованого резольвентного методу отримано формулу відносного регуляризованого сліду збуреного дискретного самоспряженого оператора.
Ключові слова: відносний регуляризований слід, дискретний оператор.

Закирова Г. А., Кириллов Е. В. Регуляризованный L-след одного возмущенного оператора. В данной работе с помощью модифицированного резольвентного метода получена формула относительного регуляризованного следа возмущенного дискретного самосопряженного оператора.
Ключевые слова: относительный регуляризованный след, дискретный оператор.

Zakirova G. A., Kirillov E. V. L-regularized trace of one of the perturbed operator. In this paper, using the modified method of the resolvent,getting a formula of relative regularized trace for an perturbed discrete and self-adjoint operator.
Key words: relative regularized trace, discrete operator.

Введение. Истоки теории регуляризованных следов относят к работе И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана 1953 г. [1], в которой была найдена асимптотика собственных чисел оператора Штурма-Лиувилля. В 60-е годы эта теория была практически завершена для обыкновенных дифференциальных операторов работами В. Б. Лидского, В. А. Садовничего [2, 3, 4].

Вычисление регуляризованных следов является одной из важнейших задач спектрального анализа. Не всегда удается напрямую найти асимптотику собственных чисел операторов или же это сопровождается большими трудностями. Метод регуляризованных следов позволяет значительно упростить поиск асимптотики собственных чисел.

При работе с сингулярными операторами или операторами с неядерной резольвентой вычислить регуляризованный след удается не всегда. В связи с этим в 2005 году в работе [5] А. И. Седовым была выдвинута идея использования так называемых относительных регуляризованных следов. Терминология и основные утверждения были взяты из теории уравнений соболевского типа, разработанной Г. А. Свиридюком [6] и его учениками.

Имеет место и практическая значимость. Например, формула регуляризованного следа оператора Штурма-Лиувилля описывает закон сохранения энергии динамической системы, описываемой уравнением Кортевега—Де Фриза [7]. Формулы регуляризованных следов, вычисленные И. М. Лифшицом в работе [8],

© Закирова Г. А., Кириллов Е. В., 2013

имеют следующий физический смысл: с их помощью было найдено изменение свободной энергии кристалла при внедрении в него чужеродной примеси.

Рассмотрим уравнение Дзекцера

$$(a^2 - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f,$$

моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [9]. Здесь параметры $\alpha,\ \beta > 0,\ a^2 \in \mathbb{R}$ характеризуют среду, свободный член $f = f(x)$ соответствует источникам (стокам) жидкости.

В данной работе рассматривается одномерный случай, т. е. $\triangle = \frac{\partial^2}{dx^2}$.

Зададим операторы $T, L : U \to F$ формулами

$$T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2}, \quad L = a^2 - \Delta, \tag{1}$$

причем

$$F = W_2^k(0,\pi), k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

$$U = \left\{W_2^{k+2}(0,\pi) : u(0) = u(\pi) = 0\right\},$$

$$domT = \left\{u \in W_2^{k+2}(0,\pi) : u''(0) = u''(\pi) = 0\right\} \bigcap U.$$

Пусть P — оператор умножения на, вообще говоря, комплекснозначную функцию $p \in C^2(0,\pi)$, удовлетворяющую условию:

$$p'(0) = p'(\pi).$$

Рассмотрим оператор $T + P$. Обозначим через $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma^L(T+P)$ — где ν_n занумерованы в порядке невозрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Введем необходимые определения:

Определение 1. [10] $\rho^L(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - T)^{-1} \in \mathcal{L}(F;U)\}$ — *резольвентное множество оператора T относительно оператора L.*

Определение 2. [10] *Множество $\sigma^L(T) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(T)$.*

Определение 3. [10] $R_0(\mu) = (\mu L - T)^{-1}$ — *L-резольвента оператора T.*

Определение 4. [10] $R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1}$ — *L-резольвента оператора $T + P$.*

Основные результаты.

Рассмотрим операторы T и L, заданные формулой (1). Очевидно, что

$$\mu_n = \lambda_n \frac{\beta\lambda_n - \alpha}{\lambda_n - a^2}, \tag{2}$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma(\Delta)$ — собственные числа оператора Лапласа, порожденного краевой задачей Дирихле:

$$\Delta u = a^2 u, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Известно, что

$$\lambda_n = -n^2.$$

Для оператора L имеем:

$$L\varphi_s = (a^2 - \Delta)\varphi_s = (a^2 - \lambda_s)\varphi_s = \begin{cases} (a^2-\lambda_s)\varphi_s, a^2 \neq \lambda_s \\ 0, a^2 = \lambda_s \end{cases},$$

поэтому:

$$R_0^L(\mu)\varphi_s = \begin{cases} \dfrac{\varphi_s}{\mu - \mu_s}, & a^2 \neq \lambda_s, \\ 0, & a^2 = \lambda_s, \end{cases} \tag{3}$$

$$R_0(\mu)\varphi_s = \begin{cases} \dfrac{\varphi_s}{\beta a^4 - \alpha a^2}, & a^2 = \lambda_s, \\ \dfrac{\varphi_s}{(\mu - \mu_s)(a^2 - \lambda_s)}, & a^2 \neq \lambda_s. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, что операторы $R_0(\mu), R_0^L(\mu), \mu \in \rho(T)$, являются ядерными, поскольку ряды из собственных чисел данных операторов сходятся.

Выберем $\gamma_n = \{\mu : |\mu - \mu_n| = r_n, \quad r_n = n\beta - \frac{\beta}{2}\}$.

1. Необходимые утверждения

Лемма 1. *Если при* $\mu \in \gamma_n$ $\|PR_0(\mu)\| = q < 1$, *то справедливо равенство*

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu). \tag{5}$$

Доказательство.

Рассмотрим тождество

$$\mu L - T - P = (\mathbb{I} - pR_0(\mu))(\mu L - T).$$

Так как $\|PR_0(\mu)\| < 1$, то существует линейный ограниченный оператор

$$R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1} = R_0(\mu)(\mathbb{I} - pR_0(\mu))^{-1}.$$

Из этого соотношения следует, что $R(\mu) = R_0(\mu)B(\mu)$, где $B(\mu)$ — некоторый ограниченный оператор. Поскольку T — дискретный оператор, то $R_0(\mu)$ является вполне непрерывным, следовательно, $R(\mu)$ есть также вполне непрерывный оператор, т. е. оператор $T + P$ является дискретным. Из последнего соотношения также следует, что $R(\mu)$ — ядерный оператор, для которого справедливо разложение в сходящийся по норме ряд:

$$R(\mu) = R_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_0(\mu)P]^k R_0(\mu),$$

отсюда, домножив предыдущее тождество на L слева, получим

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty}[R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu).$$

Лемма 2. *Пусть $\mu \in \rho^L(T)$, тогда выполняется следующая оценка:*

$$\|LR_0(\mu)\| \leq \frac{1}{\rho(\mu, \sigma^L(T))}, \tag{6}$$

здесь $\rho(\mu, \sigma^L(T))$ означает расстояние от точки μ до L-спектра оператора T.

Доказательство.

Пусть $\lambda \in \rho^L(T)$. Известно представление L-резольвенты оператора T в виде ряда Неймана

$$R_0(\lambda) = R_0(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu - \lambda)^k (LR_0(\mu)).$$

Очевидно, что ряд в правой части абсолютно сходится, по крайней мере для тех λ, которые удовлетворяют условию $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|LR_0(\mu)\|}$.

Отсюда получим

$$\|LR_0(\mu)\| \leq \frac{1}{\rho(\mu, \sigma^L(T))}.$$

2. Вычисление относительного регуляризованного следа возмущенного оператора $T + P$

Рассмотрим норму разности проекторов Рисса:

$$\Big\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}(R(\mu) - R_0(\mu))d\mu\Big\| \leq \int_{\gamma_n}\|R_0(\mu)P\| \cdot \|R(\mu)\||d\mu| <$$

$$< \int_{\gamma_n}\|R_0(\mu)L\| \cdot \|R(\mu)\||d\mu| < 1.$$

Поэтому все корневые подпространства оператора $T + P$ имеют такую же размерность, что и оператор T, следовательно, спектр оператора $T + P$ в данном случае будет однократным. Рассмотрим ряд (5)

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty}[R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu).$$

Умножим правую и левую части данного равенства на $\dfrac{\mu}{2\pi i}$ и проинтегрируем полученное равенство по контуру γ_n. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR(\mu)d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR_0(\mu)d\mu + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu[R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu)d\mu.$$

Найдем матричный след от обеих частей полученного равенства, при этом воспользуемся ядерностью операторов T и $T+P$.

$$Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR_0(\mu)d\mu = Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k}{\mu-\mu_k}d\mu = \mu_n SpP_n = \mu_n\sum_{s=1}^{\infty}(P_n\varphi_s,\varphi_s) =$$
$$= \mu_n\sum_{s=1}^{\infty}\Big((\varphi_s,\varphi_n)\varphi_n,\varphi_s\Big) = \mu_n\sum_{s=1}^{\infty}\Big((\varphi_s,\varphi_n)(\varphi_n,\varphi_s)\Big) = \mu_n.$$

Аналогично,

$$Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR(\mu)d\mu = \nu_n.$$

Для оценок поправок теории возмущений используем следующую лемму, известную из [11]:

Лемма 3. *При $\mu\in\gamma_n$ справедлива следующая оценка*

$$\|R_0(\mu)\| = O(n^{-2}).$$

Оценим l-ю поправку теории возмущений.

$$|\alpha_n^l| = |Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu(R_0(\mu)P)^l LR_0(\mu)d\mu| = \frac{1}{2\pi l}|\int_{\gamma_n}Sp(PR_0)^l d\mu| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi l}\int_{\gamma_n}|Sp(PR_0)^l| * |d\mu| \le \frac{1}{2\pi l}\int_{\gamma_n}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^l\|_1|d\mu| =$$

$$= \frac{1}{2\pi l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR)^l\|_1\int_{\gamma_n}|d\mu| \le \frac{r_n}{l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^{l-2}\| * \max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^2\|_1 \le$$

$$\le \frac{r_n}{l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^{l-2}\|\cdot\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)\|_2^2 \le \frac{r_n\|P\|^l}{l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|R_0\|^{l-2}\cdot\max_{\mu\in\gamma_n}\|R_0\|_2^2 =$$

$$= \frac{r_n\|P\|^l}{l}\cdot\frac{1}{r_n^{l-2}}\cdot\max_{\mu\in\gamma_n}\|R_0\|_2^2 = O(n^{1-l}).$$

Вычислим первую поправку теории возмущений, используя равенства (3), (4):

$$\alpha_n^1 = Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu R_0(\mu)PLR_0(\mu)d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu Sp(R_0(\mu)PLR_0(\mu))d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu\sum_{s=1}^{\infty}(R_0(\mu)PLR_0\varphi_s,\varphi_s)d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu\sum_{s=1}^{\infty}(PR_0^2(\mu)L\varphi_s,\varphi_s)d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(P\varphi_s,\varphi_s)}{(\mu-\mu_s)^2(a^2-\lambda_s)}d\mu = \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{\infty}(P\varphi_s,\varphi_s)\int_{\gamma_n}\frac{\mu}{(\mu-\mu_s)^2(a^2-\lambda_s)}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P\varphi_n, \varphi_n)\int_{\gamma_n} \frac{\mu}{(\mu-\mu_n)^n(a^2-\lambda_n)}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P\varphi_n, \varphi_n)\int_{\gamma_n} \frac{\mu d\mu}{(\mu-\mu_n)^2(a^2-\lambda_n)} = \frac{(P\varphi_n, \varphi_n)}{a^2-\lambda_n}.$$

Вычислим $(P\varphi_n, \varphi_n)$. В качестве $\{\varphi_n\}$ возьмем ортонормированный набор собственных функций оператора Лапласа, занумерованный по невозрастанию собственных значений λ_k с учетом их кратности.

$$(P\varphi_n, \varphi_n) = \int_0^\pi p(x)\varphi_2^n(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p(x)\sin^2(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p(x)(\frac{1-\cos(2nx)}{2})dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)\cos(2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx + \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi p'(x)\sin(2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx + \frac{1}{4\pi n^2}\int_0^\pi p''(x)\cos(2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p''(x)\cos(2nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{pi} p(x)dx + O(n^{-2}).$$

С учетом произведенных вычислений получим

$$\alpha_n^1 = \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx + \frac{1}{2\pi n^2}\int_0^\pi p''(x)\sin(nx)dx}{a^2-\lambda_n} = \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx + O(n^{-2})}{a^2-\lambda_n}.$$

Вычислим вторую поправку:

$$\alpha_n^2 = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{m=1,\\ m\neq a,\\ m\neq n}}^{\infty}\Big[\frac{(Pv_m, v_n)(Pv_n, v_m)(\lambda_n - a^2)}{(\beta\lambda_m^2 - \alpha\lambda_m)(\lambda_n - a^2) - (\beta\lambda_n^2 - \alpha\lambda_n)(\lambda_m - a^2)}\Big] -$$

$$-\Big[\frac{(Pv_n, v_a)(Pv_a, v_n)}{\beta a^4 - \alpha a^2}\Big]_{n\neq a} \leq O(1)\sum_{\substack{m=1,\\ m\neq a,\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{1}{(n-m)^5 n} - O(n^{-4}) = O(n^{-4}).$$

Сводя воедино все вычисления, получим что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\nu_n - \mu_n - \frac{2}{\pi(a^2-\lambda_n)}\int_0^\pi p(x)dx\Big]$$

сходится.

Таким образом, доказана следующая:

Теорема 1. *Если выполнены условия*

1) $p'(0) = p'(\pi)$,

2) $\|P\| < \frac{\beta}{2}$,

3) $p(x) \in C^2_{[0,\pi]}$,

тогда справедлива формула относительного регуляризованного следа возмущенного оператора $T + P$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu_n - \mu_n - \frac{2}{\pi(a^2 - \lambda_n)} \int_0^{\pi} p(x)dx \right] = 0.$$

Заключение. Было показано, что в условиях поставленной задачи возмущенный оператор имеет дискретный спектр, и получена формула его относительного регуляризованного следа.

1. **Гельфанд И. М.** Об одном тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // ДАН СССР. – 1991. – Т. 84, № 4. – С. 593–596.
2. **Лидский В. Б.** Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций / В. Б. Лидский, В. А. Садовничий // Функциональный анализ и его приложения. – 1967. – Т. 2. – С. 52–59.
3. **Садовничий В. А.** Следы операторов / В. А. Садовничий, В. Е. Подольский // УМН. – 2006. – Т. 61. – Вып. 5. – С. 89–156.
4. **Садовничий В. А.** Дзета-функция и собственные числа дифференциальных операторов // Дифф. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 1276–1285.
5. **Седов А. И.** Регуляризованный след оператора с неядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Вестник МаГУ. – 2005. – Вып. 8. – С. 173–177.
6. **Sviridyuk G. A.** Linear Sobolev Type Equation and Degenerator Semigroups of Operators/G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov // Utrecht, Boston. – 2003.
7. **Захаров В. Е.** Уравнение Кортевега—де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система / В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев //Функциональный анализ и его приложения. – 1971. – Т. 5, вып. 8. – С. 18–27.
8. **Лифшиц И. М.** Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой / В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев //УМН. – 1952. – Т. 7, вып. 1. – С. 171–180.
9. **Дзекцер И. М.** Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью //ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.
10. **Свиридюк Г. А.** К общей теории полугрупп операторов //УМН. – 1994. – Т. 49, вып. 4. – С. 47–74.
11. **Като Т.** Теория возмущения линейных операторов / Като Т. – М. : Мир, 1972. – 739 с.

Mathematical Subject Classification: 35Q35, 65M60
УДК 517.9

А. А. Замышляева, А. С. Муравьев
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

Замишляєва А. О., Муравйов А. С. Чисельне дослідження математичної моделі Буссінеска – Лява. Стаття присвячена дослідженню математичної моделі Буссінеска – Лява. У статті наведена теорема про існування та єдиності розв'язку рівняння Буссінеска – Лява і опис алгоритму для чисельного вирішення поставленого завдання.
Ключові слова: модель Буссінеска – Лява, рівняння соболєвського типу.

Замышляева А. А., Муравьев А. С. Численное исследование математической модели Буссинеска – Лява. Статья посвящена исследованию математической модели Буссинеска – Лява. В статье приведена теорема о существовании и единственности решения уравнения Буссинеска – Лява и описание алгоритма для численного решения поставленной задачи.
Ключевые слова: модель Буссинеска – Лява, уравнения соболевского типа.

Zamyshlyaeva A. A., Muravyov A. S. Numerical study of mathematical models of Boussinesq – Love. The article is devoted to the study of the Boussinesq – Love mathematical model. In this paper we present a theorem on the existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq – Love equation and description of the algorithm for the numerical solution of the problem.
Key words: Boussinesq – Love model, Sobolev type equations.

Введение. Интерес к уравнениям соболевского типа обусловлен тем, что многие физические процессы и явления, такие как фильтрация вязкоупругой жидкости [1], выпучивание двутавровых балок [2], колебания в молекулах ДНК [3], распространение волн на мелкой воде [4], ионно-звуковых волн в плазме [5], фазовые переходы в рамках мезоскопической теории [6] и др. описываются такими уравнениями. В нашем случае речь пойдет о частном случае уравнения соболевского типа, а именно об уравнении Буссинеска – Лява.

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\lambda' - \Delta)u_t + \beta(\lambda'' - \Delta)u, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{1}$$

с начальными

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \qquad 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \qquad 0 < x < \pi \end{aligned} \tag{2}$$

и краевыми

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

условиями. Здесь $u = u(x,t)$ – неизвестная функция, φ, ψ – заданные функции, подлежат дальнейшему определению, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – одномерный оператор Лапласа. Математическая модель (1) – (3) описывает продольные колебания упругого

© Замышляева А. А., Муравьев А. С., 2013

стержня с учетом поперечной инерции. Математическая теория упругости наиболее полно отражена в монографии [7].

Основные результаты.

1. Теорема о существовании и единственности решения.

Теорема 1. *Пусть функции φ, ψ непрерывны и имеют кусочно-непрерывную производную на $[0, \pi]$, причём $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \psi(0) = \psi(\pi) = 0$. Тогда*
(i) если $\lambda \neq -l^2, l \in \mathbb{N}$, то задача (1)–(3) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\varphi_k - \frac{\psi_k - \mu_{k_1}\varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} \right) e^{\mu_{k_1} t} + \frac{\psi_k - \mu_{k_1}\varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_2} t} \right) \sin kx;$$

(ii) если $\lambda = -l^2$ и $\lambda' \neq -l^2$ и выполняется

$$\varphi_l = \frac{\psi_l}{\mu_l},$$

то задача (1)–(3) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$u(x,t) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\left(\tfrac{\varphi_k \mu_{k_2} - \psi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_1} t} + \tfrac{\psi_k - \mu_{k_1}\varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_2} t} \right) \sin kx \right) + \\ + \varphi_l \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} e^{\mu_l t} \sin lx,$$

(iii) если $\lambda = \lambda' = -l^2$, то при условии выполнения

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\pi} \varphi(x) \sin lx dx = 0 \Leftrightarrow \varphi_l = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\pi} \psi(x) \sin lx dx = 0 \Leftrightarrow \psi_l = 0, \end{cases}$$

задача (1)–(3) имеет решение, представимое в виде:

$$u(x,t) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\tfrac{\varphi_k \mu_{k_2} - \psi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_1} t} + \tfrac{\psi_k - \mu_{k_1}\varphi_k}{\mu_{k_2} - \mu_{k_1}} e^{\mu_{k_2} t} \right) \sin kx.$$

2. Алгоритм численного решения. Описание программы для ЭВМ.

На основании полученной теоремы была разработана и реализована в среде Maple 15.0 для Windows программа для численного решения задачи Буссинеска – Лява (1)–(3) на языке программирования Maple. Для разработки алгоритма программы был применен модифицированный метод Галеркина. В программе можно управлять точностью нахождения решения в виде количества слагаемых галеркинской суммы. Блок-схема алгоритма представлена на рисунке 1.

Опишем алгоритм подробнее. Каждому блоку алгоритма соответствует один шаг.

Шаг 1. После начала выполнения программы необходимо ввести количество слагаемых галеркинской суммы N, коэффициенты λ, λ_1, λ_2, α, β, начальные

условия u_0, u_1, отрезок $[s0, s1]$, на котором ищется решение, и промежуток времени $t \in [0, \tau]$.

Шаг 2. В цикле от 1 до N составляется искомое приближенное решение V в виде галеркинской суммы $\sum\limits_{m=1}^{N} a_m(t) \sin mx$.

Шаг 3. Выражения для V подставляется в уравнение.

Шаг 4. В цикле по i от 1 до N уравнение умножается на собственную функцию $\varphi_m(x)$ и интегрируется на отрезке $[s0, s1]$.

Шаг 5. Проверка принодлежности λ спектру оператора Лапласа, то есть представимо ли λ в виде $-k^2$.

Если на пятом шаге истина:

Шаг 6. Проверка условия $\lambda = \lambda_1$.

Если на шестом шаге истина:

Шаг 7. Проверка условия из третьего пункта теоремы 3 для начальных условий, а именно, что $a_k(0) = 0$ и $a_k(0) = 0$.

Если на седьмом шаге истина:

Шаг 8. В цикле от 1 до N согласно третьему пункту теоремы 3 составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений, исключая k-е уравнение.

Шаг 9. Начальные функции раскладываются в галеркинскую сумму, исходя из них определяются начальные условия для системы уравнений, полученной на предыдущем шаге, исключая условия с номером k.

Шаг 10. Отдельно решается алгебраическое уравнение относительно $a_k(t)$. Таким образом будет найдено k-е слагаемое галеркинской суммы. Далее выполняется шестнадцатый шаг.

Если на шестом шаге ложь:

Шаг 11. В соответствии со вторым пунктом теоремы 3 проверяется условие для начальных данных, что $a_k(0) = \frac{a_k(0)}{\mu_k}$. Где μ_k — корень характеристического уравнения для уравнения Буссинеска – Лява (1).

Если на одиннадцатом шаге истина:

Шаг 12. В цикле от 1 до N составляется однородная система дифференциальных уравнений, особенностью которой является, что k-е уравнение этой системы будет однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Далее выполняется четырнадцатый шаг.

Если на пятом шаге ложь:

Шаг 13. В цикле от 1 до N составляется система однородных дифференциальных уравнений.

Шаг 14. Начальные условия раскладываются в галеркинскую сумму, исходя из них определяются начальные условия для системы уравнений, полученной ранее. Далее выполняется шестнадцатый шаг.

Если на седьмом или одиннадцатом шаге ложь:

Шаг 15. В соответствии с третьим пунктом теоремы 3 программа выводит сообщение, что решений нет.

Шаг 16. Полученная система однородных дифференциальных уравнений с начальными данными решается методом, встроенным в пакет Maple 15.

Шаг 17. Полученное решение выводится на экран в виде функции и в виде графика.

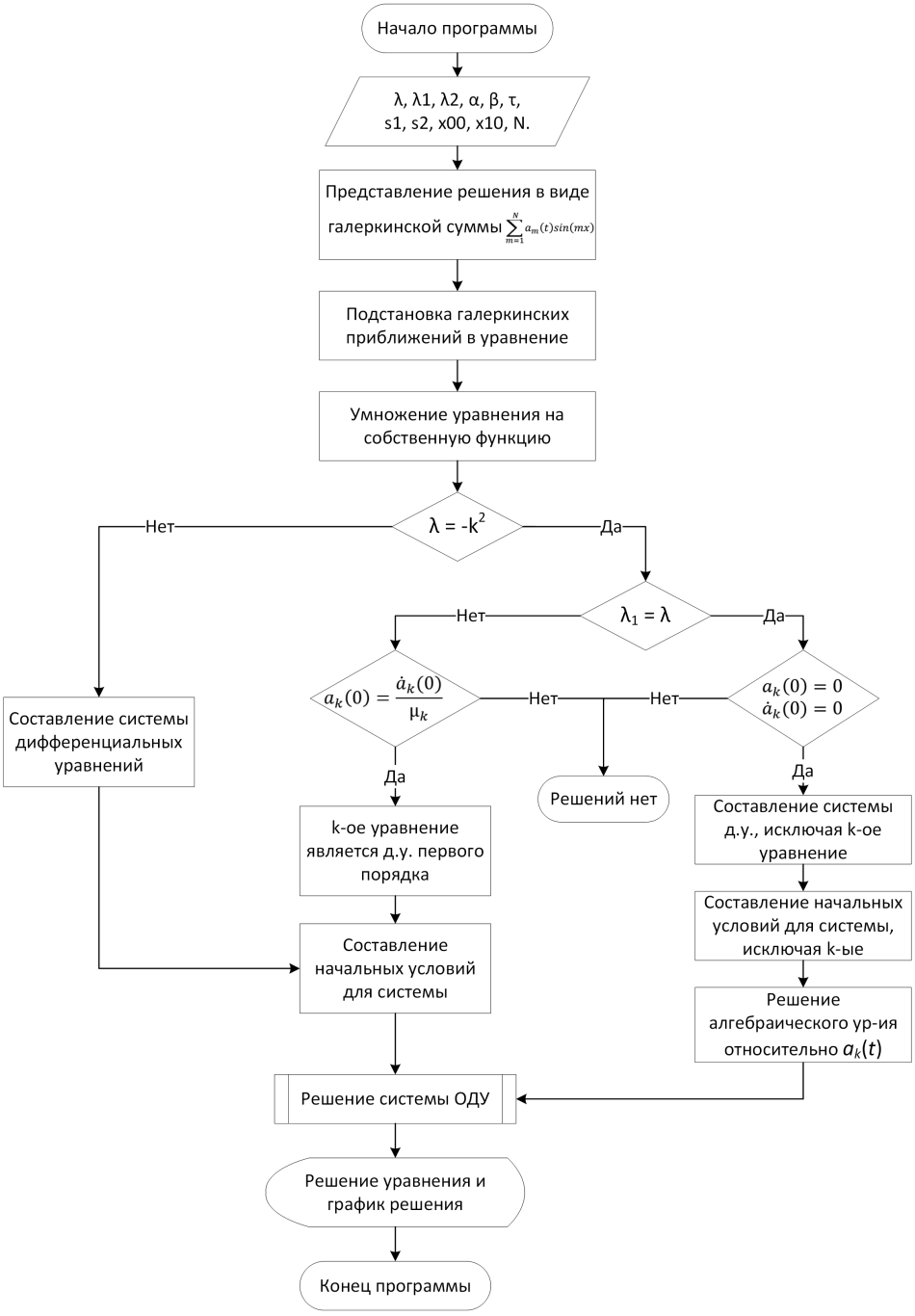


Рис. 1. Блок-схема алгоритма метода решения задачи (1) – (3)

3. Вычислительный эксперимент.

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява (1)

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\lambda' - \Delta)u_t + \beta(\lambda'' - \Delta)u, \qquad x \in [0, \pi], \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

где $\lambda = -1, \quad \lambda' = 0, \quad \lambda'' = 0, \quad \alpha = \beta = 1$, с граничными $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ и начальными условиями

$$u(x,0) = \sin 2x,$$
$$u_t(x,0) = \sin 3x.$$

При помощи алгоритма, описанного выше, было получено приближенное решение при $N = 6$:

$$u(x,t) = \left(\frac{3}{4}e^{\frac{-2t}{3}} + \frac{1}{4}e^{2t}\right)\sin 3x + \left(\frac{8}{123}\sqrt{41}e^{\frac{3(3+\sqrt{41})t}{16}} - \frac{8}{123}\sqrt{41}e^{\frac{-3(-3+\sqrt{41})t}{16}}\right)\sin 4x.$$

График решения представлен на рисунке 2.

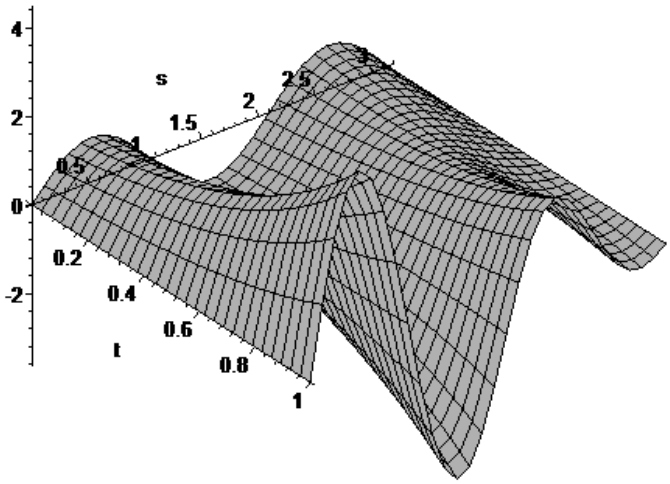


Рис. 2. Решение уравнения Буссинеска – Лява

Заключение. Теоретические результаты, представленные в теореме 1, были применены для разработки и реализации в среде Maple 15.0 программы для численного решения задачи (1) – (3) на языке программирования Maple. Данная программа позволяет находить численное решение для задачи (1) – (3) с произвольными параметрами $\lambda, \lambda', \lambda'', \alpha$ и β, а также с произвольными начальными условиями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

1. **Баренблатт Г. И.** Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Прикл. мат. и механ. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

2. **Hoff N. J.** Creep buckling / N. J. Hoff // Aeron. – 1956. – V. 7, № 1. – P. 1–20.

3. **Muto V.** Toda lattice model for DNA: thermally genereted solitons / V. Muto, Ac. Scott, Pl. Cristiansen // Physica D. – 1990. – № 44. – P. 75–91.

4. **Уизем Д.** Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977.

5. **Инези И.** Экспериментальное исследование солитонов в плазме : Солитоны в действии. – М.: Мир, 1981. – С. 161–184.

6. **Плотников П. И.** Уравнение фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П. И. Плотников, А. В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651–669.

7. **Ляв А.** Математическая теория упругости /А. Ляв; пер. с англ. Б. В. Булгаков, В. Я. Натанзон. – М. : ОНТИ, 1935. – 674 с.

Mathematical Subject Classification: 49N25
УДК: 517.9

Г. С. Зима
Донбаський державний педагогічний університет

ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Зима Г. С. Існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Для деяких класів імпульсних систем отримано умови існування оптимальних керувань в термінах правих частин та критерію якості.
Ключові слова: оптимальне керування, імпульсна дія, момент імпульсу, стрибок.

Зима А. С. Существование оптимального управления для некоторых классов систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Для некоторых классов импульсных систем получены условия существования оптимальных управлений в терминах правых частей и критерия качества.
Ключевые слова: оптимальное управление, импульсное воздействие, момент импульса, скачок.

Zima G. S. Existence of optimal controls for some classes of the systems of differential equations with an impulsive action. It is showed the conditions of existence of optimal controls for some classes of the systems of differential equations in terms of their right parts and cost function.
Key words: optimal controls, impulsive action, moment of impulse, jump.

Вступ. В даній роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t,x) + B(t,x)u, \quad t \neq t_i, \\ \triangle\, x|_{t=t_i} = g_i(x)w_i, \\ x(0) = x_0 \end{gathered} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$\begin{gathered} C(u,w) = \int\limits_0^T [A^0(t,x) + B^0(t,u)]dt + A^1(x(t_1),...,x(t_N),t_1,...,t_N) + \\ + B^1(w_1,...,w_N,t_1,...,t_N) \to inf, \end{gathered} \tag{2}$$

де $T > 0$ фіксоване, $t \in [0,T]$, $t_i \in (0,T]$ — моменти імпульсної дії, $N = N(T) < \infty$ — кількість моментів імпульсної дії на $(0,T]$.

Більш точна постановка задачі буде зроблена в основній частині роботи.

Подібні задачі раніше розглядалися в роботах багатьох авторів. Так, в монографії [1] така задача розглядалася з точки зору оптимальних імпульсних керувань. Це означає, що керування присутнє лише в імпульсній частині. Автори запропонували розв'язання такої задачі методом квазіваріаційних нерівностей.

© Зима Г. С., 2013

Методи розв'язання такої задачі з точки зору розривних динамічних систем з подальшим застосуванням принципу максимума розвивалися в роботах Л. Т. Ащепкова та його учнів (див. наприклад [2]), де є широка бібліографія.

В монографії [3] для імпульсних систем розвиваються варіаційні підходи в комбінації з принципом максимума. Відзначимо також роботи [4], [5], [6], де отримано принцип максимума для систем з нефіксованими моментами імпульсів.

В роботі [7] задача оптимального керування імпульсними системами зводиться до задачі оптимального керування для рівнянь з мірами в деякому банаховому просторі, при цьому в ролі керування виступають скінченні міри. В результаті задача набуває вигляду

$$dx = Axdx + f(t,x)dt + g(t,x)v(dt) + C(t,x)u(dt),$$

$$x(0) = x_0, \quad t \in I,$$

$$J(u) = \int\limits_I l(t,x(t))dt + \Psi(x(T)) + \varphi(u) \to inf,$$

тут $u(dt)$ — міра, що є параметром керування. При досить серйозних припущеннях, а саме:

1) ліпшицевість і лінійний ріст функцій f, g, C за змінною x;

2) слабка компактність множини допустимих керувань;

3) демінеперервність оператора $L_t(u) = \int\limits_0^t e^{A(t-s)}C(s,x(s))u(ds), \quad t \in I,$

тут доводиться існування оптимальних керувань для такої задачі.

В роботі [8] розглянута задача оптимального керування імпульсною системою при нелокальних крайових умовах. За допомогою варіації керування тут отримані різні необхідні умови оптимальності другого порядку.

Однак відзначимо, що отримані в перерахованих вище роботах результати носять в основному характер необхідних умов існування оптимального керування. Виключення складає лише лінійний випадок, для якого з принципу максимума можна отримати достатні умови існування оптимальності. Тому актуальною є задача отримання достатніх умов оптимальності для нелінійних імпульсних систем в термінах їх правих частин та критерія якості, без застосування принципу максимума. Результати, отримані в роботі, є узагальненням результатів роботи [9] на імпульсний випадок.

Робота складається зі вступу, постановки задачі, основного результату та прикладу.

Постановка задачі. Розглядається задача оптимального керування (1), (2), де $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — фіксований вектор, $T > 0$ фіксоване, $t \in [0,T]$, $t_i \in (0,T]$ — моменти імпульсної дії, $N = N(T) < \infty$ — кількість моментів імпульсної дії на $(0,T]$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, U — замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^m$, що містить точку 0, $w_i \quad (i = \overline{1,N}) \subset V$, V — замкнена множина в $\mathbb{R}^r$, що містить точку 0. Тут $A(t,x)$ — n-мірна вектор-функція, $B(t,x)$ — $n \times m$-мірна матриця, g_i — $n \times r$-мірні матриці.

Функції $A(t,x), B(t,x)$ вважаються неперервними за сукупністю змінних $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g_i(x)$ — неперервні за $x \in \mathbb{R}^n$. Будемо вважати також, що для них виконана умова лінійного по x росту, тобто існує стала $K > 0$ така, що для $t \in [0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered} \mid A(t,x) \mid \leq K(1+\mid x \mid), \\ \parallel B(t,x) \parallel \leq K(1+\mid x \mid), \quad \mid g_i \mid \leq K(1+\mid x \mid), \end{gathered} \tag{3}$$

тут $|\cdot|$ — евклідова норма вектора, а $\|\cdot\|$ — норма матриці, узгоджена з нормою вектора.

Відносно функцій A^0, B^0, A^1, B^1, що входять до критерію якості (2), будемо вважати, що вони є неперервними за сукупністю змінних, причому $A^0 \geq 0, A^1 \geq \geq 0$, а B^0 та B^1 задовольняють умови:

$$\begin{gathered} B^0(t,u) \text{ — опукла по } u \text{ та } \quad B^0(t,u) \geq a|u|^p \\ \text{для деяких} \quad a > 0 \quad \text{і} \quad p > 1; \end{gathered} \tag{4}$$

$$B^1(w_1, ..., w_N, t_1, ..., t_N) \geq a(\mid w_1 \mid^p + ... + \mid w_N \mid^p). \tag{5}$$

Допустимими для задачі (1), (2) вважаються керування $u = u(t)$ та вектори $w_1, ..., w_N$ такі, що:

а) $u(t) \in L_p[0,T], u(t) \in U, t \in [0,T]$;

б) $w_i \in V \ i = 1, ..., N$;

в) розв'язок задачі Коші (1) $x(t) = x(t,u,w,x_0)$ визначений на $[0,T]$.

Основні результати. Основним результатом даної роботи є наступна теорема

Теорема 1. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються перераховані вище умови, тоді задача оптимального керування (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань.*

Доведення. Спочатку відзначимо, що множина допустимих керувань непорожня, оскільки вона містить точку (0, 0), відповідна даному керуванню система (1) при цьому має вигляд

$$\dot{x} = A(t,x),$$

$$x(0) = x_0,$$

і в силу неперервності функції $A(t,x)$ і умови (3) розв'язок такої задачі Коші існує на відрізку $[0,T]$.

Оскільки критерій якості $C(u,w) \geq 0$, то існує невід'ємна нижня границя m значень $C(u,w)$. Нехай $u^{(n)}$, $w^{(n)}$ — послідовність допустимих керувань таких, що відповідна послідовність $C(u^{(n)}, w^{(n)}) \to m$ при $n \to \infty$. Відначимо, що при досить великих n виконується нерівність

$$C(u^{(n)}, w^{(n)}) \leq m + 1.$$

Звідси, та з (5) випливає оцінка $a \sum\limits_{i=1}^{N} \mid w_i^{(n)} \mid^p \leq m + 1$. Останнє означає обмеженість послідовності $w_i^{(n)}$, $i = \overline{1,N}$. А тому з неї можна виділити збіжну підпослідовність. Без обмеження загальності будемо вважати, що сама $w_i^{(n)}$ збіжна для $i = \overline{1,N}$, отже $w_i^{(n)} \to w_i^{(*)}$. При цьому в силу замкнутості V $w_i^{(*)} \in V$, $i = \overline{1,N}$. З умови (3) також випливає, що при досить великих n

$$\int_0^T \mid u^{(n)}(t) \mid^p dt \leq \frac{m+1}{a}. \tag{6}$$

Отже з послідовності $u^{(n)}(t)$ можна виділити слабко збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності, також будемо вважати, що сама $u^{(n)}(t)$ слабко збігається до $u^{(*)}(t) \in L_p([0,T])$, яка задовольняє нерівність (6).

Тоді за лемою Мазура [10, с. 173] знайдеться опукла комбінація

$$b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$$

елементів $u_i(t) \in U$ ($\alpha_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1$), що $b_k \to u^*$, $k \to \infty$ за нормою L_p. Отже, існує збіжна майже скрізь на $[0,\infty)$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l}, що $b_{k_l} \to u^*(t)$, $l \to \infty$ для майже всіх t. Оскільки U опукла і замкнена множина, то $\sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$. Тоді із замкненості множини U випливає, що $u^*(t) \in U$ майже для всіх $t \in [0,T]$.

Проведемо тепер оцінку розв'язків $x^{(n)}(t)$, що відповідають керуванням $(u^{(n)}(t), w_i^{(n)})$. Для $q = \dfrac{p}{p-1}$ маємо

$$\begin{aligned} |x^{(n)}(t)|^q \leq (\mid x_0 \mid + \int_0^t \mid A(x^{(n)}(s),s) + B(x^{(n)}(s),s) \mid\mid u^{(n)}(s) \mid ds + \\ + \sum_{0 \leq i < t} |g_i(x^{(n)}(t_i)), w_i^{(n)}|)^q \leq \\ \leq 3^{q-1}(\mid x_0 \mid^q + (\int_0^t [K(1+|x^n(s)|) + K(1+|x^n(s)|) \mid u^{(n)}(s) \mid] ds)^q + \\ + (\sum_{0<i<t} K(1+|x^{(n)}(t_i)|)|w_i|)^q. \end{aligned} \tag{7}$$

Оцінимо окремо кожний з доданків:

$$\begin{aligned} (\int_0^t [K(1+|x^{(n)}(s)|) + K(1+|x^n(s)|) \mid u^{(n)}(s) \mid] ds)^q = \\ = K^q (\int_0^t (1+|x^{(n)}(s)|)(1+ \mid u^{(n)}(s) \mid) ds)^q \leq \\ \leq K^q \int_0^t (1+|x^{(n)}(s)|)^q ds \cdot (\int_0^t (1+ \mid u^{(n)}(s) \mid)^p ds)^{\frac{q}{p}} \leq \\ \leq K^q \int_0^t 2^{q-1}(1+|x^{(n)}(s)|)^q ds (2^{p-1} \int_0^t (1+ \mid u^{(n)}(s) \mid)^p ds)^{\frac{q}{p}} \leq \\ \leq (2K)^q (T + \int_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds)(T + \int_0^t \mid u^{(n)}(s) \mid^p ds)^{\frac{q}{p}}) \leq \\ \leq ((2K)^q T + (2K)^q \int_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds)(T + \int_0^t \mid u^{(n)}(s) \mid^p ds)^{\frac{q}{p}}). \end{aligned} \tag{8}$$

Позначимо $(2K)^q T = C_1$. Оскільки $(T + \int\limits_0^t \mid u^{(n)}(s) \mid^p ds)^{\frac{q}{p}} \leq (T + \frac{m}{a})^{\frac{q}{p}} = C_2$, то, продовжуючи нерівність (8), матимемо, що другий доданок в ній оцінюється величиною

$$C_1 + C_2(2K)^q \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds. \tag{9}$$

Для оцінки сумарного члена в (7) матимемо

$$(\sum_{0<i<t} K(1+|x^{(n)}(t_i)|)|w_i^{(n)}|)^q \leq K^q \sum_{0<t_i<t} (1+|x^{(n)}(t_i)|)^q (\sum_{0<i<t} |w_i^{(n)}|^p)^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\leq K^q \sum_{0<t_i<t} 2^{q-1}(1+|x^{(n)}(t_i)|^q)(\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\leq K^q (\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} (\sum_{0<t_i<t} 2^{q-1} + 2^{q-1} \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q) \leq$$

$$\leq K^q (\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} (2^{q-1}N + 2^{q-1} \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q) \leq C_4 + C_5 \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q,$$

$$\text{де} \quad C_4 = K^q (\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} 2^{q-1} N, \quad C_5 = K^q (\frac{1+m}{a})^{\frac{q}{p}} 2^{q-1}. \tag{10}$$

Із (7) – (10) отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} |x^{(n)}(t)|^q \leq C_1 + C_2(2K)^q \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds + C_4 + C_5 \sum_{0<t_i<t} |x^{(n)}(t_i)|^q = \\ = C_6 + C_7 \int\limits_0^t |x^{(n)}(s)|^q ds, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{де} \quad C_6 = C_1 + C_4, \quad C_7 = C_2(2K)^q.$$

З аналога нерівності Гронуолла — Беллмана [11, с. 30] маємо:

$$|x^{(n)}(t)|^q \leq C_6 e^{C_7 T} \prod_{0<t_i<t} (1+C_5) \leq C_6 e^{C_7 T} (1+C_5)^N = C_8 \tag{12}$$

$$\text{для} \quad t \in [0,T].$$

Останнє означає рівномірну обмеженість розв'язків $x^{(n)}(t)$ для $t \in [0,T]$.

На інтервалі $[0,t_1]$ для будь-яких двох моментів часу t', t'' $(0 \leq t' \leq t'' \leq t_1)$ маємо

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int\limits_0^t A(x^{(n)}(s),s) + B(x^{(n)}(s),s)u^{(n)}(s)ds,$$

$$|x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'')| \leq \int\limits_{t'}^{t''} |A(x^{(n)}(s),s)| + |B(x^{(n)}(s),s)||u^{(n)}(s)|ds. \tag{13}$$

З (12) та умови лінійного росту випливає існування сталої $C > 0$, що для всіх n

$$|A(x^{(n)}(t), t)| \leq C, \quad |B(x^{(n)}(t), t)| \leq C \quad t \in [0, T].$$

А тому з (13), в силу неперервності функцій A і B, отримуємо

$$|x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'')| \leq C|t'' - t'| + C(\int\limits_{t'}^{t''} |u^{(n)}(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} |t'' - t'|^{\frac{1}{q}},$$

$$|x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'')| \leq C|t'' - t'| + C(\frac{m+1}{a})^{\frac{1}{p}} |t'' - t'|^{\frac{1}{q}}. \tag{14}$$

Нерівність (14) означає рівностепеневу неперервність послідовності функцій $x^{(n)}(t)$. Тоді з (12) і (14) випливає існування рівномірно збіжної підпослідовності $x^{k_1}(t)$ послідовності $x^{(n)}(t)$ на $[0, t_1]$. Нехай $x_1(t)$ — її границя. Позначимо $x^{k_1}(t_1 + 0) = x^{k_1}(t_1) + g_1(x^{k_1}(t_1))w_1^{(k_1)}$. При $t \in [t_1, t_2]$ розглянемо рівняння

$$x^{k_1}(t) = x^{k_1}(t_1 + 0) + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x^{k_1}(s), s) + B(x^{k_1}(s), s)u(s)]ds.$$

Аналогічно попередньому доводиться компактність послідовності $x^{k_1}(t)$ на $[t_1, t_2]$ в рівномірній метриці. Отже існує підпослідовність $x^{k_2}(t)$ послідовності $x^{k_1}(t)$ така, що $x^{k_2}(t)$ збігається рівномірно до $x_2(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$. При $k_2 \to \infty$ маємо, що $x_2(t_1+0) = x_1(t_1)+g_1(x_1(t_1))w_1^*$. Далі на інтервалі $[t_2, t_3]$ розглядаємо рівняння

$$x^{k_2}(t) = x^{k_2}(t_2 + 0) + \int\limits_{t_2}^{t} [A(x^{k_2}(s), s) + B(x^{k_2}(s), s)u(s)]ds.$$

Аналогічно, існує підпослідовність $x^{k_3}(t)$ послідовності $x^{k_2}(t)$ така, що $x^{k_3}(t)$ збігається рівномірно до $x_3(t)$ при $t \in [t_2, t_3]$.

Покажемо тепер, що функція

$$x^*(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0, t_1] \\ x_2(t), & t \in [t_1, t_2] \\ \ldots \\ x_{N+1}(t), & t \in [t_N, T] \end{cases} \tag{15}$$

є розв'язком вихідної задачі (1) для керувань (u^*, w^*), тобто що $x^*(t)$ задовільняє рівняння

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t [A(x^*(s), s) + B(x^*(s), s)u^*(s)]ds + \sum_{0<t_i<t} g_i(x^*(t_i))w_i^*. \tag{16}$$

На відрізку $[0, t_1]$ твердження очевидне. Покажемо, що при $t \in [t_1, t_2]$ справедливе рівняння

$$x_2(t) = x_1(t_1) + g_1(x_1(t_1))w_1^* + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x_2(s), s) + B(x_2(s), s)u^*(s)]ds. \qquad (17)$$

Оскільки $\lim\limits_{k_2 \to \infty} x^{k_2}(t) = x_2(t)$ рівномірно за $t \in [t_1, t_2]$ і

$$x^{k_2}(t) = x^{k_2}(t_1 + 0) + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x^{k_2}(s), s) + B(x^{k_2}(s), s)u^{k_2}(s)]ds \qquad (18)$$

($\{k_2\}$ — підпослідовність послідовності $\{k_1\}$), то $x^{k_2}(t_1 + 0) \to x_2(t_1 + 0)$ і

$$x^{k_2}(t_1 + 0) = x^{k_2}(t_1) + g_1(x^{k_2}(t_1))w_1^{k_2} \to x_1(t_1) + g_1(x(t_1))w_1^*.$$

Перейдемо тепер у (18) до границі при $k_2 \to \infty$.

$$x_2(t) = x_1(t_1) + g_1(x(t_1))w_1^* + \lim_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} [A(x^{k_2}(s), s) + B(x^{k_2}(s), s)u^{k_2}(s)]ds.$$

$\lim\limits_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} A(x^{k_2}(s), s)ds = \int\limits_{t_1}^{t} A(x_2(s), s)ds$ в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність, лінійного росту функції $A(x, t)$ і оцінки (12).

Користуючись граничним співвідношенням $\lim\limits_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} B(x_2(s), s)[u^{k_2}(s) - u^*(s)]ds = 0$, а також співвідношенням $\lim\limits_{k_2 \to \infty} B(x^{k_2}(t), t) = B(x_2(t), t)$, що виконується рівномірно, поза деякої множини S довільної малої міри, і нерівністю $\int\limits_S |u^{k_2}|ds \leq \left(\int\limits_{t_1}^{t} |u^{k_2}(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} |S|^{\frac{1}{q}}$, можна довести, що

$$\lim_{k_2 \to \infty} \int\limits_{t_1}^{t} |B(x^{k_2}(s), s) - B(x_2(s), s)||u^{k_2}(s)| = 0,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t} B(x^{k_2}(s), s)u^{k_2}(s) \to \int\limits_{t_1}^{t} B(x_2(s), s)u^*(s).$$

Отже, $x_2(t) = x_1(t_1) + g_1(x_1(t_1))w_1^* + \int\limits_{t_1}^{t} [A(x_2(s), s) + B(x_2(s), s)u^*(s)]ds$.

Аналогічні міркування проводяться на інших інтервалах $[t_k, t_{k+1}]$. Значить, функція $x^*(t)$, побудована за формулою (15), є розв'язком імпульсної системи

$$\frac{dx^*}{dt} = A(x^*(t),t) + B(x^*(t),t)u^*(t), \quad t \neq t_i,$$

$$\triangle\, x|_{t=t_i} = g_i(x^*(t_i))w_i^*.$$

Залишилось показати, що керування (u^*, w^*) — оптимальне, тобто що $C(u^*, w^*) = m$.

Маємо, що $\lim\limits_{k_N\to\infty} C(u^{k_N}, w^{k_N}) = m$. Отже,

$$\lim_{k_N\to\infty} C(u^{k_N}, w^{k_N}) =$$

$$= \lim_{k_N\to\infty} \int\limits_0^T [A^0(x^{k_N}(t),t) + B^0(u^{k_N}(t),t)]dt + B^1(w_1^{k_N}, ..., w_N^{k_N}) +$$

$$+A^1(x^{k_N}(t_1), ..., x^{k_N}(t_N), t_1, ..., t_N).$$

Оскільки функція $A^0(x,t)$ неперервна, то в силу теореми Вейєрштрасса і оцінки (12) функції $A^0(x^{k_N}(t),t)$ і $A^0(x^*(t),t)$ рівномірно за k_N і $t \in [0,T]$ обмежені деякою сталою. А тому з теореми Лебега випливає можливість граничного переходу

$$\lim_{k_N\to\infty} \int\limits_0^T A^0(x^{k_N}(t),t)dt \to \int\limits_0^T A^0(x^*(t),t)dt. \tag{19}$$

Із опуклості по u функції $B^0(u,t)$ отримуємо також, що

$$\lim_{k_N\to\infty} \int\limits_0^T B^0(u^{k_N}(t),t)dt \geq \varliminf_{k_N\to\infty} \int\limits_0^T B^0(u^{k_N}(t),t)dt \geq \int\limits_0^T B^0(u^*(t),t)dt. \tag{20}$$

Очевидно також, що при $w_1^{k_N} \to w_1^*, ..., w_N^{k_N} \to w_N^*$

$$B^1(w_1^{k_N}, ..., w_N^{k_N}) \to B^1(w_1^*, ..., w_N^*),$$

$$A^1(x^{k_N}(t_1), ..., x^{k_N}(t_N), t_1, ..., t_N) \to A^1(x^*(t_1), ..., x^*(t_N), t_1, ..., t_N).$$

Отже, $m = \lim\limits_{k_N\to\infty} C(u^{k_N}, w^{k_N}) \geq C(u^*, w^*)$, тому $C(u^*, w^*) = m$ і (u^*, w^*) – оптимальне керування.

Теорема доведена.

Проілюструємо доведену теорему прикладом.

Приклад 1. *Нехай задача (1), (2) має вигляд*

$$\dot{x} = t\cos x + \sin tx \cdot u, \quad t \neq t_i,$$

$$x(0) = 0,$$

$$\triangle\, x|_{t=t_i} = i|x|w_i,$$

$$C(u,w) = \int\limits_0^3 [x^4 + 2u^6(t)]dt + \sum_{0<t_i<3} [x^2(t_i) + w_i^6].$$

Тут $t \in [0,3]$, $t_i = \dfrac{i}{2}$, $i = \overline{1,5}$. $u \in U$ *— довільна опукла замкнена множина в* $\mathbb{R}^1$, *що* $0 \in U$, $w_i \in V$ *— замкнена множина в* $\mathbb{R}^1$, $0 \in V$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Неважко бачити, що дана задача задовольняє умови теореми при $p = 6$. *Отже, вона має розв'язок в класі допустимих керувань, де* $U(t) \in L_6(0,3)$.

Висновки. В статті отримані зручні для практичної перевірки достатні умови існування оптимального керування для імпульсних систем. Відзначимо, що ці умови виражаються лише через праві частини системи та функції, які входять в критерій якості. При цьому для розв'язання задачі не залучається ні принцип максимума, ні метод динамічного програмування.

1. **Бенсусан А., Лионс Ж.-А.** Импульсное управление и квазивариационные неравенства / Бенсусан А., Лионс Ж.-А. – М.: Наука, 1987. – 600с.
2. **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление разрывными системами / Ащепков Л. Т. – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.
3. **Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями / Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. – М.: Физматлит, 2000. – 256 с.
4. **Асланян А. А.** Необходимые условия оптимальности в задачах управления системами дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и нефиксированные моменты времени / Асланян А. А. // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 9. – С. 58–61.
5. **Асланян А. А.** Принцип максимума для разрывных динамических систем / Асланян А. А. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1982. – Вып. 37. – С. 132–137.
6. **Асланян А. А.** Условия оптимальности в задачах управления системами с импульсным воздействием / Асланян А. А. // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 11. – С. 3–6.
7. **Ahmed N. U.** Optimal Control for a General Class of Impulsive Systems on Banach Spaces. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA, December 2003. – P. 480–485.
8. **Шарифов Я. В.** Оптимальное управление для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях / Шарифов Я. В. // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 2. – С. 75–84.
9. **Станжицький О. М., Самойленко О. О.** Коефіцієнтні умови існування оптимального керування для систем диференціальних рівнянь / Станжицький О. М., Самойленко О. О. // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16., № 1. – С. 125–132.
10. **Иосида К.** Функциональный анализ/ Иосида К. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
11. **Samoilenko A. M., Perestyuk N.A.** Impulsive differential equations / Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. – Singapore: World Scientific, 1995. – 400 p.

Mathematical Subject Classification: 34A60
УДК 517.9

О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ И ИХ СВОЙСТВА

Кічмаренко О. Д., Плотніков А. А. Нелінійні диференціальні включення зі змінною розмірністю та їх властивості. В статті введено поняття диференціального включення з змінною розмірністю та отримані деякі властивості їх розв'язків.
Ключові слова: диференціальні включення, розв'язок, існування.

Кичмаренко О. Д., Плотников А. А. Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью и их свойства. В статье введено понятие дифференциального включения с переменной размерностью и получены некоторые свойства их решений.
Ключевые слова: дифференциальное включение, решение, существование.

Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A. Nonlinear differential inclusions with variable dimension and their properties. In paper the concept of differential inclusion with variable dimension is introduced and some properties of their solutions are received.
Key words: differential inclusion, solution, existence.

Введение. Теория дифференциальных включений начала свое развитие в начале тридцатых годов 20-го века с публикаций А. Маршо и С. Заремба. Однако бурное развитие данной теории началось с 60-х годов прошлого века благодаря работам Т. Важевского и А. Ф. Филиппова, которые обосновали ее тесную связь с теорией оптимального управленния и дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Основные результаты теории дифференциальных включений изложены в работах [1, 2, 3, 7, 8].

В данной статье мы рассмотрим дифференциальные включения с переменной размерностью, к которым сводятся, например, управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания [4, 5, 6], а также импульсные дифференциальные включения [3, 8].

Основные определения и обозначения. Пусть $\theta > 0$ произвольное действительное число, N — множество натуральных чисел, а $N_0 = N \bigcup 0$.

Обозначим через Σ_θ множество функций $n(\cdot) : R_+ \to N$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $n(\cdot)$ — кусочно-постоянные и кусочно-непрерывные справа;

2) если $n((t+0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всех $\tau \in [t, t+\theta]$.

Очевидна справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Для любой функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ полупрямую R_+ можно разбить не более чем на счетное число множеств $I_i = [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$ таких, что $R_+ = \bigcup\limits_i I_i$ и $I_i \bigcap I_j = \varnothing$, если $i \neq j$, где $n(t) - n(t_i) = 0$ для всех $t \in I_i$.*

© Кичмаренко О. Д., Плотников А. А., 2013

Обозначим через M_n множество матричных функций, соответствующих функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ таких, что

1) $M(t)$ — матрица $(n(t-0) \times n(t))$;

2) $M(t) = \begin{cases} E, & n(t) - n(t-0) = 0 \\ M(t), & n(t) - n(t-0) \neq 0 \end{cases}$ и $M(0) = E$.

Возьмем произвольную функцию $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ и $M(\cdot) \in M_n$.

Определение 1. *Функцию $x(\cdot, n, M)$ назовем функцией переменной размерности, соответствующей паре (n, M), если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $x(t, n, M) \in R^{n(t)}$ для всех $t \geq 0$;

2) $x(t, n, M) = M(t)x(t-0, n, M)$ для всех $t > 0$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $x(\cdot, n, M)$ непрерывна на интервале $(t', t'') \subset R_+$, если она непрерывна в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ и непрерывна справа в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Определение 3. *Будем говорить, что функция $x(\cdot, n, M)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[t', t''] \subset R_+$, если она непрерывна на (t', t'') и абсолютно непрерывна на любом сегменте $[\tau', \tau''] \subset [t', t'']$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ для всех $t \in [\tau', \tau'']$.*

Замечание 1. *Аналогично, можно ввести определение измеримости (дифференцируемости, интегрируемости, липшицевости и др.) функции $x(\cdot, n, M)$.*

Определение 4. *Многозначное отображение $F(\cdot, n)$ назовем отображением с переменной размерностью, если множество $F(t, n) \subset R^{n(t)}$ для всех $t \in R_+$.*

Определение 5. *Будем говорить, что многозначное отображение $F(\cdot, n)$ непрерывно на интервале $(t', t'') \subset R_+$, если оно непрерывно в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$, и непрерывно справа в точках $t \in (t', t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Определение 6. *Будем говорить, что многозначное отображение $F(\cdot, n)$ удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[t', t''] \subset R_+$ с постоянной $L > 0$, если оно непрерывно на (t', t'') и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L на любом сегменте $[\tau', \tau''] \subset [t', t'']$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ для всех $t \in [\tau', \tau'']$.*

Основные результаты. Рассмотрим следующую систему с переменной размерностью:

$$\dot{x} \in F(t, x, n), \ x(0, n, M) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in R_+$ — время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $M(\cdot) \in M_n$; $x(t, n, M)$ — фазовый вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \to comp(R^{n(t)})$ — многозначное отображение с переменной размерностью.

Замечание 2. *Если $n(t) \equiv n$, то система (1) будет обычным дифференциальным включением.*

Предположение А. Пусть функция $n(\cdot)$ ограничена $\overline{n} > 0$ для всех $t \geq 0$.

Замечание 3. *Предположение А не дает рост размерности на бесконечности к бесконечности (это условие может быть необязательным, если система (1) рассматривается на конечном промежутке).*

Обозначим через $Q_i = \{\,(t,x)\,:\,t \in I_i,\, x \in R^{n(t)}\}$, где I_i соответствуют лемме 1.

Определение 7. *Абсолютно непрерывная функция $x(\cdot,n,M)$ называется обычным решением системы (1) на отрезке $[0,T]$, если*
1) $\dot{x}(t,n,M) \in F(t,x(t,n,M),n)$ для почти всех $t \in (0,T)$,
2) $x(0,n,M) = x_0$.

Предположение Б. Многозначное отображение $F(t,x,n)$ удовлетворяет следующим условиям:
a) $F(\cdot,x,n)$ — непрерывно по t на R_+;
b) $F(t,\cdot,n)$ — липшицево с постоянной L по x на $Q_i,\ i = 0,1,...$;
c) существует такая постоянная $K > 0$, что $\|F(t,x,n)\| \le K(1+\|x\|)$ для всех $(t,x) \in Q_i,\ i = 0,1,...$

Теорема 1. *Если для некоторого $\theta > 0$ $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $M(\cdot) \in M_n$ и $F(t,x,n)$ удовлетворяют условиям предположений А и Б, то на некотором отрезке $[0,T]$ у системы (1) существует обычное решение $x(\cdot,n,M)$.*

Доказательство. Очевидно, что $(0,x_0) \in Q_0 \subset R_+ \times R^{n(0)}$. Доопределим многозначное отображение $F(t,x,n(0))$ на все пространство $R_+ \times R^{n(0)}$ так, чтобы оно удовлетворяло условиям предположения Б, и возьмем $M^0(t) = E$ для всех $t \in R_+$. Тогда из [2] следует, что существует $r_0 > 0$ такое, что на отрезке $[0,r_0]$ существует обычное решение системы

$$\dot{x}(t,n(0),M^0(t)) \in F(t,x(t,n(0),M^0(t)),n(0)),\ x(0,n(0),M^0(0)) = x_0.$$

Очевидно, что далее возможны два случая:

Случай 1. Для всех $t \in [0,r_0]$ справедливо условие $n(t) - n(0) = 0$. Тогда теорема доказана и $T = r_0$.

Случай 2. Существует $t_1 \in (\theta,r_0)$ такое, что $n(\tau) - n(0) = 0$ для всех $\tau \in [0,t_1)$ и $n(t_1-0) - n(t_1) \ne 0$. Тогда обозначим через $x_1 = M(t_1)x(t_1-$ $-0,n(0),M^0(t_1))$. Очевидно, что $(t_1,x_1) \in Q_1 \subset [t_1,=\infty) \times R^{n(t_1)}$. Теперь доопределим многозначное отображение $F(t,x,n(t_1))$ на все пространство $[t_1,=\infty) \times R^{n(t_1)}$ так, чтобы оно удовлетворяло условиям предположения Б, и возьмем $M^1(t) = \begin{cases} M(t_1), & t = t_1 \\ E, & t > t_1 \end{cases}$. Тогда, аналогично, получим, что существует $r_1 > 0$ такое, что на отрезке $[t_1,t_1+r_1]$ существует обычное решение системы

$$\dot{x}(t,n(t_1),M^1(t)) \in F(t,x(t,n(t_1),M^1(t)),n(t_1)),\ x(t_1,n(t_1),M^1(t_1)) = x_1.$$

И так далее.

В итоге мы получаем существование обычного решения либо на некотором отрезке $[0,T]$, либо на всей полупрямой R_+. Теорема доказана.

Обозначим через $X(t,n,M)$ сечение множества обычных решений системы (1) в момент времени $t \ge 0$.

Теорема 2. *Если для некоторого* $\theta > 0$ $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $M(\cdot) \in M_n$ *и* $F(t,x,n)$ *удовлетворяют условиям предположений А и Б и многозначное отображение* $F(t,x,n) : R_+ \times R^{n(t)} \to conv(R^{n(t)})$ *, то* $X(t,n,M) \in comp(R^{n(t)})$ *для всех* $t \in$ $\in [0,T]$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что система (1) имеет хотя бы одно обычное решение на отрезке $[0,T$. Из [2] следует справедливость утверждения данной теоремы.

Пример 1. *Рассмотрим следующую линейную систему:*

$$\dot{x} \in x + S_t(0),\ x(0,n,M) = 0, \tag{2}$$

где $t \in [0, \frac{3\pi}{4}]$, $n(t) = \left[1 + |\sqrt{2}sin(t)|\right]$,
$M(t) = \begin{cases} E, & n(t-0) - n(t) = 0 \\ m_{ij} = \frac{1}{n(t)}, & n(t-0) - n(t) \neq 0 \end{cases}$ *для* $t > 0$, $M(0) = E$, $[\cdot]$ *— целая часть.*

Очевидно, что $n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ 2, & t \in [\frac{\pi}{4} + \pi i, \frac{3\pi}{4} + \pi i), \\ 1, & t \in [\frac{3\pi}{4} + \pi i, \frac{5\pi}{4} + \pi i), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots .$

$$M(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup \bigcup\limits_i (\frac{3\pi}{4} + \pi i, \frac{5\pi}{4} + \pi i), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in (\frac{\pi}{4} + \pi i, \frac{3\pi}{4} + \pi i), \\ (1,1), & t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi i, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & t = \frac{\pi}{4} + 2\pi i, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \dots ,$$

$$S(t) = \begin{cases} [-t,t] \subset R, & t \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup \bigcup\limits_i (\frac{3\pi}{4} + \pi i, \frac{5\pi}{4} + \pi i), \\ \{(s_1, s_2) \in R^2 \ : \ \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \leq t\}, & t \in \bigcup\limits_i (\frac{\pi}{4} + \pi i, \frac{3\pi}{4} + \pi i), \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots .$

Тогда сечения множества решений системы (2) будут иметь вид

$$X(t,n,M) = [t + 1 - e^t, e^t - t - 1],\ t \in [0, \frac{\pi}{4}),$$

$$X(\frac{\pi}{4}, n, M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} X(\frac{\pi}{4} - 0, n, M) =$$

$$= \left\{(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) \ : \ x_i(\alpha) = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)\alpha,\ \alpha \in [-1,1],\ i = 1,2\right\},$$

$$X(t,n,M) = e^{t - \frac{\pi}{4}} X(\frac{\pi}{4}, n, M) + S_{e^{-\frac{\pi}{4}}(1 + \frac{\pi}{4})e^t - t - 1}(0),\ t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}),$$

$$X(\frac{3\pi}{4}, n, M) = (1,1) X(\frac{3\pi}{4} - 0) =$$

$$= \left[-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{2} - \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} - 1\right), \right.$$

$$\left. \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{2} + \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} - 1\right)\right].$$

Далее приведен график сечения множества решений системы (2) для $t \in \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

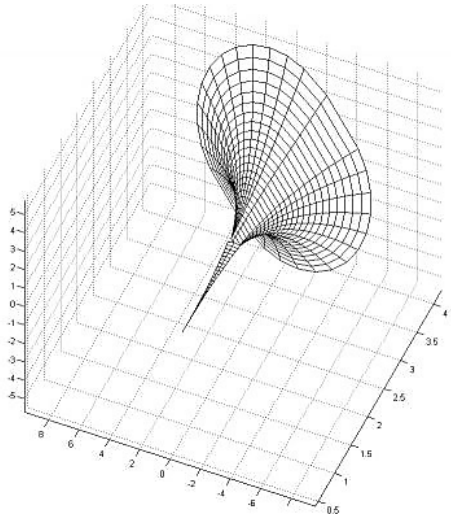


Рис. 1

Заключение. Можно также рассмотреть более общий вид дифференциальных включений с переменной структурой

$$\dot{x} \in F(t, x, n), \ x(0, n(0), \varphi(0)) = x_0, \tag{3}$$

где $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $x(t, n, \varphi)$ — фазовый вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \to comp(R^{n(t)})$ — многозначное отображение с переменной размерностью; $\varphi(x) : R^{n(t-0)} \to R^{n(t)}$ такое, что $\varphi(x) = x$, если $n(t-0) - n(t) = 0$, и $\varphi(x) = y$, если $n(t-0) - n(t) \neq 0$ для $t > 0$, и получить аналогичные результы.

1. **Благодатских В. И.** Теория дифференциальных включений / В. И. Благодатских. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 88 с.
2. **Благодатских В. И.** Дифференциальные включения и оптимальное управление / В. И. Благодатских, А. Ф. Филлипов // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. Сборник обзорных статей. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР. – 1985. – 169. – С. 194–252.

3. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 352 с.

4. **Романенко А. В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. – 1993. – Т. 33, № 8. – С. 1155–1165.

5. **Федосеев А. В.** Исследование методами оптимального управления одной модели разработки группы месторождений полезного ископаемого с ограниченными запасами / А. В. Федосеев // Методы системного анализа и пробл. рационального использования ресурсов. – М.: ВЦ АН СССР. – 1977. – С. 117–134.

6. **Хачатуров В. Р.** Имитационное моделирование и задачи оптимального управления при долгосрочном планировании производства многолетних сельскохозяйственных культур / В. Р. Хачатуров, Р. Босолейль, А. В. Федосеев. – М.: ВЦ АН СССР, 1985.

7. **Aubin J.-P.** Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. – Springer-Verlag, 1984.

8. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math.: 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH&Co., 2011.

Mathematical Subject Classification: 35Q55, 35Q56
УДК 517.9

М. А. Сагадеева, А. Н. Шулепов
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОТНОСИТЕЛЬНО РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Сагадєєва М. А., Шулєпов А. М. Про одну нелінійну модель на основі відносно радіального рівняння соболєвського типу. У статті розглядається рівняння в частинних похідних з комплексними коефіцієнтами. До рівнянь подібного типу можна віднести рівняння Шредінгера, комплексне рівняння Гінзбурга—Ландау та інші. Доведена розв'язність зазначеного рівняння методом вироджених операторно–диференціальних рівнянь.
Ключові слова: рівняння соболєвського типу, відносно радіальний випадок, рівняння Шредінгера, комплексне рівняння Гінзбурга – Ландау.

Сагадеева М. А., Шулепов А. Н. Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа. В статье рассматривается уравнение в частных производных с комплексными коэффициентами. К уравнениям подобного вида можно отнести уравнения Шредингера, комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау и другие. Доказана разрешимость указанного уравнения методами вырожденных операторно-дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: уравнения соболевского типа, относительно радиальный случай, уравнение Шредингера, комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау.

Sagadeyeva M. A., Shulepov A. N. About one nonlinear model based on relatively radial equation of Sobolev type. The article deals with the partial differential equation with complex coefficients. Equations of this type include the Schrodinger equation, complex Ginzburg—Landau and others. We prove the solvability of this equation by methods degenerate operator-differential equations.
Key words: Sobolev type equations, relatively radial case, the Schrodinger equation, the complex Ginzburg – Landau equation.

Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times [0,T]$ рассмотрим задачу Дирихле

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{1}$$

для уравнения в частных производных вида

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu\Delta u - id\Delta^2 u + \beta u|u|^2, \tag{2}$$

которое в частном случае используется при изучении слабонелинейных эффектов в гидродинамике [1]. Здесь коэффициенты $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, при этом $\nu > 0$ описывают параметры системы. Кроме того из этого уравнения может быть получен частный случай классического уравнения Гинзбурга – Ландау (Курамото – Цузуки)

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^2 + (d_1 + id)\Delta u,$$

© Сагадеева М. А., Шулепов А. Н., 2013

если учтена дифракция, но отсутствует диффузионный член ($d_1 = 0$). Такая ситуация возникает при описании процессов, протекающих в лазерных резонаторах и других нелинейных оптических средах, и тогда уравнение описывает пространственную эволюцию электромагнитного пакета в этих средах. Само уравнение Гинзбурга – Ландау описывает широкий круг физических явлений, таких как нелинейные волны, фазовые переходы второго рода, сверхпроводимость, сверхтекучесть, конденсацию Бозе – Эйнштейна [2]. Кроме того, частным случаем рассматриваемого уравнения, очевидно, является кубическое уравнение Шредингера, возникающее во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамики [3], [4].

Исследование решений данного уравнения будем проводить в рамках теории уравнений соболевского типа ([5]–[9]). Опишем абстрактную схему.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен, замкнут и плотно определен), $N \in C^1(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$. Здесь $\mathfrak{U}_\alpha$ – банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{U}$ плотно и непрерывно. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{4}$$

Нашей целью является изучение однозначной разрешимости задачи (3), (4). При выборе цели мы руководствовались не столько желанием пополнить теорию, сколько стремлением осмыслить начально-краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, возникающих в последнее время в приложениях [1]–[4]. При этом заметим, что решения задачи Коши для уравнения (4) при любых начальных данных пусть даже из плотного в $\mathfrak{U}$ множества существуют не всегда (см. например, [10], [11]).

Несуществование решений объясняется тем, что уравнение (4) необходимо рассматривать не на всем пространстве $\mathfrak{U}$, а на некотором его подмножестве, понимаемом как фазовое пространство. Изучение линейного случая

$$L\dot{u} = Mu \tag{5}$$

упрощается в силу того, что фазовым пространством уравнения (5) служит подпространство в $\mathfrak{U}$. Поэтому для полулинейных уравнений вида (4), фазовые пространства которых диффеоморфны некоторому подпространству в $\mathfrak{U}$, удается перенести результаты о существовании решений. Следует заметить, что конкретные модели, описываемые полулинейными уравнениями соболевского типа в относительно радиальном случае, рассматриваются в рамках теории уравнений соболевского типа, по-видимому, впервые (можно отметить по этому поводу [12]).

Статья состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы, который не претендует на полноту и отражает лишь личные пристрастия авторов. Во второй части введения приведены необходимые сведения для построения решения в абстрактной постановке, а именно приводятся сведения из [8], касающиеся относительно радиальных операторов. В основной части сначала

приводится доказательство существования решения для уравнения (4), а затем все абстрактные результаты применены для построения решений задачи (1), (2).

Относительно p-радиальные операторы.

Доказательства утверждений этого пункта можно найти в [8].

Обозначим

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}, \qquad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \quad \mu \in \rho^L(M),$$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M),\ L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M),\ \ \lambda_k \in \rho^L(M)\ (k = \overline{0,p}).$$

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (коротко, *(L,p)-радиальным*), если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in (a,+\infty)^{p+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n}.$$

Также введем обозначения

$$\mathfrak{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M),\ \mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),\ L_0 = L\Big|_{\mathfrak{U}^0},\ M_0 = M\Big|_{\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^0}.$$

Через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$), а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{F}}$) – замыкание линеала $\mathfrak{U}^0 \dot{+} \mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{F}^0 \dot{+} \mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$).

Определение 2. *Решением* уравнения (5) назовем вектор-функцию $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению на $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

Определение 3. Замкнутое множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (5), если

(i) любое решение $u(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathfrak{P}$ (поточечно);

(ii) для любого u_0 из некоторого линеала $\overset{\circ}{\mathfrak{P}}$, плотного в $\mathfrak{P}$, существует единственное решение задачи Коши (3) для уравнения (5).

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда фазовым пространством уравнения* (5) *является множество* $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$).

Определение 4. Отображение $U(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется *разрешающей полугруппой* уравнения (5), если

(i) $U(s)U(t) = U(s+t)\ \forall s,t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(ii) $u(t) = U(t)u_0$ есть решение этого уравнения для любого u_0 из некоторого плотного в $\mathfrak{U}$ линеала;

(iii) сужение единицы полугруппы на фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения есть $U(0)\Big|_{\mathfrak{P}} = \mathbb{I}$.

Полугруппу $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ будем называть *экспоненциально ограниченной* с константами C, a, если

$$\exists C > 0 \ \ \exists a \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad \|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq Ce^{at}.$$

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константами K, a из определения 1 и сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения (5), рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$.*

Замечание 1. Операторы разрешающей полугруппы уравнения (5) при $t > 0$ можно представить в виде

$$U(t) = s - \lim_{k\to\infty} \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^k = s - \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{t} R^L_{\frac{k}{t}}(M) \right)^k,$$

принимая во внимание поправки формулы, обсуждаемые в работе [13].

Замечание 2. Единицей полугруппы $\{U(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{F}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ является проектор P (Q) вдоль $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{F}^0)$ на $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1)$.

Определение 5. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p > a$ выполняются условия

(i) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что для всех $f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathfrak{F}} \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{(\lambda - a) \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - a)};$$

(ii) $$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\lambda - a) \prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - a)}.$$

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*
(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$;
(ii) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{U}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k), \quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom} M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$,
$\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t) \tag{6}$$

с функцией $g : [0,T] \to \mathfrak{F}$. Обозначим $(\mathbb{I} - Q)g(t) = g^0(t)$ и $Qg(t) = g^1(t)$.

Теорема 4. *Пусть M — сильно (L,p)-радиален, а вектор-функция $g(t)$ такова, что $g^0 \in C^{p+1}([0,T], \mathfrak{F})$, $g^1 \in C([0,T], \mathrm{dom} M L_1^{-1})$. Тогда для любого начального значения $u_0 \in \mathcal{P}_g = \left\{ u \in \mathrm{dom} M : (\mathbb{I} - P)u = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{0(k)}(0) \right\}$ существует единственное решение $u \in C^1([0,T], \mathfrak{U})$ задачи (3), (6), вида*

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s) L_1^{-1} Qg(s) ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{0(k)}(t).$$

Через $C([0,T];\mathrm{dom}ML_1^{-1})$ здесь обозначено пространство функций со значениями во множестве $\mathrm{dom}ML_1^{-1}$, непрерывных по норме графика оператора M.

Основные результаты. 1. Существование решений абстрактных уравнений.

Итак, пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда полагая $\mathfrak{U}_0^1=\mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{U}_1^1=$ $=\mathrm{dom}\ M\cap\mathfrak{U}^1$ с "нормой графика", аналогично [11] построим интерполяционные пространства $\mathfrak{U}_\alpha^1=[\mathfrak{U}_0^1,\mathfrak{U}_1^1]_\alpha$, $\alpha\in[0,1]$. Далее, положим $\mathfrak{U}_1^0=\mathrm{dom}\ M\cap\mathfrak{U}^0$ с "нормой графика" и построим пространства $\mathfrak{U}_\alpha=\mathfrak{U}_1^0\oplus\mathfrak{U}_\alpha^1$, $\alpha\in[0,1]$. Имеют место непрерывное и плотное вложение $\mathfrak{U}_\alpha\hookrightarrow\mathfrak{U}$, $\alpha\in[0,1]$, и равенство $\mathfrak{U}_1=\mathrm{dom}\ M$ с "нормой графика". Фиксируем $\alpha\in[0,1)$, и пусть оператор $N\in C^1(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$.

Определение 6. Вектор-функцию $u\in C^1((0,T);\mathfrak{U}_1)$, удовлетворяющую при некотором $T\in\mathbb{R}_+$ уравнению (4), назовем *решением* этого уравнения. Решение $u=u(t)$ уравнения (4), удовлетворяющее соотношению $\lim\limits_{t\to0+}||u(t)-u_0||_{\mathfrak{U}_\alpha}=0$ при некотором $u_0\in\mathfrak{U}_\alpha$, назовем *решением задачи Коши* (3) *для уравнения* (4) (коротко *решением задачи* (3), (4)).

Поскольку оператор M сильно (L,p)-радиален, то уравнение (4) эквивалентно следующей системе из двух уравнений

$$H\dot u^0=u^0+M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)N(u), \tag{7}$$

$$\dot u^1=Su^1+L_1^{-1}QN(u), \tag{8}$$

где оператор $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени p, а оператор $S=$ $=L_1^{-1}M_1\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ радиален в силу теоремы 3. Для купирования трудностей, возникающих при решении уравнений (7), (8), введем новое понятие.

Определение 7. Решение $u=u(t)$ уравнения (4) называется *квазистационарной полутраекторией*, если

$$H\dot u(t)\equiv0,\quad t\in(0,T). \tag{9}$$

Решение задачи (3), (4) называется *квазистационарной полутраекторией уравнения* (4), *выходящей из точки* u_0, если верно (9).

Это понятие естественным образом обобщает понятие квазистационарной траектории [10]. Если ограничиться рассмотрением только квазистационарных полутраекторий, то в силу (7) придем к рассмотрению множества

$$\mathfrak{M}=\{u\in\mathfrak{U}_\alpha:(\mathbb{I}-Q)(Mu+N(u))=0\},$$

на котором они лежат в силу (7).

Пусть $\mathfrak{M}\neq\varnothing$; будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке $u_0\in\mathfrak{M}$ является *банаховым* C^1*-многообразием*, если существуют окрестности $\mathfrak{O}\subset\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_1\subset\mathfrak{U}_\alpha^1$ точек u_0 и $u_0^1=Pu_0\in\mathfrak{U}_\alpha^1$ соответственно и C^1-диффеоморфизм $G:\mathfrak{O}_1\to\mathfrak{O}$ такой, что G^{-1} есть сужение проектора P на $\mathfrak{M}$.

Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым* C^1*-многообразием*, если оно является таковым в каждой своей точке.

Связное банахово C^1-многообразие называется *простым*.

Теорема 5. *Пусть в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^1-многообразием, тогда существует квазистационарная полутраектория уравнения* (4), *выходящая из точки u_0.*

Доказательство. В условиях теоремы уравнение (8) в окрестности $\mathfrak{O}_1 \hookrightarrow \mathfrak{U}^1_\alpha$ точки u^1_0 можно привести к виду

$$\dot{u}^1 = Su^1 + F(u^1), \tag{10}$$

где оператор $F = L_1^{-1}QNG \in C^1(\mathfrak{O}_1; \mathfrak{U})$. Пользуясь результатами [14], найдем решение $u^1 \in C^1((0,T); \mathfrak{U}^1_\alpha)$ задачи Коши $u^1(0) = u^1_0$ для уравнения (10) в виде $u^1(t) = U(t)u^1_0 + \int\limits_0^t U(t-s)F(u^1(s))ds$, в силу теоремы 4. Вектор-функция $u(t) = Gu^1(t) + u^1(t)$ будет решением задачи (3), (4), причем будет выполнено (9). Откуда следует утверждение теоремы.

Определение 8. Множество $\mathfrak{P}_F \subset \mathfrak{U}_\alpha$ называется *фазовым пространством* уравнения (4), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (4) лежит на $\mathfrak{P}_F$, то есть $u(t) \in \mathfrak{P}_F$, $t \in (0,T)$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}_F$ существует единственное решение задачи Коши (3) для уравнения (4).

В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда фазовое пространство $\mathfrak{P}_F$ уравнения (4) будет совпадать со множеством его квазистационарных полутраекторий $\mathfrak{M}$. Отметим, что это заведомо имеет место, если оператор $N \equiv \mathbb{O}$ (см. теорему 1), или если $p = 0$ [10], [11].

2. Локальные решения для нелинейной модели.

Вернемся к основной модели. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ рассмотрим задачу Дирихле (1)

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T]$$

для уравнения в частных производных вида (2)

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu\Delta u - id\Delta^2 u + \beta u|u|^2.$$

Для того, чтобы редуцировать уравнение (2) с граничным условием (1) к уравнению (4), возьмем функциональное пространство $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Заметим, что в силу теоремы вложения Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_2 \hookrightarrow L_p$ при $n \geq 3$ и $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$. В качестве пространства $\mathfrak{F}$ возьмем $W_2^{-1}(\Omega)$, наделенное сильной топологией пространства, сопряженного к $\mathfrak{U}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из L_2.

Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ определим формулами

$$L = \lambda - \Delta, \quad M = \nu\Delta - id\Delta^2.$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω. Последовательность $\{\lambda_k\}$ занумерована по невозрастанию с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *При любых $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$ оператор M сильно $(L,0)$-радиален.*

Доказательство. В силу условий теоремы $\ker L \cap \ker M \neq \varnothing$. Ясно, что в противном случае $\sigma^L(M) = \mathbb{C}$.

Для того чтобы построить L-резольвенту оператора M рассмотрим при $\mu \in \mathbb{C}$ оператор $\mu L - M = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(\mu(\lambda - \lambda_k) - (\nu\lambda_k - id\lambda_k^2)\big)\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k$. Этот оператор имеет непрерывный обратный, при условии

$$\mu \neq \frac{\nu\lambda_k - id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} = \frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} - \frac{id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}.$$

Откуда ясно, что $\sigma^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu_k = \dfrac{\nu\lambda_k - id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}, \text{ при } k : \lambda_k \neq \lambda\right\}$. Относительная L-резольвента оператора M при $\mu \in \rho^L(M)$ имеет вид

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k:\, \lambda_k \neq \lambda} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) - \nu\lambda_k + id\lambda_k^2}.$$

Выясним положение относительного спектра при $k \to \infty$

$$\frac{\nu\lambda_k - id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} = \frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} - \frac{id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} \sim -\nu + id\lambda_k.$$

Откуда ясно, что точки относительного спектра $\sigma^L(M)$ накапливаются к вертикальной прямой $\mathrm{Re}\mu = -\nu$. При этом оператор $R_\mu^L(M) =$

$$= \sum_{k:\, \lambda_k \neq \lambda} \frac{(\lambda - \lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) - (\nu\lambda_k - id\lambda_k^2)} = \sum_{k:\, \lambda_k \neq \lambda} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu - (\nu\lambda_k - id\lambda_k^2)/(\lambda - \lambda_k)}.$$

Откуда следует выполнение неравенств

$$\max\left\{\|R_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\right\} \leq \frac{K}{|\mu - a|},$$

$$\|M(\eta L - M)^{-1} L_\mu^L(M) f\|_{\mathfrak{F}} \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{|\eta - a||\mu - a|},$$

$$\|R_\mu^L(M)(\eta L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{|\mu - a||\eta - a|},$$

где $a = \sup\limits_{k:\, \lambda_k \neq \lambda} \mathrm{Re}\mu_k = \sup\limits_{k:\, \lambda_k \neq \lambda} \mathrm{Re}\left(\dfrac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} - \dfrac{id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}\right) < +\infty$.

Таким образом, в рассматриваемой задаче M сильно $(L,0)$-радиален.

При этом $\mathfrak{U}^0 = \mathrm{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$, $\mathfrak{U}^1 = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k : \lambda_k \neq \lambda\}$.

Откуда следует утверждение леммы.

Перейдем к рассмотрению нелинейной части уравнения (2). Для этого возьмем в функциональных пространствах $p = 4$ и зададим оператор

$$\langle N(u), v\rangle = \beta \int\limits_{\Omega} u|u|^2 v dx \quad \forall u, v \in L_4.$$

Лемма 2. *При любых* $\beta \in \mathbb{C}$ *оператор* $N \in C^1(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем* $N(0) = 0$ *и* $N_0' = \mathbb{O}$.

Доказательство. Действительно, поскольку

$$|\langle N(u), v\rangle| = \left|\beta \int\limits_\Omega u|u|^2 v\,dx\right| \le |\beta| \cdot \left(\int\limits_\Omega |u|^4\,dx\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |v|^4\,dx\right)^{\frac{1}{4}} \le$$

$$\le \mathrm{const}\|u\|_{L_4}^3 \cdot \|v\|_L,$$

то $\|N(u)\|_{L_{\frac{4}{3}}} \le \mathrm{const}\|u\|_{L_4}^3$. В силу непрерывности вложений $L_4 \hookrightarrow (L_4)^* \cong L_{\frac{4}{3}} \hookrightarrow$ $\hookrightarrow W_2^{-1}$ оператор $N : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$.

Пусть $u \in \mathfrak{U}$, тогда производная Фреше N_u' оператора N в точке u имеет вид

$$\langle N_u' v, w\rangle = 3\beta \int\limits_\Omega |u|^2 vw dx \quad \forall u, v, w \in L_4.$$

В силу того, что

$$|\langle N_u' v, w\rangle| \le |3\beta| \cdot \left|\int\limits_\Omega |u|^2 vw\,dx\right| \le$$

$$\le |3\beta| \cdot \left(\int\limits_\Omega |u|^4\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |v|^4\,dx\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |w|^4\,dx\right)^{\frac{1}{4}} \le$$

$$\le \mathrm{const}\|u\|_{L_4}^2 \cdot \|v\|_{L_4} \cdot \|w\|_{L_4},$$

получим $N \in C^1(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, что доказывает утверждение леммы.

В силу этих двух лемм и теоремы 5 справедлива

Теорема 6. (i) *Пусть* $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовое пространство задачи* (1), (2) *совпадает с пространством* $\mathfrak{U}$.

(ii) *Пусть* $\lambda \in \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовым пространством задачи* (1), (2) *является простое банахово* C^1 *— многообразие*

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \int\limits_\Omega (\nu\Delta u - id\Delta^2 u + \beta u|u|^2)\varphi_l dx = 0, \quad \lambda_l = \lambda\}$$

моделируемое подпространством $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l\rangle = 0,\ \lambda_l = \lambda\}$.

Заключение. Данное исследование посвящено вопросам разрешимости методами теории уравнений соболевского типа, причем последнее является специфически относительно радиальным, то есть это уравнение нельзя рассматривать в рамках других классов уравнений соболевского типа. Фазовым пространством задачи (1), (2) в любом случае является простое банахово C^1-многообразие

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \mathfrak{M}, & \lambda \in \{\lambda_k\}, \end{cases}$$

моделируемое подпространством

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \mathfrak{U}^1, & \lambda \in \{\lambda_k\}. \end{cases}$$

В дальнейшем предполагается всесторонне изучить это уравнение, как с точки зрения качественных исследований решений, так и с точки зрения численных решений.

1. **Дразин Ф.** Введение в теорию гидродинамической устойчивости / Ф. Дразин. – М.: Физматлит, 2005. – 287 с.
2. **Aranson I. S.** The world of the complex Ginzburg – Landau equation / I. S. Aranson, L. Kramer // Rev. Mod. Phys. – 2002. – V. 74, No 1. – P. 99–143.
3. **Уинзем Дж.** Линейные и нелинейные волны в приложении к электродинамике / Дж. Уинзем. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
4. **Скотт Э.** Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Э. Скотт. – М.: Физматлит, 2005. – 431 с.
5. **Demidenko G. V.** Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii. – New York – Basel – Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.
6. **Favini A.** Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1999. – 236 p.
7. **Pyatkov S. G.** Operator theory. Nonclassical problems / S. G. Pyatkov. – Utrecht – Boston – Köln – Tokyo: VSP, 2002. – 353 p.
8. **Sviridyuk G. A.** Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.
9. **Сагадеева М. А.** Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М. А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
10. **Свиридюк Г. А.** Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.
11. **Свиридюк Г. А.** Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г. А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.
12. **Сагадеева М. А.** Существование и устойчивость решений полулинейных уравнений соболевского типа в относительно радиальном случае / М. А. Сагадеева // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия Математика. – 2013. – № 1. – С. 78 – 88.
13. **Сагадеева М. А.** Аппроксимации вырожденных C_0-полугрупп / М. А. Сагадеева, А. Н. Шулепов // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 133 – 137.
14. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 446 p.

Mathematical Subject Classification: 49L20, 49K30, 93B12, 93B50
УДК: 517.977.58, 517.977.54

Є. М. Страхов
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЗАДАЧІ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Страхов Є. М. Метод динамічного програмування в задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи керування. У роботі обґрунтована можливість застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи керування. Отримані дискретне рівняння Беллмана, а також достатні умови оптимальності керування у випадку нефіксованої структури системи.
Ключові слова: дискретна система, структурна оптимізація, параметрична оптимізація, динамічне програмування.

Страхов Е. М. Метод динамического программирования в задаче структурно-параметрической оптимизации дискретной системы управления. В работе обоснована применимость метода динамического программирования в задаче структурно-параметрической оптимизации дискретной системы управления. Получены дискретное уравнение Беллмана, а также достаточные условия оптимальности управления в случае нефиксированной структуры системы.
Ключевые слова: дискретная система, структурная оптимизация, параметрическая оптимизация, динамическое программирование.

Strakhov E. M. Dynamic programming in a structural and parametric optimization problem of a discrete control system. This paper deals with substantiation of dynamic programming method for a structural and parametric optimization problem of a discrete control system. We obtain discrete Bellman equation and sufficient optimality conditions in the case of floating structure.
Key words: discrete system, structural optimization, parametric optimization, dynamic programming.

Вступ. У прикладних задачах, пов'язаних із конструюванням складних технічних систем, керування системою, як правило, здійснюється за допомогою підсистем, які відомі з точністю до параметрів. З математичної точки зору це означає, що на певних відрізках часу керування задається за допомогою функцій, що залежать від часової змінної та параметрів. Таким чином, виникає задача знаходження оптимальних режимів системи у структурно-параметричних класах. Такі задачі характерні для робототехнічних систем, систем прискорення і фокусування тощо. Одним з підходів до розв'язування задач структурно-параметричної оптимізації систем керування є варіаційний метод, на основі якого будуються ітераційні процедури типу градієнтного спуску за обраними параметрами або точками перемикання. Результати у цьому напряму одержані в праці [3]. Проте при реалізації подібних методів на практиці виникають певні труднощі, пов'язані, зокрема, із нестійкістю спряженої системи. Інший підхід базується на прин-

© Страхов Є. М., 2013

ципі оптимальності Беллмана та методі динамічного програмування. Робота [1] обґрунтовує принцип оптимальності для задачі вибору оптимальної структури, в ній одержані рівняння Беллмана в інтегральній та диференціальній формах. Статті [4, 5, 7] поширюють ці результати на задачі структурно-параметричної оптимізації систем керування. Зокрема, у [4] досліджується випадок дискретної системи з фіксованими моментами перемикання, запропонований чисельний алгоритм знаходження оптимальних параметрів такої системи.

В даній статті проводиться обґрунтування принципу оптимальності для задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи з нефіксованою структурою, встановлюються достатні умови оптимальності керування у формі Беллмана.

Основні результати.

1. Постановка задачі та принцип оптимальності Беллмана. Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(x,\, u) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \;\to\; \min \tag{1}$$

за умов

$$\begin{gathered} x(k+1) = f_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right),\;\; k = 0, 1, \ldots, N-1, \\ x(0) = x_0. \end{gathered} \tag{2}$$

Тут $x(k) \in X_k$ – n-вимірний вектор фазових координат; $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ – замкнена множина фазових обмежень в момент $k = 0, 1, \ldots, N$; $u(k)$ – m-вимірний вектор керування; $g_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – задані неперервні функції своїх аргументів при кожному $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – задана неперервна функція.

Нехай керування в задачі (1)–(2) задано в структурній формі

$$u(k) = \Psi_r\left(b_r, x(k)\right),\; k = 0, 1, \ldots, N-1,\; r \in \{1, \ldots, p\}, \tag{3}$$

де $\Psi_r\left(b_r, x(k)\right)$ $(r = 1, \ldots, p)$ – заданий набір структур, але порядок їх розташування є невідомим; $b_r \in R_r$ – невідомі числові параметри; $R_r \subset \mathbb{R}^{i_r}$ $(i_r \in \mathbb{N})$ – множини обмежень на параметри.

Задача (1)–(2) є задачею структурно-параметричної оптимізації з керуванням, заданим в структурному класі (3). Вибір оптимального керування зводиться до вибору такого розміщення структур $\{\Psi_r^*\}$ та визначення оптимальних параметрів b_r^* цих структур для кожного дискретного моменту $k = 0, 1, \ldots, N-1$, що мінімізує критерій якості (1).

Нехай $\{\Psi_r^*\}$ – оптимальний набір структур, $\{b_r^*\}$ – набір оптимальних параметрів у задачі (1)–(3). Позначимо через $x^*(k)$ відповідну оптимальну траєкторію. Зафіксуємо $s \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ і розглянемо допоміжну задачу

$$J_s(x,\, u) = \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \;\to\; \min \tag{4}$$

за умов

$$x(k+1) = f_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right),\;\; k = s, s+1, \ldots, N-1, \tag{5}$$

$$x\left(s\right)=x^{*}\left(s\right), \tag{6}$$

$$u\left(k\right)=\Psi_{r}\left(b_{r},x(k)\right),k=s,s+1,\ldots,N-1,r\in\{1,2,\ldots,p\}, \tag{7}$$

при цьому виконуються включення $x\left(k\right)\in X_{k},\ k=s,s+1,\ldots,N$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1 (принцип оптимальності Беллмана)**.** *Якщо набір структур* $\{\tilde{\Psi}_{r}\}$ *та параметрів* $\{\tilde{b}_{r}\}$ *є оптимальним у задачі (4)–(7), то для* $k=s,s+1,\ldots,N$ *цей набір співпадає з оптимальним набором структур* $\{\Psi_{r}^{*}\}$ *та параметрів* $\{b_{r}^{*}\}$ *задачі (1)–(3).*

Доведення. Припустимо, що твердження теореми не виконується, тобто керування, що є розв'язком задачі (4)–(7), не є оптимальним при $k=s,s+1,\ldots,N$ у задачі (1)–(3). Це означає, що має місце нерівність

$$J_{s}\left(x^{*},\,u^{*}\right)>J_{s}\left(\tilde{x},\,\tilde{u}\right),$$

де $x^{*}(t)$, $u^{*}(t)$ – оптимальна траєкторія та оптимальне керування задачі (1)–(3) відповідно, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ – оптимальна траєкторія та оптимальне керування задачі (4)–(7) відповідно. Побудуємо керування

$$v(k)=\begin{cases}\Psi_{r}^{*}\left(b_{r}^{*},x^{*}(k)\right), & k=0,1,\ldots,s-1,\\ \tilde{\Psi}_{r}\left(\tilde{b}_{r},\tilde{x}(k)\right), & k=s,s+1,\ldots,N-1.\end{cases}$$

Відповідна траєкторія матиме вигляд

$$y(k)=\begin{cases}x^{*}\left(k\right), & k=0,1,\ldots,s-1,\\ \tilde{x}\left(k\right), & k=s,s+1,\ldots,N.\end{cases}$$

Таким способом,

$$J(y,v)=\sum_{k=0}^{N-1}g_{k}\left(y\left(k\right),\,v\left(k\right)\right)+\Phi\left(y\left(N\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}g_{k}\left(x^{*}\left(k\right),\,\Psi_{k}^{*}\left(b_{k}^{*},x^{*}(k)\right)\right)+\sum_{k=s}^{N-1}g_{k}\left(\tilde{x}\left(k\right),\,\tilde{\Psi}_{k}\left(\tilde{b}_{k},\tilde{x}(k)\right)\right)+\Phi\left(\tilde{x}\left(N\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}g_{k}\left(x^{*}\left(k\right),\,\Psi_{k}^{*}\left(b_{k}^{*},x^{*}(k)\right)\right)+J_{s}\left(\tilde{x},\,\tilde{u}\right)<$$

$$<\sum_{k=0}^{s-1}g_{k}\left(x^{*}\left(k\right),\,\Psi_{k}^{*}\left(b_{k}^{*},x^{*}(k)\right)\right)+J_{s}\left(x^{*},\,u^{*}\right)=J\left(x^{*},\,u^{*}\right),$$

а це означає, що керування $u^{*}\left(t\right)$ не є оптимальним. Отримане протиріччя доводить теорему.

2. Дискретне рівняння Беллмана. Введемо

Означення. *Функція*

$$B_s(z) = \min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}} \left\{ \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x(k),\, \Psi_{r_k}\left(b_{r_k}, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \right\}, \tag{8}$$

що визначена на розв'язках системи

$$\begin{gathered} x(k+1) = f_k\left(x(k),\, \Psi_r\left(b_r, x(k)\right)\right), \\ k = s, s+1, \ldots, N-1, r \in \{1, \ldots, p\}, \\ x(s) = z, \end{gathered} \tag{9}$$

називається функцією Беллмана задачі (1)–(3). При цьому виконуються включення $x(k) \in X_k,\ k = s, s+1, \ldots, N$.

З означення функції Беллмана випливає, що

$$B_s(z) = \min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}} J_s(x,\, u).$$

Нехай пара $(\{\Psi_r^*\},\, \{b_r^*\})$ доставляє мінімум правій частині рівності (8), $x^*(k)$ – оптимальна траєкторія. Тоді

$$\begin{aligned} B_s(z) &= \min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}} \left\{ \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x(k),\, \Psi_{r_k}\left(b_{r_k}, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \right\} = \\ &= \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x^*(k),\, \Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*, x^*(k)\right)\right) + \Phi\left(x^*(N)\right) = \\ &= g_s\left(x^*(s),\, \Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right) + \\ &+ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x^*(k),\, \Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*, x^*(k)\right)\right) + \Phi\left(x^*(N)\right) = \\ &= g_s\left(z,\, \Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right) + \\ &+ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x^*(k),\, \Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*, x^*(k)\right)\right) + \Phi\left(x^*(N)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

За принципом оптимальності Беллмана

$$\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x^*(k),\, \Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*, x^*(k)\right)\right) + \Phi\left(x^*(N)\right) =$$

$$= \min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}} \left\{ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x(k),\, \Psi_{r_k}\left(b_{r_k}, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \right\},$$

а за означенням функції Беллмана

$$\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}} \left\{ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k\left(x(k),\, \Psi_{r_k}\left(b_{r_k}, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \right\} = B_{s+1}\left(x(s+1,\, z)\right).$$

Тут $x\left(k,\,z\right)$ – розв'язок задачі Коші (9) за умови

$$\left\{\Psi_r\left(b_r, x(k)\right)\right\} = \; = \left\{\Psi_r^*\left(b_r^*, x^*(k)\right)\right\}.$$

Отже,

$$B_s\left(z\right) = g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right) + B_{s+1}\left(x\left(s+1,\,z\right)\right).$$

Враховуючи, що $x\left(s+1,\,z\right) = f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right)$, отримаємо

$$B_s\left(z\right) = g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right)\right). \tag{11}$$

Якщо замість $\left(\left\{\Psi_r^*\right\},\,\left\{b_r^*\right\}\right)$ в (10) підставити довільну допустиму пару $\left(\left\{\Psi_r\right\},\,\left\{b_r\right\}\right)$, то права частина рівності може тільки збільшитись. Тобто,

$$\begin{aligned} B_s\left(z\right) = \min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}} \left\{\sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k}, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x\left(N\right)\right)\right\} \leq \\ \leq \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k}, x(k)\right)\right) + \Phi\left(x\left(N\right)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Тому в (11) ми маємо

$$B_s\left(z\right) \leq g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right)\right).$$

Враховуючи (9), для оптимальної пари $\left(\left\{\Psi_r^*\right\},\,\left\{b_r^*\right\}\right)$ та траєкторії $x^*\left(k\right)$ у (12) ми отримуємо рівність, тобто

$$B_s\left(z\right) = \min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}} \left\{g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right)\right)\right\}. \tag{13}$$

Співвідношення (13) називається дискретним рівнянням Беллмана.

2. Достатні умови оптимальності.

Теорема 2 (достатні умови оптимальності)**.** *Нехай функції $B_s(z)$ є розв'язками рівнянь (13) при $s = 0, 1, \ldots, N-1$, при цьому оптимальні набори структур $\left\{\Psi_{r_s}^*\right\}$ та параметрів $\left\{b_{r_s}^*\right\}$, знайдені з умов*

$$\begin{aligned} g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right)\right) = \\ = \min_{\{\Psi_{r_s}\},\{b_{r_s}\}} \left\{g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right)\right)\right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

при підстановці у функції керування

$$u^*\left(s\right) = \Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right), s = 0, \ldots, N-1$$

породжують при $z = x$ єдиний розв'язок $x^*(\cdot)$ системи (2).

Тоді набори структур $\left\{\Psi_{r_s}^*\right\}$ та параметрів $\left\{b_{r_s}^*\right\}$ є оптимальними у задачі (1)–(3).

Доведення. Оскільки набори $\left\{\Psi_{r_s}^*\right\}$ та $\left\{b_{r_s}^*\right\}$ є розв'язком задачі (14) і для $B_s(z)$ має місце (13), то

$$B_s\left(z\right) = g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right) + B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*, x^*(s)\right)\right)\right).$$

Звідси

$$g_s\left(z,\ \Psi^*_{r_s}\left(b^*_{r_s}, x^*(s)\right)\right) = B_s\left(z\right) - B_{s+1}\left(f_s\left(z,\ \Psi^*_{r_s}\left(b^*_{r_s}, x^*(s)\right)\right)\right) =$$

$$= B_s(x^*(s)) - B_{s+1}(x^*(s+1)).$$

Тоді, з урахуванням останньої рівності, оптимальне значення функціоналу дорівнює

$$J\left(x^*, u^*\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x^*\left(k\right),\ u^*\left(k\right)\right) + \Phi\left(x^*\left(N\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left[B_k(x^*(k)) - B_{k+1}(x^*(k+1))\right] + \Phi\left(x\left(N\right)\right) =$$

$$= B_0(x^*(0)) - B_1(x^*(1)) + B_1(x^*(1)) - B_2(x^*(2)) + \ldots +$$

$$+ B_{N-1}(x^*(N-1)) - B_N(x^*(N)) + \Phi\left(x\left(N\right)\right).$$

Враховуючи, що $B_N\left(x^*\left(N\right)\right) = \Phi\left(x^*(N)\right)$, отримуємо

$$J\left(x^*, u^*\right) = B_0\left(x_0\right). \tag{15}$$

При довільних наборах $\{\Psi_{r_s}\}$ та $\{b_{r_s}\}$ маємо

$$g_s\left(z,\ \Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right) \geq B_s\left(z\right) - B_{s+1}\left(f_s\left(z,\ \Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right)\right) =$$

$$= B_s(x(s)) - B_{s+1}(x(s+1)).$$

Тоді, аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо нерівність

$$J\left(x, u\right) \geq B_0\left(x_0\right). \tag{16}$$

З (15) та (16) випливає, що $J\left(x, u\right) \geq J\left(x^*, u^*\right)$. Теорему доведено.

Висновки. Отже, ми обґрунтували можливість застосування методу динамічного програмування до задачі вибору оптимальної структури та параметрів дискретної системи керування. Доведена справедливість принципу оптимальності, побудоване дискретне рівняння Беллмана, одержані достатні умови оптимальності керування у формі Беллмана. Ці результати можуть бути використані при побудові чисельних алгоритмів для розв'язування конкретних задач.

1. **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація / Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К. : Київський університет, 2008. – 383 с.
2. **Башняков О. М.** Задача синтезу в теорії керування / О. М. Башняков, В. В. Пічкур. – К.: Сталь, 2012. – 116 с.
3. **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.

4. **Пічкур В. В.** Дискретний варіант методу динамічного програмування в задачі структурно-параметричної оптимізації / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – № 3 (102). – С. 103–109.

5. **Пічкур В. В.** Застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2010. – Т. 15. Вип. 19. – С. 94–102.

6. **Страхов Є. М.** Структурно-параметрична оптимізація систем керування на основі методу динамічного програмування : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : спец. 01.01.09 "Варіаційне числення та теорія оптимального керування" / Є. М. Страхов. – Одеса, 2013. – 20 с.

7. **Strakhov E. M.** Dynamic Programming in Structural and Parametric Optimization / E. M. Strakhov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 82, no. 3. – PP. 503–512.

Mathematical Subject Classification: 34C28, 37D45, 37G35
UDC 517.925

V. A. Gaiko
The United Institute of Informatics Problems
of the National Academy of Sciences of Belarus

CHAOS TRANSITION IN THE LORENZ SYSTEM

Гайко В. О. Перехід до хаосу в системі Лоренца. Ми розглядаємо класичну систему Лоренца і, використовуючи деякі чисельні результати та наш біфуркаційно–геометричний підхід, пропонуємо новий сценарій переходу до хаосу в цій системі.
Ключові слова: система Лоренца, біфуркація, сингулярна точка, граничний цикл, хаос.

Гайко В. А. Переход к хаосу в системе Лоренца. Мы рассматриваем классическую систему Лоренца и, используя некоторые численные результаты и наш бифуркационно-геометрический подход, предлагаем новый сценарий перехода к хаосу в этой системе.
Ключевые слова: система Лоренца, бифуркация, сингулярная точка, предельный цикл, хаос.

Gaiko V. A. Chaos transition in the Lorenz system. We consider the classical Lorenz system. For many years, this system has been the subject of study by numerous authors. However, until now the structure of the Lorenz attractor is not clear completely yet, and the most important question at present is to understand the bifurcation scenario of chaos transition in this system. Usually the assertions of such scenarios are based only on computer experiments and speculative arguments rather than any analytic proofs. Some of these assertions can readily be verified, and their validity is not brought into question anywhere. Other assertions are difficult to verify, and they always look quite dubious. Using some numeric and analytic results by N.A.Magnitskii and S.V.Sidorov, we revise the previous bifurcation scenarios and, applying our bifurcational geometric approach, present a new scenario of chaos transition in the classical Lorenz system which globally connects the homoclinic, period-doubling, Andronov-Shilnikov, and period-halving bifurcations of its limit cycles.
Key words: Lorenz system, bifurcation, singular point, limit cycle, chaos.

Introduction. We consider a three-dimensional dynamical system

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(r - z) - y, \quad \dot{z} = xy - bz \tag{1}$$

known as the Lorenz system. Historically, (1) was the first dynamical system for which the existence of an irregular attractor (chaos) was proved for $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $24{,}06 < r < 28$. For many years, the Lorenz system has been the subject of study by numerous authors; see, e. g., [1]–[8]. However, until now the structure of the Lorenz attractor is not clear completely yet, and the most important question at present is to understand the bifurcation scenario of chaos transition in system (1).

In Section 1 of this paper, we recall the classical scenario of chaos transition in the Lorenz system (1). In Section 2, we give for (1) a relatively new chaos transition

© Gaiko V. A., 2013

scenario proposed by N. A. Magnitskii and S. V. Sidorov [6]. In Section 3, we present a different bifurcation scenario for system (1), where $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $r > 0$, using numerical results of [6] and our bifurcational geometric approach to the global qualitative analysis of three-dimensional dynamical systems which we applied earlier in the planar case [9]–[20].

Main Results.

1. The classical scenario of chaos transition (C-scenario). First, let us briefly recall the contemporary point of view on the structure of the Lorenz attractor and chaos transition [1, 6].

1. The Lorenz system (1) is dissipative and symmetric with respect to the z-axis. The origin $O(0,0,0)$ is a singular point of system (1) for any σ, b, and r. It is a stable node for $r < 1$. For $r = 1$, the origin becomes a triple singular point, and then, for $r > 1$, there are two more singular points in the system: $O_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ and $O_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ which are stable up to the parameter value $r_a = \sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$ ($r_a \approx 24{,}74$ for $\sigma = 10$ and $b = 8/3$). For all $r > 1$, the point O is a saddle-node. It has a two-dimensional stable manifold W^s and a one-dimensional unstable manifold W^u. If $1 < r < r_1 \approx 13{,}9$, then separatrices Γ_1 and Γ_2 issuing from the point O along its one-dimensional unstable manifold W^u are attracted by their nearest stable points O_1 and O_2, respectively.

2. If $r = r_1$, then each of the separatrices Γ_1 and Γ_2 becomes a closed homoclinic loop. In this case, two homoclinic loops are tangent to each other and the z-axis at the point O and form a figure referred to as a homoclinic butterfly. It is assumed that the generation of an unstable homoclinic butterfly is one of the two bifurcations leading to the appearance of the Lorenz attractor.

3. If $r_1 < r < r_2 \approx 24{,}06$, then a saddle periodic trajectory bifurcates from each of the closed homoclinic loops (these trajectories will be denoted by L_1 and L_2, respectively). In this case, separatrices Γ_1 and Γ_2 tend to the stable points O_2 and O_1, respectively. It is usually assumed that stable manifolds of the saddle periodic trajectories L_1 and L_2 are the boundaries of attraction domains of points O_1 and O_2. A curve issuing from the exterior of these domains can make oscillations from the neighborhood of L_1 into a neighborhood of L_2 and conversely until it enters the attraction domain of the attractor O_1 and O_2; the closer is parameter r to the value r_2, the larger is the number of oscillations. This behavior of the system is referred to as metastable chaos. If $r = r_2$, then separatrices Γ_1 and Γ_2 do not tend to the points O_2 and O_1, but wind around the limit saddle cycles L_2 and L_1, respectively. Here the second bifurcation leading to the appearance of the Lorenz attractor takes place. If $r_2 < r < r_3 = r_a$, then points O_1 and O_2 are still stable. In addition, in the phase space, there is an attracting set B referred to as the Lorenz attractor; it is a set of integral curves moving from L_1 to L_2 and vice versa. The saddle point O, together with its separatrices Γ_1 and Γ_2, belongs to the attractor.

4. If $r \to r_3 = r_a$, then the saddle limit cycles L_1 and L_2 shrink to the points O_1 and O_2; for $r = r_3$, they vanish and coincide with these points as a result of the Andronov–Hopf subcritical bifurcation.

5. If $r_3 < r < r_4 \approx 30{,}1$, then the Lorenz attractor is the unique stable limit set of system (1). It is usually assumed that this set is a branching surface S lying near the plane $x - y = 0$ and consisting of infinitely many sheets tied together and infinitely close to each other. A phase trajectory issuing on the left from the z-axis

comes untwisted along a spiral around the point O_1 until the transition to the right of the z-axis, after which it becomes untwisted along a spiral around the point O_2 in the opposite direction. The number of rotations around the points O_1 and O_2 varies irregularly; thus the motion looks chaotic. It is assumed that the attractor is not a two-dimensional manifold and has a fractal structure [6]. If $r_4 < r \lesssim 313$, then the structure of solutions of the system of Lorenz equations becomes extremely complicated with alternation of chaotic and periodic modes. It is usually assumed that there may be infinitely many periodicity windows in the system, and each of such windows is a direct subharmonic cascade of bifurcations, which terminates with a basic stable limit cycle. For further growth of r, each of such cycles is destroyed by an intermittency, and the appearance of periodicity windows is preceded by the inverse cascade of bifurcations [6].

6. If $r > 313$, then the unique stable limit cycle is an attractor in the Lorenz system.

Thus, items 1–6 contain basic commonly accepted assertions dealing with the Lorenz attractor and the scenarios of its appearance (and vanishing). Note that all these assertions are based only on computer experiments and speculative arguments rather than any analytic proofs. Some of these assertions can readily be verified, and their validity is not brought into question anywhere (e. g., the assertions of item 1). However, other assertions are difficult to verify, and they always look quite dubious. So, e. g., while saddle periodic cycles L_1 and L_2 are really generated from homoclinic loops for $r = r_1$, and they are those determining "eyes" of the Lorenz attractor for $r = r_2$, but why are these "eyes" observed in the attractor in the case $r > r_3$ as well in which the cycles L_1 and L_2 already vanished? The only possible conclusion is the following: the eyes of attractor are not determined by the saddle cycles L_1 and L_2 even if they exist. But if they also exist, at all it is unessential that they are born at $r = r_1$, as a result of bifurcation of a homoclinic butterfly. Also, assertions on the structure of attractor and its dimension found on computer with incredible accuracy have always been questionable. Finally, the phenomenon of intermittency did not find its logic explanation. It was shown in [6], that actually in the Lorenz system absolutely another scenario of chaos transition would be realized. We revise this scenario too and, applying a bifurcational geometric approach, present a new scenario of chaos transition in system (1) for $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $r > 0$.

2. The Magnitskii–Sidorov scenario (MS-scenario). It turns out, see [6], that all cycles from infinite family of unstable cycles, generating Lorenz attractor, have crossing with an one-dimensional unstable not invariant manifold V^u of the point O (do not confuse with the invariant unstable manifold W^u). This result follows from the theory of dynamical chaos stated in [6]. After the derivation of analytic formulas for the manifold V^u, it becomes possible to reduce the problem of establishing and proving the existence of unstable cycles in the Lorenz system to the one-dimensional case, namely, to finding stable points of the one-dimensional first return mapping defined on the unstable manifold [6]. By this method, it is shown in [6] that items 2 and 3 of the above-represented classical scenario of transition to chaos in the Lorenz system (1) are invalid. Some assertions of items 4–6 fail, while other require a more detailed investigation.

1. This item remains the same as item 1 of the C-scenario.

2. If $r = r_1 \approx 13{,}9$, then the separatrices Γ_1 and Γ_2 do not form two separate

homoclinic loops. Here we have a bifurcation with the generation of a single closed contour surrounding both stationary points O_1 and O_2; the end of the separatrix Γ_1 enters the beginning of the separatrix Γ_2, and vice versa, the end of Γ_2 enters the beginning of Γ_1. As r grows, from this contour, a closed cycle C_0 appears there first. It is an eight-shaped figure surrounding both points O_1 and O_2.

3. If $r_1 < r < r_2 \approx 24{,}06$, then cycles L_1 and L_2 surrounding the points O_1 and O_2, respectively, do not appear; but with further growth of r, pairs of cycles C_n^+, C_n^-, $n = 0, 1, \ldots$, are successively generated. They determine the generation of the Lorenz attractor. The cycle C_n^+ makes n complete rotations in the half-space containing the point O_1 and one incomplete rotation around the point O_2. Conversely, the cycle C_n^- makes n complete rotations around the point O_2 and one incomplete rotation around the point O_1.

For each r, $r_1 < r < r_2$, there exists the number $n(r)$ ($n(r) \to \infty$ as $r \to r_2$) such that in the phase-space of (1), there are unstable cycles C_0, C_k^+, C_k^-, $k = 0, \ldots, n$, and cycles C_{km}^+, C_{km}^-, $k, m < n$, which make k rotations around the point O_1 and m rotations around the point O_2 and are various combinations of the cycles C_n^+ and C_n^-, and many other cycles generated by bifurcations of the cycles C_n^+ and C_n^- [6]. Points of intersection of all these cycles with the manifold V_u have the following arrangement on the curve V_u for $0 \le z_{min} \le z \le z_{max} < r - 1$. The point z_{min} corresponds to the right large single loop of the cycle C_n^-. This loop is the larger face of the right truncated cone of the set S. Further, the trajectory of the cycle passes into the left half-plane and makes n clockwise rotations around the point O_2. The smallest first loop around the point O_2 is the smaller face of the truncated cone of the set S. The point z_{max} corresponds to the smallest loop of the cycle C_n^+ around the point O_1. This loop is the smaller face of the right truncated cone. Further, the trajectory of this cycle makes n rotations around the point O_1 clockwise, passes into the left half-plane, and makes one large rotation around the point O_2. This rotation is the larger face of the left truncated cone. Between the points z_{min} and z_{max} there is a point z_0 corresponding to the main cycle C_0.

Boundaries of the attraction domains of the stable points O_1 and O_2 are given by the smallest loops of the cycles C_n^+ and C_n^-, whose size decay as r grows. Therefore, for some $r = r_m$, the attraction domain of the set B no longer intersects the attraction domains of points O_1 and O_2, and the set B becomes an attractor. Therefore, in the Lorenz system ($a = 10$, $b = 8/3$), metastable chaos exists only in the interval $r_1 < r < r_m$, and in the interval $r_m < r < r_2$, the system has three stable limit sets, namely, O_1 and O_2 and the Lorenz attractor.

If $r \to r_2$, then the eye size decreases as the number of rotations of the cycles C_n^+ and C_n^- around the points O_1 and O_2, respectively, grows. The value z_{max} grows, and z_{min} decays; moreover, $z_{min} \to 0$ as $r \to r_2$. The lengths of generatrices of truncated cones grow, since additional rotations are added to the cone vertex and diminish the size of the smaller face. Conversely, the larger face grows. If $r = r_2$, then $z_{min} = 0$, but $z_{max} < r - 1$; thus, the larger face of each cone achieves its maximal size, while the smaller face is not contracted into a point, the cone vertex. The following bifurcation takes place. In the limit as $n \to \infty$, each set of cycles C_n^+ (respectively, C_n^-) forms a point-cycle heteroclinic structure consisting of two separatrix contours of the point O. The first contour consists of a separatrix issuing from the point O along its unstable manifold and spinning on the appearing (only for $r = r_2$) saddle cycle L_1 (respectively,

L_2) of the point O_1 (respectively, O_1). The second contour consists of the separatrix spinning out from the saddle cycle L_1 (respectively, L_2) and entering the point O along its stable manifold.

As mentioned above, the described bifurcation does not lead to generation of the Lorenz attractor for $r = r_2$. It is more correct to say that it is only a prerequisite of destruction of the attractor as r decays. The attractor itself, existing in the system for $r = r_2$, is formed from finitely many stable cycles $C_k^{\pm}$, $k = 0, \ldots, l$, for $r < 313$. It contains neither separatrices Γ_1 and Γ_2 of the point O nor infinitely many unstable cycles $C_n^{\pm}$ existing in the neighborhood of the point-cycle heteroclinic structure.

If $r_2 < r < r_3$, then points O_1 and O_2 are still stable, and their attraction domains are bound by the appearing limit cycles L_1 and L_2 contracting to points as $r \to r_3$. But the Lorenz attractor B is not a set of integral curves going from L_1 to L_2 and back, and separatrices Γ_1 and Γ_2 of the saddle point O do not belong to the attractor. Cycles L_1 and L_2 have already made their job at $r = r_2$ and no longer have anything to do with the attractor. If $r_2 < r < r_3$, then, just as in the case of $r_1 < r < r_2$, the cycles C_n^+ and C_n^- appear again from separatrix contours. The attractor is determined by finitely many such cycles [6].

4. For $r = r_3$, the saddle cycles L_1 and L_2 disappear. In the system, there is a unique limit set, namely, the Lorenz attractor.

5. There exist one more important value of the parameter r which affects the formation of the Lorenz attractor. This is a point $r_4 \approx 30{,}485$. If r grows from r_3 to r_4, then the number of rotations of the cycles C_n^+ and C_n^- first rapidly decays, then grows again. In this case, eyes by separatrices of the point O are much smaller than attractor eyes and begin to grow as r increases. Therefore, r_4 is the point of minimum distance from the line ($a = 10$, $b = 8/3$) in the space of parameters (a, b, r) to the curve of heteroclinic contours joining the point O with the points O_1 and O_2. The separatrices of the point O approach one-dimensional stable manifolds of the points O_1 and O_2 by the minimal distance but do not hit these points. Therefore, almost heteroclinic and almost homoclinic contours exist in system (1) at the point r_4.

The process of generation of the Lorenz attractor in system (1) as r decays from the value 313 up to r_4 is referred to as the incomplete double homoclinic cascade [6]. The complete cascade occurs if the r-axis passes exactly through the point of existence of two homoclinic contours. Note that in systems with a single homoclinic contour, there can be a simple complete or incomplete homoclinic cascade of bifurcations of transition to chaos, and in [6], a detailed description of transition to chaos through the double homoclinic (complete or incomplete) cascade of bifurcations is given. Just as in item 6 of the classical scenario, if $r > 313$, then in the system, there exists a unique stable limit cycle C_0 surrounding both points. If $r \approx 313$, then the cycle C_0 becomes unstable and generates two stable cycles C_0^+ and C_0^- which also surround the points O_1 and O_2 but have deflections in the direction of corresponding halves of the unstable manifold V^u of the point O. This is the point where the double homoclinic cascade of bifurcations really begins. In case of an incomplete cascade, it consists of finitely many stages of appearance of stable cycles $C_k^{\pm}$, $k = 0, \ldots, l$, and their infinitely many further bifurcations. But in case of a complete cascade, the number of stages is infinite, and at the limit of $l \to \infty$, cycles tend to homoclinic contours of the points O_1 and O_2, respectively. At the k-th stage of the cascade, originally stable cycles $C_k^{\pm}$ undergo a subharmonic cascade of bifurcations and form two

band-form attractors that consist of infinitely many unstable limit cycles intersecting the respective domains of the unstable manifold V^u of the point O. Then these two bands merge and form a single attractor surrounding both the points O_1 and O_2, after which there is a cascade of bifurcations of cycles generated as a result of the merger and making rotations separately around the points O_1 and O_2 and simultaneously around both the points. The last cascade of bifurcations has the property of self-organization, since it is characterized by simplification of the structure of cycles and the generation of new stable cycles with a smaller number of rotations around the points O_1 and O_2 as r decays. Each cycle of the cascade of self-organization bifurcations undergoes its own subharmonic cascade of bifurcations, after which all cycles formed during infinitely many bifurcations of all subharmonic cascades and cascades of self-organization bifurcations of cycles become unstable and form some set B_k. After an incomplete homoclinic cascade of bifurcations, we obtain a set $B = \bigcup B_k$ consisting of infinitely many possible unstable cycles appearing at all stages of the cascade. These cycles generate an incomplete double homoclinic attractor, that is the classical Lorenz attractor.

6. This item remains the same as item 6 of the C-scenario.

3. The bifurcational geometric scenario (G-scenario). Revising the above scenarios, we present a new scenario of chaos transition in the Lorenz system (1) for $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $r > 0$.

1. If $r < 1$, the unique singular point O of system (1) is a stable node. For $r = 1$, it becomes a triple singular point, and then, for $r > 1$, there are two more singular points in the system: O_1 and O_2 which are stable up to the parameter value $r_a \approx 24{,}74$. For all $r > 1$, the point O is a saddle-node. It has a two-dimensional stable manifold W^s and an one-dimensional unstable manifold W^u. If $1 < r < r_l = r_1 \approx 13{,}9$, then the separatrices Γ_1 and Γ_2 issuing from the point O along its one-dimensional unstable manifold W^u are attracted by their nearest stable points O_1 and O_2, respectively.

2. If $r = r_l$, then each of the separatrices Γ_1 and Γ_2 becomes a closed homoclinic loop. In this case, two unstable homoclinic loops, C_0^+ and C_0^-, are formed around the points O_1 and O_2, respectively. They are tangent to each other and the z-axis at the point O and form together a homoclinic butterfly.

3. If $r_l < r < r_a \approx 24{,}74$, then, unfortunately, neither the C-scenario nor the MS-scenario can be realized. The reason is that, in both cases, trajectories of system (1) should intersect the two-dimensional stable manifold W^s of the point O. Since this is impossible, the only way to overcome the contradiction is to suppose that a cascade of period-doubling bifurcations [6] will begin immediately in each of the half-spaces with respect to the manifold W^s, when $r > r_l$. In this case, each of the homoclinic loops C_0^+ and C_0^- generates an unstable limit cycle of period 2 which makes one rotation around the point O_1 and one rotation around the point O_2 but in the corresponding half-spaces containing the points O_1 and O_2, respectively, and a stable limit cycle of period 1 lying between the coils of the cycle of period 2. With further growth of r, each of the cycles of period 2 generates an unstable limit cycle of period 4 with a stable limit cycle of period 3 inside of it and each of the cycles of period 1 generates a stable limit cycle of period 2 with an unstable limit cycle of period 1 inside of it. Then, after next doubling, we will have in each of the half-spaces an unstable limit cycle of period 8 with an inserted stable limit cycle of period 7 and a stable limit cycle of period 6 with an inserted unstable limit cycle of period 5, and a stable limit

cycle of period 4 with an inserted unstable limit cycle of period 3, and an unstable limit cycle of period 2 with an inserted stable limit cycle of period 1. Continuing this process further, we will obtain limit cycles of all periods from one to infinity, and the space between these cycles will be filled by spirals issuing from unstable limit cycles and tending to stable limit cycles as $t \to +\infty$. These cycles are inserted into each other, they make various combinations of rotation around the points O_1 and O_2 in the corresponding half-spaces containing these points and form geometric constructions (limit periodic sets) which look globally like very flat truncated cones described in item 3 of the MS-scenario [6].

4. For $r = r_a \approx 24{,}74$, the biggest unstable limit cycles of infinite period disappear through the Andronov–Shilnikiv bifurcation [4, 5] in each of the half-spaces containing the points O_1 and O_2 (the cone vertices are at these points), and these points become unstable saddle-foci.

5. If $r_a < r < +\infty$, then a cascade of period-halving bifurcations [6] occurs in each of the half-spaces with respect to the manifold W^s. We have got again two symmetric with respect to the z-axis limit periodic sets consisting of limit cycles of all periods which are inserted into each other and make various combinations of rotation around the points O_1 and O_2 in the corresponding half-spaces containing these points, and the space between the cycles is filled by spirals issuing from unstable limit cycles and tending to stable limit cycles as $t \to +\infty$. The biggest limit cycles of these sets are stable now, and with further growth of r, the period-halving process makes them and the whole limit periodic sets more and more flat. The obtained geometric constructions are the only stable limit sets of system (1). The spirals of the unstable saddle-foci O_1 and O_2 and the trajectories issuing from infinity tend to these limit periodic sets (more precisely, to their stable limit cycles) as $t \to +\infty$. Just these stable limit periodic sets form two symmetric parts of the so-called Lorenz attractor, and this really looks very chaotic.

6. If $r \to +\infty$ (numerically, when $r \gtrsim 313$), then the period-halving process will be finishing and system (1) will have two stable limit cycles in two phase half-spaces containing the unstable saddle-foci O_1 and O_2 of (1). This completes our scenario of chaos transition in the Lorenz system (1).

Conclusion. Thus, we have considered the classical Lorenz system and, using some numerical results and our bifurcational geometric approach, have presented a new scenario of chaos transition in this system.

Acknowledgements. This work was supported by the Netherlands Organization for Scientific Research (NWO) and the German Academic Exchange Service (DAAD). The author is very grateful to the Johann Bernoulli Institute for Mathematics and Computer Science of the University of Groningen and the Institute for Mathematics of the TU Ilmenau for hospitality during his stays in 2011–2012 and also to Henk Broer (Groningen) and Juergen Knobloch (Ilmenau) for very fruitful discussions.

1. **Sparrou, C.** The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors / C. Sparrou // Applied Mathematical Sciences. – New York: Springer, 1982. – Vol. 41. – 269 p.

2. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998.– Vol. 20. – P. 7–15.
3. **Methods** of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I / L. P. Shilnikov [et al.] // World Scientific Series on Nonlinear Science. Ser. A. – New Jarsey: World Scientific, 1998. – Vol. 4. – 416 p.
4. **Methods** of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II / L. P. Shilnikov [et al.] // World Scientific Series on Nonlinear Science. Ser. A. – New Jarsey: World Scientific, 2001. – Vol. 5. – 592 p.
5. **Kuznetsov, Yu. A.** Elements of Applied Bifurcation Theory / Yu. A. Kuznetsov // Applied Mathematical Sciences. – New York: Springer, 2004. – Vol. 112. – 631 p.
6. **Magnitskii, N. A.** New Methods for Chaotic Dynamics / N. A. Magnitskii, S. V. Sidorov // Nonlinear Science. Ser. A. – Singapore: World Scientific, 2006. – Vol. 58. – 363 p.
7. **Broer, H. W.** Dynamical Systems and Chaos / H. W. Broer, F. Takens // Applied Mathematical Sciences. – New York: Springer, 2011. – Vol. 172. – 313 p.
8. **Doedel, E. J.** Global invariant manifolds in the transition to preturbulence in the Lorenz system / E. J. Doedel, B. Krauskopf, H. M. Osinga // Indagationes Math. – 2011. – Vol. 22. – P. 222–240.
9. **Gaiko, V. A.** Global Bifurcation Theory and Hilbert's ixteenth Problem / V. A. Gaiko // Mathematics and Its Applications. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. – Vol. 562. – 204 p.
10. **Gaiko, V. A.** Limit cycles of quadratic systems / V. A. Gaiko // Nonlinear Anal. – 2008. – Vol. 69, No. 7. – P. 2150–2157.
11. **Gaiko, V. A.** Limit cycles of Liénard-type dynamical systems / V. A. Gaiko // Cubo. – 2008. – Vol. 10, No. 3. – P. 115–132.
12. **Gaiko, V. A.** On the geometry of polynomial dynamical systems / V. A. Gaiko // J. Math. Sci. – 2009. – Vol. 157, No. 3. – P. 400–412.
13. **Gaiko, V. A.** A quadratic system with two parallel straight-line-isoclines / V. A. Gaiko // Nonlinear Anal. – 2009. – Vol. 71, No. 11. – P. 5860–5865.
14. **Broer, H. W.** Global qualitative analysis of a quartic ecological model / H. W. Broer, V. A. Gaiko // Nonlinear Anal. – 2010. – Vol. 72, No. 2. – P. 628–634.
15. **Gaiko, V. A.** The geometry of limit cycle bifurcations in polynomial dynamical systems / V. A. Gaiko // Discrete Contin. Dyn. Syst. Suppl. – 2011. – Vol. 5. – P. 447–456.
16. **Gaiko, V. A.** Multiple limit cycle bifurcations of the FitzHugh–Nagumo neuronal model / V. A. Gaiko // Nonlinear Anal. – 2011. – Vol. 74, No. 18. – P. 7532–7542.
17. **Gaiko, V. A.** On limit cycles surrounding a singular point / V. A. Gaiko // Differ. Equ. Dyn. Syst. – 2012. – Vol. 20, No. 3. – P. 329–337.
18. **Gaiko, V. A.** The applied geometry of a general Liénard polynomial system / V. A. Gaiko // Appl. Math. Letters. – 2012. – Vol. 25, No. 12. – P. 2327–2331.
19. **Gaiko, V. A.** Limit cycle bifurcations of a Liénard system with cubic restoring and polynomial damping functions / V. A. Gaiko // Sci. Bull. Chernivtsi Nat. Univ. Ser. Math. – 2012. – Vol. 2, No. 2–3. – P. 30–35.
20. **Gaiko, V. A.** Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions / V. A. Gaiko // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. – 2012. – Vol. 4, No. 3. – P. 242–254.

Mathematical Subject Classification: 34A08, 34B15
UDC 517.9

A. V. Mykhailenko
Odesa National Economic University

FRACTIONAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM

Михайленко А. В. Дробові крайові задачі. В роботі отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для нелінійного диференціального рівняння дробового порядку з похідною Рімана—Ліувіля.
Ключові слова: крайова задача, існування, єдиність, дробова похідна.

Михайленко А. В. Дробные краевые задачи. В работе получены достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения дробного порядка с производной Римана—Лиувилля.
Ключевые слова: краевая задача, существование, единственность, дробная производная.

Mykhailenko A. V. Fractional boundary-value problem. In this paper we establish sufficient conditions for the existence and uniqueness of solution of boundary-value problem for fractional differential equation with Riemann—Liouville derivative.
Key words: boundary-value problem, existence, uniqueness, fractional derivative.

Introduction. Differential equations of fractional order have numerous applications to problems in electrochemistry, biology, electromagnetics, control, viscoelasticity, etc. [11,3,7,4] Treatises of many autors are dedicated to the research of initial value problems [10,11]. Boundary-value problem for fractional differential equations have been considered in [1,10,14,2,15,13].

In [13] there are established the conditions of existence and uniqueness of positive solution for a Dirichlet-type problem of the nonlinear fractional differential equation

$$D_0^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0, 0 < t < 1, 1 < \alpha < 2,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

where $f : [0, 1] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ is continuous and D_0^α is the fractional derivative of Riemann—Liouville.

In [14] it was proved the existence of positive solutions of the problem

$$\widetilde{D}_0^\alpha u(t) = f(t, u(t)), 0 < t < 1, 1 < \alpha < 2,$$

$$u(0) + u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0,$$

where $\widetilde{D}_0^\alpha$ is the derivative of Caputo, and function f in $[0, 1] \times [0, \infty)$ is nonnegative and continuous.

In [15] it was considered the boundary-value problem

$$\widetilde{D}_0^\alpha u(t) = f(t, u(t), \widetilde{D}_0^\beta u(t)), 1 < \alpha \le 2, 0 < \beta \le 1,$$

$$a_1 u(0) - a_2 u'(0) = A, b_1 u(1) + b_2 u'(1) = B,$$

© Mykhailenko A. V., 2013

where $a_i, b_i \geq 0, i = 1, 2, a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 > 0, f : [0, 1] \times R \times R \to R$ is continuous function. The existence of solution was proved.

In this paper we consider the boundary-value problem

$$D_0^{1+\alpha}u(x) = F\left(x, u(x), D_0^{\alpha}u(x)\right), 0 < \alpha \leq 1, u(0) = u(a) = 0, \tag{1.1}$$

where function $F(x, y, z) : [0, a] \times R \times R \to R$ is measurable with respect to x for $(y, z) \in R \times R$ and continuous with respect to (y, z) for $x \in [0, a]$, and satisfies Lipschitz condition with respect to y and z as well. It was proved the existence and uniqueness of solution of this problem.

This paper is organized as follows. In Section 2 we introduce some preliminary results needed in the next sections. In Section 3 we present an existence and uniqueness result for the problem (1.1).

2. Preliminaries. In this section we introduce definitions and preliminary facts that will be used in this paper. Let $C(J), J = [0, a]$ be the Banach space of continuous functions $f : J \to R$ with the norm

$$\|f(x)\|_C = \{\max |f(x)| : 0 \leq x \leq a\}$$

and lets denote by $L(J)$ the Banach space of measurable functions $f(x)$ that are Lebesgue integrable with norm

$$\|f(x)\|_L = \int_0^a |f(x)|dx.$$

By $AC^n(J)$ we denote the set of continuously differentiable till the $(n-1)$ order in J functions , and $f^{(n-1)}(x) \in AC(J)$.

Let $\gamma \geq 0$ be a real number and $n = [\gamma] + 1$ where $[\gamma]$ is the integer part of γ. For a function $f : J \to R$ the expressions [1,2]

$$f_\gamma(x) = I_0^\gamma f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x (x-t)^{(\gamma-1)} f(t)dt, \tag{2.1}$$

$$D_0^\gamma f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\gamma-1} f(t)dt \tag{2.2}$$

are called, respectively, the Riemann—Liouville left-hand fractional integral and derivative of order γ.

Lemma 2.1. [3] *Assume that $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ is a uniformly convergent to $f(x)$ sequence of continuous functions. Then $\lim_{k\to\infty} I_0^\gamma f_k(x) = I_0^\gamma f(x)$.*

Lemma 2.2. [12,3]. *Let $\gamma > 0, n = [\gamma] + 1$. Assume that $f(x)$ is such that $f_{n-\gamma}(x) \in AC^n(J)$. Then*

$$I_0^\gamma D_0^\gamma f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\gamma-k-1}}{\Gamma(\gamma-k)} f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(0),$$

where $f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(0) = \lim_{x\to 0+} f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(x)$.

Lemma 2.3. [9] *Assume that $f : J \to R$ is measurable function and $|f(x)| \leq M$. Then $\mu(x) = I_0^\gamma f(x) \in C(J)$ and $\mu(0) = 0$.*

Lemma 2.4. [8] *Let σ_1 and σ_2 are any positive numbers and let $0 \le \mu \le 1$. Then $|\sigma_1^\mu - \sigma_2^\mu| \le |\sigma_1 - \sigma_2|^\mu$.*

It is considered boundary-value problem

$$D_0^{1+\alpha} y(x) = f(x), \tag{2.3}$$

$$y(0) = y(a) = 0, \tag{2.4}$$

where $0 < \alpha \le 1$, $f : J \to R$ is measurable function, and $|f(x)| \le M$.

Definition 2.1 *By solution of problem (2.3), (2.4) we name such function $y : J \to R$ that: (i) $y(x) \in C(J), y_{1-\alpha} \in AC^2[J]$; (ii) satisfies the boundary conditions (2.4); (iii) satisfies the differential equation (2.3) for a.a. $x \in J$.*

Lemma 2.5. *Let $f : J \to R$ is measurable function and $|f(x)| \le M$. Then the boundary-value problem (2.3), (2.4) has a unique solution*

$$y(x) = \int_0^a G(x,t) f(t) dt, \tag{2.5}$$

where

$$G(x,t) = \left[\begin{array}{c} -\frac{(x(a-t))^\alpha - (a(x-t))^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)}, 0 \le t \le x \\ -\frac{(x(a-t))^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)}, x \le t \le a. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Here $G(x,t)$ is the Green's function of boundary-value problem (2.3), (2.4).

Proof. Suppose that the solution of problem (2.3), (2.4) exists. Then corresponding to (2.2)

$$D_0^{1+\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt = y''_{1-\alpha}(x) \in L(J).$$

Consequently

$$I_0^{1+\alpha} D_0^{1+\alpha} y(x) = I_0^{1+\alpha} f(x).$$

As a consequence of Lemma 2.2

$$I_0^{1+\alpha} D_0^{1+\alpha} y(x) = y(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y_{1-\alpha}(0),$$

at that in accord with lemma 2.3 $y_{1-\alpha}(0) = 0$. Consequently

$$y(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) = I_0^{1+\alpha} f(x). \tag{2.7}$$

As $y(a) = 0$, then from (2.7) at $x = a$ it follows that

$$y'_{1-\alpha}(0) = -\frac{1}{a^\alpha} \int_0^a (a-t)^\alpha f(t) dt.$$

Then

$$y(x) = -\frac{x^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_0^a (a-t)^\alpha f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x (x-t)^\alpha f(t) dt. \tag{2.8}$$

Lets represent (2.8) as following:

$$y(x) = -\frac{x^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \left(\int_0^x (a-t)^\alpha f(t)dt + \int_x^a (a-t)^\alpha f(t)dt \right) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x (x-t)^\alpha f(t)dt = \int_0^x \left[-\frac{(x(a-t))^\alpha - (a(x-t))^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \right] f(t)dt +$$

$$+\int_x^a \left(-\frac{(x(a-t))^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \right) f(t)dt = \int_0^a G(x,t) f(t)dt.$$

Main Results. Lets consider the differential equation

$$D_0^{1+\alpha} y(x) = F[y(x)] \equiv F(x, y(x), D_0^\alpha y(x)), 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.1}$$

which solutions satisfy boundary conditions (2.4). Let $F(x,y,z) : J \times R \times R \to R$ satisfies conditions: (a) continuous with respect to $(y,z) \in R \times R$ for fixed $x \in J$ and measurable with respect to $x \in J$ for fixed $(y,z) \in R \times R$; (b) $|F(x,y,z)| \leq M$ for $(x,y,z) \in J \times R \times R$.

Definition 3.1 *As the solution of boundary-value problem (3.1), (2.4) we name function $y : J \to R$, which satisfies conditions (i), (ii) of definition 2.1 and differential equation (3.1) for a.a. $x \in J$.*

Theorem 3.1 *Let function $F(x,y,z) : J \times R \times R$ satisfies conditions (a), (b). A function $y(x) \in C(J)$ will be the solution of boundary-value problem (3.1), (2.4) if and only if it is a solution of the integral equation*

$$y(x) = \int_0^a G(x,t) F\left(t, y(t), D_0^\alpha y(t)\right) dt. \tag{3.2}$$

Proof. Let $y(x) \in C(J)$ is a solution of boundary-value problem (3.1), (2.4). Then function $F(x, y(x), D_0^\alpha y(x)) : J \to R$ is measurable and $|F(x, y(x), D_0^\alpha y(x))| \leq M$. By lemma 2.5 $y(x)$ is the solution of integral equation (3.2). Now let $y(x) \in C(J)$ be a solution of integral equation (3.2) and lets prove that $y(x)$ is the solution of boundary-value problem (3.1), (2.4). By (2.8) the solution of integral equation (3.2) is representable as following:

$$y(x) = -\frac{x^\alpha \delta}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} + I_0^{1+\alpha} F[y(x)], \tag{3.3}$$

where $\delta = \int_0^a (a-t)^\alpha F[y(t)]dt$. Then

$$\begin{aligned} y_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} y(x) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} \left(\tfrac{-\delta t^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \right) dt + \\ + I_0^{1-\alpha} I_0^{1+\alpha} F[y(x)] = -\tfrac{x\delta}{a^\alpha} + I_0^2 F[y(x)], \end{aligned} \tag{3.4}$$

where

$$I_0^2 F[y(x)] = \int_0^x (x-t) F[y(t)]dt.$$

Beside this,

$$D_0^\alpha y(x) = y'_{1-\alpha}(x) = -\frac{\delta}{a^\alpha} + \int_0^x F[y(t)]dt, x \in J, \tag{3.5}$$

$$D_0^{1+\alpha}y(x) = F[y(x)] = F(x, y(x), D_0^{\alpha}y(x)), \tag{3.6}$$

for a.a. $x \in J$.

From (3.4), (3.5) it follows that $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J)$ and from (3.6) it follows that $y(x)$ satisfies the equation (3.1) for a.a. $x \in J$. From (3.3) follows that $y(0) = y(a) = 0$.

Theorem 3.2 *Let function $F(x, y, z) : J \times R \times R \to R$ satisfies the conditions (a), (b) and the condition of Lipschitz*

$$|F(x, y, z) - F(x, y_1, z_1)| \le L_1|y - y_1| + L_2|z - z_1|,$$

at that

$$\rho(a) = \frac{L_1 a^{1+\alpha}}{4^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)} + L_2 a < \frac{\alpha+1}{\alpha+2}.$$

Then exists the unique solution of boundary-value problem (3.1), (2.4) at $x \in [0, a]$.

Proof. By $C_\alpha(J)$ we denote the set of functions $u : J \to R$ such that $u(x) \in$ $\in C(J), D_0^{\alpha}u(x) \in C(J)$ with the norm

$$\|u(x)\|_\alpha = \max\left(\max_J |u(x)|, \frac{a^\alpha}{4^\alpha\Gamma(\alpha+1)} \max_J |D_0^\alpha u(x)|\right).$$

Lets prove that the space $C_\alpha(J)$ with the norm $\|\cdot\|_\alpha$ is full. Let $(u_k(x))_{k=1}^{\infty}$ is fundamental sequence in $C_\alpha(J)$. Then uniformly in J $u_k(x) \to u(x), D_0^\alpha u_k(x) \to$ $\to v(x)$ at $k \to \infty$ and $u(x) \in C(J), v(x) \in C(J)$. By lemma 2.1 $\lim_{k\to\infty} u_{k,1-\alpha}(x) =$ $= \lim_{k\to\infty} I_0^{1-\alpha}u_k(x) = I_0^{1-\alpha}u(x) = u_{1-\alpha}(x)$, at that by lemma 2.3 $u_{1-\alpha}(x) \in C(J)$, $u_{1-\alpha}(0) = 0$. As

$$u_{k,1-\alpha}(x) = \int_0^x D_0^\alpha u_k(t)dt,$$

at $k \to \infty$ will receive that

$$u_{1-\alpha}(x) = \int_0^x v(t)dt.$$

Consequently $v(x) = u'_{1-\alpha}(x) = D_0^\alpha u(x)$. So the sequence $(u_k(x))_{k=1}^{\infty} \subset C_\alpha(J)$ is convergent by norm $\|\cdot\|_\alpha$ to the function $u(x) \in C_\alpha(J)$.

For $u(x) \in C_\alpha(J)$ lets define the operator T, supposed that

$$Tu(x) = \int_0^a G(x,t)F(t, u(t), D_0^\alpha u(t))dt. \tag{3.7}$$

Lets prove that $T : C_\alpha(J) \to C_\alpha(J)$. Let $w(x) = Tu(x)$ and $0 \le x_1 < x_2 \le a$. Then

$$|w(x_2) - w(x_1)| \le M(\int_0^{x_1} |G(x_2,t) - G(x_1,t)|dt + \int_{x_1}^{x_2} |G(x_2,t) - G(x_1,t)|dt +$$

$$+ \int_{x_2}^{a} |G(x_2,t) - G(x_1,t)|dt) = M(A_1 + A_2 + A_3).$$

Applying lemma 2.4 and (2.6) will receive that

$$A_1 = \frac{1}{a^\alpha\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{x_1} |-(x_2(a-t))^\alpha + (a(x_2-t))^\alpha + (x_1(a-t))^\alpha - (a(x_1-t))^\alpha|dt \le$$

$$\leq \frac{1}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x_1} (|(x_2(a-t))^\alpha - (x_1(a-t))^\alpha| +$$

$$+|(a(x_2-t))^\alpha - (a(x_1-t))^\alpha|)dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x_1} ((a-t)^\alpha (x_2^\alpha - x_1^\alpha) + a^\alpha |(x_2-t)^\alpha - (x_1-t)^\alpha|)\, dt \leq$$

$$\leq \frac{2a(x_2-x_1)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

By analogy we prove that $A_k \leq \frac{2a(x_2-x_1)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, k = 2, 3$. Consequently

$$|w(x_2) - w(x_1)| \leq \frac{6Ma(x_2-x_1)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Therefore if $|x_2 - x_1| \leq \delta_1, \delta_1 = \left(\frac{\Gamma(1+\alpha)\varepsilon}{6Ma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, then $|w(x_2) - w(x_1)| \leq \varepsilon$. So, $w(x) \in C(J)$.

In accord with (3.4), (3.5) will receive that

$$\begin{gathered} w_{1-\alpha}(x) = -\tfrac{x\lambda}{a^\alpha} + I_0^2 F[u(x)], D_0^\alpha w(x) = w'_{1-\alpha}(x) = \\ = -\tfrac{\lambda}{a^\alpha} + \int_0^x F[u(t)]dt, \end{gathered} \tag{3.8}$$

where $\lambda = \int_0^a (a-t)^\alpha F[u(t)]dt$. From (3.8) follows that $D_0^\alpha w(x) \in C(J)$. Lets note that corresponding to (3.8) $w_{1-\alpha}(x) \in AC(J), D_0^\alpha w(x) \in AC(J)$. Therefore the fixed point of operator T will be the solution of boundary-value problem (3.1), (2.4). We need only to prove that the operator T is the contraction mapping in $C_\alpha(J)$. Suppose $u_k(x) \in C_\alpha(J), v_k(x) = D_0^\alpha u_k(x), w_k(x) = Tu_k(x), k = 1, 2$. Since $|G(x,t)| \leq a^\alpha/(4^\alpha \Gamma(1+\alpha))$, then

$$|w_1(x) - w_2(x)| \leq \int_0^a |G(x,t)||F[u_1(t)] - F[u_2(t)]|dt \leq$$

$$\leq \frac{a^\alpha}{4^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_0^a (L_1|u_1(t) - u_2(t)| + L_2|v_1(t) - v_2(t)|)\, dt \leq$$

$$\leq \frac{a^{\alpha+1} L_1}{4^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \max_J |u_1(x) - u_2(x)| + L_2 a \left(\frac{a^\alpha}{4^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \max_J |v_1(x) - v_2(x)| \right) \leq$$

$$\leq \rho(a) \|u_1(x) - u_2(x)\|_\alpha.$$

Lets write $w_k(x)$ in the form (3.3) $w_k(x) = -\frac{x^\alpha \lambda_k}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} + I_0^{1+\alpha} F[u_k(x)]$, where $\lambda_k = \int_0^a (a-t)^\alpha F[u_k(t)]dt, k = 1, 2$. Then

$$D_0^\alpha w_k(x) = -\frac{\lambda_k}{a^\alpha} + \int_0^x F[u_k(t)]dt, k = 1, 2,$$

$$|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{a^\alpha} \int_0^a (a-t)^\alpha |F[u_1(t)] - F[u_2(t)]|dt + \int_0^x |F[u_1(t)] - F[u_2(t)]|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{a^\alpha}\left(L_1 \max_J |u_1(x)-u_2(x)| + L_2 \max_J |v_1(x)-v_2(x)|\right)\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}+$$

$$+a\left(L_1 \max_J |u_1(x)-u_2(x)| + L_2 \max_J |v_1(x)-v_2(x)|\right) \leq$$

$$\leq \frac{a(\alpha+2)}{\alpha+1}\left(L_1 \max_J |u_1(x)-u_2(x)| + L_2 \max_J |v_1(x)-v_2(x)|\right),$$

$$\frac{a^\alpha}{4^\alpha\cdot\Gamma(\alpha+1)}|D_0^\alpha w_1(x)-D_0^\alpha w_2(x)| \leq \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\times$$

$$\times\left(\frac{a^{\alpha+1}L_1}{4^\alpha\cdot\Gamma(\alpha+1)}\max_J|u_1(x)-u_2(x)| + L_2 a\frac{a^\alpha}{4^\alpha\cdot\Gamma(\alpha+1)}\max_J|v_(x)-v_2(x)|\right)\leq$$

$$\leq \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\rho(a)\|u_1(x)-u_2(x)\|_\alpha.$$

Consequently $\|w_1(x)-w_2(x)\|_\alpha = \|Tu_1(x)-Tu_2(x)\|_\alpha \leq \tau\|u_1(x)-u_2(x)\|_\alpha$, $\tau = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\rho(a)$. Since $\tau<1$, then operator T is a contracting mapping in $C_\alpha(J)$. Then by Banach contraction fixed point theorem, the boundary-value problem (3.1), (2.4) has a unique solution.

Remark 1. *Let boundary conditions (2.4) look like $y(0)=0, y(a)=B$. Lets find the solution of boundary-value problem $D_0^{1+\alpha}z(x)=0, z(0)=0, z(a)=B$. Applying lemma 2.2, we receive*

$$z(x)-\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}z'_{1-\alpha}(0)=0. \tag{3.9}$$

From (3.9) at $x=a$ follows that $z'_{1-\alpha}(0)=(B\cdot\Gamma(1-\alpha))/a^\alpha$. Consequently

$$z(x)=\frac{x^\alpha B}{a^\alpha}, z_{1-\alpha}(x)=\frac{x\cdot B\cdot\Gamma(1+\alpha)}{a^\alpha}, D_0^\alpha z(x)=\frac{B\cdot\Gamma(1+\alpha)}{a^\alpha}.$$

The change of variable $y(x)=u(x)+z(x)$ leads to boundary-value problem

$$D_0^{1+\alpha}u(x)=g(x,u(x),D_0^\alpha u(x)), u(0)=u(a)=0,$$

where $g\left(x,u(x),D_0^\alpha u(x)\right)=f\left(x,u(x)+\frac{x^\alpha B}{a^\alpha}, D_0^\alpha u(x)+\frac{B\cdot\Gamma(1+\alpha)}{a^\alpha}\right).$

Conclusion. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solution of boundary-value problem for fractional differential equation with Riemann—Liouville derivative were establised in this paper.

1. **Aleroev T. S.** The Sturm–Liouville problem for a second order ordinary differential equation with fractional derivatives in the lower terms (Russian) / T. S. Aleroev // Differentsial'nye Uravneniya. – 1982. – V. 18, N 2. – P. 341–342.

2. **Bai Z. B.** Positive solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation / Z. B. Bai, H. S. Lü // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – V. 311, N 2. – P. 495–505.

3. **Diethelm Kai.** The analysis of fractional difeerential equation / Kai Diethelm. – Spring-Verlag Heidelberg, 2010. – 247 p.

4. **Hilfer R.** Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer // Word Scientific. – Singapore, 2000.

5. **Kilbas A. A.** Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // J. Appl. Anal. – 2001. – V. 78. – P. 153–192.

6. **Kilbas A. A.** Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // J. Appl. Anal. – 2002. – V. 81. – P. 435–493.

7. **Kilbas A. A.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // North-Holland Mathematics Studies, 204. – Elsevier Science B.V. – Amsterdam, 2006.

8. **Mushelishvili N. I.** Singular integral equations / N. I. Mushelishvili. – Sci., M., 1968. – 511 p.

9. **Mykhailenko A. V.** Semi-implicit differential equations of fractional order / A. V. Mykhailenko // J. Num. Appl. Math. – 2010. – N1 (100). – P. 1–6.

10. **Nakhushev A. M.** The Sturm—Liouville problem for a second order ordinary differential equation with fractional derivatives in the lower terms / A. M. Nakhushev // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1977. – V. 234. – P. 308–311.

11. **Podlubny I.** Fractional Differential Equation / I. Podlubny. – Academic Press, San Diego, 1999. – 340 p.

12. **Samko S. G.** Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. – Gorden and Breach, New York, 1993. – 687 p.

13. **Su X.** Solutions to boundary-value problems for nonlinear differential equations of fractional order / X. Su, S. Zhang // Electronic Journal of Differential equations. – 2009. – V. 26. – P. 1–15.

14. **Zhang S. Q.** Existence of solution for a boundary value problem of fractional order / S. Q. Zhang // Acta Mathematica Scietia. – 2006. – 26, B(2). – P. 220–228.

15. **Zhang S. Q.**Positive solution for boundary-value probles of nonlinear fractional differential equation / S. Q. Zhang // Electronic Journal of Differential Equations. – 2002. – V. 36. – P. 1–12.

Mathematical Subject Classification: 34C29, 34A38
UDC 517.911.5

O. Osadcha, N. Skripnik
Odesa I. I. Mechnikov National University

PARTIAL AVERAGING OF IMPULSIVE HYBRID SYSTEMS

Осадча О., Скрипник Н. Схема часткового усереднення для одного класу імпульсних змішаних систем. У статті розглядається обґрунтування схеми часткового усереднення для одного класу імпульсних змішаних систем, коли одне з рівнянь є імпульсним диференціальним рівнянням з похідною Хукухари, а друге – звичайним імпульсним диференціальним рівнянням.
Ключові слова: метод усереднення, змішана система, похідна Хукухари.

Осадчая О., Скрипник Н. Схема частичного усреднения для одного класса импульсных смешанных систем. В статье рассматривается обоснование схемы частичного усреднения для одного класса импульсных смешанных систем, когда одно из уравнений является импульсным дифференциальным уравнением с производной Хукухары, а второе – обыкновенным импульсным дифференциальным уравнением.
Ключевые слова: метод усреднения, смешанная система, производная Хукухары.

Osadcha O., Skripnik N. Partial averaging of impulsive hybrid systems. This paper contains the substantiation of the scheme of partial averaging for one class of impulsive hybrid systems where one equation is an impulsive differential equation with Hukuhara derivative and the second one is an impulsive ordinary differential equation.
Key words: averaging method, hybrid system, Hukuhara derivative.

Introduction.

In practice, there are often considered the so-called hybrid systems — systems that contain equations of different nature: for example, one of the equations is an equation in partial derivatives and the other one is an ordinary differential equation, or one of the equations is discrete and the other one is differential, etc. In this paper we consider the case of a hybrid system, where one of the equations is a differential equation with Hukuhara derivative and the second one is an ordinary differential equation. The interest in such systems follows from the fact, that some parameters of the model may be accurate, while the rest may contain the noise, errors and inaccuracies.

Main Definitions.

Development of the theory of multivalued mappings led to the question what should be understood as a derivative of a multivalued mapping. The main cause of difficulties for the inducting of such definition was the nonlinearity of the space $comp(R^n)$, which led to the absence of the concept of difference. There are several approaches to define the difference of two sets, one of them is the Hukuhara difference.

Let $conv(R^n)$ be the family of all nonempty compact convex subsets of R^n with the Hausdorff metric

$$h(A,B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B}\|a-b\|,\ \max_{b\in B}\min_{a\in A}\|a-b\|\},$$

where $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm in R^n.

© Osadcha O., Skripnik N., 2013

Definition 1. [5] *Let $X, Y \in conv(R^n)$. The set $Z \in conv(R^n)$, where $X = Y + Z$, is called the Hukuhara difference of sets X and Y and is denoted by $X \overset{h}{-} Y$.*

Along with the inducted difference there appeared the concept of derivative.

Definition 2. [5] *A multuvalued mapping $X : I \to conv(R^n), I \subset R$, is called differentiable in the sense of Hukuhara at point $t \in I$ if there exists such $D_H X(t) \in \in conv(R^n)$ that the limits*

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(X(t + \Delta t) \overset{h}{-} X(t) \right), \quad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(X(t) \overset{h}{-} X(t - \Delta t) \right)$$

exist and are equal to $D_H X(t)$. The set $D_H X(t)$ is called the Hukuhara derivative of the multivalued mapping $X : I \to conv(R^n)$ at point t.

In M. Hukuhara papers [5] along with the concept of derivative the concept of the integral of a multivalued mapping was inducted and the connection between those two concepts was found. In 1969 F. S. de Blasi and F. Iervolino were first to consider differential equation with the Hukuhara derivative [1, 2, 3, 4]. Its solution is a multivalued mapping. After that various existence and uniqueness theorems were proved, the stability of solutions of this type of equations was considered, integro-differential equations, impulsive differential equations, differential equations with fractional derivatives, control differential equations with Hukuhara derivative were considered, the possibility of applying some averaging schemes for such type of equations was investigated [9, 7, 12, 13, 8, 10, 11, 6].

Consider the hybrid system

$$\begin{cases} D_H X = F(t, X, y), \; X(t_0) = X_0, \\ \dot{y} = g(t, X, y), \; y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

where $I = [t_0, T] \subset R$; $X : I \to conv(R^n)$ is a multivalued mapping; $y : I \to R^m$ is a vector function; $F : I \times conv(R^n) \times R^m \to conv(R^n)$ is a multivalued mapping; $g : I \times conv(R^n) \times R^m \to R^m$ is a vector function; $X_0 \in conv(R^n)$, $y_0 \in R^m$.

Consider a class S of pairs $(X(\cdot), y(\cdot))$, where $X(\cdot)$ is a continuously differentiable on I in the sense of Hukuhara multivalued mapping, $y(\cdot)$ is a continuously differentiable on I vector-function.

Definition 3. *A pair $(X(\cdot), y(\cdot)) \in S$ is called a solution of system (1), if for all $t \in I$ the following equalities fulfill $D_H X(t) = F(t, X(t), y(t))$, $\dot{y}(t) = g(t, X(t), y(t))$ and $X(t_0) = X_0$, $y(t_0) = y_0$.*

Theorem 1. *Let in the domain*

$$Q = \{(t, X, y) : \; t_0 \le t \le t_0 + a, \; h(X, X_0) \le b, \; \|y - y_0\| \le c\}$$

the multivalued mapping $F(t, X, y)$ and the vector function $g(t, X, y)$ are continuous and satisfy the Lipschitz condition in variables X and y, i. e. there exists such constant $\lambda > 0$ that

$$h\left(F(t, X_1, y_1), F(t, X_2, y_2)\right) \le \lambda \left[h(X_1, X_2) + \|y_1 - y_2\|\right],$$

$$\|g(t,X_1,y_1)-g(t,X_2,y_2)\| \le \lambda\left[h(X_1,X_2)+\|y_1-y_2\|\right].$$

Then system (1) has the unique solution defined on the interval $[t_0,t_0+d]$ *where* $d=\min\left(a,\dfrac{b}{M},\dfrac{c}{M}\right)$, *constant* M *satisfies the inequalities* $|F(t,X,y)|\le M$ *and* $\|g(t,X,y)\|\le M$ *in the domain* Q.

Main Results.

Consider impulsive hybrid system with a small parameter

$$\begin{aligned} &D_H X=\varepsilon F(t,X,y),\ t\ne\tau_i,\ X(0)=X_0,\\ &\dot y=\varepsilon g(t,X,y),\ t\ne\tau_i,\ y(0)=y_0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i}=\varepsilon I_i(X,y),\ \ \Delta y|_{t=\tau_i}=\varepsilon J_i(X,y), \tag{3}$$

where $t\in R_+$; the moments of impulses $\tau_{i+1}>\tau_i$; $X:R_+\to conv(R^n)$ is a multivalued mapping; $y:R_+\to R^m$ is a vector function; $F:R_+\times conv(R^n)\times R^m\to conv(R^n)$, $I_i:conv(R^n)\times R^m\to conv(R^n)$ are multivalued mappings; $g:R_+\times conv(R^n)\times R^m\to$ $\to R^m$, $J_i:conv(R^n)\times R^m\to R^m$ are vector functions; $X_0\in conv(R^n)$, $y_0\in R^m$.

Definition 4. *A pair* $(X(\cdot),y(\cdot))$ *is called a solution of system (2), (3) if it is a solution of system (2) on intervals between moments of impulses and satisfies impulse condition (3) in the points of impulses* τ_i.

It's easy to notice, that the existence and the uniqueness of a solution of system (2), (3) holds if the right sides of equations (2) satisfy Theorem 1 on intervals between moments of impulses.

Consider the following partially averaged system:

$$\begin{aligned} &D_H\bar X=\varepsilon\bar F(t,\bar X,\bar y),\ \ \bar X(0)=X_0,\\ &\dot{\bar y}=\varepsilon\bar g(t,\bar X,\bar y),\ \ \bar y(0)=y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Delta X|_{t=\sigma_j}=\varepsilon\bar I_j(X,y),\ \Delta y|_{t=\sigma_j}=\varepsilon\bar J_j(X,y), \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{T}h\left(\int_0^T F(t,X,y)dt+\sum_{0\le\tau_i<T}I_i(X,y),\int_0^T\bar F(t,X,y)dt+\sum_{0\le\sigma_j<T}\bar I_j(X,y)\right)=0,\\ &\lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{T}\left\|\int_0^T[g(t,X,y)-\bar g(t,X,y)]dt+\sum_{0\le\tau_i<T}J_i(X,y)-\sum_{0\le\sigma_j<T}\bar J_j(X,y)\right\|=0. \end{aligned} \tag{6}$$

The following theorem that proves the closeness of solutions of systems (2), (3) and (4), (5) holds.

Theorem 2. *Let in the domain* $Q=\{(t,X,y):t\ge0,\ X\in D_1,\ y\in D_2\}$ *the following conditions hold:*

1) the multivalued mappings $F(t,X,y),\bar F(t,X,y)$ *and vector functions* $g(t,X,y),\bar g(t,X,y)$ *are continuous in* t, *uniformly bounded with constant* M *and satisfy the Lipschitz condition in* X *and* y *with constant* λ;

2) the multivalued mappings $I_i(X,y), \bar{I}_j(X,y)$ *and vector functions* $J_i(X,y)$, $\bar{J}_j(X,y)$ *are uniformly bounded and satisfy the Lipschitz condition in* X *and* y *with constant* λ;

3) limits (6) exist uniformly with respect to $X \in D_1$ *and* $y \in D_2$;

4) there exists such constant $0 < d \leq \infty$ *that*

$$\frac{1}{T} i(t, t+T) \leq d, \ \frac{1}{T} j(t, t+T) \leq d,$$

where $i(t,t+T)[j(t,t+T)]$ *are the numbers of points of a sequence* $\{\tau_i\}[\{\sigma_j\}]$ *on the interval* $[t, t+T)$.

5) the solution $\left(\bar{X}(t), \bar{y}(t)\right)$ *of system (4), (5) with the initial condition* $\bar{X}(0) = X_0 \in D_1' \subset D_1$, $\bar{y}(0) = y_0 \in D_2' \subset D_2$ *is defined for all* $t \geq 0$, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ *and* $\bar{X}(t)$ *belongs with some* ρ*- neighborhood to the domain* D_1, $\bar{y}(t)$ *belongs with some* ξ*-neighborhood to the domain* D_2.

Then for any $\eta > 0$ *and* $L > 0$ *there exists such* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \bar{\varepsilon}]$, *that for* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *and* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *the following inequalities fulfill:*

$$h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) \leq \eta, \|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \eta,$$

where $(X(\cdot), y(\cdot))$ *and* $\left(\bar{X}(\cdot), \bar{y}(\cdot)\right)$ *are the solutions of systems (2), (3) and (4), (5) with the initial conditions* $X(0) = \bar{X}(0) \in D_1'$, $y(0) = \bar{y}(0) \in D_2'$.

Proof. From conditions 1)–3) of the theorem it follows that systems (2), (3) and (4), (5) have unique solutions that are defined for $t \geq 0$ if $X(t)$ and $y(t)$ (accordingly $\bar{X}(t)$ and $\bar{y}(t)$) belong to the domain $D_1 \times D_2$.

Replace systems (2), (3) and (4), (5) with the equivalent system of integral equations:

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t F(s, X(s), y(s))ds + \varepsilon \sum\limits_{0 \leq \tau_i < t} I_i(X(\tau_i), y(\tau_i)), \\ y(t) = y_0 + \varepsilon \int\limits_0^t g(s, X(s), y(s))ds + \varepsilon \sum\limits_{0 \leq \tau_i < t} J_i(X(\tau_i), y(\tau_i)), \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \bar{X}(t) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{F}(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))ds + \varepsilon \sum\limits_{0 \leq \sigma_j < t} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j), \bar{y}(\sigma_j)), \\ \bar{y}(t) = y_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{g}(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))ds + \varepsilon \sum\limits_{0 \leq \sigma_j < t} \bar{J}_j(\bar{X}(\sigma_j), \bar{y}(\sigma_j)). \end{cases} \tag{8}$$

Then

$$
\begin{gathered}
h\left(X(t),\bar{X}(t)\right)= \\
=h\Bigg(X_0+\varepsilon\int\limits_0^t F(s,X(s),y(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\tau_i<t} I_i(X(\tau_i),y(\tau_i)), \\
X_0+\varepsilon\int\limits_0^t \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg)= \\
=\varepsilon h\Bigg(\int\limits_0^t F(s,X(s),y(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t} I_i(X(\tau_i),y(\tau_i)), \\
\int\limits_0^t \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\sum_{0\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg)\le \\
\le\varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(s,X(s),y(s))ds,\int\limits_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right)+ \\
+\varepsilon h\left(\sum_{0\le\tau_i<t} I_i(X(\tau_i),y(\tau_i)),\sum_{0\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))\right)+ \\
+\varepsilon h\Bigg(\int\limits_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)), \\
\int\limits_0^t \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg)\le \\
\le\varepsilon\int\limits_0^t h\left(F(s,X(s),y(s)),F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))\right)ds+ \\
+\varepsilon\sum_{0\le\tau_i<t} h\left(I_i(X(\tau_i),y(\tau_i)),I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))\right)+ \\
+\varepsilon h\Bigg(\int\limits_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)), \\
\int\limits_0^t \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg)\le \\
\le\varepsilon\lambda\int\limits_0^t[h(X(s),\bar{X}(s))+|y(s)-\bar{y}(s)|]ds+ \\
+\varepsilon\lambda\sum_{0\le\tau_i<t}[h(X(\tau_i),\bar{X}(\tau_i))+|y(\tau_i)-\bar{y}(\tau_i)|]+ \\
+\varepsilon h\Bigg(\int\limits_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)), \\
\int\limits_0^t \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\varepsilon\sum_{0\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Similarly,

$$
\begin{gathered}
\|y(t)-\bar{y}(t)\|\le\varepsilon\lambda\int\limits_0^t\left[h(X(s),\bar{X}(s))+\|y(s)-\bar{y}(s)\|\right]ds+ \\
+\varepsilon\lambda\sum_{0\le\tau_i<t}\left[h(X(\tau_i),\bar{X}(\tau_i))+\|y(\tau_i)-\bar{y}(\tau_i)\|\right]+ \\
+\varepsilon\left\|\int\limits_0^t g(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t} J_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))-\right.
\end{gathered}
$$

$$-\int_0^t \bar{g}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds - \varepsilon \sum_{0\le\sigma_j<t} \bar{J}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg\|. \tag{10}$$

Divide the interval $[0, L\varepsilon^{-1}]$ in m equal intervals by the points $t_p = \frac{pL}{\varepsilon m}$. Define by $(\bar{X}_p, \bar{y}_p) = (\bar{X}(t_p), \bar{y}(t_p))$ the solution of system (4), (5) in division points.

Let us estimate in the interval $[t_k, t_{k+1}]$, where $0 \le k \le m-1$ the expression

$$\varepsilon h\Bigg(\int_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{0\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),$$
$$\int_0^t \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \varepsilon \sum_{0\le\sigma_j<t} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg) =$$
$$= \varepsilon h\Bigg(\sum_{p=0}^{k-1}\Bigg[\int_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))\Bigg] +$$
$$+\int_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),$$
$$\sum_{p=0}^{k-1}\Bigg[\int_{t_p}^{t_{p+1}} \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg] +$$
$$+\int_{t_k}^{t} \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg) \le$$
$$\le \varepsilon h\Bigg(\sum_{p=0}^{k-1}\Bigg[\int_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))\Bigg],$$
$$\sum_{p=0}^{k-1}\Bigg[\int_{t_p}^{t_{p+1}} \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg]\Bigg) +$$
$$+\varepsilon h\Bigg(\int_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),$$
$$\int_{t_k}^{t} \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg) \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{p=0}^{k-1}\Bigg[h\Bigg(\int_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)), \int_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\Bigg) +$$
$$+h\Bigg(\int_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p), \int_{t_p}^{t_{p+1}} \bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\Bigg) +$$
$$+h\Bigg(\int_{t_p}^{t_{p+1}} \bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p), \int_{t_p}^{t_{p+1}} \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg)\Bigg] +$$
$$+\varepsilon\Bigg[h\Bigg(\int_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)), \int_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\Bigg) +$$
$$+h\Bigg(\int_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k), \int_{t_k}^{t} \bar{F}(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds + \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \bar{I}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\Bigg) +$$

$$+h\left(\int_{t_k}^{t}\bar{F}(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k),\int_{t_k}^{t}\bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\right)\Bigg]\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{p=0}^{k-1}\Bigg[\int_{t_p}^{t_{p+1}}h\left(F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s)),F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)ds+\sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}}h\left(I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)+$$

$$+h\left(\int_{t_p}^{t_{p+1}}F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds+\sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}}I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p),\int_{t_p}^{t_{p+1}}\bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds+\sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}}\bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)+$$

$$+\int_{t_p}^{t_{p+1}}h\left(\bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p),\bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds\right)ds+\sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}}h\left(\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j)),\bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)\Bigg]+$$

$$+\varepsilon\Bigg[\int_{t_k}^{t}h\left(F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s)),F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)\right)ds+\sum_{t_k\le\tau_i<t}h\left(I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),I_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\right)+$$

$$+h\left(\int_{t_k}^{t}F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds+\sum_{t_k\le\tau_i<t}I_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k),\int_{t_k}^{t}\bar{F}(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\right)+$$

$$+\int_{t_k}^{t}h\left(\bar{F}(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k),\bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))\right)ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}h\left(\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j)),\bar{I}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\right)\Bigg]\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\Bigg[\int_{t_p}^{t_{p+1}}h\left(F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s)),F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)ds+\sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}}h\left(I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)+$$

$$+\int_{t_p}^{t_{p+1}}h\left(\bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p),\bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))\right)ds+\sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}}h\left(\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j)),\bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)\Bigg]+$$

$$+\varepsilon\sum_{p=0}^{k-1}h\left(\int_{t_p}^{t_{p+1}}F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds+\sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}}I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p),\int_{t_p}^{t_{p+1}}\bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds+\sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}}\bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)+$$

$$+\varepsilon h\left(\int_{t_k}^{t}F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds+\sum_{t_k\le\tau_i<t}I_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k),\int_{t_k}^{t}\bar{F}(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds+\sum_{t_k\le\sigma_j<t}\bar{I}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\right).$$

Similarly

$$\varepsilon\Bigg\|\int_0^t g(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds+\sum_{0\le\tau_i<t}J_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))-\int_0^t\bar{g}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds-$$

$$-\sum_{0\le\sigma_j<t}\bar{J}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\Bigg\|\le\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\Bigg[\int_{t_p}^{t_{p+1}}\left\|g(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))-g(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right\|ds+$$

$$+\sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}}\left\|J_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))-J_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right\|+\int_{t_p}^{t_{p+1}}\left\|\bar{g}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)-\bar{g}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))\right\|ds+$$

$$+\sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}}\left\|\bar{J}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))-\bar{J}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right\|\Bigg]+$$

$$+\varepsilon\sum_{p=0}^{k-1}\Bigg\|\int_{t_p}^{t_{p+1}}[g(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)-\bar{g}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)]ds+\sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}}J_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)-\sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}}\bar{J}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\Bigg\|+$$

$$+\varepsilon\Bigg\|\int_{t_k}^{t}[g(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)-\bar{g}(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)]ds+\sum_{t_k\le\tau_i<t}J_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k)-\sum_{t_k\le\sigma_j<t}\bar{J}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\Bigg\|.$$

Notice that

$$h\left(\bar{X}(s),\bar{X}_p\right)=h\left(\bar{X}(s),\bar{X}(t_p)\right)\leq\varepsilon\int\limits_{t_p}^{s}h\left(\bar{F}(\bar{X}(v),\bar{y}(v)),\{0\}\right)dv+$$
$$+\sum_{t_p\leq\sigma_j<s}h(\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j)),\{0\})\leq\varepsilon M(d+1)(s-t_p),$$
$$\|\bar{y}(s)-\bar{y}_p\|=\|\bar{y}(s)-\bar{y}(t_p)\|\leq$$
$$\leq\varepsilon\int\limits_{t_p}^{s}\left\|\bar{g}(\bar{X}(v),\bar{y}(v))\right\|dv+\sum_{t_p\leq\sigma_j<s}||\bar{J}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))||\leq\varepsilon M(d+1)(s-t_p).$$

Then

$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}}h\left(F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s)),F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)ds\leq$$
$$\leq\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}}\lambda\left[h\left(\bar{X}(s),\bar{X}_p\right)+\|\bar{y}(s)-\bar{y}_p\|\right]ds\leq$$
$$\leq\varepsilon\lambda\cdot2\varepsilon M(d+1)\sum_{p=0}^{k}\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}}(s-t_p)ds=2\varepsilon^2\lambda M(d+1)\sum_{p=0}^{k}\tfrac{(t_{p+1}-t_p)^2}{2}=$$
$$=\varepsilon^2\lambda M(d+1)\cdot(k+1)\cdot\left(\tfrac{L}{\varepsilon m}\right)^2\leq\tfrac{\lambda ML^2(d+1)}{m},$$
$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\tau_i<t_{p+1}}h\left(I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)\leq$$
$$\leq\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\tau_i<t_{p+1}}\lambda\left[h\left(\bar{X}(\tau_i),\bar{X}_p\right)+\|\bar{y}(\tau_i)-\bar{y}_p\|\right]\leq$$

$$\leq\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\tau_i<t_{p+1}}2\lambda\varepsilon M(d+1)(\tau_i-t_p)=2\varepsilon^2\lambda M(d+1)\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\tau_i<t_{p+1}}(\tau_i-t_p)\leq$$
$$\leq2\varepsilon^2\lambda M(d+1)\cdot\tfrac{L}{\varepsilon m}\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\tau_i<t_{p+1}}1\leq\tfrac{2\varepsilon\lambda ML(d+1)}{m}\cdot d\cdot\tfrac{L}{\varepsilon m}\cdot(k+1)\leq\tfrac{2\lambda ML^2d(d+1)}{m},$$
$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}}h\left(\bar{F}(\bar{X}_p,\bar{y}_p),\bar{F}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))\right)ds\leq$$
$$\leq\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}}\lambda\left[h\left(\bar{X}_p,\bar{X}(s)\right)+\|\bar{y}_p-\bar{y}(s)\|\right]ds\leq\tfrac{\lambda ML^2(d+1)}{m},$$
$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\sigma_j<t_{p+1}}h\left(\bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j)),\bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)\leq\tfrac{2\lambda ML^2d(d+1)}{m}.$$

Similarly

$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}}\left\|g(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))-g(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right\|ds\leq\tfrac{\lambda ML^2(d+1)}{m},$$
$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\tau_i<t_{p+1}}\left\|J_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i))-J_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right\|\leq\tfrac{2\lambda ML^2d(d+1)}{m},$$
$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}}\left\|\bar{g}(\bar{X}_p,\bar{y}_p)-\bar{g}(\bar{X}(s),\bar{y}(s))\right\|ds\leq\tfrac{\lambda ML^2(d+1)}{m},$$
$$\varepsilon\sum_{p=0}^{k}\sum_{t_p\leq\sigma_j<t_{p+1}}\left\|\bar{J}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))-\bar{J}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right\|\leq\tfrac{2\lambda ML^2d(d+1)}{m}.$$

Using condition 3) of the theorem there exist such monotone decreasing functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ that tend to zero as $t \to \infty$, that for all $(X, y) \in D_1 \times D_2$ we have:

$$h\left(\int\limits_0^t F(s,\bar{X},\bar{y})ds + \sum_{0\le\tau_i<t} I_i(\bar{X},\bar{y}), \int\limits_0^t \bar{F}(s,\bar{X},\bar{y})ds + \sum_{0\le\sigma_j<t} \bar{I}_j(\bar{X},\bar{y})\right) \le t\cdot f_1(t),$$
$$\left\|\int\limits_0^t \big(g(s,\bar{X},\bar{y}) - \bar{g}(s,\bar{X},\bar{y})\big)\,ds + \sum_{0\le\tau_i<t} J_i(\bar{X},\bar{y}) - \sum_{0\le\sigma_j<t} \bar{J}_j(\bar{X},\bar{y})\right\| \le t\cdot f_2(t).$$

Then

$$\varepsilon h\left(\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p), \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right) =$$
$$= \varepsilon h\left(\int\limits_0^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds \overset{h}{-} \int\limits_0^{t_p} F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{0\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p) \overset{h}{-} \sum_{0\le\tau_i<t_p} I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\ ,\right.$$
$$\left.\int\limits_0^{t_{p+1}} \bar{F}(\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds \overset{h}{-} \int\limits_0^{t_p} \bar{F}(\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{0\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p) \overset{h}{-} \sum_{0\le\sigma_j<t_p} \bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right) \le$$
$$\le \varepsilon\left[h\left(\int\limits_0^{t_{p+1}} F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{0\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p), \int\limits_0^{t_{p+1}} \bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{0\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right) + \right.$$
$$\left. + h\left(\int\limits_0^{t_p} F(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{0\le\tau_i<t_p} I_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p), \int\limits_0^{t_p} \bar{F}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)ds + \sum_{0\le\sigma_j<t_p} \bar{I}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right)\right] \le$$
$$\le \varepsilon\left[t_{p+1}\cdot f_1(t_{p+1}) + t_p\cdot f_1(t_p)\right] \le 2\sup_{\tau\in[0,L]} \tau f_1\left(\tfrac{\tau}{\varepsilon}\right) = \gamma_1(\varepsilon),$$

where $\tau = \varepsilon t$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_1(\varepsilon) = 0$. Similarly

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} [g(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p) - \bar{g}(s,\bar{X}_p,\bar{y}_p)]ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} J_i(\bar{X}_p,\bar{y}_p) - \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \bar{J}_j(\bar{X}_p,\bar{y}_p)\right\| \le \gamma_2(\varepsilon),$$

where $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_2(\varepsilon) = 0$;

$$h\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k), \int\limits_{t_k}^{t} \bar{F}(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k)ds + \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \bar{I}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\right) \le \gamma_1(\varepsilon),$$
$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^{t} \big(g(s,\bar{X}_k,\bar{y}_k) - \bar{g}(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\big)\,ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} J_i(\bar{X}_k,\bar{y}_k) - \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \bar{J}_j(\bar{X}_k,\bar{y}_k)\right\| \le \gamma_2(\varepsilon).$$

So

$$\varepsilon h\left(\int\limits_0^t F(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{0\le\tau_i<t} I_i(\bar{X}(\tau_i),\bar{y}(\tau_i)),\right.$$
$$\left.\int\limits_0^t \bar{F}(s,\bar{X}(s),\bar{y}(s))ds + \sum_{0\le\sigma_j<t} \bar{I}_j(\bar{X}(\sigma_j),\bar{y}(\sigma_j))\right) \le$$

$$\leq \frac{\lambda ML^2(d+1)}{m} + \frac{4\lambda ML^2}{m}d(d+1) + \frac{\lambda ML^2(d+1)}{m} + (k+1)\gamma_1(\varepsilon) \leq$$
$$\leq \frac{2\lambda ML^2}{m}(2d+1)(d+1) + m\gamma_1(\varepsilon) \equiv \varphi_1(\varepsilon, m), \tag{11}$$

$$\varepsilon \left\| \int_0^t [g(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s)) - \bar{g}(s, \bar{X}(s), \bar{y}(s))]ds + \right.$$
$$\left. + \sum_{0 \leq \tau_i < t} J_i(\bar{X}(\tau_i), \bar{y}(\tau_i)) - \sum_{0 \leq \sigma_j < t} \bar{J}_j(\bar{X}(\sigma_j), \bar{y}(\sigma_j)) \right\| \leq$$
$$\leq \frac{\lambda ML^2(d+1)}{m} + \frac{4\lambda ML^2}{m}d(d+1) + \frac{\lambda ML^2(d+1)}{m} + (k+1)\gamma_2(\varepsilon) \leq$$
$$\leq \frac{2\lambda ML^2}{m}(2d+1)(d+1) + m\gamma_2(\varepsilon) \equiv \varphi_2(\varepsilon, m). \tag{12}$$

If we substitute (11) in (9) and (12) in (10), we will get

$$h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) \leq \varepsilon\lambda \int_0^t \left[h(X(s), \bar{X}(s)) + \|y(s) - \bar{y}(s)\|\right] ds +$$
$$+\varepsilon\lambda \sum_{0 \leq \tau_i < t} \left[h(X(\tau_i), \bar{X}(\tau_i)) + \|y(\tau_i) - \bar{y}(\tau_i)\|\right] + \varphi_1(\varepsilon, m),$$
$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \varepsilon\lambda \int_0^t \left[h(X(s), \bar{X}(s)) + \|y(s) - \bar{y}(s)\|\right] ds +$$
$$+\varepsilon\lambda \sum_{0 \leq \tau_i < t} \left[h(X(\tau_i), \bar{X}(\tau_i)) + \|y(\tau_i) - \bar{y}(\tau_i)\|\right] + \varphi_2(\varepsilon, m).$$

Adding these two inequalities and applying the analogue of Gronwall—Bellmann lemma [14] we get

$$h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) + \|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \left(\varphi_1(\varepsilon, m) + \varphi_2(\varepsilon, m)\right)(1+\varepsilon\lambda)^{i(0,t)} e^{\varepsilon\lambda t} \leq$$
$$\leq \left(\varphi_1(\varepsilon, m) + \varphi_2(\varepsilon, m)\right)(1+\varepsilon\lambda)^{d \cdot t} e^{\varepsilon\lambda t} \leq$$
$$\leq \left(\varphi_1(\varepsilon, m) + \varphi_2(\varepsilon, m)\right)(1+\varepsilon\lambda)^{d \cdot \frac{L}{\varepsilon}} e^{\lambda L} \leq$$
$$\leq \left(\varphi_1(\varepsilon, m) + \varphi_2(\varepsilon, m)\right) e^{(d+1)\lambda L} =$$
$$= \left(\tfrac{4\lambda ML^2}{m}(2d+1)(d+1) + m\gamma_1(\varepsilon) + m\gamma_2(\varepsilon)\right) e^{(d+1)\lambda L}.$$

Then for every summand the inequality holds:

$$h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) \leq \left(\tfrac{4\lambda ML^2}{m}(2d+1)(d+1) + m\gamma_1(\varepsilon) + m\gamma_2(\varepsilon)\right) e^{(d+1)\lambda L},$$
$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \left(\tfrac{4\lambda ML^2}{m}(2d+1)(d+1) + m\gamma_1(\varepsilon) + m\gamma_2(\varepsilon)\right) e^{(d+1)\lambda L}.$$

Let $\eta_1 = \min\{\rho, \eta, \xi\}$. Choose m to satisfy the inequality

$$e^{(d+1)\lambda L} \frac{\lambda ML^2}{m}(2d+1)(d+1) < \frac{\eta_1}{12}.$$

Then fix m and choose $\varepsilon_0 \in (0, \bar{\varepsilon}]$ such that for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ the inequalities hold

$$e^{(d+1)\lambda L} m\gamma_1(\varepsilon) \leq \frac{\eta_1}{3}, e^{(d+1)\lambda L} m\gamma_2(\varepsilon) \leq \frac{\eta_1}{3}.$$

Then $h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) \leq \eta_1$ and $\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \eta_1$ if the solution $(X(t), y(t))$ belongs to the domain $D_1 \times D_2$. And it follows from condition 3) of the theorem as $\eta_1 = \min\{\eta, \rho, \xi\}$.

So, we get that for any $\eta > 0$ and $L > 0$ there exists such $\varepsilon_0 \in (0, \bar{\varepsilon}]$ that for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ and $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ the following inequalities fulfill

$$h\left(X(t), \bar{X}(t)\right) \leq \eta, \|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \eta,$$

where $(X(t), y(t))$ and $(\bar{X}(t), \bar{y}(t))$ are the solutions of systems (2), (3) and (4), (5) with the initial conditions $X(0) = \bar{X}(0) \in D_1'$, $y(0) = \bar{y}(0) \in D_2'$.

The theorem is proved.

Example 1. *Consider the impulsive hybrid system*

$$X \in conv(R^2), y \in R.$$

$$\begin{cases} D_H X = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} 1 & \sin t \\ \cos 2t & 2y^2 \end{pmatrix} X + \Pi_{2+e^{-t}+\sin(\ln(1+t)),1} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right], \\ X_0 = S_{0.5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{y} = \varepsilon \dfrac{y}{|X|} \sin^2 t, \ y_0 = 0.1. \end{cases}$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i} = \varepsilon X, \ \Delta y|_{t=\tau_i} = -\varepsilon y, \ \tau_i = 2\pi i, \ i = \overline{1, \infty}.$$

The averaged system is:

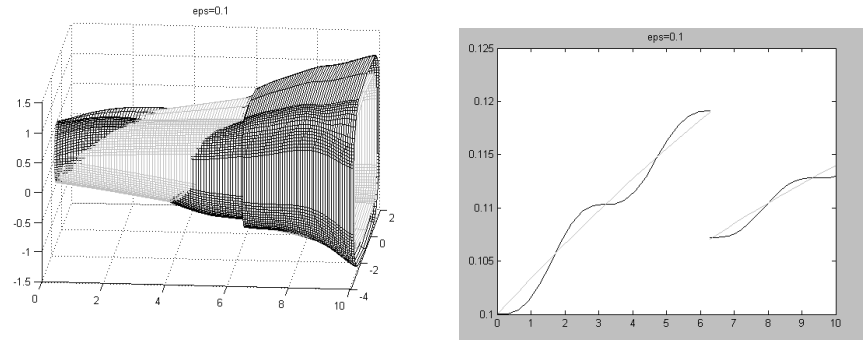
$$\begin{cases} D_H \bar{X} = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{y}^2 \end{pmatrix} \bar{X} + \Pi_{2+\sin(\ln(1+t)),1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ \bar{X}_0 = S_{0.5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{\bar{y}} = \varepsilon \dfrac{\bar{y}}{2\left|\bar{X}\right|}, \ \bar{y}_0 = 0.1. \end{cases}$$

$$\Delta \bar{X}\big|_{t=\tau_j} = \varepsilon \bar{X}, \ \Delta \bar{y}|_{t=\tau_j} = -\varepsilon \bar{y}, \ \tau_j = 2\pi j, \ j = \overline{1, \infty}.$$

The graphs of the solutions of initial system and averaged system see on next page.

Conclusion. This paper contains the substantiation of the scheme of partial averaging for one class of impulsive hybrid systems where one equation is a differential equation with Hukuhara derivative and the other one is an ordinary differential equation. In case when the right-hand sides are periodic in time one can obtain a better estimate. Namely one can show that for any $L > 0$ there exist $C(L) > 0$ and $\varepsilon_0(L) > 0$ such that the conclusion of the theorem holds with $\eta = C\varepsilon$.

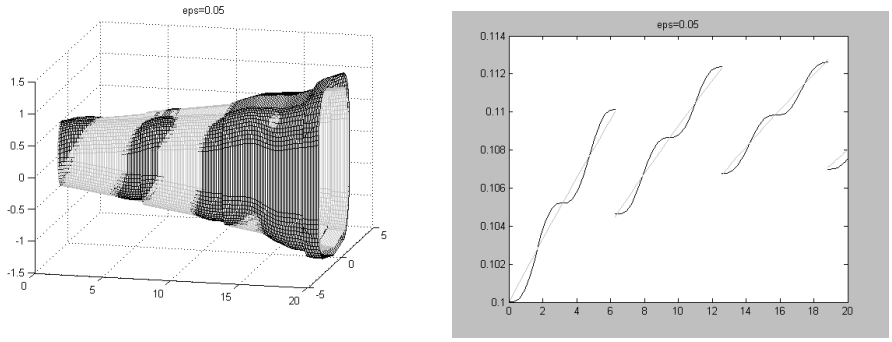
a) When $\varepsilon = 0.1$:



(a) (b)

Image 1. (a) The graph of the solutions of initial system $X(t)$ (black) and averaged system $\bar{X}(t)$ (gray). (b) The graph of the solutions of initial system $y(t)$ (black) and averaged system $\bar{y}(t)$ (gray).

b) When $\varepsilon = 0.05$:



(a) (b)

Image 2. (a) The graph of the solutions of initial system $X(t)$ (black) and averaged system $\bar{X}(t)$ (gray). (b) The graph of the solutions of initial system $y(t)$ (black) and averaged system $\bar{y}(t)$ (gray).

1. **de Blasi F. S.** On the differentiability of multifunctions / F. S. de Blasi // Pacific J. Math. – 1976. – Vol. 66, Is. 1. – P. 67 – 81.

2. **de Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso / F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2, Is. 4 – 5. – P. 491 – 501.

3. **de Blasi F. S.** Euler method for differential equations with set-valued solutions / F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat.Ital. – 1971. – Vol. 4, Is. 4. – P. 941 – 949.

4. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions / A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat. Ital. – 1970. – Is. 4. – P. 534 – 538.

5. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara // Func. Ekvacioj. – 1967. – Is. 10. – P. 205 – 223.

6. **Skripnik N. V.** Averaging of impulsive differential equations with Hukuhara derivative. / N. V. Skripnik // Visn. Yuriy Fedkovich Chernivtsy National University. – 2008. – Vol. 374. – P. 109 – 115. (in Ukranian)

7. **Differential** equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) / [Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.]. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbHCo., 2011. – 307 p.

8. **Plotnikov V. A.** Differential equations with a multivalued right-hand side. Asymptotic methods / V. A. Plotnikov, A. V. Plotnikov, A. N. Vityuk. – Odessa: Astroprint, 1999. – 354 p. (in Russian)

9. **Kisielewicz M.** Method of Averaging for Differential Equations with Compact Convex Valued Solutions / M. Kisielewicz // Rend. Math. – 1976. – Vol. 9, Is. 3. – P. 397–408.

10. **Plotnikov V. A.** Existence, continuous dependence and averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay / V. A. Plotnikov, P. I. Rashkov // "Mathematics and education in mathematics": Proceedings of Twenty Sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians (April 22–25, 1997). – Plovdiv, Bulgaria, 1997. – P. 179–184

11. **Plotnikov V. A.** Averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay / V. A. Plotnikov, P. I. Rashkov // Funct. Differ. Equ. – 2001. – Vol. 8. – P. 371 – 381.

12. **Plotnikov V. A.** Averaging of controlled equations with the Hukuhara derivative / V. A. Plotnikov, O. D. Kichmarenko // Nonlinear Oscil. (N. Y.). – 2006. – Vol. 9: 3. – P. 365 – 374.

13. **Plotnikov V. A.** Averaging of equations with Hukuhara derivative, multivalued control and delay / V. A. Plotnikov, O. D. Kichmarenko // Bulletin of the Odessa National University. – 2007. – Vol. 12: 7. – P. 130 – 139. (in Russian)

14. **Samoilenko A. M.** Impulsive Differential Equations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2013 .–V.18, Is.2(18).–P.80–96

Mathematical Subject Classification: 34C15, 34C45
UDC 517.926

S. A. Shchogolev
Odesa I. I. Mechnikov National University

ON EXISTENCE OF A SPECIAL KIND'S INTEGRAL MANIFOLD OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL SYSTEM WITH SLOWLY VARYING PARAMETERS

Щоголев С. А. Про існування інтегрального многовиду спеціального вигляду нелінійної диференціальної системи із повільно змінними параметрами. Для нелінійної коливної одночастотної диференціальної системи другого порядку, праві частини якої відносно кутової змінної зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є із повільно змінними в певному сенсі коефіцієнтами, отримано умови існування інтегрального многовиду аналогічної структури.
Ключові слова: диференціальна система, многовид, повільно змінний.

Щёголев С. А. О существовании интегрального многообразия специального вида нелинейной дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами. Для нелинейной колебательной одночастотной дифференциальной системы второго порядка, правые части которой относительно угловой переменной представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися в определённом смысле коэффициентами, получены условия существования интегрального многообразия аналогичной структуры.
Ключевые слова: дифференциальная система, многообразие, медленно меняющийся.

Shchogolev S. A. On existence of a special kind's integral manifold of the nonlinear differential system with slowly varying parameters. Consider the second-order nonlinear oscillating single-frequency differential system, the right-hand parts of which with respect angular variable can be represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying in a certain sense coefficients. Establish the conditions of existence of this system of integral manifolds of a similar structure. In this manifold system are reduced to the one differential equation with respect angular variable. Preliminary the auxiliary lemm's in which construct the transformations, which reducing researching system to the system with slowly varying, non oscillating, kind, are obtained. And coefficients of these transformations are obtained in the form of analogous Fourier-series.
Key words: differential system, manifold, slowly varying.

Introduction. One of the powerful methods of the study of nonlinear systems of differential equations is the method of integral manifolds [1,2]. Particularly important role it plays in the research of multi-frequency oscillations, in particular, in systems containing the slowly varying parameters [3]. An important object of study in the same time and are single-frequency system [4]. In this paper the problem about existence of the integral manifold, which represented by as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying parameters, are researched.

© Shchogolev S. A., 2013

Main Results.

1. Basic notation and definitions.

Let $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbf{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}$.

Definition 1. We say, that a function $f(t, \varepsilon)$, in general a complex-valued, belongs to the class $S_m(\varepsilon_0)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, if
1) $f : G(\varepsilon_0) \to \mathbf{C}$; 2) $f(t, \varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ with respect t;
3) $d^k f(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t, \varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$,

$$\|f\|_{S_m(\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |f_k^*(t, \varepsilon)| \ < +\infty.$$

Definition 2. We say, that a function $f(t, \varepsilon, \theta)$ belongs to the class $F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)$ $(m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0, +\infty))$ if
1) $t, \varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $\theta \in \mathbf{R}$; 2) $f : G(\varepsilon_0) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

$$3) \quad f(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta),$$

and:
a) $f_n(t, \varepsilon) \in S_m(\varepsilon_0)$, $f_{-n}(t, \varepsilon) \equiv \overline{f_n(t, \varepsilon)}$;
b) $\exists K \in (0, +\infty)$: $\|f_n\|_{S_m(\varepsilon_0)} \le K \exp(-|n|\alpha)$, $n \in \mathbf{Z}$;

$$c) \quad \|f\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)} \stackrel{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S_m(\varepsilon_0)} < \frac{K\,(1 + e^{-\alpha})}{1 - e^{-\alpha}}.$$

So the function $f(t, \varepsilon, \theta)$ and its partial derivatives with respect t up to m-th order inclusive are analytic with respect $\theta \in \mathbf{R}$.

We state some properties of the norm $\|\cdot\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)}$. Let $u, v \in F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)$. Then
1) $\|ku\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)} = |k| \cdot \| u\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)}$,
2) $\|u + v\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)} \le \|u\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)} + \|v\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)}$,
3) $\|uv\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)} \le 2^m \|u\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)} \cdot \|v\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)}$.

The property 3) in [5] are proved. Functions of the class $F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)$ are form a linear space, turning a complete normed space by introducing the norm $\|\cdot\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)}$.

If $m_1 < m_2$, then $F_{m_2}^\theta(\varepsilon_0, \alpha) \subset F_{m_1}^\theta(\varepsilon_0, \alpha)$.

If $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, then $F_m^\theta(\varepsilon_2, \alpha) \subset F_m^\theta(\varepsilon_1, \alpha)$.

Definition 3. We say, that a function $f(t, \varepsilon, x)$ belongs to the class $S_m^x(\varepsilon_0, x_0, d)$, if
1) $t, \varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $f : G(\varepsilon_0) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

$$3) \quad f(t, \varepsilon, x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(t, \varepsilon)(x - x_0)^l,$$

and
a) $f_l : G(\varepsilon_0) \to \mathbf{R}$; b) $f_l(t, \varepsilon) \in S_m(\varepsilon_0)$;
c) the series $\sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\|_{S_m(\varepsilon_0)}(x - x_0)^l$ is convergent if $|x - x_0| < d$.

Thus function $f(t, \varepsilon, x)$ is real, analytic with respect x, if $|x - x_0| < d$ together with its partial derivatives up to m-th order inclusive. Moreover $\forall x \in (x_0 - d, x_0 + d)$: $f(t, \varepsilon, x) \in S_m(\varepsilon_0)$.

Definition 4. We say, that a function $f(t,\varepsilon,\theta,x)$ belongs to the class $F_m^{\theta,x}(\varepsilon_0,\alpha,x_0,d)$ $(m \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ \alpha \in (0,+\infty))$ if
1) $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $\theta \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $f : G(\varepsilon_0) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

$$3) \quad f(t,\varepsilon,\theta,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{n,l}(t,\varepsilon) e^{in\theta} (x-x_0)^l,$$

and
a) $f_{n,l}(t,\varepsilon) \in S_m(\varepsilon_0)$, $f_{-n,l}(t,\varepsilon) \equiv \overline{f_{n,l}(t,\varepsilon)}$,
b) $\exists\ K \in (0,+\infty) :\ \forall\ n \in \mathbf{Z},\ \forall\ \rho \in (0,d)$:

$$\|f_{n,l}(t,\varepsilon)\|_{S_m(\varepsilon)} \le \frac{Ke^{-|n|\alpha}}{\rho^l}.$$

Thus real function $f(t,\varepsilon,\theta,x)$ and its all partial derivatives with respect t up to m-th order inclusive are analytic with respect $\theta \in \mathbf{R}$ and x if $|x-x_0| < d$. Moreover $\forall\ x \in (x_0-d, x_0+d)$: $f(t,\varepsilon,\theta,x) \in F_m^{\theta}(\varepsilon_0,\alpha)$.

2. Statement of the Problem.

Consider the following system of differential equations:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= \mu X(t,\varepsilon,\theta,x) + \varepsilon a(t,\varepsilon,\theta,x), \\ \tfrac{d\theta}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Theta(t,\varepsilon,\theta,x) + \varepsilon b(t,\varepsilon,\theta,x), \end{aligned} \tag{1}$$

where $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $\theta,x \in \mathbf{R}$; $X,\Theta \in F_m^{\theta,x}(\varepsilon_0,\alpha,x_0,d)$, $a,b \in F_{m-1}^{\theta,x}(\varepsilon_0,\alpha,x_0,d)$, $\omega \in S_m(\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0} \omega = \omega_0 > 0$, $\mu \in (0,\mu_0)$.

We study the question of the existence of the integral manifold $x = w(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in$ $\in F_k^{\theta}(\varepsilon_1,\alpha_1)$ $(k < m-1,\ \varepsilon_1 < \varepsilon_0,\ \alpha_1 < \alpha)$ of the system (1).

3. Auxiliary Results.

We denote:

$$X_0(t,\varepsilon,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t,\varepsilon,\theta,x) d\theta.$$

Let us assume that the following conditions.

(A). There is a real function $x_0(t,\varepsilon)$ such that
1) $X_0(t,\varepsilon,x_0(t,\varepsilon)) \equiv 0$;

$$2) \quad \inf_{G(\varepsilon_0)} \left| \frac{\partial X_0(t,\varepsilon,x_0(t,\varepsilon))}{\partial x} \right| = \gamma > 0; \tag{2}$$

3) in system (1) a function $x_0(t,\varepsilon)$ is taken as a point x_0 and is taken as d-sufficiently small positive number in the d-neighborhood of the point x_0 is no other roots of the equation $X_0(t,\varepsilon,x) = 0$, than x_0. Owing to the condition (2) the number d are exists.

(B) Parameters μ and ε are related by inequalities:

$$\mu^{r-2} \le \varepsilon^{m_1-1}, \tag{3}$$

in which $r, m_1 \in \mathbf{N}$, $r > 2m_1$, $m > 2m_1$, $m_1 \ge 1$,

$$\mu + \frac{\varepsilon}{\mu^2} < \delta, \tag{4}$$

in which $\delta \in (0, +\infty)$.

Lemma 1. *Let the condition (A). Then*
1) $\forall\ r \in \mathbf{N}\ \exists\ \mu_r \in (0, \mu_0)$ *such that* $\forall\ \mu \in (0, \mu_r)$ *exists the transformation of kind*

$$x = y + \sum_{k=1}^{r} u_k(t, \varepsilon, \varphi, y)\mu^k, \quad \theta = \varphi + \sum_{k=1}^{r} v_k(t, \varepsilon, \varphi, y)\mu^k, \tag{5}$$

where $\varphi, y \in \mathbf{R}$, $u_k, v_k \in F_m^{\varphi,y}(\varepsilon_0, \alpha, x_0, d_1)$ $(d_1 \in (0, d),\ k = \overline{1, r})$, *which reducing the system (1) to the form:*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} Y_k(t, \varepsilon, y)\mu^k + \mu^{r+1}\widetilde{Y}_r(t, \varepsilon, \varphi, y, \mu) + \varepsilon a_r(t, \varepsilon, \varphi, y, \mu), \\ \tfrac{d\varphi}{dt} &= \omega(t, \varepsilon) + \textstyle\sum_{k=1}^{r} \Phi_k(t, \varepsilon, y)\mu^k + \mu^{r+1}\widetilde{\Phi}_r(t, \varepsilon, \varphi, y, \mu) + \varepsilon b_r(t, \varepsilon, \varphi, y, \mu), \end{aligned} \tag{6}$$

where $Y_k, \Phi_k \in S_m^y(\varepsilon_0, x_0, d_1)$, $\widetilde{Y}_r, \widetilde{\Phi}_r \in F_m^{\varphi,y}(\varepsilon_0, \alpha, x_0, d_1)$, $a_r, b_r \in F_{m-1}^{\varphi,y}(\varepsilon_0, \alpha, x_0, d_1)$;
2) $\exists\ \mu_r^* \in (0, \mu_r)$ *such that* $\forall\ \mu \in (0, \mu_r^*)$ *exists inversion:*

$$y = x + p(t, \varepsilon, \theta, x, \mu), \quad \varphi = \theta + q(t, \varepsilon, \theta, x, \mu), \tag{7}$$

where $p, q \in F_m^{\theta,x}(\varepsilon, \alpha, x, d_2)$ $(d_2 \in (0, d_1))$.

Proof. The formulas determining for sufficiently small values μ the functions u_k, v_k, Y_k, Φ_k $(k = \overline{1, r})$, $\widetilde{Y}_r, \widetilde{\Phi}_r, a_r, b_r$ are obtained in [6]. From these formulas it follows that these functions belong to the specified class in the formulation of lemma. We now establish the reversibility of the transformation (5). We rewrite it in the form:

$$x = y + \mu u(t, \varepsilon, \varphi, y, \mu), \quad \theta = \varphi + \mu v(t, \varepsilon, \varphi, y, \mu), \tag{8}$$

where

$$u = \sum_{k=1}^{r} u_k(t, \varepsilon, \varphi, y)\mu^{k-1}, \quad v = \sum_{k=1}^{r} v_k(t, \varepsilon, \varphi, y)\mu^{k-1}.$$

Obviously $u, v \in F_m^{\varphi,y}(\varepsilon_0, \alpha, x_0, d_1)$.

We sustitute relations (7) in (8). Then we obtain the nonlinear system for p, q:

$$p + \mu u(t, \varepsilon, \theta + q, x + p, \mu) = 0, \quad q + \mu v(t, \varepsilon, \theta + q, x + p, \mu) = 0. \tag{9}$$

We choose some $\rho \in (0, d_1)$ and denote:

$$D_0 = \{x \in \mathbf{R};\ |x - x_0| \le \rho\},$$

$$M(\mu) = \max\left(\sup_{x \in D_0} \|u(t, \varepsilon, \theta, x, \mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)},\ \sup_{x \in D_0} \|v(t, \varepsilon, \theta, x, \mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0, \alpha)}\right).$$

We seek a solution of the system (9) by iterative method, identifying as an initial approximation $p_0 = q_0 = 0$, and subsequent iterations are defined by formulas:

$$p_{k+1} = -\mu u(t, \varepsilon, \theta + q_k, x + p_k, \mu), \quad q_{k+1} = -\mu v(t, \varepsilon, \theta + q_k, x + p_k, \mu). \tag{10}$$

Now we choose $d_2 \in (0, \rho)$ and denote

$$D_1 = \{x \in \mathbf{R} :\ |x - x_0| \le d_2\}.$$

We have: $p_1 = -\mu u(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)$, $q_1 = -\mu v(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)$.

$$\sup_{x\in D_1} \|p_1\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} = \mu \sup_{x\in D_1} \|u\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu \sup_{x\in D_0} \|u\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu),$$

$$\sup_{x\in D_1} \|q_1\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} = \mu \sup_{x\in D_1} \|v\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu \sup_{x\in D_0} \|v\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu).$$

We assume by induction that

$$\sup_{x\in D_1} \|p_k\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu), \ \sup_{x\in D_1} \|q_k\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu).$$

Then if $x \in D_1$, we have:

$$|x + p_k - x_0| \le |x - x_0| + |p_k| \le d_2 + \mu M(\mu).$$

We choose μ so small, that $\mu M(\mu) < \rho - d_2$. Then

$$\sup_{x\in D_1} \|p_{k+1}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} = \mu \sup_{x\in D_1} \|u(t,\varepsilon,\theta+q_k,x+p_k,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le$$

$$\le \mu \sup_{x\in D_0} \|u(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu),$$

$$\sup_{x\in D_1} \|q_{k+1}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} = \mu \sup_{x\in D_1} \|v(t,\varepsilon,\theta+q_k,x+p_k,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le$$

$$\le \mu \sup_{x\in D_0} \|v(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu).$$

Thus for all iterations is satisfied:

$$\sup_{x\in D_1} \|p_k(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu), \ \sup_{x\in D_1} \|q_k(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu).$$

Since the function $u, v \in F_m^{\varphi,y}(\varepsilon_0,\alpha,x_0,d_1)$ then $\exists\ L(\mu) \in (0,+\infty) : \forall\ \widetilde{p},\widetilde{q},\widetilde{\widetilde{p}},\widetilde{\widetilde{q}} \in$ $\in F_m^{\theta,x}(\varepsilon_0,\alpha,x_0,d_2)$ such that

$$\sup_{x\in D_1} \|\widetilde{p}(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu), \quad \sup_{x\in D_1} \|\widetilde{\widetilde{p}}(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu),$$

$$\sup_{x\in D_1} \|\widetilde{q}(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu), \quad \sup_{x\in D_1} \|\widetilde{\widetilde{q}}(t,\varepsilon,\theta,x,\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le \mu M(\mu)$$

the unequalities:

$$\sup_{x\in D_1} \|u(t,\varepsilon,\theta+\widetilde{q},x+\widetilde{p},\mu) - u(t,\varepsilon,\theta+\widetilde{\widetilde{q}},x+\widetilde{\widetilde{p}},\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le$$

$$\le L(\mu)\left(\sup_{x\in D_1} \|\widetilde{q}-\widetilde{\widetilde{q}}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} + \sup_{x\in D_1} \|\widetilde{p}-\widetilde{\widetilde{p}}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)}\right),$$

$$\sup_{x\in D_1} \|v(t,\varepsilon,\theta+\widetilde{q},x+\widetilde{p},\mu) - v(t,\varepsilon,\theta+\widetilde{\widetilde{q}},x+\widetilde{\widetilde{p}},\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le$$

$$\le L(\mu)\left(\sup_{x\in D_1} \|\widetilde{q}-\widetilde{\widetilde{q}}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} + \sup_{x\in D_1} \|\widetilde{p}-\widetilde{\widetilde{p}}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)}\right).$$

Hence we obtain:

$$\sup_{x\in D_1} \|p_{k+1}-p_k\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} =$$

$$= \mu \sup_{x\in D_1} \|u(t,\varepsilon,\theta+q_k,x+p_k,\mu 0 - u(t,\varepsilon,\theta+q_{k-1},x+p_{k-1},\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le$$

$$\le \mu L(\mu)\left(\sup_{x\in D_1} \|q_k-q_{k-1}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} + \sup_{x\in D_1} \|p_k-p_{k-1}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)}\right);$$

$$\sup_{x\in D_1} \|q_{k+1}-q_k\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} =$$

$$= \mu \sup_{x\in D_1} \|v(t,\varepsilon,\theta+q_k,x+p_k,\mu 0 - v(t,\varepsilon,\theta+q_{k-1},x+p_{k-1},\mu)\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} \le$$

$$\le \mu L(\mu)\left(\sup_{x\in D_1} \|q_k-q_{k-1}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)} + \sup_{x\in D_1} \|p_k-p_{k-1}\|_{F_m^\theta(\varepsilon_0,\alpha)}\right).$$

Therefore, for the convergence process (10) to the solution of the system (9), which belong to the class $F_m^{\theta,x}(\varepsilon_0,\alpha,x_0,d_2)$ is sufficient condition $2\mu L(\mu)<1$.

Lemma 1 are proved.

We consider equation:

$$Y(t,\varepsilon,y,\mu)=0, \tag{11}$$

where $Y=\sum_{k=1}^r Y_k(t,\varepsilon,y)\mu^{k-1}$. In [6] shows that $Y_1(t,\varepsilon,y)=X_0(t,\varepsilon,y)$. Therefore, on the basis of the assumption (A), the equation

$$Y_1(t,\varepsilon,y)=0 \tag{12}$$

have the root $y_0(t,\varepsilon)=x_0(t,\varepsilon)\in S_m(\varepsilon_0)$, and

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}\left|\frac{\partial Y_1(t,\varepsilon,y_0(t,\varepsilon))}{\partial y}\right| = \gamma > 0.$$

Lemma 2. *Let suppose the assumption (A). Then* $\exists\ d_3\in(0,+\infty)$, $\mu_{r_0}\in(0,\mu_r)$, *where* μ_r *are defined in Lemma 1, such that* $\forall\ \mu\in(0,\mu_{r_0})$ *the equation (11) have the root* $y^*(t,\varepsilon,\mu)\in S_m(\varepsilon_0)$, *such that*

$$|y^*(t,\varepsilon,\mu)-y_0(t,\varepsilon)|<\mu d_3<d_2,$$

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}\left|\frac{\partial Y_1(t,\varepsilon,y^*(t,\varepsilon,\mu),\mu)}{\partial y}\right| = \gamma_1(\mu) > 0.$$

Proof. We write the equation (11) in the form

$$Y_1(t,\varepsilon,y)+\mu\widetilde{Y}(t,\varepsilon,y,\mu)=0, \tag{13}$$

where $\widetilde{Y}=\sum_{k=2}^r Y_k(t,\varepsilon,y)\mu^{k-2}$. Then the assertion of Lemma follows from the results [7, p. 695–702].

We denote

$$\Phi(t,\varepsilon,y,\mu)=\sum_{k=1}^r \Phi_k(t,\varepsilon,y)\mu^{k-1},$$

and rewrite the system (6) in form:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= \mu Y(t,\varepsilon,y,\mu) + \mu^{r+1}\widetilde{Y}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu) + \varepsilon a_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu), \\ \tfrac{d\varphi}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(y,\varepsilon,y,\mu) + \mu^{r+1}\widetilde{\Phi}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu) + \varepsilon b_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu), \end{aligned} \tag{14}$$

where $Y, \Phi \in S_m^y(\varepsilon_0, y^*, d_2 - \mu d_3)$.

Lemma 3. *Let suppose the assumption (A). Then* $\exists\, \varepsilon^* \in (0,\varepsilon_0)$, $d_4 \in (0, d_2 - \mu d_3)$ *such that* $\forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$ *exists the chain of reversible transformations of kind:*

$$y = z_1 + \varepsilon g_1(t,\varepsilon,\psi,z_1,\mu),\ \ \varphi = \psi_1 + \varepsilon h_1(t,\varepsilon,\psi,z_1,\mu), \tag{15}$$

$$z_1 = z_2 + \varepsilon^2 g_2(t,\varepsilon,\psi_2,z_2,\mu),\ \ \psi_1 = \psi_2 + \varepsilon^2 h_2(t,\varepsilon,\psi_2,z_2,\mu), \tag{16}$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned} z_{m_1-2} &= z_{m_1-1} + \varepsilon^{m_1-1} g_{m_1-1}(t,\varepsilon,\psi_{m_1-1},z_{m_1-1},\mu), \\ \psi_{m_1-2} &= \psi_{m_1-1} + \varepsilon^{m_1-1} h_{m_1-1}(t,\varepsilon,\psi_{m_1-1},z_{m_1-1},\mu), \end{aligned} \tag{17}$$

where $g_j, h_j \in F_{m-j}^{\psi_j,z_j}(\varepsilon^*,\alpha,y^*,d_4)$ $(j = \overline{1, m_1-1})$, *which reducing the system (13) to the kind:*

$$\begin{aligned} \tfrac{dz_{m_1-1}}{dt} &= \mu Y(t,\varepsilon,z_{m_1-1},\mu) + \mu^{r+1} Z_{m_1-1}(t,\varepsilon,\psi_{m_1-1},z_{m_1-1},\mu) + \\ &+ \textstyle\sum_{k=1}^{m_1-1} \varepsilon^k \alpha_k(t,\varepsilon,z_{m_1-1},\mu) + \varepsilon^{m_1}\widetilde{a}_{m_1}(t,\varepsilon,\psi_{m_1-1},z_{m_1-1},\mu), \\ \tfrac{d\psi_{m_1-1}}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(t,\varepsilon,z_{m_1-1},\mu) + \mu^{r+1}\Phi_{m_1-1}(t,\varepsilon,\psi_{m_1-1},z_{m_1-1},\mu) + \\ &+ \textstyle\sum_{k=1}^{m_1-1} \varepsilon^k \beta_k(t,\varepsilon,z_{m_1-1},\mu) + \varepsilon^{m_1}\widetilde{b}_{m_1}(t,\varepsilon,\psi_{m_1-1},z_{m_1-1},\mu), \end{aligned} \tag{18}$$

where $Z_{m_1-1}, \Phi_{m_1-1} \in F_{m-m_1+1}^{\psi_{m_1-1},z_{m_1-1}}(\varepsilon^*,\alpha,y^*,d_4)$, $\alpha_k, \beta_k \in S_{m-k}^{z_{m_1-1}}(\varepsilon_1,y^*,d_4)$, $\widetilde{a}_{m_1}, \widetilde{b}_{m_1} \in$ $\in F_{m-m_1}^{\psi_{m_1-1},z_{m_1-1}}(\varepsilon^*,\alpha,y^*,d_4)$.

Proof. We apply to the system (14) transformation (15) and require that the transformed system has the form:

$$\begin{aligned} \tfrac{dz_1}{dt} &= \mu Y(t,\varepsilon,z_1,\mu) + \mu^{r+1} Z_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu) + \\ &+ \varepsilon\alpha_1(t,\varepsilon,z_1,\mu) + \varepsilon^2\widetilde{a}_2(t,\varepsilon,\psi,z_1,\mu), \\ \tfrac{d\psi_1}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(t,\varepsilon,z_1,\mu) + \mu^{r+1}\Phi_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu) + \\ &+ \varepsilon\beta_1(t,\varepsilon,z_1,\mu) + \varepsilon^2\widetilde{b}_2(t,\varepsilon,\psi,z_1,\mu), \end{aligned} \tag{19}$$

where the function $Z_1, \Phi_1, \alpha_1, \beta_1, \widetilde{a}_2, \widetilde{b}_2$ are to be determined. Then for the functions g_1, h_1 we obtain the following system of the differential equations in partial derivatives:

$$\begin{aligned} &(\omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(t,\varepsilon,z_1,\mu))\,\tfrac{\partial g_1}{\partial\psi_1} + \mu Y(t,\varepsilon,z_1,\mu)\tfrac{\partial g_1}{\partial z_1} + \\ &+ \alpha_1(t,\varepsilon,z_1,\mu) = \mu\tfrac{\partial Y(t,\varepsilon,z_1,\mu)}{\partial z_1}\, g_1 + a_r(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}(\omega(t,\varepsilon)+\mu\Phi(t,\varepsilon,z_1,\mu))\,\tfrac{\partial h_1}{\partial\psi_1}+\mu Y(t,\varepsilon,z_1,\mu)\tfrac{\partial h_1}{\partial z_1}+\\ +\beta_1(t,\varepsilon,z_1,\mu)=\mu\tfrac{\partial\Phi(t,\varepsilon,z_1,\mu)}{\partial z_1}\;g_1+b_r(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu).\end{gathered}\tag{21}$$

The functions $Z_1,\Phi_1,\widetilde{a}_2,\widetilde{b}_2$ defined from the following systems of the linear algebraic equations:

$$\begin{gathered}\varepsilon\tfrac{\partial g_1}{\partial\psi_1}\;\Phi_1+\left(1+\varepsilon\tfrac{\partial g_1}{\partial z_1}\right)Z_1=\widetilde{Y}_r(t,\varepsilon,\psi_1+\varepsilon h_1,z_1+\varepsilon g_1,\mu),\\ \left(1+\varepsilon\tfrac{\partial h_1}{\partial\psi_1}\right)\Phi_1+\varepsilon\tfrac{\partial h_1}{\partial\psi_1}Z_1=\widetilde{\Phi}_r(t,\varepsilon,\psi_1+\varepsilon h_1,z_1+\varepsilon g_1,\mu),\end{gathered}\tag{22}$$

$$\begin{gathered}\left(1+\varepsilon\tfrac{\partial g_1}{\partial z_1}\right)\widetilde{a}_2+\varepsilon\tfrac{\partial g_1}{\partial\psi_1}\widetilde{b}_2=\\ =\tfrac{\mu}{2}\tfrac{\partial^2Y(t,\varepsilon,z_1+\nu_1\varepsilon g_1)}{\partial z_1^2}g_1^2+\tfrac{\partial a_r(t,\varepsilon,\psi+\nu_2\varepsilon h_1,z_1+\nu_2\varepsilon g_1,\mu)}{\partial\psi_1}\;h_1+\\ +\tfrac{\partial a_r(t,\varepsilon,\psi+\nu_2\varepsilon h_1,z_1+\nu_2\varepsilon g_1,\mu)}{\partial z_1}\;g_1-\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{\partial g_1}{\partial t},\\ \varepsilon\tfrac{\partial h_1}{\partial z_1}\;\widetilde{a}_2+\left(1+\varepsilon\tfrac{\partial h_1}{\partial\psi_1}\right)\widetilde{b}_2=\\ =\tfrac{\mu}{2}\tfrac{\partial^2\Phi(t,\varepsilon,z_1+\nu_3\varepsilon g_1)}{\partial z_1^2}g_1^2+\tfrac{\partial b_r(t,\varepsilon,\psi+\nu_4\varepsilon h_1,z_1+\nu_4\varepsilon g_1,\mu)}{\partial\psi_1}\;h_1+\\ +\tfrac{\partial b_r(t,\varepsilon,\psi+\nu_4\varepsilon h_1,z_1+\nu_4\varepsilon g_1,\mu)}{\partial z_1}\;g_1-\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{\partial h_1}{\partial t},\end{gathered}\tag{23}$$

where $\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\in(0,1)$.

We denote $z_0=y^*(t,\varepsilon,\mu)$ and expand the functions Y,Φ in the series in z_1-z_0, which converge at $|z_1-z_0|<\rho_1$, where $\rho_1\in(0,d_2-\mu d_3)$. Due the conditions of Lemma value ρ_1 can be chosen so small that in ρ_1-neighbourhood of the point z_0 the are no, except z_0, other roots of equation $Y(t,\varepsilon,z_1,\mu)=0$.

$$\Phi(t,\varepsilon,z_1,\mu)=\sum_{l=0}^{\infty}\Phi_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^l,\tag{24}$$

$$Y(t,\varepsilon,z_1,\mu)=\sum_{l=0}^{\infty}Y_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^l.\tag{25}$$

In the case $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|Y_1^*(t,\varepsilon,\mu)|=\gamma_1(\mu)>0$. Then

$$\frac{\partial\Phi(t,\varepsilon,z_1,\mu)}{\partial z_1}=\sum_{l=0}^{\infty}l\Phi_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^{l-1},\tag{26}$$

$$\frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_1,\mu)}{\partial z_1}=\sum_{l=0}^{\infty}lY_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^{l-1}.\tag{27}$$

We expand the functions a_r, b_r in the double series, whish converge at $\psi_1 \in \mathbf{R}$ and $|z_1 - z_0| < \rho_1$:

$$a_r(t,\varepsilon,\psi_1,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{rkl}(t,\varepsilon,\mu)e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l, \tag{28}$$

$$b_r(t,\varepsilon,\psi_1,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} b_{rkl}(t,\varepsilon,\mu)e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l. \tag{29}$$

We seek a solution of the system (20), (21) in the form of a double series:

$$g_1(t,\varepsilon,\psi_1,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} g_{1kl}(t,\varepsilon,\mu)e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l, \tag{30}$$

$$h_1(t,\varepsilon,\psi_1,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h_{1kl}(t,\varepsilon,\mu)e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l. \tag{31}$$

Then

$$\frac{\partial g_1}{\partial \psi_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} ikg_{1kl}e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l, \tag{32}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} lg_{1kl}e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^{l-1}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \psi_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} ikh_{1kl}e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l, \tag{34}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} lh_{1kl}e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^{l-1}. \tag{35}$$

We substitute expressions (30), (32), (33) in the equation (20). Using (24) we obtain:

$$\begin{gathered}\left(\omega(t,\varepsilon) + \mu\sum_{l=0}^{\infty}\Phi_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^l\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} ikg_{1kl}e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l + \\ + \left(\mu\sum_{l=0}^{\infty}Y_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^l\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} lg_{1kl}e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^{l-1} + \\ +\alpha_1(t,\varepsilon,z_1,\mu) = \left(\mu\sum_{l=1}^{\infty} lY_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^{l-1}\right)\times \\ \times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} g_{1kl}(t,\varepsilon,\mu)e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{rkl}(t,\varepsilon,\mu)e^{ik\psi_1}(z_1-z_0)^l.\end{gathered} \tag{36}$$

We equate in the left and right sides of the equality (36) the coefficients at $e^{ik\psi_1}$. At $k = 0$ we obtain:

$$\left(\mu\sum_{l=0}^{\infty}Y_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^l\right)\sum_{l=0}^{\infty} lg_{10l}(z_1-z_0)^{l-1} +$$

$$+\alpha_1(t,\varepsilon,z_1,\mu)=\left(\mu\sum_{l=1}^{\infty}lY_l^*(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^{l-1}\right)\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}g_{10l}(z_1-z_0)^l+\sum_{l=0}^{\infty}a_{r0l}(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^l. \tag{37}$$

We denote:

$$\alpha_1(t,\varepsilon,z_1,\mu)=\sum_{l=0}^{\infty}a_{r0l}(t,\varepsilon,\mu)(z_1-z_0)^l=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a_r(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu)d\psi_1\in S_{m-1}^{z_1}(\varepsilon_0,z_0,\rho_1),$$

$$g_{10l}(t,\varepsilon,\mu)\equiv 0\ (l=0,1,2,...).$$

At $k\neq 0$ we denote:

$$g_{1k0}=-\frac{a_{rk0}}{\mu Y_1^*(t,\varepsilon,\mu)-ik(\omega(t,\varepsilon)+\mu\Phi_0^*(t,\varepsilon,\mu))}, \tag{38}$$

$$g_{1kn}=\frac{\mu\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left[(n+1-2j)Y_{n-j+1}^*(t,\varepsilon,\mu)-ik\Phi_{n-j}^*(t,\varepsilon,\mu)\right]g_{1kj}+a_{rkn}(t,\varepsilon,\mu)}{(n-1)\mu Y_1^*(t,\varepsilon,\mu)+ik(\omega(t,\varepsilon)+\mu\Phi_0^*(t,\varepsilon,\mu))}, \tag{39}$$

$$n=1,2,\ldots;\ k\in\mathbf{Z}/\{0\}.$$

Since $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}\omega(t,\varepsilon)=\omega_0>0$, then

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}|\omega(t,\varepsilon)+\mu\Phi_0^*(t,\varepsilon,\mu)|\geq\omega_0-\mu\|\Phi_0^*(t,\varepsilon,\mu)\|_{S_m(\varepsilon_0)}>\omega_1>0,$$

if $\mu\|\Phi_0^*(t,\varepsilon,\mu)\|_{S_m(\varepsilon_0)}<\omega_0-\omega_1$. From (38) follows, that $g_{1k0}(t,\varepsilon,\mu)\in S_{m-1}(\varepsilon_0)$, and

$$\|g_{1k0}(t,\varepsilon,\mu)\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\leq\frac{\|a_{rk0}(t,\varepsilon,\mu)\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}}{|k|\omega_1}.$$

From (39) follows, that $\forall\ n\in\mathbf{N}$: $g_{1kn}(t,\varepsilon,\mu)\in S_{m-1}(\varepsilon_0)$.

Since series (24), (25), (28), (29) converge at $\psi_1\in\mathbf{R}$ and $|z_1-z_0|<\rho_1$, then $\exists\ \sigma\in(0,\rho_1)$, $M\in(0,+\infty)$ such that:

$$\|\Phi_l^*\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\leq\frac{M}{\sigma^l},\quad\|Y_l^*\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\leq\frac{M}{\sigma^{l-1}},$$

$$\|a_{rkl}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\leq\frac{Me^{-|k|\alpha}}{\sigma^l},\quad\|b_{rkl}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\leq\frac{Me^{-|k|\alpha}}{\sigma^l}.$$

Following known techniques [8], suppose by induction, that

$$\|g_{1kl}(t,\varepsilon,\mu)\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\leq\frac{P^le^{-|k|\alpha}}{\sigma^l}\quad(l=\overline{0,n-1}).$$

We show that the constant $P > 1$ can be chosen so that:

$$\|g_{1kn}(t,\varepsilon,\mu)\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)} \le \frac{P^n e^{-|k|\alpha}}{\sigma^n}.$$

Let $\gamma_1(\mu)$ – the constant, which defined in Lemma 2. From (39) we obtain:

$$\|g_{1kn}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)} \le \frac{1}{(n-1)\mu\gamma_1(\mu)+|k|\omega_1}\times$$

$$\times\left[\mu 2^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}|n+1-2j|\cdot\|Y^*_{n-j+1}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\cdot\|g_{1kj}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}+\right.$$

$$\left.+\mu|k|2^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\|\Phi^*_{n-j}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\cdot\|g_{1kj}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}+\|a_{rkn}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\right]\le$$

$$\le\frac{2^{m-1}}{(n-1)\mu\gamma_1(\mu)+|k|\omega_1}\left[\mu\sum_{j=0}^{n-1}|n+1-2j|\frac{M}{\sigma^{n-j}}\cdot\frac{P^je^{-|k|\alpha}}{\sigma^j}+\right.$$

$$\left.+\mu|k|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{M}{\sigma^{n-j}}\cdot\frac{P^je^{-|k|\alpha}}{\sigma^j}+\frac{Me^{-|k|\alpha}}{\sigma^n}\right]=$$

$$=\frac{2^{m-1}Me^{-|k|\alpha}}{((n-1)\mu\gamma_1(\mu)+|k|\omega_1)\sigma^n}\left[\mu\sum_{j=0}^{n-1}|n+1-2j|P^j+\mu|k|\sum_{j=0}^{n-1}P^j+1\right]=$$

$$=\frac{2^{m-1}Me^{-|k|\alpha}}{((n-1)\mu\gamma_1(\mu)+|k|\omega_1)\sigma^n}\times$$

$$\times\left[\mu\,\frac{(n+3)P^{n+1}-(n-1)P^n+(n+1)}{(P-1)^2}+\mu|k|\frac{P^n-1}{P-1}+1\right]\le$$

$$\le\frac{2^{m-1}Me^{-|k|\alpha}}{((n-1)\mu\gamma_1(\mu)+|k|\omega_1)\sigma^n}\left[\mu\frac{3(n+1)P^{n+1}}{(P-1)^2}+\mu|k|\frac{P^n}{P-1}+P^{n-1}\right]. \quad (40)$$

Let $P\ge 1+p_0$, where $p_0>0$. Then from (40) we obtain:

$$\|g_{1kn}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)}\le\frac{K_0 2^{m-1}Me^{-|k|\alpha}}{((n-1)\mu\gamma_1(\mu)+|k|\omega_1)\sigma^n}\left[\mu(n+1)P^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\mu|k|P^{n-1}+P^{n-1}\right]=\frac{K_0 2^{m-1}Me^{-|k|\alpha}}{((n-1)\mu\gamma_1(\mu)+|k|\omega_1)\sigma^n}\,(\mu(n+1)+\mu|k|+1)P^{n-1},$$

where $K_0=3(1+p_0)^2/p_0^2+(1+p_0)/p_0+1$.

We estimate:

$$\frac{\mu(n+1)+\mu|k|+1}{\mu\gamma_1(n-1)+\omega_1|k|}=\frac{\mu(n+1)+\mu|k|}{\mu\gamma_1(n-1)+\omega_1|k|}+\frac{1}{\mu\gamma_1(n-1)+\omega_1|k|}\le$$

$$\leq \frac{1}{\omega_1} + \frac{\mu(n+1)+\mu|k|}{\mu\gamma_1(n-1)+\omega_1|k|} < \frac{3}{\omega_1} + \frac{\mu+\mu\tau}{\mu\gamma_1+\omega\tau},$$

where $\tau = |k|/(n-1)$.

The function $s(\tau) = (\mu+\mu\tau)/(\mu\gamma_1+\omega_1\tau)$ at $\mu\gamma_1 < \omega_1$ is monotonically decreasing, $s(0) = 1/\gamma_1$, hence $s(\tau) \leq 1/\gamma_1$. Thus for sufficiently small μ:

$$\frac{\mu(n+1)+\mu|k|+1}{\mu\gamma_1(n-1)+\omega_1|k|} \leq K_1,$$

where $K_1 = 3/\omega_1 + 1/\gamma_1$. Hence:

$$\|g_{1kn}\|_{S_{m-1}(\varepsilon_0)} \leq \frac{K_0K_1 2^{m-1}Me^{-|k|\alpha}}{\sigma^n}\ P^{n-1}.$$

We require that

$$\frac{K_0K_1 2^{m-1}Me^{-|k|\alpha}}{\sigma^n}\ P^{n-1} < \frac{e^{-|k|\alpha}}{\sigma^n}\ P^n.$$

It's enough to satisfy the inequality $P > 1 + K_0K_1 2^{m-1}M$.

Thus equation (20) have a solution $g_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu)$, which belong to class $F_{m-1}^{\psi_1,z_1}(\varepsilon_0,\alpha,z_0,\sigma/P)$. Since in neighbourhood $|z_1 - z_0| < \rho_1$ the are no, except z_0, other roots of equation $Y(t,\varepsilon,z_1,\mu) = 0$, then equation (18) has no singular points, except z_0, hence $g_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu) \in F_{m-1}^{\psi_1,z_1}(\varepsilon_0,\alpha,z_0,\rho_1)$.

Let's go to equation (21) with an already defined function $g_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu)$, We denote:

$$\beta_1(t,\varepsilon,z_1,\mu) = \mu\frac{\partial\Phi(t,\varepsilon,z_1,\mu)}{\partial z_1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu)d\psi_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} b_r(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu)d\psi_1.$$

Then $\beta_1(t,\varepsilon,z_1,\mu) \in S_{m-1}^{z_1}(\varepsilon_0,z_0,\rho_1)$.

Using arguments similar to those given for the equation (20), we see that equation (21) have a solution $h_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu) \in F_{m-1}^{\psi_1,z_1}(\varepsilon_0,\alpha,z_0,\rho_1)$.

Now consider the systems of the linear algebraic equations (22), (23). Obviously $\exists\ \varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ such that $\forall\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ the determinants of theese systems are separated from zero. Hence the system (22) have a unique solution $\Phi_1(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu)$, $Z_1(t,\varepsilon,\psi,z_1,\mu) \in F_{m-1}^{\psi_1,z_1}(\varepsilon_1,\alpha,z_0,\rho_1)$. The system (23) have a unique solution $\widetilde{a}_2(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu)$, $\widetilde{b}_2(t,\varepsilon,\psi_1,z_1,\mu) \in F_{m-2}^{\psi_1,z_1}(\varepsilon_1,\alpha,z_0,\rho_1)$.

We make in the system (19) transformation (16) and require that the transformed system have the kind:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_2}{dt} &= \mu Y(t,\varepsilon,z_2,\mu) + \mu^{r+1}Z_2(t,\varepsilon,\psi_2,z_2,\mu) + \\
&+\varepsilon\alpha_1(t,\varepsilon,z_2,\mu) + \varepsilon^2\alpha_2(t,\varepsilon,z_2,\mu) + \varepsilon^3\widetilde{a}_3(t,\varepsilon,\psi_2,z_2,\mu), \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(t,\varepsilon,z_2,\mu) + \mu^{r+1}\Phi_2(t,\varepsilon,\psi_2,z_2,\mu) + \\
&+\varepsilon\beta_1(t,\varepsilon,z_2,\mu) + \varepsilon^2\beta_2(t,\varepsilon,z_2,\mu) + \varepsilon^3\widetilde{b}_3(t,\varepsilon,\psi_2,z_2,\mu).
\end{aligned} \tag{41}$$

Then for functions g_2, h_2 we obtain the next system of the differential equations in partial derivatives:

$$(\omega(t,\varepsilon)+\mu\Phi(t,\varepsilon,z_2,\mu))\frac{\partial g_2}{\partial\psi_2}+\mu Y(t,\varepsilon,z_2,\mu)\frac{\partial g_2}{\partial z_2}+$$

$$+\alpha_2(t,\varepsilon,z_2,\mu)=\mu\frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_2,\mu)}{\partial z_2}\ g_2+\widetilde{a}_2(t,\varepsilon,\psi,z_2), \tag{42}$$

$$(\omega(t,\varepsilon)+\mu\Phi(t,\varepsilon,z_2,\mu))\frac{\partial h_2}{\partial\psi_2}+\mu Y(t,\varepsilon,z_2,\mu)\frac{\partial h_2}{\partial z_2}+$$

$$+\beta_2(t,\varepsilon,z_2,\mu)=\mu\frac{\partial\Phi(t,\varepsilon,z_2,\mu)}{\partial z_2}\ g_2+\widetilde{b}_2(t,\varepsilon,\psi,z_2). \tag{43}$$

The functions $Z_2, \Phi_2, \widetilde{a}_3, \widetilde{b}_3$ defined from the following systems of the linear algebraic equations:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\tfrac{\partial g_2}{\partial\psi_2}\ \Phi_2+\left(1+\varepsilon^2\tfrac{\partial g_2}{\partial z_2}\right)Z_2=Z_1(t,\varepsilon,\psi_2+\varepsilon^2h_2,z_2+\varepsilon^2g_2,\mu),\\ \left(1+\varepsilon^2\tfrac{\partial h_2}{\partial\psi_2}\right)\Phi_2+\varepsilon^2\tfrac{\partial h_2}{\partial\psi_2}Z_2=\Phi_1(t,\varepsilon,\psi_2+\varepsilon^2h_2,z_2+\varepsilon^2g_2,\mu),\end{gathered} \tag{44}$$

$$\left(1+\varepsilon^2\tfrac{\partial g_2}{\partial z_2}\right)\widetilde{a}_3+\varepsilon^2\tfrac{\partial g_2}{\partial\psi_2}\widetilde{b}_3=$$

$$=\tfrac{\mu\varepsilon}{2}\cdot\tfrac{\partial^2Y(t,\varepsilon,z_2+\nu_1^*\varepsilon^2g_2)}{\partial z_2^2}g_2^2+$$

$$+\tfrac{\partial\alpha_1(t,\varepsilon,z_2+\nu_2^*\varepsilon^2g_2)}{\partial z_2}\ g_2+\varepsilon\left(\tfrac{\partial\widetilde{a}_2(t,\varepsilon,\psi_2+\nu_3^*\varepsilon^2h_2,z_2+\nu_3^*\varepsilon^2h_2,\mu)}{\partial\psi_2}\ h_2+\right.$$

$$\left.+\tfrac{\partial\widetilde{a}_2(t,\varepsilon,\psi_2+\nu_3^*\varepsilon^2h_2,z_2+\nu_3^*\varepsilon^2h_2,\mu)}{\partial z_2}\ g_2\right)-\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{\partial g_2}{\partial t}, \tag{45}$$

$$\varepsilon^2\tfrac{\partial h_2}{\partial z_2}\ \widetilde{a}_3+\left(1+\varepsilon^2\tfrac{\partial h_2}{\partial\psi_2}\right)\widetilde{b}_3=\tfrac{\mu\varepsilon}{2}\cdot\tfrac{\partial^2\Phi(t,\varepsilon,z_2+\nu_4^*\varepsilon^2g_2)}{\partial z_2^2}g_2^2+$$

$$+\tfrac{\partial\beta_1(t,\varepsilon,z_2+\nu_5^*\varepsilon^2g_2)}{\partial z_2}\ g_2+\varepsilon\left(\tfrac{\partial\widetilde{b}_2(t,\varepsilon,\psi_2+\nu_6^*\varepsilon^2h_2,z_2+\nu_6^*\varepsilon^2h_2,\mu)}{\partial\psi_2}\ h_2+\right.$$

$$\left.+\tfrac{\partial\widetilde{b}_2(t,\varepsilon,\psi_2+\nu_6^*\varepsilon^2h_2,z_2+\nu_6^*\varepsilon^2h_2,\mu)}{\partial z_2}\ g_2\right)-\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{\partial h_2}{\partial t},$$

where $\nu_1^;\nu_2^*,\nu_3^*,\nu_4^*,\nu_5^*,\nu_6^*\in(0,1)$.

Exploring the systems (42), (43) and (44), (45) in the same systems (20), (21) and (22), (23) we find that $\alpha_2,\beta_2\in S_{m-2}^{z_2}(\varepsilon_1,z_0,\rho_2)$, $g_2,h_2\in F_{m-2}^{\psi_2,z_2}(\varepsilon_1,\alpha,z_0,\rho_2)$, $\Phi_2,Z_2\in F_{m-2}^{\psi_2,z_2}(\varepsilon_2,\alpha,z_0,\rho_2)$, $\widetilde{a}_3,\widetilde{b}_3\in F_{m-3}^{\psi_2,z_2}(\varepsilon_2,\alpha,z_0,\rho_2)$ $(\rho_2\in(0,\rho_1)$, $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1))$.

Continuing in this way, get to the transformation (17) and systems (18). We establish, that

$$\alpha_{m_1-1},\beta_{m_1-1}\in S_{m-m_1+1}^{z_{m_1-1}}(\varepsilon_{m_1-2},z_0,\rho_{m_1-1}),$$

$$g_{m_1-1},h_{m_1-1}\in F_{m-m_1+1}^{\psi_{m_1-1},z_{m_1-1}}(\varepsilon_{m_1-2},\alpha,z_0,\rho_{m_1-1}),$$

$$\Phi_{m_1-1}, Z_{m_1-1} \in F_{m-m_1+1}^{\psi_{m_1-1},z_{m_1-1}}(\varepsilon_{m_1-1}, \alpha, z_0, \rho_{m_1-1}),$$

$$\widetilde{a}_{m_1}, \widetilde{b}_{m_1} \in F_{m-m_1}^{\psi_{m_1-1},z_{m_1-1}}(\varepsilon_{m_1-1}, \alpha, z_0, \rho_{m_1-1}),$$

where $0 < \varepsilon_{m_1-1} < \varepsilon_{m_1-2} < \ldots < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, $0 < \rho_{m_1-1} < \rho_{m_1-2} < \ldots < \rho_2 < < \rho_1 < d_1$.

Reversibility of transformations (15) – (17) for sufficiently small ε is proved similarly to Lemma 1.

Lemma 3 are proved.

4. Principal Results.

Theorem. *Suppose that the system (1) satisfies (A), (B). Then* $\exists\ \delta_0 \in (0, +\infty)$ *such, that* $\forall\ \delta \in (0, \delta_0)$ *(δ – value in condition (A)) the system (1) have the integral manifold*

$$x = w(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_{m_1-1}^{\theta}(\varepsilon_1^*, \alpha^*),$$

where $\varepsilon_1^* \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha^* \in (0, \alpha)$, *and on this manifold the system (1) are reduces to equation:*

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t, \varepsilon) + \mu\Theta(t, \varepsilon, \theta, w(t, \varepsilon, \theta, \mu)) + \varepsilon(t, \varepsilon, \theta, \mu).$$

Proof. Consider the system (18). Right-hand parts of this system are bounded at $t \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{m_1-1})$, $\psi_{m_1-1} \in \mathbf{R}$. Therefore it is easy to see that if the $m+1 > 2m_1$, the functions $\varepsilon^{m_1-1}\widetilde{a}_{m_1}(t, \varepsilon, \psi_{m_1-1}, z_{m_1-1})$, $\varepsilon^{m_1-1}\widetilde{b}_{m_1}(t, \varepsilon, \psi_{m_1-1}, z_{m_1-1})$ belong to class $S_{m_1-1}^{z_{m_1-1}}(\varepsilon_{m_1-1}, z_0, \rho_{m_1-1})$. And thus in fact these functions are slowly varying and not oscillating, despite the dependence on ψ_{m_1-1}, thanks to the factor ε^{m_1-1}. Therefore we can to rewrite the system (18) in form:

$$\begin{aligned} \tfrac{dz}{dt} &= \mu Y(t, \varepsilon, z, \mu) + \mu^{r+1} Z(t, \varepsilon, \psi, z, \mu) + \varepsilon\widetilde{a}(t, \varepsilon, z, \mu), \\ \tfrac{d\psi}{dt} &= \omega(t, \varepsilon) + \mu\Phi(t, \varepsilon, z, \mu) + \mu^{r+1}\Psi(t, \varepsilon, \psi, z, \mu) + \varepsilon\widetilde{b}(t, \varepsilon, z, \mu), \end{aligned} \tag{46}$$

where $Y, \Phi \in S_{m_1-1}^{z}(\varepsilon^*, z_0, d_4)$, $Z, \Psi \in F_{m-m_1}^{\psi,z}(\varepsilon^*, \alpha_1, z_0, d_4)$, $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in S_{m_1-1}^{z}(\varepsilon^*, z_0, d_4)$, ($\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha_1 \in (0, \alpha)$).

In system (46) using the transformation:

$$z = z_0 + \mu\xi, \ \ \psi = \psi. \tag{47}$$

Since $z_0(t, \varepsilon, \mu) \in S_m(\varepsilon_0)$, then

$$\frac{dz_0}{dt} = -\varepsilon z_1(t, \varepsilon, \mu), \tag{48}$$

where $z_1 \in S_{m-1}(\varepsilon_0)$. We denote:

$$\lambda(t, \varepsilon, \mu) = \left.\frac{\partial Y(t, \varepsilon, z, \mu)}{\partial z}\right|_{z=z_0}.$$

On the basis of Lemma 2:

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\lambda(t, \varepsilon, \mu)| = \gamma_1(\mu) > 0. \tag{49}$$

As a result of transformation (47) system (46) takes the form:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \mu\lambda(t,\varepsilon,\mu) + \mu^2\frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_0+\nu\mu\xi,\mu)}{\partial z}\ \xi^2 + \frac{\varepsilon}{\mu}z_1(t,\varepsilon,\mu)+\\ &+\mu^r Z(t,\varepsilon,\psi,z_0+\mu\xi,\mu) + \tfrac{\varepsilon}{\mu}\ \widetilde{a}(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi,\mu),\\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi,\mu) + \mu^{r+1}\Psi(t,\varepsilon,\psi,z_0+\mu\xi,\mu)+\\ &+\varepsilon\widetilde{b}(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi,\mu),\end{aligned} \tag{50}$$

where $0 < \nu < 1$.

Based on the assumption (B) the system (50) can be rewritten as:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \mu\lambda(t,\varepsilon,\mu)\xi + \mu^2\frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_0+\nu\mu\xi,\mu)}{\partial z}\ \xi^2 + \frac{\varepsilon}{\mu}z_1(t,\varepsilon,\mu)+\\ &+\mu^2\Xi_1(t,\varepsilon,\xi,\mu) + \frac{\varepsilon}{\mu}\ \widetilde{a}(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi,\mu),\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= \omega(t,\varepsilon) + \mu\Phi(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi,\mu) + \mu^2\Xi_2(t,\varepsilon,\xi,\mu)+\\ &+\varepsilon\widetilde{b}(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi,\mu),\end{aligned} \tag{52}$$

where $\Xi_1(t,\varepsilon,\xi,\mu),\ \Xi_2(t,\varepsilon,\xi,\mu) \in S^{\xi}_{m-m_1}(\varepsilon^*, z_0, \mu d_4)$.

Now we can consider equation (51) it regardless of the equation (52). Consider corresponding to equation (51), a linear non-homogeneous equation:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \mu\lambda(t,\varepsilon,\mu)\xi_0 + \frac{\varepsilon}{\mu}\ z_1(t,\varepsilon,mu). \tag{53}$$

Consider the next solution of this equations:

$$\xi_0(t,\varepsilon,\mu) = \frac{\varepsilon}{\mu}\ I[z_1(t,\varepsilon,\mu)], \tag{54}$$

where

$$I[z_1(t,\varepsilon,\mu)] = \int\limits_{\pm\infty}^{t} z_1(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\mu\int\limits_{\tau}^{t}\lambda(s,\varepsilon,\mu)ds\right)d\tau, \tag{55}$$

and sign at the lower limit of integration coincides with sign of $\lambda(t,\varepsilon,\mu)$. Using the unequality (49) and known estimates for integrals of the kind (55), we obtain, that $\xi_0(t,\varepsilon,\mu) \in S_{m_1-1}(\varepsilon^*)$, and $\exists\ K_2 \in (0,+\infty)$ such that

$$\|\xi_0\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*)} \le \frac{K_2\varepsilon^*}{\mu^2}\|z_1\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*)}. \tag{56}$$

The solution belongs to class $S_{m_1-1}(\varepsilon^*)$ of the equation (51), we seek by iterative method, identifying as an initial approximation $\xi_0(t,\varepsilon,\mu)$, and subsequent iterations

are defined by formulas:

$$\xi_{s+1}(t,\varepsilon,\mu) = I\left[\frac{\varepsilon}{\mu}\ z_1(t,\varepsilon,\mu) + \mu^2 \frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_0+\nu\mu\xi_s,\mu)}{\partial z}\ \xi_s^2 + \right.$$

$$\left. +\mu^2 \Xi(t,\varepsilon,\xi_s,\mu) + \frac{\varepsilon}{\mu}\ \widetilde{a}(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi_s,\mu)\right]. \tag{57}$$

We define the set:

$$\Omega = \left\{\ \xi \in S_{m_1-1}(\varepsilon^*):\ \|\xi-\xi_0\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*} \le h\ \right\}$$

and denote:

$$H_1(h,\mu) = \sup_{\xi\in\Omega}\left\|\frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_0+\nu\mu\xi,\mu)}{\partial z}\ \xi^2\right\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*)},$$

$$H_2(h,\mu) = \sup_{\xi\in\Omega}\|\Xi(t,\varepsilon,\xi,\mu)\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*)},\ H_3(h,\mu) = \sup_{\xi\in\Omega}\|\widetilde{a}(t,\varepsilon,z_0+\mu\xi,\mu)\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*)},$$

$$H(h,\mu) = \max(H_1(h,\mu), H_2(h,\mu), H_3(h,\mu)).$$

Since the funcrions $Y, \Xi_1, \widetilde{a}$ are analytic with respect $\xi \in \Omega$, $\exists\ L_0(h,\mu) \in (0,+\infty)$ such that $\forall\ \xi,\eta \in \Omega$:

$$\left\|\frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_0+\nu\mu\xi,\mu)}{\partial z}\ \xi^2 - \frac{\partial Y(t,\varepsilon,z_0+\nu\mu\eta,\mu)}{\partial z}\ \eta^2\right\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*)} \le$$

$$\le L_0(h,\mu)\|\xi-\eta\|_{S_{m_1-1}(\varepsilon^*)}.$$

Using a technique known contraction mapping principle [7], it is easy to show that if

$$K_2 H(h,\mu)\delta \le h_0 < h$$

(δ – the constant, which defined in condition (B)), all iterations (57) belongs to Ω. If

$$K_2 L_0(h,\mu)\delta < 1,$$

that process (57) is converge to solution $\xi = \xi^*(t,\varepsilon,\mu) \in S_{m_1-1}(\varepsilon_1^*)$ ($\varepsilon_1* \in (0,+\varepsilon^*)$) of the equation (51). At the same time this solution determines the integral manifold of system (51), (52). Given Lemmas 1 – 3, this proves the theorem.

Conclusion. Thus, for the system (1) the conditions of existence of the integral manifold, which represented for sufficiently small values ε, μ by as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients, are obtained.

1. **Bogolubov N. N., Mitropol'skii Yu. A., Samoilenko A. M.** The method of accelerated convergence in nonlinear mechanics [in Russian], Naukova dumka, Kiev (1969). – 247 p.
2. **Mitropol'skii Yu. A., Lykova O. B.** The method of Integral Manifolds in nonlinear mechanics [in Russian], Nauka, Moscow (1973). – 512 p.

3. **Samoilenko A. M., Petryshin R. I.** Mathematical Aspects of theory of nonlinear oscillations [in Ukrainian], Naukova dumka, Kiev (2004). – 474 p.

4. **Mitropol'skii Yu. A.** Nonlinear mechanics. Single-frecuency oscillations [in Russian], Inst. Math., Kiev (1997). – 388 p.

5. **Shchogolev S. A.** The some problems of the theory os oscillations for the differential systems, containing slowly vyrying parameters [in Ukrainian]. – Manuscript. – The thesis for obtaining the scientific degree of Doctor of physical and mathematical sciencies. Odessa (2012). – 290 p.

6. **Shchogolev S. A.** On a reduction of nonlinear second-order differential system to a some special kind // Odesa National University Herald. Math. and Mechan. – 2012. – V. 17. – Is. 4(16). – P. 97–103.

7. **Kantorovich L. V., Akilov G. P.** Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1984). – 752 p.

8. **Golubev V. V.** Lectures on the Analytic Theory of the Differential Equations [in Russian], Moscow, Leningrad (1950). – 436 p.

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 393.3

К. М. Архипенко, О. Ф. Кривий
Одеська національна морська академія

ТРІЩИНА ТА ВКЛЮЧЕННЯ ЗА УМОВ ПОВНОГО ЗЧЕПЛЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ АНІЗОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ

Архипенко К. М., Кривий О. Ф. Тріщина та включення за умов повного зчеплення в кусково-однорідній анізотропній площині. Розв'язана задача про тріщину та жорстке включення, які довільним чином розташовані у різних півплощинах кусково-однорідної анізотропної площини. Включення знаходиться в умовах повного зчеплення з середовищем. Задача зведена до системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь. Показано, що розв'язки системи мають кореневу особливість на кінцях проміжку. Останнє дало можливість застосувати до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь метод ортогональних многочленів і подати шукані функції у вигляді рядів за многочленами Чебишева. Отримані вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини і включення, а також кута повороту включення. Досліджені залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень і кута повороту включення від відстані до лінії з'єднання різних анізотропних півплощин та анізотропних властивостей матеріалів. Виявлено ряд важливих для застосування механічних закономірностей.
Ключові слова: кусково-однорідна анізотропна площина, тріщина, включення, система сингулярних інтегральних рівнянь, метод ортогональних многочленів, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Архипенко К. Н., Кривой А. Ф. Трещина и включение в условиях полного сцепления в кусочно-однородной анизотропной плоскости. Решена задача о трещине и включении, которые произвольно расположены в разных полуплоскостях кусочно-однородной анизотропной плоскости. Включение находится в условиях полного сцепления со средой. Задача сведена к системе четырех сингулярных интегральных уравнений. Показано, что решения системы имеют корневую особенность на концах промежутков. Последнее дало возможность применить к решению системы сингулярных интегральных уравнений метод ортогональных многочленов и представить искомые функции в виде рядов по многочленам Чебышева. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины и включения, а также угла поворота включения. Исследованы зависимости коэффициентов интенсивности напряжений и угла поворота включения от расстояния до линии соединения разных анизотропных полуплоскостей и анизотропных свойств материалов. Выявлен ряд важных для применения механических закономерностей.
Ключевые слова: кусочно-однородная анизотропная полуплоскость, трещина, включение, система сингулярных интегральных уравнений, метод ортогональных многочленов, коэффициент интенсивности напряжений.

Arkhypenko K. M., Kryvyi O. F. Crack and inclusion under full contact

© Архипенко К. М., Кривий О. Ф., 2013

in the non-uniform anisotropic plane. Had solved the problem about crack and rigid inclusion, which are arbitrary disposed in different half-planes of non-uniform anisotropic plane. The inclusion is under full contact with the medium. The problem had resumed to the system of four singular integral equations. Had proved that the solutions have the root singularity in the ends of interval. The last lets to apply to solve the system of singular integral equations method of orthogonal polynomials and express the unknown function as the Chebyshev polynomial series. Had received the formulas for the stress intensity factors in the tops of the crack and inclusion, and also the turning angle of the inclusion. Had examined the relations of the stress intensity factors and the inclusion turning angle from the distance to the interface of the different anisotropic half-planes and the anisotropic materials' properties. Had revealed a number of the mechanics properties important for application.
Key words: non-uniform anisotropic plane, crack, inclusion, system of singular integral equations, method of orthogonal polynomials, stress intensity factor.

Вступ. Задачі про дефекти типу тріщин і включень в анізотропних середовищах розглядалися багатьма авторами. При цьому дослідження здебільшого обмежувалися дефектами одного типу [1–7] або міжфазними дефектами у неоднорідній площині [8–13]. Недостатньо дослідженими виявились задачі про взаємодію різних дефектів у кусково-однорідних анізотропних середовищах. Мало досліджено вплив на концентрацію напружень в околі тріщини і включення лінії з'єднання анізотропних середовищ.

У цій роботі, використавши сингулярні інтегральні співвідношення, які отримані в роботі [14], розв'язана задача про тріщину і включення, на берегах якого реалізовано умови повного зчеплення, у кусково-однорідній анізотропній площині. Досліджено вплив розташування дефектів та анізотропних властивостей півплощин на поведінку коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщини і включення.

Основні результати.

1. Постановка задачі. Розглянемо кусково-однорідну площину, яка складається із двох різних анізотропних півплощин, з'єднаних вздовж лінії $x = 0$ (рис. 1). У правій півплощині розташоване абсолютно жорстке включення $L_I = \{y = t\sin\alpha_1, x = t\cos\alpha_1,\ t \in [a;b]\}$, на берегах якого реалізовані умови повного зчеплення, у лівій півплощині розташована тріщина $L_T = \{y = t\sin\alpha_2, x = t\cos\alpha_2,\ t \in [d;c]\}$. На нескінченості прикладені сили, які викликають на берегах тріщини розподіл напружень $\sigma_n|_{L_T^\pm} = \frac{1}{2}(p_1(t) \pm q_1(t))$, $\tau_{ns}|_{L_I^\pm} = \frac{1}{2}(p_2(t) \pm q_2(t))$, де σ_n, τ_{ns} — напруження у новій системі координат, яка пов'язана з тріщиною, а на включенні діє навантаження, яке зводиться до рівнодіючої сили $\mathbf{P}(P_1, P_2)$ і викликає момент P_0 відносно центра включення.

Введемо позначення для сум і стрибків напружень та переміщень на берегах дефектів у нових системах координат, пов'язаних з дефектами:

$$\{\sigma_n, \tau_{ns}, \partial_t u, \partial_t v\}|_{L_k^\pm} = \{\varphi_{kj}^\pm(t)\}_{j=\overline{1,4}},\ t \in L_k,\ k = 1, 2,$$
$$h_{kj}^\pm(t) = \varphi_{kj}^+(t) \pm \varphi_{kj}^-(t),\ t \in L_k,\ j = \overline{1,4}, k = 1, 2,$$

де $L_1 = [a;b]$, $L_2 = [d;c], \partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t}$.

Положення граней включення після деформації описується функціями $\varphi_{13}^\pm(t) = 0$, $\varphi_{14}^\pm(t) = g^\pm(t) + \delta t + \varepsilon$, $t \in [a;b]$, де відомі функції $g^\pm(t)$ задають форму граней

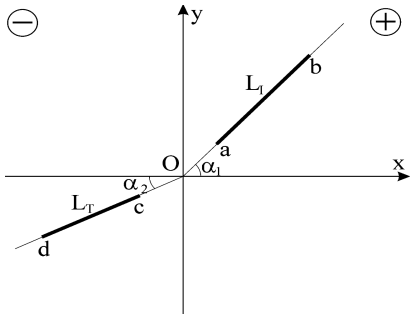


Рис. 1

включення, а δ — невідомий кут повороту включення. На включенні відомі суми та стрибки переміщень $h_{13}^{\pm}(t) = 0$, $h_{14}^{+}(t) = 2\delta + g_{+}(t)$, $h_{14}^{-}(t) = g_{-}(t)$, $t \in [a; b]$, $g_{\pm}(t) = \partial_t(g^{+}(t) \pm g^{-}(t))$ і невідомі стрибки напружень $h_{1j}^{-}(t)$, $j = 1, 2$. На тріщині відомі суми і стрибки напружень $h_{2j}^{\pm}(t)$, $j = 1, 2$, а невідомі стрибки переміщень $h_{2j}^{-}(t)$, $j = 3, 4$.

Використавши сингулярні інтегральні співвідношення [14], отримаємо систему СІР відносно невідомих стрибків:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=3,4} (B_{kj}^{-}\Gamma_2[\chi_j] + \mathrm{Im} \sum\limits_{m,n=1}^{2} A_{kjmn}^{-}[\chi_j, \chi_{j-2}]) = f_k(t), k = 1, 2, t \in L_2, \\ \sum\limits_{j=1,2} (B_{kj}^{+}\Gamma_1[\chi_j] + \mathrm{Im} \sum\limits_{m,n=1}^{2} A_{kjmn}^{+}[\chi_j, \chi_{j+2}]) = f_k(t), k = 3, 4, t \in L_1, \end{cases} \tag{1}$$

$$A_{kjmn}^{-}[f, g] = T_{kjmn}^{-}\Gamma_2^{-}[f] + R_{kj-2mn}^{-}\Gamma_1^{-}[g], \chi_j(t) = h_{1j}^{-}(t),\ j = 1, 2, t \in L_1,$$
$$A_{kjmn}^{+}[f, g] = T_{kjmn}^{+}\Gamma_1^{+}[f] + R_{kj+2mn}^{+}\Gamma_2^{+}[g], \chi_j(t) = h_{2j}^{-}(t),\ j = 3, 4,\ t \in L_2,$$
$$\Gamma_1[f] = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{f(\tau)d\tau}{t-\tau}, \Gamma_1^{+}[f] = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{f(\tau)d\tau}{e_{mn}^{++}t-\tau}, \Gamma_1^{-}[f] = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{f(\tau)d\tau}{e_{mn}^{-+}t-\tau},$$
$$\Gamma_2[f] = \frac{1}{\pi}\int\limits_d^c \frac{f(\tau)d\tau}{t-\tau}, \Gamma_2^{+}[f] = \frac{1}{\pi}\int\limits_d^c \frac{f(\tau)d\tau}{e_{mn}^{+-}t-\tau}, \Gamma_2^{-}[f] = \frac{1}{\pi}\int\limits_d^c \frac{f(\tau)d\tau}{e_{mn}^{--}t-\tau},$$
$$f_k(t) = p_k(t) - Q_k(t),\ k = 1, 2, f_k(t) = \delta_{4k}(2\delta + g_{+}(t)) - S_k(t),\ k = 3, 4,$$
$$Q_k(t) = \sum_{j=1,2} \{B_{kj}^{-}\Gamma_2[q_j] + \mathrm{Im} \sum_{m,n=1}^{2} T_{kjmn}^{-}\Gamma_2^{-}[q_j]\} + \mathrm{Im} \sum_{m,n=1}^{2} R_{k4mn}^{-}\Gamma_1^{-}[g_{-}],$$
$$S_k(t) = B_{k4}^{+}\Gamma_1[g_{-}] + \mathrm{Im} \sum_{m,n=1}^{2} T_{k4mn}^{+}\Gamma_1^{+}[g_{-}] + \mathrm{Im} \sum_{j=1,2} \sum_{m,n=1}^{2} R_{kjmn}^{+}\Gamma_2^{-}[q_j],$$

де $B_{kj}^{\pm}, T_{kjmn}^{\pm}, R_{kjmn}^{\pm}, e_{mn}^{\pm\pm}$ — коефіцієнти, які залежать від пружних сталих анізотропних півплощин, подані в роботі [14].

Постановку задачі завершують умови замкнення розрізу тріщини

$$\int\limits_d^c h_{2j}^{-}(t)dt = 0,\ j = 3, 4, \tag{2}$$

умови рівноваги та моментної рівноваги включення

$$\int_a^b h_{1j}^-(t)dt = P_j,\ j=1,2,\ \int_a^b h_{11}^-(t)tdt = P_0. \tag{3}$$

2. Розв'язання системи СІР. Відобразимо систему (1) на відрізок $[-1;1]$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=3,4}(B_{kj}^-\Gamma[h_j] + \mathrm{Im}\sum\limits_{m,n=1}^{2} A_{kjmn}^{--}[h_j,h_{j-2}]) = F_k(\xi), k=1,2, \\ \sum\limits_{j=1,2}(B_{kj}^+\Gamma[h_j] + \mathrm{Im}\sum\limits_{m,n=1}^{2} A_{kjmn}^{++}[h_j,h_{j+2}]) = F_k(\xi), k=3,4, \end{cases} \tag{4}$$

$$A_{kjmn}^{--}[f,g] = T_{kjmn}^-\Gamma^{--}[f] + R_{kj-2mn}^-\Gamma^{-+}[g],$$
$$A_{kjmn}^{++}[f,g] = T_{kjmn}^+\Gamma^{++}[f] + R_{kj+2mn}^+\Gamma^{+-}[g],$$

$$h_j(\xi) = \chi_j(\tfrac{b-a}{2}\xi + \tfrac{b+a}{2}),\ j=1,2,\ h_j(\xi) = \chi_j(\tfrac{d-c}{2}\xi + \tfrac{d+c}{2}),\ j=3,4,$$
$$F_k(\xi) = f_k(\tfrac{d-c}{2}\xi + \tfrac{d+c}{2}),\ k=1,2,\ F_k(\xi) = f_k(\tfrac{b-a}{2}\xi + \tfrac{b+a}{2}),\ k=3,4,$$
$$\Gamma[f] = \tfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tfrac{f(\eta)d\eta}{\xi-\eta},\ \Gamma^{--}[f] = \tfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tfrac{f(\eta)d\eta}{e_{mn}^{--}\xi-\eta+d_0^-(e_{mn}^{--}-1)},$$
$$\Gamma^{++}[f] = \tfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tfrac{f(\eta)d\eta}{e_{mn}^{++}\xi-\eta+d_0^+(e_{mn}^{++}-1)}, K^+ = (K^-)^{-1} = \tfrac{c-d}{b-a},$$
$$\Gamma^{-+}[f] = \tfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tfrac{f(\eta)d\eta}{K^-e_{mn}^{-+}\xi-\eta+d_1^-e_{mn}^{-+}-d_0^+},\ d_0^- = \tfrac{c+d}{c-d},\ d_0^+ = \tfrac{b+a}{b-a},$$
$$\Gamma^{+-}[f] = \tfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tfrac{f(\eta)d\eta}{K^+e_{mn}^{+-}\xi-\eta+d_1^+e_{mn}^{+-}-d_0^-},\ d_1^- = \tfrac{c+d}{b-a}, d_1^+ = \tfrac{b+a}{c-d}.$$

Оскільки кожен з дефектів розташований в однорідному матеріалі, то стрибки напружень та похідні переміщень мають кореневу особливість у вершинах дефектів. Останнє дозволяє розв'язки системи СІР (4) подати у вигляді рядів за многочленами Чебишева:

$$h_j(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p^j \frac{T_p(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, j=\overline{1,4}. \tag{5}$$

Враховуючи ортогональність многочленів Чебишева, з додаткових умов (2), (3) отримаємо:

$$u_0^j = 0,\ u_0^{j+2} = \frac{P_j}{\pi(c-d)},\ j=1,2. \tag{6}$$

Використавши спектральне співвідношення для многочленів Чебишева [15], методом ортогональних многочленів відносно коефіцієнтів розвинень (6) отримаємо систему нескінченних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=0}^{\infty}\sum\limits_{j=3}^{4}[\tfrac{\pi B_{kj}^-}{2}\delta_{p,l+1}u_p^j - D_{kjpl}^-] = -f_{kl}, k=1,2, l=\overline{0,\infty}, \\ \sum\limits_{p=0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{2}[\tfrac{\pi B_{kj}^+}{2}\delta_{p,l+1}u_p^j - D_{kjpl}^+] = -f_{kl}, k=3,4, l=\overline{0,\infty}, \end{cases} \tag{7}$$

$$D^{\pm}_{kjpl} = \mathrm{Im} \sum_{m,n=1}^{2} \{T^{\pm}_{kjmn} J^{\pm\pm}_{pl} u^{j}_{p} + R^{\pm}_{kj\pm 2mn} J^{\pm\pm}_{pl} u^{j-2}_{p}\},$$

$$J^{\pm\pm}_{pl} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{T_p(\eta) U_l(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\eta d\xi}{(e^{\pm\pm}_{mn}\xi - \eta + d^{\pm}_{0}(e^{\pm\pm}_{mn} - 1))\sqrt{1-\eta^2}},$$

$$J^{\pm\mp}_{pl} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{T_p(\eta) U_l(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\eta d\xi}{(K^{\pm} e^{\pm\mp}_{mn}\xi - \eta + d^{\pm}_{1} e^{\pm\mp}_{mn} - d^{\mp}_{0})\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Розв'язавши нескінченну систему (7) методом редукції, для якого обґрунтовано збіжність, отримаємо коефіцієнти $u^{j}_{p}, p = \overline{1,\infty}, j = \overline{1,4}$.

Визначивши коефіцієнти розвинення (5), отримаємо подання для КІН у вершинах тріщини та включення

$$K^{\pm 1}_{T} = \sum_{j=3}^{4} B^{-}_{1j} \sum_{p=1}^{\infty} (\pm 1)^{p} u^{j}_{p},\ K^{\pm 1}_{B} = \sum_{j=1}^{2} B^{+}_{1j} \sum_{p=0}^{\infty} (\pm 1)^{p} u^{j}_{p} \tag{8}$$

та з останньої умови (3) отримаємо вираз для кута δ повороту включення:

$$\delta = -\sum_{j=1}^{2} B^{+}_{3j} u^{j}_{1} + \frac{2}{\pi} \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m,n=1}^{\infty} [T^{+}_{3jmn} J^{++}_{p0} u^{j}_{p} + R^{+}_{3j+2mn} J^{+-}_{p0} u^{j+2}_{p}]. \tag{9}$$

3. Чисельні результати та їх аналіз. При чисельній реалізації розглядалася кусково-однорідна площина, яка складається з таких анізотропних матеріалів [16]: склопластик одноармований (матеріал $m1$), склопластик ортогонально-армований (матеріал $m2$), склопластик СТЕТ (матеріал $m3$), склопластик АСТТ (b)-С2-О і ПН-3 (матеріал $m4$). На берегах тріщини задавалося стале врівноважене навантаження ($p_1(t) = -1, p_2(t) = 0, q_j(t) = 0,\ j = 1, 2$). Включення вважалося абсолютно тонким ($g^{\pm}(t) = 0$) з навантаженням, яке зводиться до рівнодіючої сили $\mathbf{P}(-1; 0)$ та моменту $P_0 = 0$. На кожному з рисунків графіку 1 відповідає площина, яка складається з матеріалу $m2$ ($x > 0$) та матеріалу $m1$ ($x < 0$), графіку 2 — з матеріалу $m2$ ($x > 0$) та матеріалу $m3$ ($x < 0$), графіку 3 — з матеріалу $m2$ ($x > 0$) та матеріалу $m4$ ($x < 0$).

Для порівняння пружних властивостей анізотропних матеріалів введемо параметри $\kappa_j = E^{-}_{j} (E^{+}_{j})^{-1}$, $j = 1, 2$, де $E^{\pm}_{j}$ — модулі Юнга при розтягу-зсуві в напрямку осі Ox ($j = 1$) або Oy ($j = 2$) відповідно для матеріалів у правій і лівій півплощині. Коли $\kappa_j > 1$, вважається більш жорстким матеріал лівої півплощини у напрямку відповідної осі. Аналогічно можна порівнювати анізотропні матеріали у напрямку довільного вектору.

На рисунках 2–4 для дефектів, перпендикулярних до лінії з'єднання матеріалів, приведені залежності КІН у вершинах дефектів та кута повороту включення від параметру $d_1 = \frac{b-a}{b+a}$, коли $d_2 = 3$ та параметри κ_2 для використаних співвідношень матеріалів дорівнюють $0.52,\ 1.1,\ 0.49$ відповідно. Параметри $d_j,\ j = 1, 2$ характеризують відносне віддалення дефектів від лінії з'єднання матеріалів.

Встановлено, що коли включення наближається до лінії з'єднання матеріалів, то КІН у вершинах тріщини зростає, якщо вона розташована в менш жорсткому анізотропному матеріалі, та спадає, якщо тріщина розташована в більш жорсткому матеріалі. Для включення КІН зростає, якщо воно розташовано в більш жорсткому анізотропному матеріалі (лінії 1, 3), та спадає, якщо включення розташовано в менш жорсткому матеріалі (лінія 2). Причому для більш жорстких

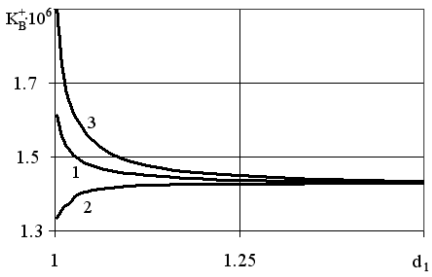


Рис. 2

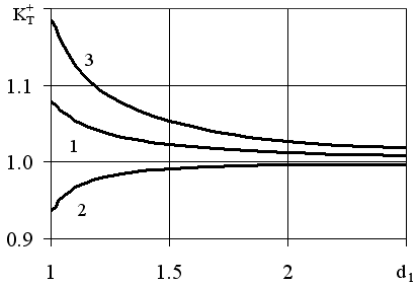


Рис. 3

матеріалів маємо більші значення КІН у вершинах включення і зростають вони швидше. Аналогічні висновки можна зробити відносно модуля кута повороту включення (рис. 4).

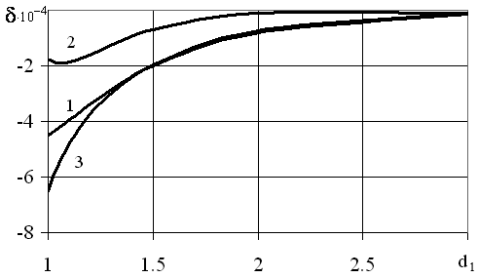


Рис. 4

На рисунках 5, 6 подані залежності КІН від кута α у вершинах відповідно включення і тріщини при $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ (включення і тріщина розташовані на одній прямі). Встановлено, що КІН у вершинах включення спадає при $\kappa_n < 1.5$ із збільшенням кута α. Також виявлено, що КІН у вершинах тріщини (рис. 6) спадає при $\kappa_n < 1$ (графік 3) і зростає при $\kappa_n > 1$ (графіки 1, 2) із збільшенням кута α.

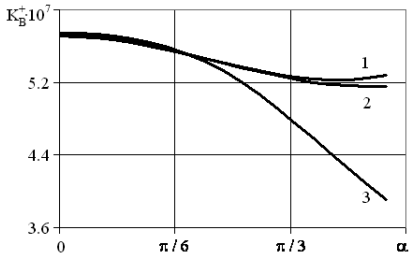


Рис. 5

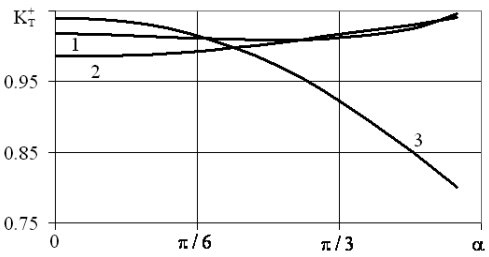


Рис. 6

Висновки. Таким чином, досліджено взаємодію тріщини і включення, на берегах якого реалізовано умови повного зчеплення, у кусково-однорідній анізо-

тропній площині. Отримані закономірності поведінки КІН в вершинах тріщини і включення. Аналогічно можна розв'язати задачі про тріщину і включення з іншими умовами контактної взаємодії із кусково-однорідною анізотропною площиною, або задачі про два включення за різних умов контактної взаємодії з середовищем.

1. **Архипенко К. Н.** Прямолинейная трещина в составной ортотропной плоскости / К. Н. Архипенко, А. Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 1999. – Т. 4. Вип. 4. – С. 177–182.
2. **Кривой А. Ф.** Абсолютно жесткое включение в неоднородной ортотропной плоскости / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2000. – Т. 5. Вип. 3. – С. 129–134.
3. **Кривой А. Ф.** Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов, М. В. Радиолло // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 622–632.
4. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные трещины в неоднородной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 29–35.
5. **Кривий О. Ф.** Довільно орієнтована тріщина, що виходить або перетинає лінію з'єднання двох різних анізотропних півплощин / О. Ф. Кривий, К. М. Архипенко // Машинознавство. – 2005. – № 2. – С. 13–16.
6. **Кривий О. Ф.** Тріщина, що виходить на лінію з'єднання двох різних анізотропних півплощин / О. Ф. Кривий, К. М. Архипенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48., № 3. – С. 110–116.
7. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле произвольно ориентированных трещин и включений в неоднородной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вип. 41. – С. 106–113.
8. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
9. **Sung J. C.** Some phenomena of crack perpendicular to an interface between dissimilar orthotropic materials / J. C. Sung, J. Y. Liou, Y. Y. Lin // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1996. – 63, №1. – P. 190–203
10. **Herrmann K. P.** On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 69. – P. 317–335.
11. **Li R.** A solution to the thermo-elastic interface crack branching in dissimilar anisotropic bi-material media / R. Li, G. A. Kardomateas // Int. J. Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43, № 5. – P. 913–942.
12. **Kozinov S. V.** Periodic set of interface cracks with contact zones in an anisotropic biomaterial subjected to a uniform tension-shear loading / S. V. Kozinov, V. V. Loboda, I. V. Kharun // Int. J. Solids Struct. – 2007. – Vol. 44. – P. 4646–4655.
13. **Kozinov S. V.** Uniformly moving screw dislocation interacting with interface cracks in anisotropic bimaterials / B. Li, Y. W. Liu, Q. H. Fang // Int. J. Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44, № 11–12. – P. 4206–4219.

14. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости / Кривой А. Ф. // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6, вип. 3, Фіз.-мат. науки. – С. 108–115.

15. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Попов Г. Я. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

16. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С. Г. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Mathematical Subject Classification: 70F35, 70F40, 70E55
УДК: 531.396

А. Г. Забуга[1], Е. Я. Антонюк[1], И. А. Бобух[2], Е. В. Соколов[2]
[1]Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины
[2]Донбасская государственная машиностроительная академия

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ СОУДАРЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ТЕЛ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ С ФРИКЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Забуга А. Г., Антонюк Є. Я., Бобух І. О., Соколов Є. В. До питання про динаміку співудару абсолютно твердих тіл у складних системах з фрикційною взаємодією. Для конкретної системи за допомогою гіпотези Рауса розроблено математичну модель динаміки співудару абсолютно твердих тіл різної форми. Враховано кулонове тертя в точці співудару та наявність пружності в суміжних ланках.
Ключові слова: рівняння динаміки, тертя ковзання, сили реакції, гіпотеза Рауса, абсолютно тверде тіло, удар, принцип Даламбера.

Забуга А. Г., Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В. К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием. На примере конкретной системы при помощи гипотезы Рауса разработана математическая модель динамики соударения абсолютно твердых тел различной формы. Учтено кулоново трение в точке соударения и наличие упругости в смежных звеньях.
Ключевые слова: уравнения динамики, трение скольжения, силы реакции, гипотеза Рауса, абсолютно твердое тело, удар, принцип Даламбера.

Zabuga A. G., Antonyuk E. Ya., Bobukh I. A., Sokolov E. V. About impact dynamics of perfectly rigid bodies in complex systems with friction interaction. For specified system mathematical model of impact dynamics of variform perfectly rigid bodies was developed using Routh hypothesis. Coulomb friction in impact point and elasticity in adjacent links was taken into account.
Key words: dynamics equations, sliding friction, reaction forces, Routh hypothesis, perfectly rigid body, impact, d'Alambert's principle.

Введение. Анализ динамики соударения абсолютно твердых тел имеет большое значение как в теоретической механике, так и в самых разнообразных областях производства [1, 2, 3]. Особый интерес представляют случаи, когда соударение происходит между частями некоторой сложной системы. Сложность системы может быть обусловлена высоким порядком и нелинейностью дифференциальных уравнений, наличием неидеальных связей, упругих звеньев и переменной структуры [4, 5]. В данной статье проводится анализ динамики системы, являющейся моделью рольганга прокатного стана Магнитогорского металлургического комбината [6, 7].

Основные результаты.

1. Постановка задачи.

Изучаемая модель схематически представлена на рис. 1 и 2.

© Забуга А. Г., Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В., 2013

В изучаемой системе абсолютно твердое тело 1, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, массу $m_1 = 20000$ кг и длину $a = 10$ м, совершает плоскопараллельное движение в плоскости xy. До соударения с абсолютно твердым телом 2 цилиндрической формы с массой $m_2 = 4631$ кг, радиусом $R = 0,2$ м и осью симметрии, перпендикулярной плоскости рисунка, тело 1 движется поступательно в положительном направлении оси абсцисс. Ось симметрии тела 2 до соударения неподвижна.

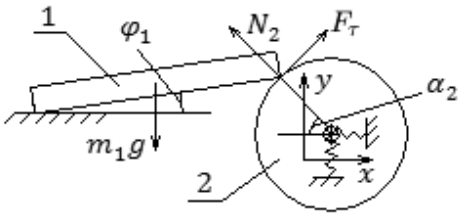


Рис. 1

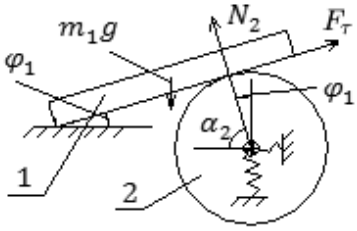


Рис. 2

Поступательное движение тела 2 ограничено по вертикали и горизонтали упругими звеньями. Коэффициент жесткости по горизонтали $k_x = 8,5 \cdot 10^7$ Н/м и соответствующий коэффициент диссипации $H_x = 85000$ Н $\cdot$ с/м. Предполагается, что по вертикали движение тела 2 ограничено амортизатором с коэффициентом жесткости $k_y = 8,5 \cdot 10^6$ Н/м и большим коэффициентом диссипации $H_y = 1,7 \cdot 10^5$ Н $\cdot$ с/м. Причем помимо амортизатора движению по вертикали препятствует еще и ограничитель с коэффициентом жесткости $k_{2y} = 8,5 \cdot 10^7$ Н/м. Суммарная сила, действующая на тело 2 со стороны амортизатора и ограничителя, была описана с помощью функции:

$$F_{upr} = k_y \cdot y_2 + H_y \cdot \dot{y}_2 + \frac{1}{2} k_{2y} \cdot y_2 \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\beta \cdot (y_2 + \Delta h)\right)\right), \qquad (1)$$

где принято $\beta = 1 \cdot 10^5$ м$^{-1}$. Максимальное проседание тела 2 по вертикали, допускаемое ограничителем, $\Delta h = 0,02$ м. Использование функций вида $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ обусловлено тем, что они эффективны в качестве инструмента сглаживания зависимостей, имеющих аналитические особенности [8].

Тело 2 приводится во вращательное движение вокруг своей оси симметрии с помощью асинхронного электродвигателя, ротор которого соединен с этим телом через упругий вал с крутильной жесткостью $c = 5,45 \cdot 10^5$ Н$\cdot$м и соответствующим коэффициентом диссипации $H = 50,886$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с. Для численного эксперимента были использованы следующие параметры электродвигателя: момент инерции ротора $I_3 = 13,4$ кг $\cdot$ м^2, максимальный вращающий момент $M_k = 5300$ Н $\cdot$ м, угловая скорость идеального холостого хода $\omega_0 = 18,378$ с$^{-1}$ и угловая скорость при нагрузке M_k, равная $\omega_k = 16,319$ с$^{-1}$.

Система координат xy расположена так, как показано на рис. 1. Начало отсчета выбрано в положении статического равновесия оси симметрии тела 2. Тело 1 опирается слева на недеформируемую горизонтальную направляющую, вдоль

которой скользит без трения. В работе проводится сравнение динамики системы при различных высотах этой направляющей относительно начала отсчета $h = 0,18$ м и $h = 0,133$ м. Тело 1 имеет две степени свободы: x_1 – горизонтальная составляющая радиус-вектора его центра масс в выбранной системе отсчета и φ_1 – угол между направляющей и нижней поверхностью тела 1. Тело 2 имеет три степени свободы: x_2 и y_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие радиус-вектора его центра масс в выбранной системе отсчета и φ_2 – угол поворота тела 2 вокруг своей оси. Ротор электродвигателя имеет одну вращательную степень свободы φ_3.

Удар принимается абсолютно неупругим. Это означает, что скорости тел 1 и 2 после удара будут равны в точке контакта по нормали к соударяющимся поверхностям. То есть удар приводит к образованию геометрической связи. Касательные же составляющие скоростей твердых тел 1 и 2 в точке контакта в общем случае будут после удара различны. Отметим также, что поскольку соударяющиеся тела предполагаются абсолютно твердыми, то удар между ними происходит мгновенно. Кроме того, в изучаемой системе учитывается наличие трения между телами 1 и 2. Коэффициент трения скольжения принят $\mu = 0,3$. Наличие трения между телами 1 и 2 приводит к тому, что при ударе меняются как нормальные, так и касательные составляющие скоростей в точке контакта [1, 2].

Как видно из сравнения рис. 1 и 2, в изучаемой системе возможны два различных типа геометрии контакта тел 1 и 2 в момент удара. Причем поскольку образующаяся в момент удара геометрическая связь является неудерживающей, то в системе могут последовательно произойти несколько ударов.

2. Уравнения динамики системы и описание удара.

В общем случае уравнения динамики изучаемой системы могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&I_1\ddot{\varphi}_1 = p_1 N_2 + p_\tau F_\tau - (a/2)\, m_1 g \cos\varphi_1,\\
&m_1\ddot{x}_1 = -N_2\cos\alpha_2 + F_\tau \sin\alpha_2,\\
&m_2\ddot{x}_2 = N_2\cos\alpha_2 - k_x x_2 - H_x\dot{x}_2 - F_\tau\sin\alpha_2,\\
&m_2\ddot{y}_2 = -N_2\sin\alpha_2 - F_{upr} - F_\tau\cos\alpha_2,\\
&I_2\ddot{\varphi}_2 = c\,(\varphi_3 - \varphi_2) + H\,(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) - RF_\tau,\\
&I_3\ddot{\varphi}_3 = M - c\,(\varphi_3 - \varphi_2) - H\,(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2)\,,\\
&N_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Следует отметить, что отсутствие слагаемого $-m_2 g$ в четвертом уравнении системы обусловлено выбором начала отсчета в положении статического равновесия.

В системе уравнений (2) N_2 – сила реакции, действующая со стороны тела 2 на тело 1. Наличие условия $N_2 \geq 0$ обусловлено тем, что геометрическая связь, которая может возникать между телами 1 и 2, односторонняя. F_τ – сила трения между телами 1 и 2. Силы N_2 и F_τ заранее не известны, они изменяются при движении частей изучаемой системы и при решении задачи подлежат определению. I_1 – момент инерции тела 1 относительно оси вращения. В изучаемой системе этой осью вращения будет линия контакта тела 1 с горизонтальной направляющей. Поскольку длина тела 1 предполагается намного большей, чем его толщина, то указанный момент инерции $I_1 = m_1 a^2/3$. p_1 и p_τ – плечи сил N_2 и F_τ соответственно относительно оси вращения тела 1. α_2 – угол между радиусом

тела 2, опущенным в точку контакта с телом 1, и осью абсцисс. Определяется α_2 так, как показано на рис. 1 и 2. $I_2 = m_2R^2/2$ – момент инерции тела 2 относительно его оси симметрии. M– вращающий момент, развиваемый электродвигателем. Он был введен с помощью формулы Клосса [9, 10], преобразованной к виду, удобному для расчета.

$$M = \frac{2M_k\left(\omega_0 - \omega_k\right)\left(\omega_0 - \dot{\varphi}_3\right)}{\left(\omega_0 - \dot{\varphi}_3\right)^2 + \left(\omega_0 - \omega_k\right)^2}. \tag{3}$$

Поскольку длина a тела 1 намного превосходит радиус R тела 2, то угол наклона φ_1 будет достаточно малой величиной. Это означает, что в выражениях, в которые входит φ_1, можно отбросить бесконечно малые второго и более высоких порядков, приняв

$$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1, \quad \cos\varphi_1 \approx 1, \quad tg\varphi_1 \approx \varphi_1. \tag{4}$$

Также предполагается, что на вращательное движение тела 1 наложено ограничение $\varphi_1 \geq 0$.

Явный вид правых частей системы (2) и её порядок зависит от взаимного расположения тел 1 и 2 и характера их движения. Это означает наличие переменной структуры. Следовательно, необходимо рассматривать различные этапы соударения и согласовывать их между собой.

Для описания удара применялась гипотеза Рауса [1, 2], которая дополняет гипотезу Ньютона в случае наличия трения между соударяющимися телами. Согласно гипотезе Рауса, между нормальной S и касательной S_τ составляющими ударного импульса имеется такое же соотношение, как и между нормальной и касательной составляющими реакции неидеальной связи. То есть

$$|S_\tau| \leq \mu\,|S| \tag{5}$$

для удара без скольжения или

$$S_\tau = \mu S \mathrm{sign}\,(v) \tag{6}$$

в случае для удара со скольжением. В формуле (6) v – касательная составляющая скорости движения одного из соударяющихся тел относительно другого в точке их контакта до удара в момент времени, бесконечно близкий к моменту времени, в который происходит удар. При непосредственном применении гипотезы Рауса сначала предполагается, что происходит удар без скольжения. Это дает возможность вычислить нормальную и касательную составляющие ударного импульса исходя из двух условий: заданного соотношения нормальных составляющих скоростей соударяющихся тел в точке их контакта до и после удара и условия отсутствия проскальзывания после удара. Если рассчитанные таким образом нормальная и касательная составляющие ударного импульса не удовлетворяют неравенству (5), то необходимо рассматривать удар со скольжением. При этом вычисление нормальной и касательной составляющих ударного импульса проводится исходя из условий: заданного соотношения нормальных составляющих скоростей соударяющихся тел в точке их контакта до и после удара и уравнения (6).

В изучаемой системе изменения скоростей соударяющихся тел в момент удара могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{gathered}
\dot{\varphi}_1' - \dot{\varphi}_1 = \frac{p_1 S}{I_1} + \frac{p_\tau S_\tau}{I_1}, \\
\dot{x}_1' - \dot{x}_1 = -\frac{S\cos\alpha_2}{m_1} + \frac{S_\tau \sin\alpha_2}{m_1}, \\
\dot{x}_2' - \dot{x}_2 = \frac{S\cos\alpha_2}{m_2} - \frac{S_\tau \sin\alpha_2}{m_2} \\
\dot{y}_2' - \dot{y}_2 = -\frac{S\sin\alpha_2}{m_2} - \frac{S_\tau \cos\alpha_2}{m_2}, \\
\dot{\varphi}_2' - \dot{\varphi}_2 = -\frac{RS_\tau}{I_2},
\end{gathered} \tag{7}$$

где в левых частях стоят разности скоростей после удара и скоростей до удара.

2.1. Тела 1 и 2 движутся независимо друг от друга (случай 1). Этот случай имеет место до соударения тел 1 и 2, а также после того, как произошел разрыв геометрической связи между ними.

Случай 1 является самым простым, поскольку первые два и остальные четыре уравнения системы (2) являются независимыми друг от друга. Кроме того, очевидно, что в случае 1

$$N_2 = 0, \quad F_\tau = 0. \tag{8}$$

Подставляя (1), (3), (4) и (8) в (2), получаем систему дифференциальных уравнений, в которой правые части записаны в явном виде.

2.2. Случай, изображенный на рис. 1. На этом этапе систему уравнений (2) необходимо рассматривать отдельно для случая проскальзывания между телами 1 и 2 (случай 2) и при наличии фрикционной связи между ними (случай 3).

Переход от случая 1 к случаю 2 или 3 с учетом (4) происходит при выполнении одновременно двух условий. Первое условие

$$\sqrt{\left[x_2 - x_1 + a/2 - (h - y_2)\varphi_1\right]^2 - (R - h + y_2)^2} > a \tag{9}$$

обеспечивает переход системы к ситуации, изображенной на рис. 1, а не рис. 2. Второе условие представляет собой уравнение геометрической связи, образующейся при указанном переходе, и может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_1 = \frac{y_2 - h + \sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}{a}. \tag{10}$$

Исходя из геометрии системы (рис. 1), уравнения геометрической связи (10) и учитывая (4), можем записать

$$\cos\alpha_2 = \frac{x_2 - x_1 - a/2}{R}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}{R}, \tag{11}$$

а также

$$p_1 = a\left(\varphi_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\right), \quad p_\tau = a\left(\cos\alpha_2 - \varphi_1 \sin\alpha_2\right). \tag{12}$$

Для составления уравнений динамики системы в случае 2 остается определить неизвестные реакции N_2 и F_τ. Это можно сделать с помощью уравнений динамики системы (2), уравнений связи и принципа Даламбера. Для вычисления реакций в случае 2 учтем также тот факт, что в случае движения с проскальзыванием F_τ представляет собой силу трения скольжения. Это означает, что в случае 2 имеем, согласно закону кулонова трения,

$$F_\tau = \mu N_2 \mathrm{sign}\left(\dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}\right), \tag{13}$$

где выражение, стоящее в скобках, представляет собой скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта. Эта скорость определяет направление действия силы трения F_τ. Подставляя уравнение геометрической связи (10) и уравнения (4) и (13) в первое уравнение системы (2), можем, воспользовавшись принципом Даламбера, найти неизвестную реакцию N_2. Имеем

$$N_2 = \left[p_1 + p_\tau \mu \mathrm{sign}\left(\dot{\varphi}_2 - \frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{I_1 (x_2 - x_1 - a/2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{a\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}} + \frac{I_1 \ddot{y}_2}{a} - \right. \tag{14}$$

$$\left. - \frac{I_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 R^2}{a\left[R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2\right]^{3/2}} + \frac{a m_1 g}{2}\right).$$

Подстановка (1), (3), (4), (10) – (14) во второе – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 2, записанные в явном виде. Эти уравнения были разрешены аналитически относительно вторых производных от координат при помощи программного пакета Maple и тем самым приведены к виду, пригодному для их численного решения с использованием метода Рунге—Кутта для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [11].

Уравнения (10) – (12) являются общими для случаев 2 и 3. Случай 3 отличается от случая 2 отсутствием проскальзывания между телами 1 и 2. Условие отсутствия проскальзывания приводит к наличию линейной кинематической связи, которая характеризуется уравнением

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}\,\dot{\varphi}_2 = 0. \tag{15}$$

Данное уравнение является полным дифференциалом, интегрирование которого позволяет свести кинематическую связь к геометрической, которая характеризуется уравнением

$$x_1 = x_2 + \frac{2R\sin(\varphi_2 + C_1) - a}{2}, \tag{16}$$

где C_1 – константа интегрирования, которая определяется из выражения

$$C_1 = \arcsin\left(\frac{a + 2\left(x_1\left(t_3\right) - x_2\left(t_3\right)\right)}{2R}\right) - \varphi_2\left(t_3\right), \tag{17}$$

а $x_1\left(t_3\right)$, $x_2\left(t_3\right)$ и $\varphi_2\left(t_3\right)$, в свою очередь — значения координат в момент времени t_3 образования кинематической связи (15).

Для определения неизвестных реакций N_2 и F_τ в случае 3 нужно воспользоваться уравнениями связи (10) и (16). При этом будем исключать координаты φ_1 и x_1. Для этого подставим сначала (16) в (10), откуда получим соотношение

$$\varphi_1 = \frac{y_2 - h + R\cos\left(\varphi_2 + C_1\right)}{a}, \tag{18}$$

которое представляет собой уравнение геометрической связи, где исключена переменная x_1. Подстановка (16) в (11) дает формулы

$$\cos\alpha_2 = -\sin\left(\varphi_2 + C_1\right), \quad \sin\alpha_2 = \cos\left(\varphi_2 + C_1\right). \tag{19}$$

И, наконец, подстановка (18) и (19) в (12) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} p_1 &= a\cos\left(\varphi_2 + C_1\right) - \left[y_2 - h + R\cos\left(\varphi_2 + C_1\right)\right]\sin\left(\varphi_2 + C_1\right), \\ p_\tau &= -a\sin\left(\varphi_2 + C_1\right) - \left[y_2 - h + R\cos\left(\varphi_2 + C_1\right)\right]\cos\left(\varphi_2 + C_1\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Соотношений (4), уравнений связи в виде (16) и (18), а также соотношений (19) и (20) достаточно, чтобы определить неизвестные реакции N_2 и F_τ в случае 3, исходя из первых двух уравнений системы (2). Согласно принципу Даламбера имеем

$$\begin{gathered} N_2 = \left[\frac{I_1}{a^2}\ddot{y}_2 - \left(\frac{I_1 R\sin\left(\varphi_2 + C_1\right)}{a^2} + \frac{R\cdot p_\tau m_1 m_2}{a\left(m_1 + m_2\right)}\right)\ddot{\varphi}_2 + \frac{m_1 g}{2}\right] \times \\ \times\cos\left(\varphi_2 + C_1\right) + \left(\frac{R\cdot p_\tau m_1 m_2\sin\left(\varphi_2 + C_1\right)}{a\left(m_1 + m_2\right)} - \frac{I_1 R\cos^2\left(\varphi_2 + C_1\right)}{a^2}\right)\dot{\varphi}_2^2 + \\ + \frac{p_\tau m_1\left(k_x x_2 + H_x\dot{x}_2\right)}{a\left(m_1 + m_2\right)}, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} F_\tau = \left[\left(\frac{I_1 R\cos\left(\varphi_2 + C_1\right)}{a^2} - \frac{R\cdot p_1 m_1 m_2}{a\left(m_1 + m_2\right)}\right)\dot{\varphi}_2^2 - \frac{I_1}{a^2}\ddot{y}_2 - \frac{m_1 g}{2}\right] \times \\ \times\sin\left(\varphi_2 + C_1\right) + \left(\frac{I_1 R\sin^2\left(\varphi_2 + C_1\right)}{a^2} + \frac{R\cdot p_1 m_1 m_2\cos\left(\varphi_2 + C_1\right)}{a\left(m_1 + m_2\right)}\right)\ddot{\varphi}_2 - \\ - \frac{p_1 m_1\left(k_x x_2 + H_x\dot{x}_2\right)}{a\left(m_1 + m_2\right)}. \end{gathered} \tag{22}$$

Подстановка (1), (3), (4), (16) – (22) в третье – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 3, записанные в явном виде. Полученные уравнения были решены аналитически относительно вторых производных от координат с помощью программного пакета Maple.

Кроме сказанного выше, отсутствие проскальзывания между телами 1 и 2 в случае 3 накладывает следующее условие на нормальную и касательную составляющие реакции:

$$|F_\tau| \le \mu N_2, \tag{23}$$

где составляющая реакции N_2 стоит вне знака модуля, поскольку на нее было наложено условие $N_2 \ge 0$. В момент времени, когда условие (23) перестает выполняться, происходит переход от случая 3 к случаю 2. Обратный переход происходит при одновременном выполнении двух условий: когда скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта обращается в нуль и когда справедливо неравенство (23).

Рассмотрим переходы от случая 1 к случаю 2 или 3. При указанных переходах происходит соударение тел 1 и 2. Причем удар без скольжения соответствует переходу к случаю 3, а удар со скольжением — к случаю 2. В случае удара без скольжения гипотеза Рауса в сочетании с кинематикой изучаемой системы, предположением о том, что удар абсолютно неупругий, и формулами (7) дает следующие значения составляющих ударных импульсов:

$$\begin{gathered} S_\tau = [\dot y_2 \sin\alpha_2 - \dot x_2 \cos\alpha_2 - \dot\varphi_1 a \sin\alpha_2 + \dot x_1 \cos\alpha_2 - \\ -A\left(\frac{p_1 a \sin\alpha_2}{I_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)\Bigg] \times \\ \times \left[\frac{p_\tau a \sin\alpha_2}{I_1} - \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{m_1} - B\left(\frac{p_1 a \sin\alpha_2}{I_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)\right]^{-1}, \\ S = A - BS_\tau, \end{gathered} \tag{24}$$

где были введены обозначения

$$\begin{gathered} A = (\dot x_2 \sin\alpha_2 + \dot y_2 \cos\alpha_2 + R\dot\varphi_2 - \dot x_1 \sin\alpha_2 - \dot\varphi_1 a \cos\alpha_2) \times \\ \times \left(\frac{p_1 a \cos\alpha_2}{I_1} - \frac{\cos\alpha_2 \sin\alpha_2}{m_1}\right)^{-1}, \\ B = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \frac{p_\tau a \cos\alpha_2}{I_1} + \frac{R^2}{I_2}\right) * \left(\frac{p_1 a \cos\alpha_2}{I_1} - \frac{\cos\alpha_2 \sin\alpha_2}{m_1}\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{25}$$

В выражениях (24) и (25) $\sin\alpha_2$ и $\cos\alpha_2$ определяются по формулам (19), а p_1 и p_τ – по формулам (20).

Если нормальная и касательная составляющие ударного импульса, вычисленные по формулам (24) и (25), не удовлетворяют неравенству (5), то происходит удар со скольжением. В этом случае гипотеза Рауса в сочетании с кинематикой изучаемой системы, предположением о том, что удар абсолютно неупругий, и формулами (6) и (7) дает следующие значения составляющих ударных импульсов:

$$\begin{gathered} S = (\dot x_1 \cos\alpha_2 - \dot\varphi_1 a \sin\alpha_2 + \dot y_2 \sin\alpha_2 - \dot x_2 \cos\alpha_2) \times \\ \times \left(\frac{[p_1 + p_\tau \mu \operatorname{sign}(v)]\, a \sin\alpha_2}{I_1} + \frac{\cos^2\alpha_2 - \mu \operatorname{sign}(v) \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}, \\ S_\tau = \mu S \operatorname{sign}(v), \end{gathered} \tag{26}$$

где

$$v = \dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - a/2)^2}}, \tag{27}$$

а $\sin\alpha_2$ и $\cos\alpha_2$ определяются по формулам (11) и p_1, p_τ – по формулам (12).

Формулы (24) – (27) в сочетании с соотношениями (7) и определенными так, как указано выше, $\sin\alpha_2$, $\cos\alpha_2$, p_1 и p_τ позволяют корректно описать изменение скоростей соударяющихся тел в момент удара.

Переход от случая 2 или 3 к случаю 1 происходит тогда, когда нормальная составляющая реакции N_2 обращается в нуль. Такой переход не сопровождается ударом, а следовательно, скачкообразного изменения скоростей не происходит.

2.3. Случай, изображенный на рис. 2. На этом этапе также следует отдельно рассматривать движение с проскальзыванием (случай 4) и движение без проскальзывания (случай 5).

Возможен переход от случая 1 к случаю 4 или 5. Первое условие такого перехода после учета (4) может быть записано в следующем виде:

$$\sqrt{[x_2 - x_1 + a/2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R - h + y_2)^2} \le a. \tag{28}$$

Выполнение условия (28) обеспечивает переход к ситуации, изображенной на рис. 2. Второе условие представляет собой уравнение геометрической связи, образующейся в момент указанного перехода, и может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{x_2 - x_1 + a/2}, \tag{29}$$

где в правой части второго неравенства были отброшены бесконечно малые второго и более высоких порядков.

Также в изучаемой системе возможны переходы от случая 2 к случаю 4 и от случая 3 к случаю 5. Из сравнения рис. 1 и 2 легко видеть, что оба указанных перехода происходят, когда начинает выполняться условие

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1. \tag{30}$$

Поскольку соотношение (30) будет верно на протяжении всего времени движения в случае 4 или 5, то, учитывая (4) и (29), имеем для указанных случаев

$$\sin\alpha_2 = \cos\varphi_1 \approx 1, \quad \cos\alpha_2 = \sin\varphi_1 \approx \varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{x_2 - x_1 + a/2}. \tag{31}$$

Исходя из геометрии системы имеем для случаев 4 и 5 следующие соотношения:

$$p_1 = \sqrt{[x_2 - x_1 + a/2 - (h - y_2)\,\varphi_1]^2 - (R + h - y_2)^2}, \quad p_\tau = 0, \tag{32}$$

где φ_1 определяется из уравнения геометрической связи (29).

Исключим из системы (2) неизвестные составляющие реакций N_2 и F_τ в случае 4. Согласно закону кулонова трения, эти составляющие связаны между собой соотношением, которое с учетом (4) имеет вид

$$F_\tau = \mu N_2 \mathrm{sign}\,(R\dot{\varphi}_2 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2)\,, \tag{33}$$

где выражение, стоящее в скобках, представляет собой скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта. Подставляя (4), (29) и (31) – (33) в первое уравнение системы, находим с помощью принципа Даламбера нормальную составляющую реакции

$$N_2 = \frac{I_1}{p_1\left(x_2 - x_1 + a/2\right)}\left(\ddot{y}_2 + \frac{\left(y_2 + R - h\right)\left(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2\right)}{\left(x_2 - x_1 + a/2\right)}\right) +$$

$$+\frac{I_1\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)}{p_1\left(x_2 - x_1 + a/2\right)^2}\left(2\frac{\left(y_2 + R - h\right)\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)}{\left(x_2 - x_1 + a/2\right)} - \dot{y}_2\right) + \frac{am_1 g}{2p_1}. \qquad (34)$$

Подстановка (1), (3), (4), (29), (31) – (34) во второе – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 4, записанные в явном виде. Полученные уравнения были решены аналитически относительно вторых производных от координат с помощью программного пакета Maple.

Случай 5 отличается от случая 4 отсутствием проскальзывания между телами 1 и 2. Условие отсутствия проскальзывания представляет собой линейную неголономную связь, уравнение которой имеет вид

$$R\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\cos\varphi_1}. \qquad (35)$$

Если учесть (4), то связь (35) сводится к кинематической и может быть проинтегрирована:

$$x_1 = x_2 + R\varphi_2 + C_2, \qquad (36)$$

где C_2 – константа интегрирования, которая определяется из выражения

$$C_2 = x_1\left(t_5\right) - x_2\left(t_5\right) - R\varphi_2\left(t_5\right), \qquad (37)$$

где $x_1\left(t_5\right)$, $x_2\left(t_5\right)$ и $\varphi_2\left(t_5\right)$ – значения координат в момент времени t_5 образования связи (35).

Для определения неизвестных реакций N_2 и F_τ в случае 5 подставим сначала (36) в (29) и (31). Имеем

$$\varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{a/2 - R\varphi_2 - C_2}, \qquad (38)$$

$$\sin\alpha_2 = \cos\varphi_1 \approx 1, \quad \cos\alpha_2 = \sin\varphi_1 \approx \varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{a/2 - R\varphi_2 - C_2}. \qquad (39)$$

Далее, подставляя (36) в (32), находим

$$p_1 = \sqrt{\left[a/2 - R\varphi_2 - C_2 - \left(h - y_2\right)\varphi_1\right]^2 - \left(R + h - y_2\right)^2}, \quad p_\tau = 0, \qquad (40)$$

где φ_1 определяется из уравнения (38).

Соотношений (4) и уравнений связи в виде (36) и (38), а также соотношений (39) и (40) достаточно, чтобы определить неизвестные реакции N_2 и F_τ в случае 5, исходя из первых двух уравнений системы (2). Согласно принципу Даламбера имеем

$$N_2 = \frac{I_1}{p_1\left(a/2 - R\varphi_2 - C_2\right)}\left(\ddot{y}_2 + \frac{\left(y_2 + R - h\right)R\ddot{\varphi}_2}{\left(a/2 - R\varphi_2 - C_2\right)}\right) +$$

$$+\frac{I_1 R\dot{\varphi}_2}{p_1\left(a/2-R\varphi_2-C_2\right)^2}\left(2\frac{\left(y_2+R-h\right)R\dot{\varphi}_2}{\left(a/2-R\varphi_2-C_2\right)}+\dot{y}_2\right)+\frac{am_1 g}{2p_1}, \tag{41}$$

$$F_\tau=\frac{I_1\left(y_2+R-h\right)}{p_1\left(a/2-R\varphi_2-C_2\right)^2}\left(\ddot{y}_2+\frac{\left(y_2+R-h\right)R\ddot{\varphi}_2}{\left(a/2-R\varphi_2-C_2\right)}\right)+\frac{m_1 m_2 R\ddot{\varphi}_2}{m_1+m_2}-$$

$$-\frac{m_1\left(k_x x_2+H_x\dot{x}_2\right)}{m_1+m_2}+\frac{\left(y_2+R-h\right)}{p_1\left(a/2-R\varphi_2-C_2\right)}\times \tag{42}$$

$$\times\left(\frac{2I_1\left(y_2+R-h\right)\left(R\dot{\varphi}_2\right)^2}{\left(a/2-R\varphi_2-C_2\right)^3}+\frac{I_1\dot{y}_2 R\dot{\varphi}_2}{\left(a/2-R\varphi_2-C_2\right)^2}+\frac{am_1 g}{2}\right).$$

Подстановка (1), (3), (4), (36) – (42) в третье – пятое уравнения системы (2) дает уравнения динамики системы для случая 5, записанные в явном виде. Полученные уравнения были решены аналитически относительно вторых производных от координат с помощью программного пакета Maple.

Кроме сказанного выше, отсутствие проскальзывания между телами 1 и 2 в случае 5 накладывает условие на нормальную и касательную составляющие реакции, которое, как и в случае 3, имеет вид (23), но с той лишь разницей, что теперь N_2 и F_τ определяются по формулам (41) и (42). В момент времени, когда условие (23) перестает выполняться, происходит переход от случая 5 к случаю 4. Обратный переход происходит при одновременном выполнении двух условий: когда скорость скольжения тела 1 относительно тела 2 в точке их контакта обращается в нуль и когда справедливо неравенство (23).

Переход от случая 1 к случаю 4 или 5 сопровождается соответственно ударом со скольжением или без скольжения. Выражения (24) – (26) остаются верны, но с той лишь разницей, что в случае удара без скольжения $\sin\alpha_2$ и $\cos\alpha_2$ определяются по формулам (39), а p_1 и p_τ – по формулам (40). В случае удара со скольжением $\sin\alpha_2$ и $\cos\alpha_2$ определяются по формулам (31), а p_1 и p_τ – по формулам (32). Кроме того,

$$v=R\dot{\varphi}_2-\dot{x}_1+\dot{x}_2. \tag{43}$$

Переход от случая 4 или 5 к случаю 1 происходит тогда, когда нормальная составляющая реакции N_2 обращается в нуль.

3. Анализ результатов численного решения дифференциальных уравнений.

Для численного решения уравнений динамики (2) была создана программа в среде разработки MatLab. Были выбраны следующие начальные условия:

$$\begin{array}{llll}\varphi_1(t_0)=0, & x_1(t_0)=-5,5\text{ м}, & x_2(t_0)=0, & y_2(t_0)=0,\\ \varphi_2(t_0)=0, & \varphi_3(t_0)=0, & \dot{\varphi}_1(t_0)=0, & \dot{x}_1(t_0)=3,5\text{ м/с},\\ \dot{x}_2(t_0)=0, & \dot{y}_2(t_0)=0, & \dot{\varphi}_2(t_0)=\omega_0, & \dot{\varphi}_3(t_0)=\omega_0,\end{array} \tag{44}$$

где $t_0=0$. Изучалась динамика системы на протяжении первой секунды от начала отсчета. Для получения достаточно точного результата расчет проводился с шагом $1\cdot 10^{-5}$ с.

В качестве первой характеристики для анализа динамики изучаемой системы были выбраны нормальная и касательная составляющие силы реакции. На рис. 3 и 4 N_2 показана сплошной линией, а F_τ – пунктиром.

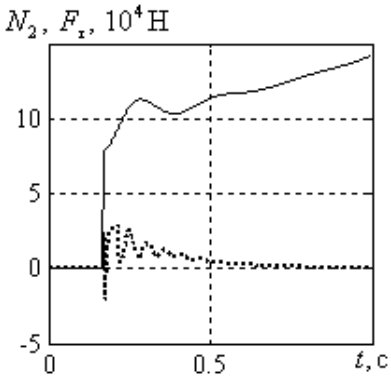


Рис. 3

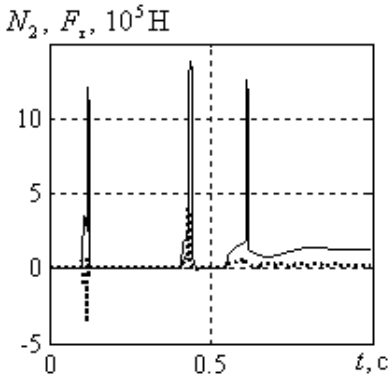


Рис. 4

Из сравнения графиков на рис. 3 ($h = 0,18$ м) и рис. 4 ($h = 0,133$ м) видно, что во втором случае максимальные значения нормальной и касательной составляющих ударного импульса будут выше примерно на порядок. Как будет показано ниже, скачки нормальной составляющей реакции в случае, изображенном на рис. 4, обусловлены тем, что тело 2 при движении вертикально вниз упирается в ограничитель.

Рассмотрим более внимательно случай движения при $h = 0,18$ м. Расчет показывает, что в этом случае последовательно происходят два удара. Сначала в момент времени $t = 0,118$ с происходит удар без скольжения. Составляющие ударного импульса при этом $S = 4,342 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м/с и $S_\tau = 489,219$ кг $\cdot$ м/с. Однако, как можно видеть из графика, изображенного на рис 3, геометрическая связь (18) не образуется, поскольку $N_2 = 0$. Отсутствие перехода к случаю 3 после указанного удара объясняется наличием кривизны соударяющихся поверхностей и скоростей поступательного движения соударяющихся тел, достаточных для разрыва геометрической связи между телами 1 и 2. Таким образом, после первого соударения на протяжении некоторого промежутка времени имеет место случай 1.

В момент времени $t = 0,17$ с происходит удар со скольжением. Составляющие ударного импульса при этом $S = 1,234 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м/с и $S_\tau = 370,282$ кг $\cdot$ м/с. Данный удар сопровождается переходом системы от случая 1 к случаю 4, что видно на графике, как резкий скачок нормальной составляющей реакции. В момент времени $t = 0,174$ с происходит переход от случая 4 к случаю 5, то есть образуется неголономная связь (35). Затем данная связь разрывается в момент времени $t = 0,189$ с и потом снова образуется при $t = 0,218$ с. После этого имеет место движение в случае 5. Указанное движение сопровождается постепенным падением до нуля касательной составляющей реакции. Это объясняется тем, что скорость поступательного движения тела 1 и скорость вращения тела 2, как будет показано ниже, постепенно достигают постоянных значений. Нормальная составляющая реакции монотонно возрастает вследствие того, что центр масс тела 1 при движении приближается к телу 2.

Рассмотрим случай движения при $h = 0{,}133$ м. В момент времени $t = 0{,}1003$ с происходит удар без скольжения. Составляющие ударного импульса $S = 8{,}214 \cdot$

10^3 кг $\cdot$ м/с и $S_\tau = 1{,}196 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м/с. Этот удар сопровождается переходом от случая 1 к случаю 3, но кинематическая связь (15) разрывается сразу же после удара. Эта связь образуется вновь в момент времени $t = 0{,}103$ с, а затем опять разрывается в момент времени $t = 0{,}11$ с. После этого связь (15) образуется ещё раз в момент времени $t = 0{,}118$ с. И, наконец, в момент времени $t = 0{,}126$ с происходит разрыв кинематической связи (15) и геометрической связи (18), то есть происходит переход от случая 3 к случаю 1. На графике, изображенном на рис. 4 это видно, исходя из того, что после указанного промежутка времени $N_2 = 0$.

Спустя некоторое время, при $t = 0{,}414$ с, происходит удар без скольжения. Составляющие ударного импульса $S = 5{,}281 \cdot 10^3$ кг$\cdot$м/с и $S_\tau = 1{,}118 \cdot 10^3$ кг$\cdot$м/с. Этот удар сопровождается переходом от случая 1 к случаю 5. После этого в момент времени $t = 0{,}418$ с происходит разрыв неголономной связи (35), то есть имеет место переход от случая 5 к случаю 4. В последующие моменты времени $t = 0{,}434$ с и $t = 0{,}447$ с происходит образование и разрыв связи (35). Наконец, в момент времени $t = 0{,}463$ с происходит разрыв геометрической связи (29), то есть имеет место переход от случая 4 к случаю 1. Данный переход можно объяснить тем, что вертикальная составляющая скорости движения тел 1 и 2 меняет знак под действием сил упругости со стороны ограничителя. Тот факт, что тело 1 перемещается выше, чем тело 2, обусловлен тем, что движение последнего по вертикали ограничено упругими звеньями (амортизатором).

При $t = 0{,}55$ с происходит удар со скольжением. Составляющие ударного импульса $S = 1{,}092 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м/с и $S_\tau = 327{,}581$ кг $\cdot$ м/с. Этот удар сопровождается переходом от случая 1 к случаю 4. После этого следует серия переходов от случая 4 к случаю 5 и наоборот. Указанные переходы (чередуются образование связи (35) и её разрыв) происходят в моменты времени $t = 0{,}.602$ с, $t = 0{,}615$ с, $t = 0{,}623$ с, $t = 0{,}656$ с, $t = 0{,}701$ с, $t = 0{,}709$ с и $t = 0{,}733$ с. После последнего из указанных переходов и, как минимум, до окончания первой секунды движения имеет место случай 5. В целом, после момента времени $t = 0{,}733$ с поведение нормальной и касательной составляющих реакции на рис. 4 качественно не отличается от такового на рис. 3. Разница заключается только в том, что согласно рис. 4 величина касательной составляющей реакции не успевает упасть до нуля. Это значит, что скорость поступательного движения тела 1 и скорость вращения тела 2 не успевают достичь постоянных значений за первую секунду движения.

Следующие характеристики, показанные на рис 5 и 6, которые были выбраны для анализа динамики изучаемой системы, это угловые скорости вращения тела 2 (сплошная линия) и ротора электродвигателя (пунктирная линия). На рис. 5 показаны угловые скорости в случае, когда $h = 0{,}18$ м, а на рис. 6 – $h = 0{,}133$ м. Изменения угловых скоростей обусловлены касательными составляющими ударного импульса и реакции. Направления нормальных составляющих проходят через ось вращения тела 2 и следовательно, создаваемые ими моменты равны нулю. Как можно видеть, наиболее сильные изменения скоростей наблюдаются тогда, когда происходят удары, а также в те интервалы времени, когда касательные составляющие реакции имеют наибольшие значения. Это хорошо согласуется с теорией, так как именно касательные составляющие реакции создают вращательный момент относительно оси симметрии тел цилиндрической формы. Отсутствие видимых разрывов на графиках угловой скорости $\dot{\varphi}_2$ в моменты вре-

мени перехода от случая 2 к случаю 3 и наоборот, а также от случая 4 к случаю 5 и наоборот, говорит о том, что уравнения динамики (2) для указанных случаев были правильно согласованы между собой в процессе численного решения.

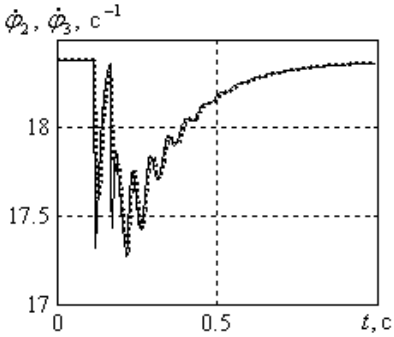


Рис. 5

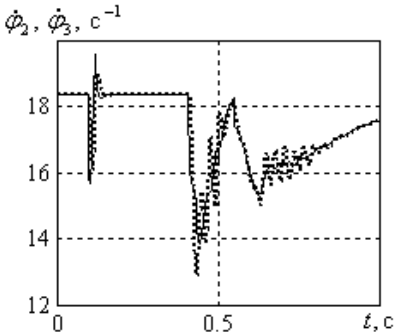


Рис. 6

Как можно видеть, наиболее сильные изменения скоростей наблюдаются тогда, когда происходят удары, а также в те интервалы времени, когда касательные составляющие реакции имеют наибольшие значения. Это хорошо согласуется с теорией, так как именно касательные составляющие реакции создают вращательный момент относительно оси симметрии тел цилиндрической формы. Отсутствие видимых разрывов на графиках угловой скорости $\dot{\varphi}_2$ в моменты времени перехода от случая 2 к случаю 3 и наоборот, а также от случая 4 к случаю 5 и наоборот, говорит о том, что уравнения динамики (2) для указанных случаев были правильно согласованы между собой в процессе численного решения.

Угловые скорости $\dot{\varphi}_2$ и $\dot{\varphi}_3$, изображенные на рис. 5, мало отличаются между собой на протяжении всего интервала времени, когда изучается движение. На рис. 6 ситуация несколько иная. После второго удара, который происходит при $t = 0{,}414$ с, наблюдаются явные различия в угловых скоростях на протяжении около 0,4 с. В указанный промежуток времени изменения $\dot{\varphi}_3$ имеют вид сложных колебаний.

Также можно видеть, что в случае, изображенном на рис. 5, угловые скорости на протяжении первой секунды движения успевают достичь постоянного значения, равного ω_0. В случае, изображенном на рис. 6, одной секунды оказывается недостаточно для достижения указанного значения угловых скоростей. О данной особенности также было сказано выше при рассмотрении составляющих реакции.

Наконец, как можно видеть из графиков, в случае, изображенном на рис. 6, угловая скорость $\dot{\varphi}_3$ имеет в определенный интервал времени значение, меньшее ω_k. Это означает, что $\dot{\varphi}_3$ выходит за пределы устойчивой работы электродвигателя. В случае, показанном на рис. 5, столь сильное падение $\dot{\varphi}_3$ не наблюдается.

Указанные особенности зависимостей угловых скоростей в случае $h = 0{,}133$ м могут приводить к быстрому изнашиванию деталей и сбоям в работе машин.

Следующая характеристика, которая анализировалась, это изменение горизонтальной составляющей скорости $\dot{x}_1$ тела 1. Она показана на рис. 7 и 8. Причем рис. 7 соответствует движению при $h = 0{,}18$ м, а рис. 8 – $h = 0{,}133$ м.

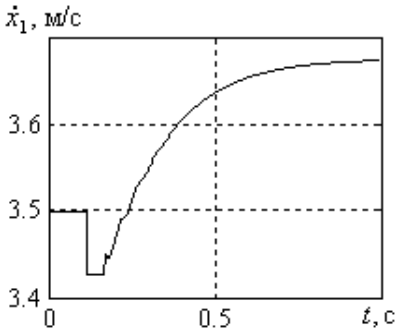


Рис. 7

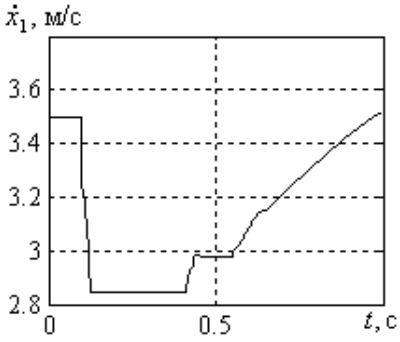


Рис. 8

Как видно из сравнения графиков на рис 7 и рис. 8, при $h = 0i{,}18$ м $\dot{x}_1$ уменьшается после первого удара примерно до 3,43 м/с, а при $h = 0{,}133$ м – примерно до 2,85 м/с. Более сильное изменение $\dot{x}_1$ во втором случае обусловлено большими по сравнению с первым случаем значениями составляющих ударного импульса и реакций и меньшим углом α_2.

Кривая на рис. 7 имеет два горизонтальных участка, которые соответствуют движению в случае 1, когда на тело 1 в горизонтальном направлении не действуют никакие силы. По окончании каждого из горизонтальных участков вследствие удара происходит скачкообразное изменение скорости. Причем в результате второго удара скорость возрастает. Этот факт объясняется тем, что при втором ударе нормальная составляющая ударного импульса направлена практически по вертикали. Следовательно, основной вклад в изменение $\dot{x}_1$ при втором ударе вносит касательная составляющая ударного импульса. После второго удара $\dot{x}_1$ возрастает, приближаясь к некоторому постоянному значению, что согласуется со сказанным при анализе предыдущих графиков.

Кривая, изображенная на рис. 8, имеет три горизонтальных участка, соответствующих движению в случае 1. Это согласуется со сказанным выше о том, что в системе при движении происходит три удара. Также можно видеть, что за время движения $\dot{x}_1$ не успевает достигнуть постоянного значения, что также согласуется со сказанным выше.

Еще следует отметить, что на графиках, изображенных на рис. 4, не имеется явных разрывов в те моменты времени, когда происходят переходы от движения с проскальзыванием к движению без проскальзывания и наоборот. Это указывает на то, что уравнения динамики (2) для различных случаев движения были правильно согласованы между собой в процессе численного решения.

На рис. 9 и 10 показана зависимость координаты y_2 оси симметрии тела 2 от времени. Рис. 9 соответствует движению при $h = 0{,}18$ м, а рис. 10 – $h = 0{,}133$ м.

В целом, оба графика, изображенных на рис. 9 и 10 хорошо согласуются с тем, что было сказано выше. Основная отличительная особенность графика на рис. 10 заключается в том, что координата y_2 трижды достигает значений меньших $\Delta h = 0{,}02$ м. При этом тело 2 в указанные моменты времени упирается в ограничитель, что сопровождается скачкообразным увеличением жесткости согласно (1). Из сравнения графиков на рис. 10 с графиками на рис. 4 видно, что указанное увеличение жесткости приводит к соответствующему увеличению

нормальной составляющей реакции. Три выраженных максимума на рис. 4 наблюдаются в те же самые моменты времени, что и три выраженных минимума ни рис. 10.

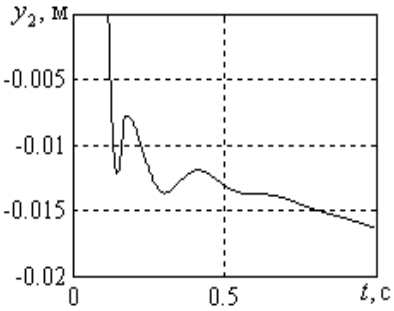


Рис. 9

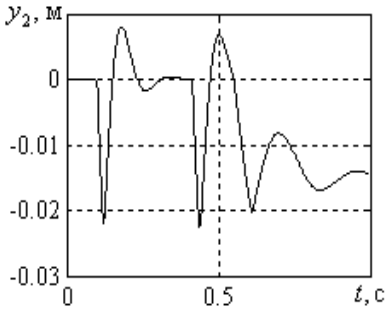


Рис. 10

Заключение. Анализ результатов численного решения уравнений динамики (2) показывает, что в изучаемой системе многократно происходит образование и разрыв геометрических и кинематических связей. Это позволяет сделать вывод о том, что динамика данной и подобной систем не может изучаться в рамках одноструктурных динамических моделей. Единственный способ исследования динамики таких систем: построение и согласование между собой в процессе численного решения систем дифференциальных уравнений, соответствующих различным структурам.

Отсутствие на полученных графиках, характеризующих изменение координат, разрывов в моменты времени, когда происходит образование или разрыв какой-либо из геометрических или кинематических связей, свидетельствует о том, что уравнения динамики (2) для различных случаев движения были правильно согласованы между собой в процессе численного решения. Аналогичный вывод следует из того, что при ударах скачкообразно изменяются скорости, но не изменяются координаты, что согласуется с теорией соударений абсолютно твердых тел.

Исходя из сравнения результатов анализа динамики изучаемой системы, полученных при $h = 0{,}18$ м и $h = 0{,}133$ м, можно видеть, что во втором случае динамическая нагруженность системы будет значительно выше. Кроме того, во втором случае системе требуется в несколько раз больше времени на прохождение переходного процесса. Это следует учитывать при проектировании реальных машин, поскольку указанные особенности динамики изучаемой системы при $h = 0{,}133$ м могут приводить к сбоям в работе двигателей и быстрому выходу из строя деталей оборудования.

1. **Пановко Я. Г.** Введение в теорию механического удара [Текст] / Пановко Я. Г. – М. : Наука, 1977. – 224 с.

2. **Раус Э. Дж.** Динамика системы твердых тел [Текст] : В 2 т. Т. 1. / Э. Дж. Раус ; перевод с англ. Ю. А. Архангельского [и др.] ; под ред. Ю. А. Архангельского и В. Г. Дёмина. – М. : Наука, 1983. – 464 с.

3. **Кильчевский Н. А.** Теория соударений твердых тел [Текст] : монография / Н. А. Кильчевский. – К. : Наукова думка, 1969. – 247 с.

4. **Кожевников С. Н.** Динамика машин с упругими звеньями [Текст] / С. Н. Кожевников. – К. : Издательство Академии наук Украинской ССР, 1961. – 160 с.

5. **Мартынюк А. А.** Устойчивость движения сложных систем [Текст] : монография / А. А. Мартынюк. – К. : Наукова думка, 1975. – 352 с.

6. **Диагностика** и динамика прокатных станов [Текст] : монография / В. В. Веренев, В. И. Большаков, А. Ю. Путноки, А. А. Коринь, С. В. Мацко. – Днепропетровск: ИМА-пресс, 2007. – 144 с.

7. **Машины** и агрегаты металлургических заводов [Текст] : В 3 т. Т. 3. / А. И. Целиков, П. И. Полухин, В. М. Гребеник [и др.]. – М.: Металлургия, 1981. – 576 с.

8. **Антонюк Е. Я.** О динамической нагруженности машин с параллельными статически неопределимыми кинематическими цепями [Текст] / Е. Я. Антонюк, А. Г. Забуга // Обработка материалов давлением. – 2012. – №3 (30). – С. 235–241.

9. **Справочник** по автоматизированному электроприводу [Текст] / под ред. В. А. Елисеева, А. В. Шинянского. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 616 с.

10. **Москаленко В. В.** Электрический привод [Текст] : учебник для студ. высш. учеб. заведений / В. В. Москаленко. – М. : Издательский центр «Академия», 2007. – 368 с.

11. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн и Т. Корн ; пер. с англ. И. Г. Арамановича [и др.] ; под общ. ред. И. Г. Арамановича. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

Mathematical Subject Classification: 74G05
УДК 539.3

А. А. Фесенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЗАДАЧА СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ

Фесенко Г. О. Задача стаціонарної теплопровідності для напівскінченного шару. Отримано точний розв'язок задачі стаціонарної теплопровідності для напівскінченного шару. На нижній і боковій грані шар теплоізольовано, а на іншій грані шару задана температура, розподілена на відомій ділянці. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до одномірної крайової задачі, розв'язок якої побудовано у явному вигляді. При оберненні трансформант розв'язку виникають кратні інтеграли від циліндричних функцій. Надано методику обчислень даних інтегралів, яка базується на використанні формули Соніна. Проведено числовий аналіз значення температури шару в залежності від різних розмірів ділянки розподілу заданої температури.
Ключові слова: шар, теплопровідність, інтегральні перетворення, циліндрична функція.

Фесенко А. А. Задача стационарной теплопроводности для полубесконечного слоя. Получено точное решение задачи стационарной теплопроводности для полубесконечного слоя. По нижней и боковой граням слой теплоизолирован, а на верхней грани задана температура, распределенная по известной площадке. С помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к одномерной краевой задаче, решение которой строится в явном виде. При обращении трансформанты решения возникают кратные интегралы от осциллирующей функции. Предложена специальная методика их вычисления, основанная на применении формулы Сонина. Проведен численный анализ распределения температуры в слое при различных параметрах площадки распределения начальной температуры.
Ключевые слова: слой, теплопроводность, интегральные преобразования, цилиндрическая функция.

Fesenco A. A. The problem of the stationary heat-conduction for the semi-infinite layer. The exact solution of the stationary heat-conduction problem for the semi-infinite layer was constructed. The lower and lateral faces of the layer are heat-insulated. The temperature is given at the upper face of the layer and is distributed through the known area. The initial problem is reduced to the one-dimensional boundary problem with the help of the integral Fourier transformation. The solution of this problem is constructed in the explicit form. The multiply integrals with the oscillation function are obtained after inversing of the integral transformation. For their calculation the special method based on the Sonin's formula using is proposed. The numerical analysis was done for the investigation of the temperature distribution in the layer depending on the area parameters of the initial temperature.
Key words: layer, thermal conductivity, the integral transformations, the cylindrical function.

© Фесенко А. А., 2013

Введение. Изучение температурного распределения в слое является важным как с точки зрения приложений в различных областях инженерии, так и дальнейшего применения полученных решений при постановке задач несвязной термоупругости [1]. Задачи теплопроводности для полубесконечного слоя исследовались многими авторами как в статической , так и в динамической постановках [2, 3, 7–12]. Зачастую численный расчет по полученным формальным решениям является проблематичным в связи с наличием входящих в формулы интегралов, осциллирующих функций. В предложенной работе предлагается методика вычисления кратных интегралов от цилиндрических функций, входящих в точное решение задачи, которое построено методом интегральных преобразований [4]

Основные результаты.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим упругий полубесконечный слой, описываемый в декартовой системе координат соотношениями

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h. \tag{1}$$

Грани $x = 0$ и $z = 0$ предполагаются теплоизолированными:

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x}|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

здесь T – температура слоя. На грани $z = h$ по участку $x \in [0, A]$, $y \in [-B, B]$ задана температура

$$T(x,y,h) = f(x,y), \qquad x \in [0, A], \quad y \in [-B, B]. \tag{3}$$

Требуется построить в области (1) убывающее на бесконечности решение уравнения Лапласа

$$\triangle T(x,y,z) = 0, \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4}$$

удовлетворяющее краевым условиям (2), (3).

2. Построение решения исходной задачи методом интегральных преобразований.

Введем обозначения:

$$T''(x,y,z) = \frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial x^2}, \; T^{\cdot\cdot}(x,y,z) = \frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial y^2}, \; T^{\cdot\cdot}(x,y,z) = \frac{\partial^2 T(x,y,z)}{\partial z^2}.$$

Применим к (2)–(4) косинус преобразование Фурье по переменной x [4]

$$T_\alpha(y,z) = \int_0^\infty T(x,y,z)\cos\alpha x dx, \quad T(x,y,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty T_\alpha(y,z)\cos\alpha x d\alpha. \tag{5}$$

Задача (2)–(4) в трансформантах примет вид

$$-\alpha^2 T_\alpha(y,z) + T_\alpha^{\cdot\cdot}(y,z) + T_\alpha^{\cdot\cdot}(y,z) = 0, \quad T_\alpha^{\cdot}(y,0) = 0, \; T_\alpha(y,h) = f_\alpha(y), \tag{6}$$

где

$$f_\alpha(y) = \int_0^\infty f(x,y)\cos\alpha x dx. \tag{7}$$

Преобразование Фурье по переменной y применим к задаче (6) ([4]).

$$T_{\alpha\beta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} T_\alpha(y,z)e^{i\beta y}dy, \quad T_\alpha(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_{\alpha\beta}(z)e^{-i\beta y}d\beta. \tag{8}$$

Окончательно в пространстве трансформант обоих интегральных преобразований исходная задача запишется в форме

$$T''_{\alpha\beta}(z) - N^2 T_{\alpha\beta}(z) = 0, \qquad z \in (0,h), \tag{9}$$

$$T'_{\alpha\beta}(0) = 0, \qquad T_{\alpha\beta}(h) = f_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

где

$$f_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(y)e^{i\beta y}dy, \qquad N^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Общее решение уравнения (9) строится в форме

$$T_{\alpha\beta}(z) = C_1 \sinh Nz + C_2 \cosh Nz.$$

Удовлетворив граничные условия (10), найдем постоянные

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{f_{\alpha\beta}}{\cosh Nh}.$$

Решение задачи (9)–(10) в трансформантах преобразований (5), (8) имеет вид

$$T_{\alpha\beta}(z) = f_{\alpha\beta}\cdot\frac{\cosh Nz}{\cosh Nh}. \tag{11}$$

Применяя последовательно обратные преобразования (5), (8) к формуле (11), построим точное решение исходной задачи

$$T(x,y,z) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha\beta}\cdot\frac{\cosh Nz}{\cosh Nh}\cdot\cos\alpha x\cdot e^{-i\beta y}d\alpha d\beta. \tag{12}$$

Учитывая представление (10), перепишем решение в виде

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \tfrac{1}{\pi^2}\textstyle\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\cos\alpha\xi\cdot e^{i\beta\eta}d\xi d\eta\right]\cdot \\ &\cdot\tfrac{\cosh Nz}{\cosh Nh}\cdot\cos\alpha x\cdot e^{-i\beta y}d\alpha d\beta. \end{aligned} \tag{13}$$

В формуле (13) изменим порядок интегрирования.

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \tfrac{1}{\pi^2}\textstyle\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\cdot \\ &\cdot\left[\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\cosh Nz}{\cosh Nh}\cdot\cos\alpha\xi\cdot\cos\alpha x\cdot e^{i\beta\eta}\cdot e^{-i\beta y}d\alpha d\beta\right]d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Применение формулы (1.314(3), [6]) позволяет записать построенное решение

$$T(x,y,z) = \tfrac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)\left[\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \tfrac{\cosh Nz}{\cosh Nh}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot[\cos\alpha(x-\xi)+\cos\alpha(x+\xi)]\cdot e^{-i\beta(y-\eta)}d\alpha d\beta\right]d\xi d\eta. \tag{14}$$

Рассмотрим внутренние интегралы и воспользуемся четностью подынтегральной функции по переменной α. Используя тот факт, что интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, вычтем в формуле (14) под знаком интеграла слагаемые.

$$T(x,y,z) = \tfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \tfrac{\cosh Nz}{\cosh Nh}\cdot[\cos\alpha(x-\xi)+\cos\alpha(x+\xi)-$$
$$-i\sin\alpha(x-\xi)-i\sin\alpha(x+\xi)]\cdot e^{-i\beta(y-\eta)}d\alpha d\beta.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим выражение для температуры

$$T(x,y,z) = \tfrac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)\left[\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \tfrac{\cosh Nz}{\cosh Nh}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[e^{-i\alpha(x+\xi)}+e^{-i\alpha(x-\xi)}\right]\cdot e^{-i\beta(y-\eta)}d\alpha d\beta\right]d\xi d\eta. \tag{15}$$

Воспользуемся формулой [5], учитывая, что $N^2=\alpha^2+\beta^2$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty F(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})e^{-i\alpha x-i\beta y}d\alpha d\beta = \int_0^\infty tF(t)J_0(t\sqrt{x^2+y^2})dt, \tag{16}$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя.

Обозначим

$$\mathbb{J}_0(t,x,y,\xi,\eta) = J_0(t\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})+J_0(t\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}).$$

С учетом формулы (16) выражение для температуры (15) запишется в виде

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)\left[\int_0^\infty t\frac{\cosh tz}{\cosh th}\cdot\mathbb{J}_0(t,x,y,\xi,\eta)dt\right]d\xi d\eta. \tag{17}$$

В результате, исходя из постановки задачи, для случая, когда в граничном условии (3) зададим $f(x,y)=C$, C – const, получим точное решение исходной задачи

$$T(x,y,z) = \frac{C}{2\pi}\int_0^A\int_{-B}^B\left[\int_0^\infty t\frac{\cosh tz}{\cosh th}\cdot\mathbb{J}_0(t,x,y,\xi,\eta)dt\right]d\xi d\eta. \tag{18}$$

3. Методика вычисления кратных интегралов в полученном решении.

Поменяем порядок интегрирования в интеграле (18)

$$T(x,y,z) = \frac{C}{2\pi}\int_0^\infty t\frac{\cosh tz}{\cosh th}\cdot\left[\int_0^A\int_{-B}^B\mathbb{J}_0(t,x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta\right]dt \tag{19}$$

и рассмотрим внутренние интегралы. Используя формулу Н. Я. Сонина [4], можно записать

$$J_0(t\sqrt{(x\pm\xi)^2+(y-\eta)^2}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos[t\cos\psi(x\pm\xi)]\cos[t\sin\psi(y-\eta)]d\psi.$$

Подставим данное выражение в формулу (19), вычислим входящие повторные интегралы и проделаем некоторые элементарные преобразования.

$$T(x,y,z) = C\frac{4AB}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} t\frac{\cosh tz}{\cosh th}S_t^{A,B}(\psi)\cos(tx\cos\psi)\cos(ty\sin\psi)d\psi dt. \quad (20)$$

Здесь принято обозначение

$$S_t^{A,B}(\psi) = (tA\cos\psi)^{-1}\sin(tA\cos\psi)(tB\sin\psi)^{-1}\sin(tB\sin\psi).$$

Рассмотрим интеграл

$$J_t^{A,B}(x,y) = \frac{4AB}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} S_t^{A,B}(\psi)\cos(tx\cos\psi)\cos(ty\sin\psi)d\psi, \quad (21)$$

$S_t^{A,B}(\psi)$ – бесконечно дифференцируемая по переменной ψ функция. Кроме того она является четной, что позволяет путь интегрирования в интеграле принять равным $(-\pi/2,\pi/2)$, уменьшив его значение в 2 раза. Выбрав замену переменной

$$\sin\psi = \tau, \quad (22)$$

получим вместо соотношения (21)

$$J_t^{A,B}(x,y) = \frac{2AB}{\pi^2}\int_{-1}^{1} F_{t,\tau}^{A,B}(x,y)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

где

$$F_{t,\tau}^{A,B}(x,y) = \frac{\sin(tA\sqrt{1-\tau^2})}{tA\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\sin(tB\tau)}{tB\tau}\cos(tx\sqrt{1-\tau^2})\cos(ty\tau).$$

Полагая в интеграле $x=0$, $y=0$, получим

$$J_t^{A,B}(0,0) = \frac{2AB}{\pi^2}\int_{-1}^{1} F_{t,\tau}^{A,B}(0,0)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{2AB}{\pi}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F_{t,\tau_k^{(N)}}^{A,B}(0,0), \quad (23)$$

$$\tau_k^{(N)} = \cos\frac{2k-1}{2N}\pi, \qquad k=\overline{1,N}, \quad (24)$$

$\tau_k^{(N)}$ – нули многочлена Чебышева 1-го рода.

Второе равенство в соотношении (23) записано на основании квадратурной формулы наивысшей степени точности [5]. Подставив полученное равенство (23) в выражение для температуры (20), получим

$$\begin{aligned} T(0,0,h) &= \tfrac{2C}{\pi N}\textstyle\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty} tF_{t,\tau}^{A,B}(0,0)dt = \\ &= \tfrac{2C}{\pi N}\textstyle\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty}\frac{\sin(tA\sqrt{1-\tau_k^2})\sin(tB\tau_k)}{tA\sqrt{1-\tau_k^2}B\tau_k}dt, \end{aligned} \quad (25)$$

или в общем случае

$$T(x,y,z) = \frac{2C}{\pi N}\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty \frac{\cosh tz}{\cosh th}\frac{\sin(tA\sqrt{1-\tau_k^2})\sin(tB\tau_k)}{tA\sqrt{1-\tau_k^2}B\tau_k}\cdot$$
$$\cdot\cos(tx\sqrt{1-\tau_k^2})\sin(ty\tau_k)dt. \tag{26}$$

Воспользуемся формулой (3.741(1), [6]):

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx \sin nx}{x}dx = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{m+n}{m-n}\right]^2, \quad m>0,\, n>0,\, m\neq n. \tag{27}$$

Заметим, что при $m=0$, $n\neq 0$ или $n=0$, $m\neq 0$ формула не противоречива, также возможно $n<0$ $(m<0)$.

Для вычисления по формуле (27) существенным условием является требование $m\neq n$, т. е. $A\sqrt{1-\tau_k^2}\neq B\tau_k$. Если $B/A=1$, то для определенности необходимо выполнение условия $\sqrt{1-\tau^2}-\tau\neq 0$, или исходя из произведенной замены (22), $\cos\psi\neq\sin\psi$, т. е. $\psi\neq\frac{\pi}{4}$ или $\tau\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим случай $A\neq B$. Учитывая формулу (25), получим

$$T(0,0,h) = \frac{C}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau_k\sqrt{1-\tau_k^2}}\ln\left[\frac{\sqrt{1-\tau_k^2}+(B/A)\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2}-(B/A)\tau_k}\right]^2. \tag{28}$$

Если N – четное число, то исходя из свойств логарифма, выражение для температуры примет вид

$$T(0,0,h) = \frac{C}{\pi N}\sum_{k=1}^{N/2}\frac{1}{\tau_k\sqrt{1-\tau_k^2}}\ln\left[\frac{\sqrt{1-\tau_k^2}+(B/A)\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2}-(B/A)\tau_k}\right]^2. \tag{29}$$

Здесь также использовано свойство нулей многочлена (24):

$$\tau_N=-\tau_1,\, \tau_{N-1}=-\tau_2, ...,$$

т. е. имеется ровно N корней, расположенных симметрично в промежутке $(-1,1)$. Можно заметить, что при нечетном N будет существовать корень $\tau_{(N+1)/2}$, что приведет к сингулярности в формуле (28). Для данного случая рассмотрен предельный переход при $\varepsilon\to 0$, $\tau_k=\tau_k+\varepsilon$, $\tau_k=0$, $k=(N+1)/2$. Используя правило Лопиталя имеем

$$T(0,0,h) = \frac{C}{\pi N}\left[2\frac{B}{A}+\frac{1}{2}\sum_{k=1,k\neq\frac{N+1}{2}}^{N}\frac{1}{\tau_k\sqrt{1-\tau_k^2}}\ln\left[\frac{\sqrt{1-\tau_k^2}+(B/A)\tau_k}{\sqrt{1-\tau_k^2}-(B/A)\tau_k}\right]^2\right]. \tag{30}$$

4. Анализ численных результатов.

Рассмотрим три случая локального распределения температуры по участкам различного размера [4]: 1)$B/A=1/2$ – температура распределена по квадрату; 2)$B/A=2$ – по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси y; 3)$B/A=1/4$ – по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси x. Для случая, когда число узлов N в

формуле (29) выбиралось равным $N = 70$, а $C = 1$, значение температуры в угловой точке слоя для трех случаев было равно соответственно:

$$T(0,0,h) = 0{,}999445; \quad T(0,0,h) = 0{,}999444; \quad T(0,0,h) = 0{,}998545.$$

Достоверность полученных результатов проверялась на основании формулы 3.364 (2), [6]. Также обосновать результат можно непосредственно, рассматривая граничное условие (3) задачи. Исходя из применяемых интегральных преобразований (5), (8), можно найти трансформанту заданной функции:

$$f_\alpha(y) = \int_0^\infty f(x,y)\cos\alpha x dx = C \cdot \int_0^A \cos\alpha x dx = C \cdot \frac{\sin\alpha A}{\alpha},$$

$$f_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^\infty f_\alpha(y) e^{i\beta y} dy = C \cdot \frac{\sin\alpha A}{\alpha} \int_{-B}^B e^{i\beta y} dy =$$

$$= C \cdot \frac{\sin\alpha A}{\alpha} \cdot \frac{2(e^{i\beta B} - e^{-i\beta B})}{2i\beta} = 2C \cdot \frac{\sin\alpha A}{\alpha} \cdot \frac{\sin\beta B}{\beta}.$$

Подставим полученную трансформанту в формулу (12) и найдем значение в угловой точке слоя, т. е.

$$T(0,0,h) = \frac{2C}{\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\alpha A}{\alpha} \frac{\sin\beta B}{\beta} d\alpha d\beta =$$

$$= \frac{4C}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin\alpha A}{\alpha} \frac{\sin\beta B}{\beta} d\alpha d\beta = \frac{4C}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = C,$$

здесь воспользовались четностью подынтегральной функции по переменной β и формулой (3.721(1), [6]).

На рисунках 1, 2 и 3 приведены значения температуры (26) на поверхности $z = h/2$, $0 < x < 2A$, $-2B < y < 2B$ при толщине слоя $h = 1$ для $C = 1$. Эти три случая соответствуют участкам $B/A = 1/2$, $B/A = 2$, $B/A = 1/4$. Как видно из анализа полученных графиков, максимальное значение температуры, равное 0,7, достигается при размере участка нагрева $B/A = 2$. При размере $B/A = 1/4$ достигается минимальное значение температуры на исследуемой поверхности. Для всех трех случаев характерно расположение экстремальных значений на границе области. При увеличении толщины слоя ($h = 2$) общая картина распределения температуры на рассматриваемой поверхности сохраняется при уменьшении ее абсолютных значений (см. рис. 4, случай $B/A = 1/2$).

Заключение.

1. Получено точное решение задачи стационарной теплопроводности для слоя.

2. Исследовано значение температуры при различных параметрах площадки распределения температуры, приведены численные результаты.

3. Приведена методика вычисления кратных интегралов, содержащих цилиндрическую функцию.

4. Построенное решение используется в дальнейшем решении задачи несвязной термоупругости.

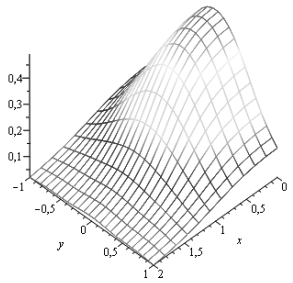


Рис. 1

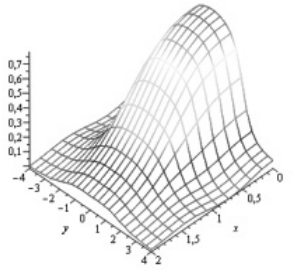


Рис. 2

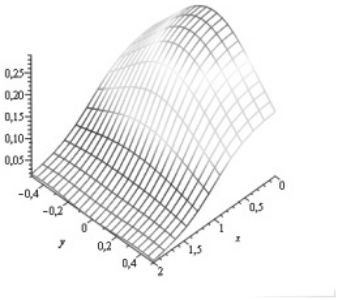


Рис. 3

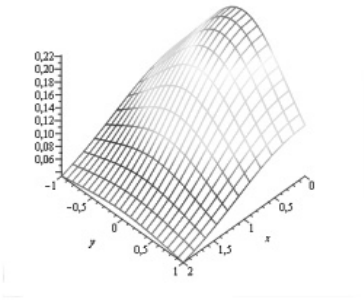


Рис. 4

1. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости / Новацкий В. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
2. **Кіт Г. С.** Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) / Кіт Г. С. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 120–128.
3. **Немировский Ю. С.** Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых антзотропных пластин методом начальных функций / Немировский Ю. С., Янковский А. П. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – 51, № 2. – С. 222–238.
4. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Попов Г. Я. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
5. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов / Крылов В. И. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
6. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Градштейн И. С., Рыжик И. М. – М.:Наука, 1971. – 1108 с.
7. **Povstenko Y. Z.** Thermoelasticity which uses fractional heat conduction equation / Povstenko Y. Z. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – 51, № 2. – С. 239–246.

8. **Takhar H. S.** Unsteady flow and heat transfer on a semi-infinite flat plate with an aligned magnetic field / H. S. Takhar, A. J. Chamkha, G. Nath // International Journal of Engineering Science. – 1999. – 37. – С. 1723–1736.

9. **Kulchytsky-Zhyhailo R.** On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer / R. Kulchytsky-Zhyhailo, S. J. Matysiak // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2005. – 32. – С. 123–132.

10. **Matysiak S. J.** On heat conduction in a semi-infinite laminated layer. Comparative results for two approaches / S. J. Matysiak, D. M. Perkowski // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2010. – 37. – С. 343–349.

11. **Haji-Sheikh A.** Temperature field in a moving semi-infinite region with a prescribed wall heat flux / A. Haji-Sheikh, Donald E. Amos, J. V. Beck // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2009. – 52. – С. 2092–2101.

12. **Rabinovich A.** Heat conduction in a semi-infinite medium with a spherical inhomogeneity and time-periodic boundary temperature / A. Rabinovich, G. Dagan, T. Miloh // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2012. – 55. – С. 618–628.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 2(18).–С. 131–132

ХРОНІКА

О. Д. Кичмаренко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МЕЖДУНАРОДНАЯ ЛЕТНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПАМЯТИ В. А. ПЛОТНИКОВА

В. А. Плотников

С 15 по 22 июня 2013 года в Одессе проходила Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, организованная Одесским национальным университетом имени И.И. Мечникова. В состав программного комитета математической школы входили известные математики Украины и зарубежья. Обязанности сопредседателей программного комитета разделили А. М. Самойленко (Украина), Н. А. Перестюк (Украина), А. А. Мартынюк (Украина), Ф. Л. Черноусько (Россия), Е. А. Гребенников (Россия), А. Кендеров (Болгария), Ю. Ревалски (Болгария), Л. М. Фридман (Мексика). Членами программного комитета конференции были:

Украина: А. А. Бойчук, А. Н. Витюк, Ф. Г. Гаращенко, В. М. Евтухов, В. Е. Капустян, В. И. Коробов, А. М. Ковалев, Д. Д. Лещенко, А. Г. Наконечный, Р. И. Петришин, В. В. Пичкур, А. В. Плотников, В. Г. Самойленко, А. Н. Станжицкий, Ю. В. Теплинский, Д. Я. Хусаинов, И. М. Черевко, А. А. Чикрий.

Россия: Л. Д. Акуленко, И. М. Ананьевский, А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, В. И. Жуковский.

Беларусь: Ф. М. Кириллова, А. И. Калинин.

Грузия: И. Т. Кигурадзе.

Болгария: А. Дончев, Л. Каранджулов, М.Константинов, Б. Юруков.

Турция: А. Аширалиев.

Организационный комитет конференции возглавили директор ИМЭМ ОНУ имени И. И. Мечникова В. Е. Круглов (председатель) и заведующая кафедрой оптимального управления и экономической кибернетики ИМЭМ О. Д. Кичмаренко (заместитель председателя).

Конференция открылась 15 июня в актовом зале Одесского национального университета И. И. Мечникова. В тот же день прозвучал первый доклад, который сделал доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН Украины Н. А. Перестюк. Его доклад “Импульсные дифференциальные уравнения” был посвящен

© Кичмаренко О. Д., 2013

памяти коллеги и друга, Виктора Александровича Плотникова. В работе конференции приняло участие 89 человек, в том числе из России – 21, из Болгарии – 2, из Республики Беларусь – 3. Всего было сделано 33 доклада, из которых 9 пленарных, сделанных ведущими специалистами таких научных и образовательных учреждений, как Институт математики НАН Украины, Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН, Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Объединенный институт проблем информатики НАН Белорусии, Московский государственный университет, Южно-Уральский государственный университет, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесская государственная академия строительства и архитектуры.

Целью этой конференции, как и предыдущей, состоявшейся в 2010 году, была организация активного обмена новыми результатами в тех направлениях научных исследований, которыми занималась и продолжает заниматься научная школа В. А. Плотникова: асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления; математические методы оптимального управления; многозначные уравнения и включения; качественная теория в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления; математическое моделирование; теория игр.

Важную роль в организации работы конференции сыграли сотрудники кафедры оптимального управления и экономической кибернетики, которую с момента основания возглавлял В. А. Плотников.

К началу конференции были опубликованы тезисы докладов, размещенные также на сайте конференции www.plotnikovschool.onu.edu.ua. Согласно решению программного комитета, следующая Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова пройдет в Одессе в июне 2015 года.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка" має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямами:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка". Також їх можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— Mathematical Subject Classification (2010)

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме, причому текст резюме повинен мати не менше ста слів, а також список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України "Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України" від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження

з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65082

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка" на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

.

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації:
серія КВ № 11456-329Р від 07.07.2006 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 9 від 28 травня 2013 р.

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
visnyk_math@onu.edu.ua

Тираж 100 прим. Зам. № 667.

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-24-26, 33-07-17, 37-14-25
www.astroprint.odessa.ua; www.fotoalbom-odessa.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

ISSN 2304–1579. Вісник ОНУ ім. І. І. Мечникова. Математика і механіка. 2013. Т. 18. Вип. 2(18). 1–136.