

ISSN 2304—1579

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК  
ОДЕСЬКОГО  
НАЦІОНАЛЬНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ

*Математика і механіка*

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

**Том 19. Випуск 1 (21). 2014**

Одеса  
«Астропринт»  
2014

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

*Редакційна колегія журналу*

І. М. Коваль (головний редактор)

О. В. Запорожченко (заступник головного редактора)

В. О. Іваниця (заступник головного редактора)

Є. Л. Стрельцов (заступник головного редактора)

С. М. Андрієвський	В. В. Заморов	В. І. Труба
Ю. Ф. Ваксман	В. Є. Круглов	О. В. Тюрін
В. В. Глебов	В. Г. Кушнір	Є. А. Черкез
Л. М. Голубенко	В. В. Менчук	Є. М. Черноіваненко
Л. М. Дунаєва	О. В. Сминтина	

*Редакційна колегія серії*

**Математика і механіка**

В. Є. Круглов (науковий редактор)

В. М. Євтухов (заступник наукового редактора)

A. Ashyralyev	A. A. Дороговцев	A. П. Петравчук
L. Fridman	B. Й. Жуковський	B. B. Пічкур
I. Kátaı	M. I. Іванчов	A. B. Плотніков
A. Laurinčikas	A. Й. Калінін	B. Г. Самойленко
C. K. Асланов	B. O. Капустян	O. M. Станжицький
P. D. Банцурі	I. T. Кігурадзе	E. O. Стороженко
B. I. Берник	P. I. Когут	B. I. Суцанський
O. A. Бойчук	Ан. O. Кореновський	Ю. B. Теплінський
H. D. Вайсфельд	O. Ф. Кривий	P. C. Хапко
P. D. Варбанець	D. D. Лещенко	I. M. Черевко
O. B. Вербицький	A. D. Мілко	B. B. Шарко
O. H. Вітюк	C. M. Мхитарян	I. A. Шевчук
G. O. Воропаєв	O. B. Онищук	G. A. Шинкаренко
I. M. Гашененко	O. G. Наконечний	C. A. Щоголев
D. B. Дмитришин	Ю. B. Нестеренко	

*Відповідальний редактор* — O. D. Кічмаренко

*«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка»  
внесений до Переліку наукових фахових  
видань України постановою Президії ВАК  
України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.*

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2014

ISSN 2304—1579

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE  
Odesa I. I. Mechnikov National University

VISNYK  
ODESKOHO  
NATSIONALNOHO  
UNIVERSYTETU  
(Odesa National University Herald)

*Matematyka i Mekhanika*  
(*Mathematics and Mechanics*)

Scientific journal

Published four times a year

Series founded in January, 1997

**Volume 19. Issue 1 (21). 2014**

Odesa  
«Astroprint»  
2014

Founder: Odesa I. I. Mechnikov National University

*Editorial board of the journal*

I. M. Koval (Editor-in-chief)  
O. V. Zaporozhchenko (Deputy Editor-in-chief)  
V. O. Ivanytsia (Deputy Editor-in-chief)  
Ye. L. Streltsov (Deputy Editor-in-chief)

S. M. Andrievskiy	V. V. Zamorov	V. I. Truba
Yu. F. Vaksman	V. Ye. Kruglov	O. V. Tiurin
V. V. Glebov	V. G. Kushnir	Ye. A. Cherkez
L. M. Golubenko	V. V. Menchuk	Ye. M. Chernovivanenko
L. M. Dunaeva	O. V. Smyntyna	

*Editorial board of the series*  
**Mathematics and mechanics**

V. Ye. Kruglov (Scientific Editor)  
V. M. Evtukhov (Deputy Scientific Editor)

A. Ashyralyev	A. A. Dorogovtsev	A. P. Petravchuk
L. Fridman	V. I. Zhukodsky	V. V. Pichkur
I. Kátai	M. I. Ivanchov	A. V. Plotnikov
A. Laurinčikas	A. I. Kalinin	V. G. Samoilenko
S. K. Aslanov	V. O. Kapustyan	O. M. Stanzhytskyi
R. D. Bantsuri	I. T. Kiguradze	E. O. Storozhenko
V. I. Bernik	P. I. Kogut	W. I. Sushchansky
O. A. Boichuk	An. O. Korenovskiy	Yu. V. Teplinskyi
N. D. Vaysfeld	O. F. Kryvyy	R. S. Hapko
P. D. Varbanets	D. D. Leshchenko	I. M. Cherevko
O. V. Verbitsky	A. D. Milko	V. V. Sharko
O. N. Vitjuk	S. M. Mkhitaryan	I. A. Shevchuk
G. O. Voropaev	O. V. Onishchuk	G. A. Shynkarenko
I. M. Gashenenko	O. G. Nakonechny	S. A. Schogolev
D. V. Dmitrishin	Yu. V. Nesterenko	

*Executive Editor* — O. D. Kichmarenko

**ЗМІСТ**

**МАТЕМАТИКА**

*Адамов А. Н.* О константе в неравенстве Сеге для производных сопряженных тригонометрических полиномов в  $L_0$  . . . . . 7

*Лиманская Д. Е., Самкова Г. Е.* О поведении решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных . . . . . 16

*Страхов Є. М., Яровий А. Т.* Один двокроковий метод для задач структурно-параметричної оптимізації лінійних систем керування 29

*Ушкац М. В., Евфимко К. Д.* Шестой вириальный коэффициент для модифицированного потенциала Леннард-Джонса . . . . . 37

*Чуйко С. М.* О решении матричного уравнения Сильвестра . . . 49

*Яременко М. І.* Наближення нелінійних напівгруп в просторах  $L^p(\mathbb{R}^l, d^l x)$  . . . . . 58

*Varbanets S.* Sequences of PRN's produced by circular generator . . 71

*Shchogolev S. A.* On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients . . . . . 81

**МЕХАНІКА**

*Асланов С. К.* Реологическое моделирование неоднородной структуры сдвигового течения жидкости в узких зазорах . . . . . 92

## CONTENTS

### M A T H E M A T I C S

<i>Adamov A. N.</i> About constant in Szego inequality for derivatives of conjugate trigonometric polynomials in $L_0$ . . . . .	7
<i>Limanska D., Samkova G.</i> Behavior of the solutions of some systems of differential equations which are partially resolved relatively to the derivatives . . . . .	16
<i>Strakhov E. M., Yarovoy A. T.</i> On a two-step algorithm in structural and parametric optimization problems of linear control systems . . .	29
<i>Ushcats M. V., Evfimko K. D.</i> The sixth virial coefficient for the modified Lennard-Jones potential . . . . .	37
<i>Chuiko S. M.</i> On the solution of the matrix Sylvester equation . . .	49
<i>Yaremenko M. I.</i> Approximation of nonlinear semigroup in $L^p(\mathbb{R}^l, d^l x)$ spaces . . . . .	58
<i>Varbanets S.</i> Sequences of PRN's produced by circular generator . .	71
<i>Shchogolev S. A.</i> On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients . . . . .	81

### M E C H A N I C S

<i>Aslanov S. K.</i> The rheology simulation for a inhomogeneous structure of the shear fluid flow into slender clearances . . . . .	92
--	----

## МАТЕМАТИКА

Mathematical Subject Classification: 26C05, 26D05, 26D10, 30A10  
 УДК 517.5

**А. Н. Адамов**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**О КОНСТАНТЕ В НЕРАВЕНСТВЕ СЕГЕ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ  
 СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В  $L_0$**

**Адамов О. М.** Про константу в нерівності Сеґе для похідних спряжених тригонометричних поліномів у  $L_0$ . Розглядається нерівність Сеґе  $\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_0 \leq \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_0$  для похідних спряжених тригонометричних поліномів в  $L_0$ . Отримана точна асимптотика по  $n$  для константи  $\chi_0(n, r)$  в ньому, поліпшуючи оцінки, раніше отримані В. В. Арестовим та автором.

**Ключові слова:** нерівність Сеґе, похідні тригонометричних поліномів, спряжені тригонометричні поліноми, простір  $L_0$ , асимптотична оцінка константи.

**Адамов А. Н.** О константе в неравенстве Сеґе для производных сопряженных тригонометрических полиномов в  $L_0$ . Рассматривается неравенство Сеґе  $\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_0 \leq \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_0$  для производных сопряженных тригонометрических полиномов в  $L_0$ . Получена точная асимптотика по  $n$  для константы  $\chi_0(n, r)$  в нём, улучшая оценки, ранее полученные В. В. Арестовым и автором.

**Ключевые слова:** неравенство Сеґе, производные тригонометрических полиномов, сопряженные тригонометрические полиномы, пространство  $L_0$ , асимптотическая оценка константы.

**Adamov A. N.** About constant in Szego inequality for derivatives of conjugate trigonometric polynomials in  $L_0$ . We consider Szego inequality  $\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_0 \leq \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_0$  for derivatives of conjugate trigonometric polynomials in  $L_0$ . We've found exact asymptotic by  $n$  estimation of constant  $\chi_0(n, r)$  in it, improving estimates which were got by V. V. Arestov and author earlier.

**Key words:** Szego inequality, derivatives of trigonometric polynomials, conjugate trigonometric polynomials,  $L_0$  space, asymptotic estimation of constant.

**ВВЕДЕНИЕ.** Пусть  $T_n$  — множество тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$$

порядка  $n$  с коэффициентами  $a_k$  из поля  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Полином

$$\tilde{T}_n(t) = i \left( \sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^n a_{-k} e^{-ikt} \right)$$

называют сопряженным для  $T_n$ . Определим функционал  $\|f\|_p$  для измеримых функций на отрезке  $[0, 2\pi]$  при  $-\infty \leq p \leq +\infty$  следующим образом:

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \quad -\infty < p < 0, \quad (0.1)$$

$$\|f\|_0 = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(t)| dt \right), \quad (0.2)$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|, \quad \|f\|_{-\infty} = \text{ess inf}_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|. \quad (0.3)$$

Класс функций, для которых функционал  $\|f\|_p$  конечен, обозначим через  $L_p[0, 2\pi]$ . В нём при  $p \geq 1$   $\|f\|_p$  является нормой, при  $0 < p < 1$  — квазинормой. Функционал  $\|f\|_0$ , следуя К. Малеру [1], будем называть мерой функции  $f$ . Для функций, определенных на единичной окружности, положим

$$\|f\|_{L_p} = \|f(e^{it})\|_p. \quad (0.4)$$

В 1912 году С. Н. Бернштейн получил оценку для нормы производной тригонометрического полинома  $\|T'_n\|_{C[0, 2\pi]}$  через норму самого полинома  $\|T_n\|_{C[0, 2\pi]}$  в  $C[0, 2\pi]$ , в 1928 году Г. Сеге [2] добавил в эту оценку производные сопряженных тригонометрических полиномов, а А. Зигмунд в 1932 году [3, том 2, гл. 10, 3.16 и 3.25] распространил это соотношение на все  $L_p$ ,  $p \geq 1$ :

$$\left\| T_n^{(r)} \cos \alpha + \tilde{T}_n^{(r)} \sin \alpha \right\|_p \leq n^r \|T_n\|_p, \quad T_n \in \mathbb{T}_n. \quad (0.5)$$

В своих работах [4, 1981 г.] и [5, 1990 г.] В. В. Арестов разработал методику получения неравенств для полиномов в пространстве  $L_0$  и показал, что для широкого класса неравенств константа, оптимальная при  $p = 0$ , остаётся верной и для  $p > 0$ , но, возможно, не является точной. В 1994 году В. В. Арестов [6] доказал неравенство типа Г. Сеге для  $r \geq 0$  в пространствах  $L_p[0, 2\pi]$ ,  $0 \leq p < 1$ :

$$\left\| \tilde{T}_n^{(r)} \right\|_p \leq \chi_0(n, r) \cdot \|T_n\|_p, \quad \chi_p(n, r) \leq \chi_0(n, r), \quad p \geq 0, \quad (0.6)$$

где

$$\chi_0(n, r) = \|S_{2n, r}\|_{L_0}, \quad S_{2n, r}(z) = \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^{n+k} \left( z^{n+k} + (-1)^{r+1} z^{n-k} \right), \quad (0.7)$$

и оценил значение коэффициента  $\|S_{2n, r}\|_{L_0}$  в зависимости от величины  $r$ :

$$\|S_{2n, r}\|_{L_0} = n^r, \quad r \geq n \ln 2n, \quad (0.8)$$

$$\|S_{2n, r}\|_{L_0} \leq 2n^r C_{2n}^{n+1}, \quad \|S_{2n, r}\|_{L_0} = 4^{n+o(n)} \quad \text{при } 1 \leq r < n \ln 2n \quad (0.9)$$

и

$$\frac{1}{n} C_{2n}^{n+1} \leq \|S_{2n, 0}\|_{L_0} \leq 2C_{2n}^{n+1}. \quad (0.10)$$



Окончательно вопрос об оценке меры  $\|S_{2n,r}\|_{L_0}$  при  $0 \leq r < n \ln 2n$  в этой статье решён не был.

Встал вопрос о получении точной асимптотики этой величины по  $n$ . При  $r = 0$  в нашей статье [7] показано, что при  $n \geq 50$  (0.10) можно заменить на асимптотически точную оценку

$$\exp\left(-\frac{1.58 + 1.98 \ln n}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\|S_{2n,0}\|_{L_0}}{C_{2n}^{n+1}} \leq \left(1 + \frac{3}{n+2}\right) \exp\left(\frac{0.56}{\sqrt{n}}\left(3 + \ln \frac{n}{2}\right)\right), \quad (0.11)$$

что влечёт за собой соотношение  $\|S_{2n,0}\|_{L_0} \sim C_{2n}^{n+1}$ .

Остаётся случай  $1 \leq r < n \ln 2n$ . Тогда (0.9) не даёт точного порядка роста в зависимости от  $n$ . В статье [8] нами было получено неравенство, дающее порядковую оценку сверху:

$$\|S_{2n,r}\|_{L_0} \leq D_r C_{2n}^{n+1}, \quad 1 \leq r \leq \frac{n}{2}, \quad (0.12)$$

где  $D_r$  зависит только от  $r$ .

В настоящей работе основной целью является нахождение для  $\|S_{2n,r}\|_{L_0}$  оценки вида (0.11) с аналогичной асимптотикой. В результате для каждого фиксированного  $r \geq 1$  было получено:

$$\|S_{2n,r}\|_{L_0} \sim K_r C_{2n}^{n+1}, \quad \text{и} \quad \left| \frac{\|S_{2n,r}\|_{L_0}}{C_{2n}^{n+1}} - K_r \right| \leq \frac{\alpha_r}{n^{\frac{1}{3}}} \ln n. \quad (0.13)$$

Величина  $K_r$  зависит только от  $r$  и выражается следующим образом:

$$K_r = 2\|Q_r\|_{L_0}, \quad \text{где} \quad Q_r(z) = \sum_{k=0}^r \left( \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j (j+1)^r \right) (z-1)^{r-k}. \quad (0.14)$$

Для первых значений  $r$  приведем значения  $K_r$  и выражения для  $Q_r(z)$ :

$r$	$K_r$	$Q_r(z)$
1	2	$z$
2	2	$z^2 + z$
3	$2(2 + \sqrt{3}) \approx 7,483$	$z^3 + 4z^2 + z$
4	$2(5 + \sqrt{24}) \approx 19,798$	$z^4 + 11z^3 + 11z^2 + z$
5	$\approx 107,78$	$z^5 + 26z^4 + 66z^3 + 26z^2 + z$
6	$\approx 465,26$	$z^6 + 57z^5 + 302z^4 + 302z^3 + 57z^2 + z$
7	$\approx 3332,42$	$z^7 + 120z^6 + 1191z^5 + 2416z^4 + 1191z^3 + 120z^2 + z$
8	$\approx 20013,51$	$z^8 + 247z^7 + 4293z^6 + 15619z^5 + 15619z^4 + 4293z^3 + 247z^2 + z$

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Определённой трудностью доказательств в пространстве  $L_0$  является отсутствие неравенства треугольника. В пространствах  $L_p$  при  $0 < p < 1$  верно обобщенное неравенство

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_p + \|g\|_p), \quad (1.1)$$

что позволяет теми же методами, что и при  $p \geq 1$ , получать оценки с дополнительным коэффициентом, зависящим от  $p$ . При  $p = 0$  неравенство треугольника в общем случае уже невозможно ни для какой константы. В статье [5] В. В. Арестов изучал поведение константы  $\chi(n)$  в неравенстве для полиномов степени  $n$  на единичной окружности

$$\|P_n + Q_n\|_{L_0} \leq \chi(n) (\|P_n\|_{L_0} + \|Q_n\|_{L_0}) \quad (1.2)$$

и получил оценку

$$\frac{1}{2}\rho^n \leq \chi(n) \leq \frac{1}{2}R^n, \text{ где } \rho \approx 1,7916 \text{ и } R = \sqrt[6]{40} \approx 1,8493. \quad (1.3)$$

Легко видеть, что  $\chi(n)$  очень быстро растет при возрастании  $n$ , и использование (1.2) в большинстве случаев даёт лишь грубую оценку. В этом пункте будут получены оценки величины  $\|f + g\|_0$  при различных ограничениях на функции  $f$  и  $g$ . В отличие от (1.1) и (1.2) будем накладывать разные ограничения на слагаемые, что позволит получить более точные оценки в случае неоднородных слагаемых.

**Лемма 1.** Пусть  $0 < \|f\|_0 < +\infty$ ,  $0 < p, q \leq +\infty$ ,  $\|g\|_p < +\infty$ ,  $\|f\|_{-q} > 0$  и  $\frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}} \leq 1$ . Тогда имеем, полагая  $w = \min\left(\frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, 1\right)$ ,

$$\frac{1}{1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f+g\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)} \leq \frac{\|f + g\|_0}{\|f\|_0} \leq 1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f\|_q^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right). \quad (1.4)$$

**Доказательство.** Оценим  $\frac{\|f+g\|_0}{\|f\|_0}$  через неравенство между метриками  $L_0$  и  $L_w$  и применим неравенства  $\|1 + \varphi\|_w^w \leq 1 + \|\varphi\|_w^w$  и  $(1+t)^{\frac{1}{w}} - 1 \leq \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , то что  $\left\|\frac{g}{f}\right\|_w^w \leq 1$ , покажем позже:

$$\frac{\|f + g\|_0}{\|f\|_0} = \left\|1 + \frac{g}{f}\right\|_0 \leq \left\|1 + \frac{g}{f}\right\|_w \leq 1 + \left\|\frac{g}{f}\right\|_w^w \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right).$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями  $\frac{p}{w}$  и  $\frac{q}{w}$  при  $0 < w < 1$ , получим

$$\left\|\frac{g}{f}\right\|_w^w = \|g^w f^{-w}\|_1 \leq \|g\|_p \cdot \|f^{-1}\|_q = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}}.$$

При  $w = 1$  берём показатели  $p$  и  $p' = \frac{p}{p-1} \leq q$ , и имеем

$$\left\|\frac{g}{f}\right\|_1 = \|gf^{-1}\|_1 \leq \|g\|_p \cdot \|f^{-1}\|_{p'} \leq \frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}}.$$

Так как  $\frac{\|g\|_p}{\|f\|_{-q}} \leq 1$ , то отсюда и  $\left\|\frac{g}{f}\right\|_w^w \leq 1$ , что делает корректной первую оценку в лемме. Подставляя, получаем левую часть (1.4). Для доказательства оценки снизу применим оценку сверху для частного  $\frac{\|(f+g)+(-g)\|_0}{\|f+g\|_0}$ . Лемма доказана.

Из леммы 1 получаем 3 следствия:

**Следствие 1.** Если  $\|f\|_{-\infty} > 0$ , то  $\|f\|_0 - \frac{\|f\|_0}{\|f\|_{-\infty}} \|g\|_{\infty} \leq \|f + g\|_0 \leq \|f\|_0 + \frac{\|f\|_0}{\|f\|_{-\infty}} \|g\|_{\infty}$ .

**Следствие 2.** Если  $\|f_n - f\|_{+\infty} \rightarrow 0$  (то есть последовательность  $f_n$  равномерно сходится к  $f$ ), и  $\|f\|_{-\infty} > 0$ , то  $\|f_n\|_0 \rightarrow \|f\|_0$ .

Для переноса предельных соотношений в общем случае необходимо дополнительное ограничение на поведение  $f_n$ , так как оценка снизу отличается от оценки сверху.

**Следствие 3.** Пусть  $\|f_n - f\|_p = \varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\|f\|_0 > 0$  и существует неубывающая функция  $h$  такая, что  $|f_n|_*(t) \geq h(t)$ , где под  $f_*$  понимаем неубывающую перестановку функции, и  $\|h\|_{-q} > 0$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_0 = \|f\|_0$ , причём  $\|f_n\|_0 - \|f\|_0 = O(\varepsilon_n^w)$ , где  $w = \min\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, 1\right)$ .

**Доказательство.** Положим  $g_n = f_n - f$  и применим лемму 1:

$$\frac{1}{1 + \frac{\|g_n\|_p^w}{\|h\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)} \leq \frac{1}{1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f_n\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)} \leq \frac{\|f_n\|_0}{\|f\|_0} \leq 1 + \frac{\|g_n\|_p^w}{\|f\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right).$$

Из этого соотношения и следует необходимая предельная оценка.

Таким образом, хотя в  $L_0$  нельзя получить сразу сходимость норм из сходимости по норме, но при повышении порядка суммируемости (величины  $\left\|\frac{f_n}{f}\right\|_0$ ) до  $w$  получаем скорость сходимости, аналогичную пространству  $L_w$ .

В лемме 1 требуется, чтобы  $\|f\|_{-q} > 0$ . Для многих простых функций (например  $t^\alpha$ ) нельзя указать точного показателя суммируемости  $q$ , и соответственно  $w$  не будет наилучшим указателем скорости приближения. Рассмотрим эти граничные случаи отдельно, для удобства записи сразу в предельной форме.

**Лемма 2.** Пусть  $0 < \|f\|_0 < +\infty$ ,  $0 < p < +\infty$ ,  $\|f_n - f\|_p = \varepsilon_n \rightarrow 0$ , и  $|f|_*(t) \sim Ct^\alpha$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{p} + \alpha \geq 1$ . Тогда имеем, полагая  $w = \frac{1}{\frac{1}{p} + \alpha}$ ,

$$\|f_n\|_0 - \|f\|_0 \leq C_f \varepsilon_n^w \ln^{\alpha w} \frac{1}{\varepsilon_n}. \quad (1.5)$$

Если дополнительно выполняется  $|f_n|_*(t) \geq h(t)$ , где  $h(t) \sim Mt^\beta$ , то

$$\|f_n\|_0 - \|f\|_0 \geq -C_f \varepsilon_n^w \ln \frac{1}{\varepsilon_n}. \quad (1.6)$$

Величины  $C_f$  не зависят от  $n$ .

**Доказательство.** Положим для  $\varepsilon > 0$   $f_\varepsilon(t) = \max(f(t), \varepsilon)$  и обозначим  $g = f_n - f$ . Тогда

$$\frac{\|f_n\|_0}{\|f\|_0} = \frac{\|f + g\|_0}{\|f\|_0} = \left\| \frac{f}{f_\varepsilon} + \frac{g}{f_\varepsilon} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0 \leq \left\| 1 + \left| \frac{g}{f_\varepsilon} \right| \right\|_0 \cdot \left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0.$$

Оценим каждый множитель отдельно. Для первого множителя воспользуемся леммой 1 с показателями  $p$  и  $q = \frac{1}{\alpha}$ :

$$\left\| 1 + \frac{g}{f_\varepsilon} \right\|_0 \leq 1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f_\varepsilon\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right).$$

Для  $\left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0$  и  $\|f_\varepsilon\|_{-q}$  сначала рассмотрим случай  $|f|_*(t) = Ct^\alpha$ . Тогда, полагая  $t_0 = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^q$ , имеем  $\left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \ln\left(\frac{Ct^\alpha}{\varepsilon}\right) dt\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^q\right)$ , и

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{-q} &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\varepsilon^{-q}(t) dt\right)^{-\alpha} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} (Ct_0^\alpha)^{-q} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{2\pi} (Ct^\alpha)^{-q} dt\right)^{-\alpha} = \\ &= C \left(\frac{1}{2\pi} (1 + \ln(2\pi) - \ln(t_0))\right)^{-\alpha} \sim C_f \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда делаем вывод, что для  $|f|_*(t) \sim Ct^\alpha$  верно  $1 \leq \left\| \frac{f_\varepsilon}{f} \right\|_0 \leq 1 + C_f \varepsilon^q$  и  $\|f_\varepsilon\|_{-q} \sim C_f \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-q}$ , где  $C_f$  — некоторые величины, не зависящие от  $\varepsilon$ . Тогда

$$\frac{\|f_n\|_0}{\|f\|_0} \leq \left(1 + C_f \varepsilon_n^q \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{qw} \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)\right) \cdot (1 + C_f \varepsilon^q). \quad (1.7)$$

Теперь выберем  $\varepsilon$ , чтоб оценка в (1.7) была оптимальной. Для этого надо сделать отличия от 1 в двух множителях примерно одинаковыми. Полагая  $\varepsilon = (\varepsilon_n)^{\frac{w}{q}}$ , получим оценку сверху в (1.5). Для оценки снизу из (1.7) аналогично положим  $\tilde{f}_\varepsilon(t) = \max(f_n(t), \varepsilon)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|f\|_0}{\|f_n\|_0} &= \left\| \frac{f_n}{f_\varepsilon} - \frac{g}{f_\varepsilon} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 \leq \left\| 1 + \left| \frac{g}{f_\varepsilon} \right| \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{\|g\|_p^w}{\|f_\varepsilon\|_{-q}^w} \cdot \left(2^{\frac{1}{w}} - 1\right)\right) \cdot \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0. \end{aligned}$$

Оценки для  $\left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0$  и  $\left\| \tilde{f}_\varepsilon \right\|_{-q}$  также будут схожими, для  $h(t) = Mt^\beta$  имеем:

$$\left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \ln\left(\frac{Mt^\beta}{\varepsilon}\right) dt\right) = \exp\left(\frac{t_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) - \frac{\beta t_0}{2\pi} (\ln t_0 - 1)\right)$$

и, следовательно, в общем случае  $1 \leq \left\| \frac{\tilde{f}_\varepsilon}{f_n} \right\|_0 \leq 1 + C_f \varepsilon^q \ln \frac{1}{\varepsilon}$ . Схожим образом получаем  $\left\| \tilde{f}_\varepsilon \right\|_{-q} \sim C_f \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\alpha}$ . Остальные рассуждения не отличаются от случая оценки сверху, только меняется в итоге степень у логарифма. Лемма доказана.

Заметим, что из (0.4) следует, что возможно применять леммы 1 и 2 и на единичной окружности.

Нашей целью является получение асимптотической оценки константы  $\|S_{2n,r}\|_0$  в неравенстве Сеге в  $L_0$  (Арестов, [6]):

$$\left\| \tilde{T}_n^{(r)} \right\|_{L_0} \leq \|S_{2n,r}\|_0 \cdot \|T_n\|_{L_0},$$

где

$$S_{2n,r}(z) = \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^{n+k} \left( z^{n+k} + (-1)^{r+1} z^{n-k} \right). \quad (1.8)$$

**Теорема.** Для  $\|S_{2n,r}\|_0$  справедливо асимптотическое соотношение

$$\left| \frac{\|S_{2n,r}\|_{L_0}}{C_{2n}^{n+1}} - K_r \right| \leq \frac{\alpha_r}{n^{\frac{1}{3}}} \ln n, \quad K_r = 2\|Q_r\|_{L_0},$$

$$\text{где } Q_r(z) = \sum_{k=0}^r \left( \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (j+1)^r \right) (z-1)^{r-k}, \quad \alpha_r \text{ не зависит от } n.$$

**Доказательство.** Сначала докажем вспомогательное равенство. Пусть  $a_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  — некоторая последовательность; как обычно, обозначим

$$\Delta^0 a_k = a_k \text{ и } \Delta^m a_k = \Delta^{m-1} a_k - \Delta^{m-1} a_{k+1} = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j a_{k+j},$$

где  $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$ . Пусть  $W_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k (z^{n+k} \pm z^{n-k})$ . Тогда для любого  $0 \leq m \leq n-1$  справедливо тождество

$$\begin{aligned} (z-1)^m W_n(z) &= - \sum_{k=0}^{m-1} \Delta^k a_k \left( z^{n+k+1} \pm (-1)^{k+m-1} z^n \right) (z-1)^{m-1-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \Delta^m a_k \left( z^{n+k+m} \mp z^{n-k} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Этот факт легко следует по индукции из преобразования Абеля. В лемме 4 статьи [8] доказано, что для последовательности  $a_k = k^r C_{2n}^{n+k}$  справедливо неравенство

$$|\Delta^{r+4} a_k| \leq C_r \frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2}, \quad (1.10)$$

где  $C_r$  — некоторая величина. Применим к  $S_{2n,r}(z)$  (1.9) с  $m = r+4$  и выделим отдельно коэффициент  $C_{2n}^{n+1}$ . Так как очевидно  $\left| \frac{C_{2n}^{n+j} - C_{2n}^{n+1}}{C_{2n}^{n+1}} \right| \leq \frac{B_j}{n}$ , то на единичной окружности имеем, учитывая, что  $\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (j+1)^r = 0$  при  $k > r$ :

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{r+3} \Delta^k a_k \left( z^{n+k+1} + (-1)^{k+r} z^n \right) (z-1)^{r+3-k}}{C_{2n}^{n+1}} - 2z^n (z-1)^3 Q_r(z) \right| \leq \frac{C_r}{n}.$$

Для второго слагаемого

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n \Delta^{r+4} a_k (z^{n+k+r+4} - z^{n-k})}{C_{2n}^{n+1}} \right| \leq 2 \sum_{k=1}^n |\Delta^{r+4} a_k| \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{C_r}{n^2} = \frac{2C_r}{n}.$$

Итого

$$\left| \frac{S_{2n,r}(z)(z-1)^{r+4}}{z^n C_{2n}^{n+1}} + 2(z-1)^3 Q_r(z) \right| \leq \frac{C_r}{n}, \quad |z|=1, \quad (1.11)$$

где

$$Q_r(z) = \sum_{k=0}^r \left( \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j (j+1)^r \right) (z-1)^{r-k}. \quad (1.12)$$

Таким образом, можно применить лемму 2 на единичной окружности. В качестве предельной функции  $f$  берём  $2(z-1)^3 Q_r(z)$ . Так как оценка (1.11) равномерная, то  $p = +\infty$ . Так как все нули полинома  $Q_r$  являются действительными отрицательными числами, то на единичной окружности у  $f$  есть только ноль 3-й кратности в точке  $z=1$ , поэтому для перестановки имеем оценку  $f^* \geq C_r t^3$ , так что  $q = \frac{1}{3}$  и  $w = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{3}$ . Из представления (1.11) следует, что при достаточно больших  $n$  у  $S_{2n,r}(z)(z-1)^{r+4}$  также не может быть нулей на единичной окружности вдали от  $z = \pm 1$ , и характеристики перестановки зависят как раз от поведения функции в окрестности точки  $z=1$ . Так как

$$S_{2n,r}(1) = \begin{cases} 0, & r=2k \\ 2 \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^{n+k}, & r=2k+1, \end{cases}$$

то при нечётных  $r$  можно взять  $h(t) = C_r t^{r+4}$ , а при чётных  $r$ , исходя из соотношения  $\frac{S_{2n,r}(z)}{z-1} \rightarrow S'_{2n,r}(1) = S_{2n,r+1}(1)$ ,  $h(t) = C_r t^{r+5}$ . Это позволяет получить двустороннюю оценку. Из (1.11)  $\varepsilon_n \leq \frac{C_r}{n}$ . Подставляя все параметры в (1.5) и (1.6), имеем

$$\left\| \frac{S_{2n,r}(z)(z-1)^{r+4}}{z^n C_{2n}^{n+1}} \right\|_{L_0} - \left\| 2(z-1)^3 Q_r(z) \right\|_{L_0} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Из этого и следует (0.13). Утверждение доказано.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В этой статье получена точная асимптотика для константы в неравенстве Сега в  $L_0$ , что закрывает вопрос о порядковых оценках. Также методы, применённые в этой работе, могут использоваться для дальнейших теоретических исследований в пространстве  $L_0$ .

1. **Mahler K.** On the zeros of the derivative of a polynomial / K. Mahler // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. – 1961. – Vol. 264, No. 1317. – P. 145–154.

2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1965.
3. **Szego G.** Uber einen satz des Herrn Serge Bernstein / G. Szego // Schrift. Konigsberg. Gelehrten Gesellschaft. – 1928. – V. 5, № 4. – P. 59–70.
4. **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных / В. В. Арестов // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1981. – Т. 45. – С. 3–22.
5. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности / В. В. Арестов // Мат. зам. – 1990. – Т. 48, вып. 4, октябрь. – С. 7–18.
6. **Арестов В. В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в  $L_0$  / В. В. Арестов // Мат. зам. – 1994. – Т. 56, вып. 6, декабрь. – С. 10–26.
7. **Адамов А. Н.** О сопряженных тригонометрических полиномах в  $L_0$  / А. Н. Адамов // Вісник Донецького національного університету, сер. А: природничі науки. – 2011. – Вип. 2. – С. 7–14.
8. **Адамов А. Н.** О производных сопряженных тригонометрических полиномов в  $L_0$  / А. Н. Адамов // Математичні студії. – Т. 37, № 2. – 2012. – С. 147–154.

Mathematical Subject Classification: 39A45  
УДК 517.925

Д. Е. Лиманская, Г. Е. Самкова

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

## О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЧАСТИЧНО РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

Ліманська Д. Є., Самкова Г. Є. Про поведінку розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідних. Досліджуються питання існування аналітичних розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідних. Одержані достатні умови існування аналітичних розв'язків задачі Коші навколо усуваної особливої точки.

**Ключові слова:** аналітичне продовження, задача Коші, пучок матриць, усувана особлива точка.

Лиманская Д. Е., Самкова Г. Е. О поведении решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных. Исследуются вопросы существования аналитических решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных. Получены достаточные условия существования аналитических решений задачи Коши вблизи устранимой особой точки.

**Ключевые слова:** аналитическое продолжение, задача Коши, пучок матриц, устранимая особая точка.

Limanska D., Samkova G. Behavior of the solutions of some systems of differential equations which are partially resolved relatively to the derivatives. This article investigates the questions of the analytical solutions existence for some differential equations systems partially resolved relatively to the derivatives. The sufficient conditions of the analytical solutions existence of the Cauchy problem near a removable singular point were investigated.

**Key words:** analytic continuation, Cauchy problem, pencil of matrices, removable singularity.

**ВВЕДЕНИЕ.** Рассматривается задача Коши вида

$$\begin{cases} A(z)Y' = B(z)Y + f(z, Y, Y'), & (1) \\ Y(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow 0, z \in D_{10}, & (2) \end{cases}$$

где матрицы  $A, B : D_1 \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $D_1 = \{z : |z| < R_1, R_1 > 0\} \subset \mathbb{C}$ , матрицы  $A(z)$ ,  $B(z)$  — аналитические в области  $D_{10}$ ,  $D_{10} = D_1 \setminus \{0\}$ , пучок матриц  $A(z)\lambda - B(z)$  является сингулярным при  $z \rightarrow 0$ , функция  $f : D_1 \times G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}^m$ , где области  $G_k \subset \mathbb{C}^n$ ,  $0 \in G_k$ ,  $k = 1, 2$ , функция  $f(z, Y, Y')$  является аналитической всюду в  $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$ ,  $G_{k0} = G_k \setminus \{0\}$ ,  $k = 1, 2$  и в точке  $(0, 0, 0)$  имеет изолированную особую точку.

Исследование поведения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки начаты в середине XIX века в работах Р. Фукса,



Ш. Брио и Ж. Буке и далее продолжены в работах А. М. Ляпунова, П. Пенлеве и многих других.

Впоследствии исследования подобных задач разбилась на 2 класса: исследования в вещественной области, проводимые Р. Р. Frommer, Р. Е. Hartmann, Т. Wazewski, А. Winter, В. Н. Зубовым, В. Ф. Мячиным, А. В. Костиным, А. Ф. Андреевым, А. Д. Брюно и многими другими, и в комплексной области, проводимые Э. И. Грудо, М. Jwano, W. Trjitzinsky, М. Hurukaru, W. Wasow и многими другими.

Отдельной задачей является изучение вопросов существования и асимптотического поведения решений систем уравнений, не разрешенных относительно производных. В вещественной области в работах А. Самойленко [5], Н. Шкиля [7], И. Старуна, В. Яковца, А. Еременко и других проводятся исследования решений систем с постоянными и переменными пучками матриц.

Впервые уравнение, не разрешенное относительно производных, в комплексной области в конце XIX века исследовал французский математик П. Пенлеве. Вместе с Р. Фуксом П. Пенлеве были доказаны теоремы, согласно которым выделены классы уравнений, решения которых не имеют подвижных особых точек или существенно особых точек однозначного характера.

Исследования конкретных видов систем, не разрешенных относительно производных, проведены в работах М. Jwano [9], О Song Guk [10], Pak Ponk Chol, В. И. Громака и других. При этом изучаются вопросы о свойствах и числе решений сингулярных задач Коши в комплексной области с особой точкой на границе. Такие же классы задач изучались методом аналитического продолжения решений Р. Г. Грабовской [2], Л. Г. Просенюком, В. Г. Оскрого и другими.

Исследования Р. Г. Грабовской и J. Diblic [1, 2, 8] в вещественной области систем, не разрешенных относительно производных, продолжены в комплексной области в работах Г. Е. Самковой [3, 4], Н. В. Шарай [6], Михайленко Е. А. и других.

В данной работе исследуется задача Коши (1)-(2) в предположении, что  $m = n = p$ , матрица  $A(z)$  — аналитическая матрица в области  $D_1$  и  $\text{rang} A(z) = p$  при  $z \in D_1$ , матрица  $B(z)$  — аналитическая в области  $D_{10}$  и имеет в точке  $z = 0$  устранимую особую точку.

Исследуются вопросы существования аналитических решений задачи Коши (1)–(2), удовлетворяющих дополнительному условию

$$Y'(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow 0, z \in D_{10}. \quad (3)$$

По условию  $A^{-1}(z)B(z)$  — аналитическая матрица в области  $D_{10}$  и в точке  $z = 0$  имеет устранимую особую точку. Вектор-функция  $f(z, Y, Y')$  — аналитическая в области  $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$ , а значит, в точке  $(0, 0, 0)$  имеет изолированную особую точку. Следовательно, по теореме об изолированной особой точке для функции многих комплексных переменных, точка  $(0, 0, 0)$  — ее устранимая особая точка. Доопределим вектор-функцию  $f(z, Y, Y')$  в точке  $(0, 0, 0)$  так, чтобы она стала аналитической функцией в области  $D_1 \times G_1 \times G_2$  и  $f(0, 0, 0) = 0$ .

Введем обозначения:

$$P(z) = A^{-1}(z)B(z), \quad F(z, Y, Y') = A^{-1}(z)f(z, Y, Y'), \quad (4)$$

тогда система (1) примет вид

$$Y' = P(z)Y + F(z, Y, Y'), \quad (5)$$

где  $P(z)$  — аналитическая матрица в области  $D_{10}$ ,  $F(z, Y, Y')$  — аналитическая вектор-функция в области  $D_1 \times G_1 \times G_2$ .

Так как матрица  $P(z)$  в точке  $z = 0$  имеет устранимую особую точку, то доопределим матрицу  $P(z)$  в точке  $z = 0$  так, чтобы она стала аналитической в области  $D_1$ .

Согласно методу аналитического продолжения решений систему (5) изучим вдоль двух семейств кривых, а затем проведем аналитическое продолжение решений с кривой одного семейства при помощи кривых второго семейства на некоторую область.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** На комплексной плоскости введем множества:

- 1)  $I = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t \in (0, t_1], t_1 > 0, v \in [v_1, v_2], v_1 < v_2\}$ ;
- 2)  $L_{v_0} = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t \in (0, t_1], v = v_0\}$ , где  $v_0 \in [v_1, v_2]$ ,  $v_0$  — фиксированное число;
- 3)  $O_{t_0} = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t = t_0, v \in [v_1, v_2]\}$ , где  $t_0 \in (0, t_1]$ ,  $t_0$  — фиксированное число.

Пусть вещественнозначные функции  $p(t, v)$ ,  $g(t, v)$  принимают неотрицательные значения на множестве  $I$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что функция  $p(t, v)$  обладает свойством  $Q_1$  относительно функции  $g(t, v)$  на множестве  $I$  при  $t \rightarrow +0$ , если функция  $p(t, v)$  является функцией более высокого порядка малости относительно функции  $g(t, v)$  при  $t \rightarrow +0$  равномерно относительно  $v \in [v_1, v_2]$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что функция  $p(t, v)$  обладает свойством  $Q_2$  относительно функции  $g(t, v)$  на множестве  $I$ , если существуют такие  $C_1 > 0, C_2 > 0$ , что равномерно относительно  $t \in (0, t_1]$  выполняется неравенство

$$C_1 |g(t, v)| \leq |p(t, v)| \leq C_2 |g(t, v)| \quad \forall v \in [v_1, v_2].$$

Введем вспомогательные вектор-функции:

$$\varphi^{(0)}(z) = \left( \varphi_1^{(0)}(z), \dots, \varphi_p^{(0)}(z) \right), \quad \varphi^{(0)} : I \rightarrow \mathbb{C}^p, \quad z(t, v) = te^{iv},$$

$$\psi_j^{(0)}(t, v) = \left| \varphi_j^{(0)}(z(t, v)) \right|, \quad j = \overline{1, p}, \quad \psi^{(0)}(t, v) = \left( \psi_1^{(0)}(t, v), \dots, \psi_p^{(0)}(t, v) \right).$$

**Определение 3.** Будем говорить, что аналитическая на множестве  $I$  вектор-функция  $\varphi^{(0)}(z)$  обладает свойством  $T_0$ , если для любых  $z(t, v) \in I$  выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \psi_j^{(0)}(t, v) > 0, \quad j = \overline{1, p}; \quad \left( \psi_j^{(0)}(t, v) \right)'_t > 0, \quad j = \overline{1, p}; \\ \left( \psi_j^{(0)}(t, v) \right)'_v > 0, \quad j = \overline{1, p}; \\ \psi_j^{(0)}(+0, v) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad \left( \psi_j^{(0)}(+0, v) \right)'_t = 0, \quad j = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

**Система (5) на множестве  $L_{v_0}$**

Рассмотрим систему (5) на отрезке  $L_{v_0}$  при произвольном фиксированном  $v_0 \in [v_1, v_2]$ .

При  $z = z(t, v_0) = te^{iv_0}$  в системе (5) представим каждую из функций и матриц в алгебраической форме, отделяя вещественные и мнимые части и вводя следующие обозначения:

$$Y(z(t, v_0)) = \tilde{Y}(t), \quad \tilde{Y}(t) = \tilde{Y}_1(t) + i\tilde{Y}_2(t);$$

$$\tilde{Y}_j(t) = \text{col}(\tilde{Y}_{j1}(t), \dots, \tilde{Y}_{jp}(t)), \quad j = 1, 2;$$

$$P(z(t, v_0)) = \|\tilde{p}_{jk}(t)\|_{j,k=1}^p = \tilde{P}_1(t) + i\tilde{P}_2(t),$$

$$\tilde{P}_s(t) = \|\tilde{p}_{jk}^{(s)}(t)\|_{j,k=1}^p, \quad s = 1, 2,$$

где  $\tilde{p}_{jk}(t) = \tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) + i\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t)$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ .

$$F(z(t, v_0), Y(z(t, v_0)), Y'(z(t, v_0))) = \tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2);$$

$$\tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) = \text{col}(\tilde{F}_1(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2), \dots, \tilde{F}_p(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2)),$$

$$\tilde{F}_j(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) = \tilde{F}_{1j}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) + i\tilde{F}_{2j}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2), \quad j = \overline{1, p}.$$

В итоге при  $z = z(t, v_0) = te^{iv_0}$  система (5) примет вид

$$\begin{aligned} (\tilde{Y}'_1 + i\tilde{Y}'_2) &= (\tilde{P}_1 + i\tilde{P}_2)(\tilde{Y}_1 + i\tilde{Y}_2) e^{iv_0} + \\ &+ e^{iv_0} \left( \text{Re}\tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) + i\text{Im}\tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем матрицы и вектор-функцию вида

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) & -\tilde{P}_2(t) \\ \tilde{P}_2(t) & \tilde{P}_1(t) \end{pmatrix}; \\ \tilde{f}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) &= \\ &= \text{col}(\tilde{F}_{11}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) \dots \tilde{F}_{1p}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) \dots \\ &\dots \tilde{F}_{21}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) \dots \tilde{F}_{2p}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2)); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tilde{Q}_1(v_0) = \begin{pmatrix} \cos(v_0) E & -\sin(v_0) E \\ \sin(v_0) E & \cos(v_0) E \end{pmatrix},$$

где  $E$  — единичная матрица размерности  $p \times p$ .

Приравняем слева и справа в системе (6) действительные и мнимые части записанных вектор-функций. Тогда система (6) примет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}'_1(t) \\ \tilde{Y}'_2(t) \end{pmatrix} = \tilde{P}(t) \tilde{Q}_1(v_0) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1(t) \\ \tilde{Y}_2(t) \end{pmatrix} + \tilde{Q}_1(v_0) \tilde{f}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2). \quad (8)$$

Таким образом, система (5) вдоль отрезка  $L_{v_0}$  при произвольном фиксированном  $v_0 \in [v_1, v_2]$  будет иметь вид (8).

**Система (5) на множестве  $O_{t_0}$**

Рассмотрим систему (5) вдоль дуги окружности  $O_{t_0}$  при произвольном фиксированном  $t_0 \in (0, t_1]$ .

При  $z = z(t_0, v) = t_0 e^{iv}$  в системе (5) представим каждую из функций и матриц в алгебраической форме, отделяя вещественные и мнимые части и вводя следующие обозначения:

$$Y(z(t_0, v)) = \hat{Y}(v), \quad \hat{Y}(v) = \hat{Y}_1(v) + i\hat{Y}_2(v);$$

$$\hat{Y}_j(v) = \text{col}(\hat{Y}_{j1}(v), \dots, \hat{Y}_{jp}(v)), \quad j = 1, 2$$

$$P(z(t_0, v)) = \|\hat{p}_{jk}(v)\|_{k,j=1}^p = \hat{P}_1(v) + i\hat{P}_2(v);$$

$$\hat{P}_s(v) = \|\hat{p}_{jk}^{(s)}(v)\|_{j,k=1}^p, \quad s = 1, 2,$$

$$\text{где } \hat{p}_{jk}(v) = \hat{p}_{jk}^{(1)}(v) + i\hat{p}_{jk}^{(2)}(v), \quad j, k = \overline{1, p}.$$

$$F(z(t_0, v), Y(z(t_0, v)), Y'(z(t_0, v))) = \hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2),$$

$$\hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) = \text{col}(\hat{F}_1(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2), \dots, \hat{F}_p(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2)),$$

$$\hat{F}_j(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) = \hat{F}_{1j}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) + i\hat{F}_{2j}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2),$$

$$j = \overline{1, p}.$$

В итоге при  $z = z(t_0, v) = t_0 e^{iv}$  система (5) примет вид

$$\begin{aligned} & (\hat{Y}'_1 + i\hat{Y}'_2) = it_0 e^{iv} (\hat{P}_1 + i\hat{P}_2) (\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2) + \\ & + it_0 e^{iv} (\text{Re}\hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) + i\text{Im}\hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2)). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем матрицы и вектор-функцию вида

$$\hat{P}(v) = \begin{pmatrix} \hat{P}_1(v) & -\hat{P}_2(v) \\ \hat{P}_2(v) & \hat{P}_1(v) \end{pmatrix};$$

$$\hat{f}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) =$$

$$= \text{col}(\hat{F}_{11}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) \dots \hat{F}_{1p}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) \dots$$

$$\dots \hat{F}_{21}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) \dots \hat{F}_{2p}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2));$$

$$\hat{Q}_1(v) = \begin{pmatrix} -\sin(v)E & -\cos(v)E \\ \cos(v)E & -\sin(v)E \end{pmatrix}.$$

Приравняем слева и справа в системе (9) действительные и мнимые части записанных вектор-функций. Тогда система (9) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}'_1(v) \\ \hat{Y}'_2(v) \end{pmatrix} = t_0 \tilde{P}(v) \hat{Q}_1(v) \begin{pmatrix} \hat{Y}_1(v) \\ \hat{Y}_2(v) \end{pmatrix} + t_0 \hat{Q}_1(v) \hat{f}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2). \quad (10)$$

Таким образом, система (5) вдоль дуги окружности  $O_{t_0}$  при произвольном фиксированном  $t_0 \in (0, t_1]$  будет иметь вид (10).

### Некоторые классы функций и свойства систем

Введем вспомогательное свойство  $S_1$ , согласно которому элементы матрицы  $P(z)$  удовлетворяют некоторым условиям.

**Определение 4.** Будем говорить, что матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , если выполняются условия:

- 1) функции  $\left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)'_t$  обладают свойством  $Q_1$  относительно функций  $|\tilde{p}_{jj}(t)|\psi_j^{(0)}(z(t, v_0))$ ,  $j = \overline{1, p}$ , на множестве  $I$  при  $t \rightarrow +0$ ;
- 2) функции  $\left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)'_v$  обладают свойством  $Q_2$  относительно функций  $|\hat{p}_{jj}(v)|\psi_j^{(0)}(t_0, v)$ ,  $j = \overline{1, p}$ , на множестве  $I$ ;
- 3) функции  $|\tilde{p}_{jk}(t)|\psi_k^{(0)}(t, v_0)$  обладают свойством  $Q_1$  относительно функций  $\left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)'_t$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ ,  $j \neq k$ , на множестве  $I$  при  $t \rightarrow +0$ ;
- 4) функции  $|\hat{p}_{jk}(v)|\psi_k^{(0)}(t_0, v)$  обладают свойством  $Q_2$  относительно функций  $\left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)'_v$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ ,  $j \neq k$ , на множестве  $I$ .

Введем вспомогательное свойство  $M_1$ , согласно которому элементы вектор-функции  $F(z, Y, Y')$  удовлетворяют некоторым условиям.

Обозначим множества:

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \\ & = \left\{ (t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) : t \in (0, t_1], \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 < \delta_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)^2, j = \overline{1, p} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) = \\ & = \left\{ (v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) : v \in [v_1, v_2], \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 < \tau_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)^2, j = \overline{1, p} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $v_0$  — фиксировано на  $[v_1, v_2]$ ,  $t_0$  фиксировано на  $(0, t_1]$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ ,  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_p)$ ,  $\delta_j, \tau_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{1, p}$ .

**Определение 5.** Будем говорить, что вектор-функция  $F(z, Y, Y')$  обладает свойством  $M_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , если выполняются условия:

- 1) для любых  $(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) \in \tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  функции  $\tilde{F}_{kj}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2)$  обладают свойством  $Q_1$  на множестве  $I$  относительно функций  $|\tilde{p}_{jj}(t)| \times \psi_j^{(0)}(z(t, v_0))$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = 1, 2$  при  $t \rightarrow +0$ ;

- 2) для любых  $(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \in \hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  функции  $\hat{F}_{kj}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2)$  обладают свойством  $Q_2$  на множестве  $I$  относительно функций  $|\hat{p}_{jj}(v)| \times \psi_j^{(0)}(t_0, v)$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = 1, 2$ .

Проведем дальнейшую классификацию свойств матрицы  $P(z)$ .

Введем вспомогательные функции  $\tilde{\alpha}_{jk}(t)$ ,  $\hat{\alpha}_{jk}(v)$ ,  $j, k = \overline{1, p}$  так, что:

$$\begin{cases} \cos(\tilde{\alpha}_{jk}(t)) = \frac{\hat{p}_{jk}^{(1)}(t)}{\sqrt{(\hat{p}_{jk}^{(1)}(t))^2 + (\hat{p}_{jk}^{(2)}(t))^2}} \\ \sin(\tilde{\alpha}_{jk}(t)) = \frac{\hat{p}_{jk}^{(2)}(t)}{\sqrt{(\hat{p}_{jk}^{(1)}(t))^2 + (\hat{p}_{jk}^{(2)}(t))^2}} \end{cases} \quad j, k = \overline{1, p}; \quad (13)$$

$$\begin{cases} \cos(\hat{\alpha}_{jk}(v)) = \frac{\hat{p}_{jk}^{(1)}(v)}{\sqrt{(\hat{p}_{jk}^{(1)}(v))^2 + (\hat{p}_{jk}^{(2)}(v))^2}} \\ \sin(\hat{\alpha}_{jk}(v)) = \frac{\hat{p}_{jk}^{(2)}(v)}{\sqrt{(\hat{p}_{jk}^{(1)}(v))^2 + (\hat{p}_{jk}^{(2)}(v))^2}} \end{cases} \quad j, k = \overline{1, p}. \quad (14)$$

Пусть  $t^* = \min(R_1, t_1)$ , тогда введем области  $\Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$ , которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{+,+}(t^*) &= \{(t, v) : \cos(v + \tilde{\alpha}_{jk}(t)) > 0, \\ &\sin(v + \hat{\alpha}_{jk}(v)) > 0, j, k = \overline{1, p}, t \in (0, t^*), v \in (v_1, v_2)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{+,-}(t^*) &= \{(t, v) : \cos(v + \tilde{\alpha}_{jk}(t)) > 0, \\ &\sin(v + \hat{\alpha}_{jk}(v)) < 0, j, k = \overline{1, p}, t \in (0, t^*), v \in (v_1, v_2)\}. \end{aligned}$$

**Определение 6.** Будем говорить, что система (5) принадлежит классу  $K_{+,k}$ , если матрица  $P(z) = P(te^{iv})$  такова, что  $(t, v) \in \Phi_{+,k}$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

$$G_{1+,k}(t^*) = \{z : 0 < |z| < t^*, \text{Arg}z \in \Phi_{+,k}(t^*)\}, k \in \{+, -\}.$$

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Изучим асимптотику решений задачи Коши (1)–(2) в случае, когда матрица  $B(z)$  имеет в точке  $z = 0$  устранимую особую точку и система (5) принадлежит одному из классов  $K_{+,k}$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

**Теорема 1.** Пусть для системы (1) выполняются условия:

1. Однозначная матрица  $A : D_1 \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p}$  является аналитической в области  $D_1$ ,  $\text{rang}A(z) = p$  при  $z \in D_1$ ;
2.  $B(z)$  — аналитическая матрица в области  $D_{10}$ , которая в точке  $z = 0$  имеет устранимую особую точку и такова, что соответствующая матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$  относительно некоторой вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ ;
3. Вектор-функция  $f(z, Y, Y')$  является аналитической в области  $D_{10} \times G_{10} \times \times G_{20}$  и такова, что соответствующая функция  $F(z, Y, Y')$  обладает свойством  $M_1$  относительно некоторой вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ ;

4. Соответствующая системе (1) система (5) принадлежит одному из классов  $K_{+,k}$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

Тогда для каждого  $k \in \{+, -\}$  существует  $t^* \in (0, t_1)$ , для которого решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям  $Y(z_0) = Y_0$  при  $z_0 \in G_{1.,k}(t^*)$ ,  $Y_0 \in \{Y : |Y_j(z_0)| < \delta_j |\varphi_j^{(0)}(z_0)|, \delta_j > 0, j = \overline{1, p}\}$  аналитично в области  $D_1 \cap G_{1.,k}(t^*)$  и обладает в этой области оценкой

$$|Y_j(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j^{(0)}(z)|^2, j = \overline{1, p}. \quad (15)$$

**Доказательство.**

1. Рассмотрим систему (5) на отрезке  $L_{v_0}$  при фиксированном значении  $v_0 \in (v_1, v_2)$ .

Рассмотрим множество  $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  как пересечение множеств  $\widetilde{\Omega}_j$  вида

$$\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \bigcap_{j=1}^p \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))),$$

где

$$\begin{aligned} & \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \\ & = \left\{ (t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) : \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 < \delta_j^2 (\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2, t \in (0, t_1] \right\}. \end{aligned}$$

Часть границы множества  $\widetilde{\Omega}_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ , будем обозначать так:

$$\begin{aligned} & \partial \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \\ & = \left\{ (t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) : \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 = \delta_j^2 (\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2, \tilde{Y}_{1k}^2 + \tilde{Y}_{2k}^2 < \delta_k^2 (\psi_k^{(0)}(t, v_0))^2, \right. \\ & \left. k = \overline{1, p}, k \neq j, t \in (0, t_1] \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\widetilde{\Phi}_j(t, \tilde{Y}(t)) = \tilde{Y}_{1j}^2(t) + \tilde{Y}_{2j}^2(t) - \delta_j^2 \left| \varphi_j^{(0)}(t, v_0) \right|^2, j \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Тогда вектор внешней нормали поверхности  $\partial \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$  при фиксированном  $j \in \{1, \dots, p\}$  будет иметь вид

$$\vec{N}_j = \left( -\delta_j^2 \cdot \psi_j^{(0)}(t, v_0) \cdot (\psi_j^{(0)}(t, v_0))'_t, 0, \dots, 0, \tilde{Y}_{1j}, 0, \dots, 0, \tilde{Y}_{2j}, 0, \dots, 0 \right).$$

Пусть  $\vec{T}$  — вектор поля направлений системы (8) в произвольной фиксированной точке  $(t^*, \tilde{Y}(t^*)) \in \partial \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ .

Обозначим:

$$\begin{aligned}
 S_{1j} &= \sum_{k=1}^p [(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin(v_0))\tilde{Y}_{1k} + \\
 &+ (\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos(v_0))\tilde{Y}_{2k}] + (\tilde{F}_{1j} \cos v_0 - \tilde{F}_{2j} \sin v_0), \quad j = \overline{1, p}; \\
 S_{2j} &= \sum_{k=1}^p [(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin(v_0))\tilde{Y}_{2k} + \\
 &+ (\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin(v_0) + \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos(v_0))\tilde{Y}_{1k}] + (\tilde{F}_{1j} \sin v_0 + \tilde{F}_{2j} \cos v_0), \quad j = \overline{1, p}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}
 \left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) &= -\delta_j^2 \cdot \psi_j^{(0)}(t, v_0) \cdot (\psi_j^{(0)}(t, v_0))'_t + S_{1j}\tilde{Y}_{1j} + S_{2j}\tilde{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1, p}. \\
 \left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) &= -\delta_j^2 \cdot \psi_j^{(0)}(t, v_0) \cdot (\psi_j^{(0)}(t, v_0))'_t + (\tilde{p}_{jj}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \\
 &\quad - \tilde{p}_{jj}^{(2)}(t) \sin(v_0)) \delta_j^2 (\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2 + \\
 &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \left( \tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin(v_0) \right) \left( \tilde{Y}_{1k}\tilde{Y}_{1j} + \tilde{Y}_{2k}\tilde{Y}_{2j} \right) + \\
 &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \left( \tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin(v_0) + \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos(v_0) \right) \left( \tilde{Y}_{2k}\tilde{Y}_{1j} - \tilde{Y}_{1k}\tilde{Y}_{2j} \right) + \\
 &+ \left( \tilde{F}_{1j} \cos v_0 - \tilde{F}_{2j} \sin v_0 \right) \tilde{Y}_{1j} + \left( \tilde{F}_{1j} \sin v_0 + \tilde{F}_{2j} \cos v_0 \right) \tilde{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Так как, по условию, матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$ , а вектор-функция  $F(z, Y, Y')$  обладает свойством  $M_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , то

$$\left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) \rightarrow \sqrt{(\tilde{p}_{jj}^{(1)}(t))^2 + (\tilde{p}_{jj}^{(2)}(t))^2} (\cos(v_0 + \tilde{\alpha}_{jj}(t))), \quad (17)$$

$j = \overline{1, p}$  при  $t \rightarrow +0$ ,

где функция  $\tilde{\alpha}_{jj}(t)$  такова, что выполняется равенство (13).

Так как система (5) принадлежит одному из классов  $K_{+,k}(t, v)$ ,  $k \in \{+, -\}$ , то существует такое  $t^*$ , что при  $t \in (0, t^*)$  справедливо  $\left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) > 0$ ,  $j = \overline{1, p}$ .

Следовательно, при  $t \in (0, t^*)$  поверхность  $\partial\tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  является поверхностью без контакта для системы (8), причем при убывании переменной  $t$  интегральная кривая входит в область  $\tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ .



Через каждую точку множества

$$\tilde{\Omega} \left( \delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)) \right) \cup \partial \tilde{\Omega} \left( \delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)) \right) \cap (t = t^*)$$

проходит хотя бы одна гладкая интегральная кривая системы (8), и все интегральные кривые данной системы, проходящие через точки этого множества, остаются в области  $\tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  при  $(t, v_0) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$ ,  $v_0 \in (v_1, v_2)$ ,  $t \in (0, t^*)$ . Причем выполнено неравенство

$$|Y_{sj}(z(t, v_0))|^2 < \delta_j^2 (\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2, j = \overline{1, p}, s = 1, 2, \quad (18)$$

при  $(t, v_0) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

2. Рассмотрим поведение решений системы (5) вдоль дуги окружности  $O_{t_0}$  при фиксированном  $t_0 \in (0, t_1)$ .

Рассмотрим множество  $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  как пересечение множеств  $\widehat{\Omega}_j$  вида

$$\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) = \bigcap_{j=1}^p \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))), v \in [v_1, v_2],$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) &= \\ &= \left\{ (v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) : \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 < \tau_j^2 (\psi_j^{(0)}(t_0, v))^2, t \in (0, t_1) \right\}. \end{aligned}$$

Часть границы множества  $\widehat{\Omega}_j$ ,  $j = \{1, 2, \dots, p\}$ , будем обозначать так:

$$\begin{aligned} \partial \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) &= \left\{ (v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) : \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 = \tau_j^2 (\psi_j^{(0)}(t_0, v))^2, \right. \\ &\quad \left. \hat{Y}_{1k}^2 + \hat{Y}_{2k}^2 < \tau_k^2 (\psi_k^{(0)}(t_0, v))^2, k = \overline{1, p}, k \neq j \right\}. \end{aligned}$$

Изучим поведение интегральных кривых системы (10) на поверхности  $\partial \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  при фиксированном  $j \in \{1, \dots, p\}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\vec{T}}{t_0}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) &= -\tau_j^2 \psi_j^{(0)}(t_0, v) \cdot \left( \psi_j^{(0)}(t_0, v) \right)'_v(t_0, v) + (\hat{p}_{jj}^{(1)}(v) \cos(v) - \\ &\quad - \hat{p}_{jj}^{(2)}(v) \sin(v)) \tau_j^2 (\psi_j^{(0)}(t_0, v))^2 + \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \left( \hat{p}_{jk}^{(1)}(v) \cos(v) - \hat{p}_{jk}^{(2)}(v) \sin(v) \right) (\hat{Y}_{1k} \hat{Y}_{1j} + \hat{Y}_{2k} \hat{Y}_{2j}) + \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \left( -\hat{p}_{jk}^{(1)}(v) \sin(v) - \hat{p}_{jk}^{(2)}(v) \cos(v) \right) (\hat{Y}_{2k} \hat{Y}_{1j} - \hat{Y}_{1k} \hat{Y}_{2j}) + \end{aligned}$$

$$+ \left( \hat{F}_{1j} \cos v - \hat{F}_{2j} \sin v \right) \hat{Y}_{1j} + \left( -\hat{F}_{1j} \sin v - \hat{F}_{2j} \cos v \right) \hat{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (19)$$

Так как, по условию, матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$ , а вектор-функция  $F(z, Y(z), Y'(z))$  обладает свойством  $M_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , то

$$\left( \frac{\vec{T}}{t_0}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) \rightarrow \sqrt{\left( \hat{p}_{jj}^{(1)}(v) \right)^2 + \left( \hat{p}_{jj}^{(2)}(v) \right)^2} \cdot \sin((v) + \hat{\alpha}_{jj}(v)), \quad j = \overline{1, p},$$

при  $t \rightarrow 0$ ,  $v \in [v_1, v_2]$ , где функция  $\hat{\alpha}_{jj}(v)$  такова, что выполняется равенство (14). Следовательно,

$$\text{sign} \left( \frac{\vec{T}}{t_0}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) = \text{sign} (\sin(v + \hat{\alpha}_{jj}(v))), \quad j = \overline{1, p}. \quad (20)$$

И существует  $t^* \in (0; t_1)$ , такое, что, не ограничивая общности, для каждого фиксированного  $t_0 \in (0, t^*)$  поверхность  $\partial \hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$  является поверхностью без контакта для системы (10).

Так как система (5) принадлежит классу  $K_{+,k}(t, v)$ ,  $k \in \{+, -\}$ , то всякая интегральная кривая системы (10), проходящая через точку множества

$$\hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \cap (v = v^*)$$

если  $(t_0, v^*) \in \Phi_{+,+}(t^*)$ , остается в области  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  при убывании  $v$ , а если  $(t_0, v^*) \in \Phi_{+,-}(t^*)$ , то остается в области  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  при возрастании  $v$ .

Причем выполнено неравенство

$$|Y_{sj}(z(t_0, v))|^2 < \tau_j^2 \left| \psi_j^{(0)}(t_0, v) \right|^2, \quad j = \overline{1, p}, \quad s = 1, 2, \quad (21)$$

$$(t_0, v) \in \Phi_{+,k}(t^*), \quad k \in \{+, -\}.$$

3. Применим метод аналитического продолжения, предложенный Р. Г. Грабовской, развитый Г. Е. Самковой и использованный Н. В. Шарай в доказательстве пункта 3 теоремы 2.1 [6]. Предположим, что выполняются неравенства

$$\delta_j^2 < \tau_j^2, \quad j = \overline{1, p}. \quad (22)$$

В пункте 1 доказательства настоящей теоремы получено, что вдоль кривой  $L_{v_0}$ ,  $v_0 \in (v_1, v_2)$  при  $t \in (0, t^*)$  существует хотя бы одно непрерывное дифференцируемое решение системы (8), удовлетворяющее оценке (18). Обозначим множество таких решений  $\{Y(z(t, v_0))\}$ .

Любое решение  $Y(z(t, v_0))$  из множества  $\{Y(z(t, v_0))\}$  можно аналитически продолжить с  $L_{v_0}$ , где  $(t, v) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ , при фиксированном  $v_0 \in (v_1, v_2)$  на содержащую ее область с сохранением оценки (18).

Из пункта 2 доказательства настоящей теоремы вытекает, что при выполнении неравенства (22), решение  $Y(z(t, v_0))$  при фиксированном  $v_0$  можно продолжить с кривой  $L_{v_0}$  вдоль кривых  $O_{t_0}$  на множество

$\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \cap (v = v^*)$ , при  $t \in (0, |z_0|]$ , при этом, аналитическое продолжение обозначим  $Y(z)$ . Получим множество решений  $\{Y(z)\}$ .

В итоге получаем, что всякое решение  $Y(z)$  аналитически продолжаемо в область  $G_{1+.k}(t^*) \times \{Y : |Y_{sj}| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1, p}, s = 1, 2\}$ , причем в данной области выполнено неравенство (15). А значит, система (1) имеет хотя бы одно аналитическое решение, удовлетворяющее оценке (15), при  $z \in D_1 \cap G_{1+.k}(t^*)$ .

Теорема доказана.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В настоящей работе задача (1)–(2) изучена в предположении, что  $\text{rank } A(z) = p$  в области  $D_1$ , матрица  $B(z)$  имеет в точке  $z = 0$  устранимую особую точку, а вектор-функция  $f(z, Y, Y')$  является аналитической всюду в  $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$  и в точке  $(0, 0, 0)$  имеет изолированную особую точку. Для данного случая найдены достаточные условия существования решений системы (1) и доказано, что система (1) имеет хотя бы одно аналитическое решение в области  $D_1 \cap G_{1+.k}(t^*)$ , обладающее оценкой (15) при  $z \in D_1 \cap G_{1+.k}(t^*)$ .

1. **Грабовская Р. Г.** Об асимптотическом поведении решения системы двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка / Р. Г. Грабовская // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. XI, № 4. – С. 639–644.
2. **Грабовская Р. Г.** Асимптотика систем дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных / Р. Г. Грабовская, Й. Диблик // Деп. в ВИНТИ, № 1786. – 78 ДЕП. – С. 49.
3. **Самкова Г. Е.** Существование и асимптотическое поведение аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем, неразрешенных относительно производных / Г. Е. Самкова // Диф. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 2012–2013.
4. **Самкова Г. Е.** Об исследовании некоторой полуживной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц / Г. Е. Самкова, Н. В. Шарай // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5, № 2. – С. 224–236.
5. **Самойленко А. М.** Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных / А. М. Самойленко // Укр. мат. журнал. – 2002. – Т. 54, № 11. – С. 1505–1517.
6. **Шарай Н. В.** Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь / Н. В. Шарай, Г. Є. Самкова // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 181–188.
7. **Шкиль Н. И.** Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – Киев: Вища школа, 1991. – 207 с.
8. **Diblic J.** On the an asymptotic behavior of solutions of a certain system of quasilinear differential equations not solved wich respect to derivatives / J. Diblic // Rici Math. Univ. Parma. – 1987. – № 13. – P. 413–419.
9. **Jwano M.** On an n-parameter family of solutions of a nonlinear n-systems with an irregular type singularity / M. Jwano // Ann. Mathpuraed Appl. – 1985. – № 140. – С. 57–145.

10. **Song Guk** Boundary condition of a system of linear ordinary differential equations in a closed angle domain of complex plane / O Song Guk, Pak Ponk, Chol Permissible // Kwahagwonthongbo Bull. Acad. Sci. DPR Korea. – 2001. – № 3. – С. 2–4.

Mathematical Subject Classification: 49L20, 49K30, 93B12, 93B50, 90C30, 90C52  
УДК 517.977.58+517.977.54+519.853.6

**Є. М. Страхов, А. Т. Яровий**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## **ОДИН ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ СТРУКТУРНО–ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ**

**Страхов Є. М., Яровий А. Т. Один двокроковий метод для задач структурно-параметричної оптимізації лінійних систем керування.** У статті розглядається застосування двокрокового методу мінімізації функцій багатьох змінних у задачах структурно-параметричної оптимізації лінійних систем керування з фіксованими і нефіксованими точками перемикавання.

**Ключові слова:** лінійна система керування, структурно-параметрична оптимізація, нелінійне програмування, двокроковий метод.

**Страхов Е. М., Яровой А. Т. Один двухшаговый метод для задач структурно-параметрической оптимизации линейных систем управления.** В статье рассматривается применение двухшагового метода минимизации функций многих переменных в задачах структурно-параметрической оптимизации линейных систем управления с фиксированными и нефиксированными точками переключения.

**Ключевые слова:** линейная система управления, структурно-параметрическая оптимизация, нелинейное программирование, двухшаговый метод.

**Strakhov E. M., Yarovoy A. T. On a two-step algorithm in structural and parametric optimization problems of linear control systems.** This paper deals with applying of a two-step optimization algorithm for structural and parametric optimization problems of linear control systems with fixed and floating switching points.

**Key words:** linear control system, structural and parametric optimization, nonlinear programming, two-step algorithm.

**ВСТУП.** У математичних моделях складних технічних систем функції керування, як правило, мають структурно-параметричну форму. Це означає, що на певних відрізках часу керування задається за допомогою функцій, які залежать від часової змінної та параметрів. Таким чином, виникає задача знаходження оптимальних режимів системи у структурно-параметричних класах.

Одним з можливих підходів до розв'язування задач структурно-параметричної оптимізації систем керування є застосування варіаційного методу. За його допомогою будуються ітераційні процедури типу градієнтного спуску за обраними параметрами або точками перемикавання. Результати у цьому напрямку, зокрема, одержані в праці [3]. Однак ці методи алгоритмічно є досить складними, і їх застосування на практиці викликає певні труднощі.

Застосування принципу оптимальності та методу динамічного програмування Беллмана до задачі вибору оптимальної структури обґрунтовано у роботах [1, 2]. В них отримані рівняння Беллмана у інтегральній та диференціальній формах. Випадок структур керування, що містять фазову змінну, розглянутий у

статті [5]. Застосування методу динамічного програмування для систем з нефіксованою структурою висвітлене у [8]. В [6] одержані достатні умови оптимальності для задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикавання, в якій структура керування містить фазову змінну. Ці теоретичні результати дають можливість розробляти чисельні алгоритми структурно-параметричної оптимізації для задач з фіксованою і нефіксованою структурами за допомогою рівнянь Беллмана.

В даній статті розглядається застосування двокрокової ітераційної процедури мінімізації функцій багатьох змінних [7] для оптимізації параметрів лінійної системи керування з фіксованими точками перемикавання. Також запропоновано емпіричний алгоритм оптимізації параметрів і точок перемикавання в лінійній системі з нефіксованою структурою.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**1. Двокроковий метод мінімізації функцій.** На сучасному етапі розвитку науки вже розроблено та досліджено багато підходів до розв'язку задач нелінійного програмування, одним з яких є методи спуску. Загальний принцип цих методів полягає у побудові послідовних напрямків спуску (тобто зменшення значень функції), виходячи з певної початкової точки (початкового наближення). Різні класи методів спуску визначаються, в першу чергу, способами побудови напрямків спуску.

Розрізняють методи нульового (при обчисленнях використовуються тільки значення функції в точках простору), першого (крім значень функції, обчислюється її перша похідна), другого (використовується друга похідна) порядків. Також методи поділяють на однокрокові та багатокрокові. Однокрокові алгоритми на  $(k+1)$ -й ітерації враховують лише ті значення функції та її похідних, які були отримані на попередньому кроці. Багатокрокові алгоритми використовують додатково інформацію, отриману на більш ранніх етапах процесу оптимізації. За рахунок цього вони є більш ефективними порівняно з однокроковими. Класичним двокроковим методом першого порядку є метод спряжених градієнтів.

Розглянемо задачу нелінійного програмування

$$f(x) \rightarrow \min, x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Для її розв'язання пропонується двокроковий метод [7]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \beta_k s_k, k = 0, 1, \dots, \\ s_0 &= -f'(x_0), s_k = -H_k f'(x_k) + \xi_k s_{k-1}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$  – послідовні наближення,  $s_0, s_1, \dots, s_k, \dots$  – напрямки спуску,  $\beta_k$  та  $\xi_k$  – числові параметри. Матриці  $H_k$  будемо перераховувати рекурентним способом за алгоритмом Девідона–Флетчера–Пауелла

$$H_k = H_{k-1} + \frac{r_{k-1} r_{k-1}^T}{\langle r_{k-1}, e_{k-1} \rangle} - \frac{H_{k-1} e_{k-1} e_{k-1}^T H_{k-1}}{\langle H_{k-1}^T e_{k-1}, e_{k-1} \rangle}, \quad (1.3)$$

де  $r_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $e_k = f'(x_{k+1}) - f'(x_k)$ . У якості  $H_0$  можна взяти довільну симетричну додатно означену матрицю, наприклад, одиничну. Через певну кількість кроків проводиться операція відновлення матриці, тобто покладаємо  $H_{k+1} = H_0$ .

На практиці рекомендується здійснювати відновлення через кожні  $n$  кроків, де  $n$  – вимірність простору.

Існує декілька способів обчислення параметру  $\xi_k$ . Скористаємося формулою для яристого методу спряжених градієнтів [4]

$$\xi_k = \frac{(f'(x_k) - f'(x_{k-1}), f'(x_{k-1}))}{(s_{k-1}, f'(x_{k-1}))}. \quad (1.4)$$

Опишемо алгоритм обчислення параметру  $\beta_k$ . Нехай  $\beta_0 = 1$ . На  $k$ -му кроці спочатку покладаємо  $\beta_k = \beta_{k-1}$ . Якщо при цьому  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ , то або переходимо до наступної ітерації, або покладаємо  $\beta_k = 2\beta_{k-1}$ . Якщо значення  $f(x)$  менше за попереднє, то процес подвоєння продовжуємо до тих пір, поки спадання не припиниться. Якщо ж  $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ , то покладаємо  $\beta_k = 0,5\beta_{k-1}$ . Якщо  $f(x_k + 0,5\beta_{k-1}s_k) < f(x_k)$ , то переходимо до наступної ітерації. Якщо ж  $f(x_k + 0,5\beta_{k-1}s_k) \geq f(x_k)$ , то покладаємо  $\beta_k = 0,25\beta_{k-1}$  і т. д. Метод описаний.

**Означення 1.** Вектори  $s_0, \dots, s_{n-1}$  називаються *A-ортогональними* (спряженими), якщо вони задовольняють умовам

$$(s_i, As_j) = 0, \quad i \neq j.$$

**Теорема 1.** [7] *Напрямки спуску, визначені за схемою (1.2)–(1.4), є спряженими для квадратичної функції вигляду*

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c,$$

де  $A$  – симетрична додатно означена матриця розмірності  $n \times n$  з постійними елементами,  $b$  – вектор,  $c$  – скаляр.

**Теорема 2.** [7] *Нехай для мінімізації сильно опуклої двічі диференційованої функції  $f(x)$ , яка задовольняє умовам*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : m\|y\|^2 \leq (f''(x)y, y) \leq M\|y\|^2, \quad m > 0,$$

використовується процес (1.2), в якому побудова матриці  $H_k$  здійснюється за методом (1.3), причому через  $n$  кроків здійснюється відновлення  $H_k$ . Тоді якщо значення  $\beta_k$  визначається з умови мінімуму функції у напрямку  $s_k$ , то послідовність  $\{x_k\}$  незалежно від вибору початкової точки  $x_0$  збігається до розв'язку зі зверхлінійною швидкістю.

Результати чисельних експериментів на тестових функціях вказують на те, що двокроковий алгоритм (1.2)–(1.4) дає краще наближення до точки мінімуму при меншій кількості ітерацій порівняно із класичним методом спряжених градієнтів [7].

**2. Структурно-параметрична оптимізація лінійних систем керування з фіксованими точками перемикання.** Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t), \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Тут  $x$  – вектор фазових координат розмірності  $n$ ,  $u$  – вектор керування розмірності  $m$ ,  $A(t)$ ,  $C(t)$  – матриці з неперервними компонентами.

Нехай керування в системі (2.1) задане у вигляді

$$u(t) = R(b_i) x(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (2.2)$$

де  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  – фіксовані точки перемикання,  $b_i$  – невідомі числові параметри,  $R(b_i)$  – матриця розмірності  $m \times n$ , елементи якої є неперервно диференційованими за параметрами  $b_i$ . Розглянемо випадок  $b_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ . Задача полягає в мінімізації критерію якості

$$J(x, u) = \langle P_0 x(T), x(T) \rangle, \quad (2.3)$$

де  $P_0$  – невід’ємно означена симетрична матриця.

Маємо задачу оптимізації параметрів системи (2.1)–(2.2) при фіксованих точках перемикання. У [5] обґрунтований принцип оптимальності Беллмана для такої задачі, отримане інтегро-диференціальне рівняння Беллмана.

Функція Беллмана шукається у вигляді квадратичної форми

$$B(z, t) = \langle P(t) z, z \rangle,$$

де  $P(t)$  – невідома матриця розмірності  $n \times n$  з неперервно диференційованими компонентами. При цьому

$$\frac{\partial B(z, \tau)}{\partial \tau} = \left\langle \frac{dP(\tau)}{d\tau} z, z \right\rangle, \quad \text{grad}_z B(z, \tau) = (P(\tau) + P^T(\tau)) z.$$

З означення функції Беллмана випливає, що  $P(T) = P_0$ . Тоді інтегро-диференціальне рівняння Беллмана для задачі (2.1)–(2.3) на відрізку  $t \in [t_s, t_{s+1}]$  має вигляд

$$\inf_{b_s} \left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[ \left\langle \frac{dP(\tau)}{d\tau} x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \langle (P(\tau) + P^T(\tau)) x(\tau), A(\tau) x(\tau) + C(\tau) R(b_s) x(\tau) \rangle \right] d\tau \right\} = 0.$$

Зробивши перетворення та згрупувавши подібні члени, отримаємо рівняння

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} \left\langle \left( \frac{dP(\tau)}{d\tau} + A^T(\tau) P(\tau) + P(\tau) A(\tau) \right) x(\tau), x(\tau) \right\rangle d\tau + \inf_{b_s} \left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \langle (R^T(b_s) C^T(\tau) P(\tau) + P(\tau) C(\tau) R(b_s)) x(\tau), x(\tau) \rangle d\tau \right\} = 0.$$

Позначимо

$$I_s = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \langle (R^T(b_s) C^T(\tau) P(\tau) + P(\tau) C(\tau) R(b_s)) x(\tau), x(\tau) \rangle d\tau,$$

$$Q_s(t, b_s) = R^T(b_s) C^T(\tau) P(\tau) + P(\tau) C(\tau) R(b_s), \quad s = 0, 1, \dots, N-1.$$

Тоді

$$\frac{dI_s}{db_s} = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[ \left\langle \frac{\partial Q_s(\tau, b_s)}{\partial b_s} x(\tau), x(\tau) \right\rangle + \right]$$



$$+ \left\langle (Q_s(\tau, b_s) + Q_s^T(\tau, b_s)) \frac{\partial x(\tau)}{\partial b_s}, x(\tau) \right\rangle d\tau, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial Q_s(t, b_s)}{\partial b_s} = \frac{\partial R^T(b_s)}{\partial b_s} C^T(\tau) P(t) + P(t) C(\tau) \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s}. \quad (2.5)$$

Перепишемо систему (2.1) з урахуванням структури керування. Ця система на відрізку  $t \in [t_s, t_{s+1}]$  еквівалентна інтегральному рівнянню

$$x(t) = x(t_s) + \int_{t_s}^t (A(\tau) + C(\tau) R(b_s)) x(\tau) d\tau.$$

Тоді

$$\frac{\partial x(t)}{\partial b_s} = \int_{t_s}^t C(\tau) \left[ \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s} x(\tau) + R(b_s) \frac{\partial x(\tau)}{\partial b_s} \right] d\tau.$$

Позначимо  $U_s(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial b_s}$ ,  $f(t) = \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s} x(t)$ . Таким способом, з останнього співвідношення отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dU_s(t)}{dt} = C(t)R(b_s) U_s(t) + C(t)f(t), U_s(t_s) = 0. \quad (2.6)$$

Отже, маємо наступний алгоритм знаходження оптимальних значень параметрів  $b_s$  ( $s = 0, 1, \dots, N - 1$ ) у задачі (2.1)–(2.3).

1. Задаємо початкові наближення векторів параметрів  $b_s^{(0)}$  на кожному з інтервалів  $[t_s, t_{s+1}]$ ,  $s = 0, 1, \dots, N - 1$ .
2. Обчислюємо  $R(b_s^{(0)})$  та  $\frac{\partial R}{\partial b_s}(b_s^{(0)})$ .
3. Розв'язуємо систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + C(t)R(b_s^{(0)})) x(t), x(t_0) = x_0$$

та знаходимо траєкторію  $x(t, b_s^{(0)})$ .

4. Обчислюємо  $f(t) = \frac{\partial R(b_s)}{\partial b_s} x(t)$  при початковому наближенні  $b_s^{(0)}$ . Далі, на кожному часовому інтервалі  $(t_s, t_{s+1})$ ,  $s = 0, 1, \dots, N - 1$  розв'язуємо систему (2.6) та знаходимо  $U_s(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial b_s}$  при  $b_s = b_s^{(0)}$ .
5. Записуємо систему для визначення невідомої матриці  $P(t)$ .

$$\frac{dP(t)}{dt} = - \left[ (A(t) + C(t)R(b_s))^{T} P(t) + P(t) (A(t) + C(t)R(b_s)) \right],$$

$$P(T) = P_0.$$

Розв'язавши цю систему при  $b_s = b_s^{(0)}$  для  $s = 0, 1, \dots, N - 1$ , отримуємо матрицю  $P(t)$ .

6. Підставляємо отримані величини у співвідношення (2.4) та (2.5) та знаходимо  $\frac{dJ_s}{db_s}$  при  $b_s = b_s^{(0)}$ ,  $s = 0, 1, \dots, N - 1$ .

7. На кожному з інтервалів  $t \in [t_s, t_{s+1}]$  скористаємося двокроковою ітераційною процедурою (1.2)–(1.3) для визначення набору параметрів  $b_s^*$ , що доставляють мінімум інтегралу  $I_s$ . Маємо

$$b_s^{(k+1)} = b_s^{(k)} + \beta_k s^{(k)}, k = 0, 1, \dots, \quad (2.7)$$

$$s^{(0)} = -\frac{dI_s}{db_s^{(0)}}, s^{(k)} = -H_k \frac{dI_s}{db_s^{(k)}} + \xi_k s^{(k-1)}, \quad (2.8)$$

де параметр  $\xi_k$  визначається за формулою (1.4).

8. Після визначення оптимального набору параметрів  $b_i^*$  за допомогою процедури (2.7)–(2.8) підставляємо цей набір у систему (2.1):

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + C(t)R(b_s^*)) x(t), x(t_0) = x_0.$$

Розв'язуємо цю систему та знаходимо оптимальну траєкторію  $x^*(t)$ .

9. Знаходимо оптимальне керування  $u^*(t) = R(b_s^*) x^*(t)$  для кожного  $s = 0, 1, \dots, N-1$ .

Опис алгоритму завершено.

**3. Структурно-параметрична оптимізація лінійних систем керування з нефіксованою структурою.** Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(x, u) = \int_{t_0}^T (\langle D(\tau)x(\tau), x(\tau) \rangle + \langle E(\tau)u(\tau), u(\tau) \rangle) d\tau + \langle P_0x(T), x(T) \rangle \rightarrow \inf \quad (3.1)$$

за умов

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t), \quad (3.2)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.3)$$

Керування  $u(\cdot)$  має вигляд

$$u(t) = u_j, t \in [t_j, t_{j+1}), j \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \quad (3.4)$$

Тут  $D(\tau)$ ,  $P_0$  – невід'ємно означені симетричні матриці,  $E(\tau)$  – додатно означена симетрична матриця,  $A(t)$ ,  $C(t)$  – матриці з неперервними компонентами. Вектори  $u_j$  є невідомими, точки перемикання  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$  – нефіксованими. Задача структурно-параметричної оптимізації полягає у знаходженні точок перемикання та параметрів  $u_j$  так, щоб керування з класу (3.4) доставляло мінімум функціоналу (3.1) за умов (3.2), (3.3). У [8] обґрунтована можливість застосування методу динамічного програмування для такої задачі, отримане диференціальне рівняння Гамільтона–Якобі–Беллмана.

Функцію Беллмана будемо шукати у вигляді квадратичної форми

$$B(z, t) = \langle P(t)z, z \rangle, \quad (3.5)$$

де  $P(t)$  – невідома матриця розмірності  $n \times n$  з абсолютно неперервними компонентами.

Диференціальне рівняння Гамільтона—Якобі—Беллмана для задачі (3.1)–(3.4) матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{dP(t)}{dt} z, z \right\rangle + \langle A^T(t)P(t)z, z \rangle + \langle P(t)A(t)z, z \rangle + \langle D(t)z, z \rangle + \\ & + \inf_{u_i} \{ \langle (P(t) + P^T(t))z, C(t)u_i \rangle + \langle E(t)u_i, u_i \rangle \} = 0. \end{aligned}$$

Матрицю  $P(t)$  будемо вибирати так, щоб

$$\frac{dP(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -D(t). \quad (3.6)$$

З граничної умови  $B(z, T) = \langle P_0 z, z \rangle$  та вигляду функції Беллмана (3.5) випливає, що

$$P(T) = P_0. \quad (3.7)$$

Враховуючи симетричність матриць  $D(t)$  та  $P_0$ , з рівняння (3.6) та умови (3.7) випливає, що матриця  $P(t)$  є симетричною. Тоді рівняння Гамільтона—Якобі—Беллмана запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{dP(t)}{dt} z, z \right\rangle + \langle A^T(t)P(t)z, z \rangle + \langle P(t)A(t)z, z \rangle + \langle D(t)z, z \rangle + \\ & + \inf_{u_i} \{ 2 \cdot \langle P(t)z, C(t)u_i \rangle + \langle E(t)u_i, u_i \rangle \} = 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$I(t, u_i) = 2 \cdot \langle P(t)z, C(t)u_i \rangle + \langle E(t)u_i, u_i \rangle.$$

Зафіксуємо деякий набір параметрів  $\{u_j^{(0)}\}$  та точок перемикання  $\{t_j^{(0)}\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Розглянемо варіацію величини  $I(t)$  за довільною фіксованою точкою перемикання  $t_k^{(0)}$ . Нехай  $h > 0$ . Тоді при  $\alpha > 0$  варіація керування має вигляд

$$u(t, \alpha, h) = \begin{cases} u_j^{(0)}, & t \in [t_j^{(0)}, t_{j+1}^{(0)}], j \in \{0, 1, \dots, k-1\}, \\ u_{k-1}^{(0)}, & t \in [t_k^{(0)}, t_k^{(0)} + \alpha h), \\ u_k^{(0)}, & t \in [t_k^{(0)} + \alpha h, t_{k+1}^{(0)}), \\ u_j^{(0)}, & t \in [t_j^{(0)}, t_{j+1}^{(0)}], j \in \{k+1, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

В результаті у точці  $t_k^{(0)}$  керування змінилося з  $u_k^{(0)}$  на  $u_{k-1}^{(0)}$ . Знайдемо різницю

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(t_k^{(0)}, u_{k-1}^{(0)}) - I(t_k^{(0)}, u_k^{(0)}) = \\ &= 2 \cdot \left\langle C^T(t)P(t)x(t_k^{(0)}), u_{k-1}^{(0)} \right\rangle - 2 \cdot \left\langle C^T(t)P(t)x(t_k^{(0)}), u_k^{(0)} \right\rangle + \\ &+ \left\langle E(t)u_{k-1}^{(0)}, u_{k-1}^{(0)} \right\rangle - \left\langle E(t)u_k^{(0)}, u_k^{(0)} \right\rangle = \\ &= 2 \cdot \left\langle C^T(t)P(t)x(t_k^{(0)}), u_{k-1}^{(0)} - u_k^{(0)} \right\rangle + \left\langle E(t)u_{k-1}^{(0)}, u_{k-1}^{(0)} \right\rangle - \left\langle E(t)u_k^{(0)}, u_k^{(0)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Якщо  $\Delta I < 0$ , тобто  $I(t_k^{(0)}, u_{k-1}^{(0)}) < I(t_k^{(0)}, u_k^{(0)})$ , то відбувається релаксація. Отже, замість точки  $t_k^{(0)}$  візьмемо  $t_k^{(1)} = t_k^{(0)} + \alpha h$ . Відповідно, у випадку  $\Delta I \geq 0$  покладемо  $t_k^{(1)} = t_k^{(0)}$ . Таким чином, послідовно варіюючи точки зміни структури від  $t_1^{(0)}$  до  $t_{N-1}^{(0)}$ , отримаємо новий набір точок  $\{t_j^{(1)}\}, j = 1, \dots, N - 1$ . Для цього набору можемо визначити оптимальні параметри, використовуючи двокроковий метод (1.2)–(1.3) на кожному з інтервалів (див. алгоритм для задачі з фіксованими точками перемикавання). Для нового набору параметрів знову варіюємо точки перемикавання і т. д. Процес можна продовжувати до тих пір, поки значення величини  $I(t, u)$  зменшується.

**Висновки.** У статті запропоновано два алгоритми побудови оптимального керування у структурно-параметричній формі для лінійних систем керування з фіксованими і нефіксованими точками перемикавання. Для визначення оптимальних параметрів застосовується двокроковий метод мінімізації функцій першого порядку, який є більш ефективним за класичні методи, такі як метод спряжених градієнтів.

1. **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація / Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. **Башняков О. М.** Задача синтезу в теорії керування / О. М. Башняков, В. В. Пічкур. – К.: Сталь, 2012. – 116 с.
3. **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
4. **Ларичев О. И.** Методы поиска локального экстремума овражных функций / О. И. Ларичев, Г. Г. Горвиц. – М.: Наука, 1989. – 95 с.
5. **Пічкур В. В.** Застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикавання / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2010. – Т. 15. Вип. 19. – С. 94–102.
6. **Пічкур В. В.** Достатні умови оптимальності в задачі структурно-параметричної оптимізації / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – № 1 (20). – С. 77–87.
7. **Страхов Є. М.** Дослідження збіжності багатокрокового методу / Є. М. Страхов, А. Т. Яровий // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2009. – Т. 14. Вип. 20. – С. 123–134.
8. **Strakhov E. M.** Dynamic Programming in Structural and Parametric Optimization / E. M. Strakhov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 82, no. 3. – P. 503–512.

Mathematical Subject Classification: 82B05, 82B26, 82B80, 82D05, 82D15  
УДК 533.75+536.4+536.92

М. В. Ушкац, К. Д. Евфимко

Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова

## ШЕСТОЙ ВИРИАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО ПОТЕНЦИАЛА ЛЕННАРД-ДЖОНСА

**Ушкац М. В., Евфимко К. Д. Шостий віріальний коефіцієнт для модифікованого потенціалу Леннарда-Джонса.** Для модифікованого потенціалу Леннарда-Джонса (mLJ), який має кінцевий радіус взаємодії, але зберігає при цьому неперервність у енергії та силі, розраховані значення шостого віріального коефіцієнта в діапазоні приведених температур  $0,2 \div 100$ . Ці дані, у свою чергу, дозволили отримати теоретичні значення критичних параметрів mLJ системи, близькі до експериментальних. При розрахунках використовувалась комплексна методика, що комбінє у собі квадратурні методи числового інтегрування та сучасний статистичний метод вибірки Майєра. Ця методика продемонструвала більшу універсальність та ефективність у порівнянні із оригінальною вибіркою Майєра.

**Ключові слова:** віріальний коефіцієнт, незвідний груповий інтеграл, квадратурне інтегрування, вибірка Майєра, модифікований потенціал Леннарда-Джонса.

**Ушкац М. В., Евфимко К. Д. Шестой вириальный коэффициент для модифицированного потенциала Леннарда-Джонса.** Для модифицированного потенциала Леннарда-Джонса (mLJ), имеющего конечный радиус взаимодействия, но сохраняющего, при этом, непрерывность в энергии и силе, рассчитаны значения шестого вириального коэффициента в диапазоне приведенных температур  $0,2 \div 100$ . Эти данные, в свою очередь, позволили получить теоретические значения критических параметров mLJ системы, близкие к экспериментальным. При расчетах использовалась комплексная методика, сочетающая в себе квадратурные методы численного интегрирования и современный статистический метод выборки Майєра. Эта методика продемонстрировала большую универсальность и эффективность по сравнению с оригинальной выборкой Майєра.

**Ключевые слова:** вириальный коэффициент, неприводимый групповой интеграл, квадратурное интегрирование, выборка Майєра, модифицированный потенциал Леннарда-Джонса.

**Ushcats M. V., Evfimko K. D. The sixth virial coefficient for the modified Lennard-Jones potential.** In the wide range of dimensionless temperatures  $0.2 \div 100$ , the sixth virial coefficient has been calculated for the modified Lennard-Jones potential (mLJ), which has a finite radius of interaction, while has no discontinuity in its energy and force. In turn, the data have allowed getting the theoretical values of critical parameters for mLJ system close enough to the experimental ones. In the computations, the new technique has been used, which combines the quadrature numerical integration and the Mayer Sampling Monte Carlo method (MSMC). This technique has demonstrated a higher universality and efficiency in comparison to the original MSMC.

**Key words:** virial coefficient, irreducible cluster integral, quadrature integration, Mayer Sampling Monte Carlo, modified Lennard-Jones potential.

**ВВЕДЕНИЕ.** В исследованиях поведения термодинамических систем большой плотности реальное воздействие молекул друг на друга часто моделируется упрощенными аналитическими выражениями силы или потенциальной энергии (потенциала) взаимодействия для каждой отдельной пары молекул [1].

Одним из самых известных и широко используемых модельных потенциалов подобного рода является двухпараметрический потенциал Леннарда-Джонса (LJ) 12-6 [2, 3], в котором энергия отталкивания обратно пропорциональна 12-й степени расстояния между молекулами, а энергия притяжения — 6-й степени этого расстояния.

К сожалению, бесконечный радиус взаимодействия LJ потенциала создает значительные технические трудности при проведении численных экспериментов, как на базе метода Монте-Карло [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], так и с помощью методов молекулярной динамики [9, 10, 11, 12, 13, 14]. В последние годы при компьютерном моделировании все большую популярность приобретает так называемый модифицированный потенциал Леннарда-Джонса (mLJ) [15, 16, 17]

$$u(r) = \begin{cases} 4\varepsilon \left[ \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right] + C_1; & r \leq 2,3\sigma \\ C_2 \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} + C_3 \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 + C_4 \left(\frac{r}{\sigma}\right)^2 + C_1; & 2,3\sigma < r < 2,5\sigma \\ 0; & r \geq 2,5\sigma \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — энергия диссоциации парной связи;  $\sigma$  — расстояние, на котором потенциал первый раз достигает нулевого значения;  $C_1 = 0,0163169237 \cdot \varepsilon$ ;  $C_2 = 3136,5686 \cdot \varepsilon$ ;  $C_3 = -68,069 \cdot \varepsilon$ ;  $C_4 = -0,0833111261 \cdot \varepsilon$ ;  $C_5 = 0,746882273 \cdot \varepsilon$ .

Этот потенциал (1) и его производная (соответствующая сила взаимодействия) не имеют разрывов и полностью обращаются в ноль на дистанции в  $2,5\sigma$ , что положительно выделяет mLJ потенциал среди других и делает его хорошим кандидатом на роль универсального эталона при сравнении различных теоретических и экспериментальных подходов и оценке их адекватности.

С другой стороны, в теоретических исследованиях mLJ потенциал пока не нашел широкого использования. В работе [18] для этого потенциала были впервые получены вириальные коэффициенты до пятого порядка, включительно. Расчеты, проведенные там же [18] на основе вириального уравнения и альтернативных выражений конфигурационного интеграла [19, 20, 21], показали достаточно хорошее совпадение с результатами численных экспериментов при не слишком больших плотностях. Однако в области конденсации пяти коэффициентов оказалось недостаточно для адекватного описания поведения mLJ системы. В частности, теоретические значения критических параметров этой системы [18] все еще значительно отличаются от экспериментальных [15, 16, 17].

Поэтому целью данной работы был расчет шестого вириального коэффициента для mLJ системы в широком интервале температур, что позволило бы уточнить теоретическое описание ее поведения в области большой плотности.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**1. Методика расчетов.** Согласно Майеру [22], вириальный коэффициент  $(k + 1)$ -го порядка в разложении давления по степеням плотности определяется выражением

$$B_{k+1} = -\frac{k}{k+1} \beta_k, \quad (2)$$

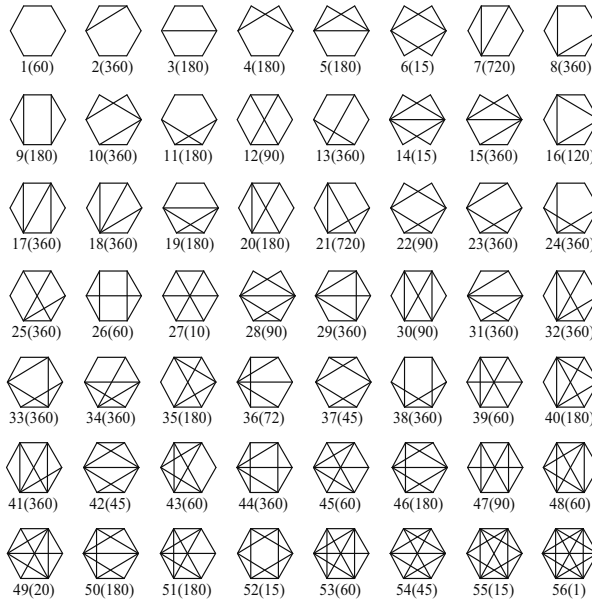


Рис. 1. Неприводимые графы шестого вириального коэффициента. Числа в скобках показывают кратность (вес) в общей сумме

где  $\beta_k$  — так называемый неприводимый групповой интеграл  $k$ -го порядка. При заданном потенциале взаимодействия  $u(r)$  величина  $\beta_k$  определяется как деленный на  $k!V$  интеграл суммы всех возможных произведений функций Майера

$$f(r) = \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) - 1 \quad (3)$$

для всех пар из  $(k+1)$  молекул по их конфигурационному пространству, который при этом не выражается через неприводимые интегралы более низких порядков.

Традиционные квадратурные методы, даже с использованием современных вычислительных средств, позволяют рассчитать неприводимые интегралы первого, второго, третьего и четвертого порядков (второй, третий, четвертый и пятый вириальные коэффициенты) [18, 23, 24]. Причем расчеты четвертого неприводимого интеграла оказываются очень громоздкими и требуют значительных вычислительных затрат [18].

Определение пятого неприводимого интеграла, с учетом симметрии относительно перестановок индексов шести молекул, означает суммирование 56 различных интегралов. Если функцию Майера (3) представить как линию, соединяющую пару молекул (“связь” молекул), то все эти интегралы можно изобразить в виде графов на рис. 1, где показаны также вес или кратность каждого интеграла (графа) в общей сумме. Расчет всей суммы квадратурными методами потребовал бы колоссальных вычислительных затрат и не представляется возможным даже с использованием самой современной техники.

Совершенно новый подход к вычислению вириальных коэффициентов был предложен коллективом под руководством Дэвида Кофке [25, 26, 27]. Он основан на методе зонтичной выборки (“umbrella sampling” – разновидность алгоритма Метрополис Монте-Карло [9]), где в качестве плотности вероятности используется само подынтегральное выражение (сумма различных произведений функций Майера) и сам по себе предназначен только для вычисления вириальных коэффициентов, что и определило его название – метод выборки Майера [25].

Суть выборки Майера состоит в определении неприводимого группового интеграла  $\Gamma$  порядка  $n$  по уже известному эталонному интегралу  $\Gamma_0$  (вариант прямой выборки)

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{\langle \gamma / \pi \rangle_{\pi}}{\langle \gamma_0 / \pi \rangle_{\pi}}. \quad (4)$$

В (4) символ  $\gamma$  означает величину подынтегрального выражения для искомого интеграла, а  $\gamma_0$  – для эталонного интеграла. Функция  $\pi$  в (4) представляет собой плотность вероятности, согласно которой принимается или отвергается данная конфигурация (точка в конфигурационном пространстве  $n$  молекул) в соответствии с обычным алгоритмом Метрополиса. Угловые скобки означают усреднение по всему ансамблю конфигураций.

В оригинальном варианте выборки Майера в качестве эталонных интегралов используются вириальные коэффициенты для потенциала твердых сфер, которые на сегодня довольно точно определены до десятого порядка, включительно. При высоких температурах подобный выбор эталона достаточно оправдан, но при низких и околокритических температурах принципиальная разница в поведении потенциалов Леннарда-Джонса и твердых сфер приводит к очень большим погрешностям вычислений. Поэтому при вычислении вириальных коэффициентов высоких порядков вместо прямой выборки (“direct sampling” в оригинальной формулировке) используется так называемая перекрывающаяся (“overlap sampling”) [28], которая, как минимум, удваивает сложность алгоритма и время вычислений. Но даже и в этом случае погрешности остаются довольно значительными, и для получения достоверных значений приходится использовать очень большое число шагов вычислений.

С целью повышения эффективности расчетов предлагается сочетание метода выборки Майера с квадратурными методами. Такое сочетание возможно благодаря тому, что из совокупности всех графов, формирующих полный неприводимый интеграл любого порядка, всегда найдется множество тех, которые достаточно просто рассчитываются методом квадратур.

При этом, с одной стороны, для определения вириального коэффициента останется вычислить методом выборки Майера сумму по меньшему числу графов, что означает большую скорость и простоту алгоритма при меньших погрешностях.

С другой стороны, уже известные (т. е. предварительно вычисленные методом квадратур) простые интегралы вполне могут использоваться как эталонные для определения  $\gamma_0$  в (4). Действительно, усложнение графов означает добавление новых “связей” (функций Майера), а значит, и ограничение фазового пространства соответствующих интегралов. С этой точки зрения интеграл, соответствующий самому простому графу в подобной иерархии, обладает общим для всех



своих производных (т. е. графов с дополнительными “связями”) конфигурационным пространством и может служить для них естественным эталоном. Такой выбор  $\gamma_0$  еще больше упрощает и ускоряет вычисления по сравнению с оригинальной методикой, где  $\gamma_0$  вычисляется по тому же алгоритму, что и  $\gamma$ , только для другого потенциала взаимодействия.

**2. Техническая реализация.** Для произвольной тройки молекул  $i, j$  и  $n$  для случая, когда последняя молекула связана функциями Майера только с двумя первыми, определим интеграл по всем возможным положениям в пространстве молекулы  $n$  при фиксированных  $i$  и  $j$  как функцию

$$\Phi(s_{ij}) = \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{ij}}} \int_0^\infty f(\sigma\sqrt{s_{in}}) ds_{in} \int_{\frac{(\sqrt{s_{ij}}-\sqrt{s_{in}})^2}{\sqrt{s_{ij}}}}^{\frac{(\sqrt{s_{ij}}+\sqrt{s_{in}})^2}{\sqrt{s_{ij}}}} f(\sigma\sqrt{s_{jn}}) ds_{jn}, \quad (5)$$

где  $s_{ij} = r_{ij}^2/\sigma^2$  – безразмерный квадрат расстояния между частицами с соответствующими номерами.

Двумерное интегрирование в (5) методом квадратур означает суммирование по узлам двумерной сетки переменных  $s_{in}$  и  $s_{jn}$ . К этому суммированию добавляется однократное, сферически симметричное, интегрирование по  $s_{ij}$ .

С помощью функции (5) и подобных ей, т. е. трехмерным суммированием, могут быть рассчитаны 15 из 56 графов пятого неприводимого интеграла (интегралы 1–10, 14–18 на рис. ). Например, если на шестиугольных графах 1–3 (рис. ) молекулы в крайних левой и правой вершинах обозначить как 1 и 2, а ближайших к молекуле 2 соседей – 3 и 4, то соответствующие интегралы будут иметь вид

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 60 \times \int_0^\infty 4\pi s_{12}^2 ds_{12} \left[ \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \int_0^\infty \Phi(s_{13}) ds_{13} \int_{\frac{(\sqrt{s_{12}}-\sqrt{s_{13}})^2}{\sqrt{s_{12}}}}^{\frac{(\sqrt{s_{12}}+\sqrt{s_{13}})^2}{\sqrt{s_{12}}}} f(\sigma\sqrt{s_{23}}) ds_{23} \right]^2; \\ \beta_2 &= 360 \times \int_0^\infty 4\pi s_{12}^2 ds_{12} \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \int_0^\infty \Phi(s_{13}) ds_{13} \int_{\frac{(\sqrt{s_{12}}-\sqrt{s_{13}})^2}{\sqrt{s_{12}}}}^{\frac{(\sqrt{s_{12}}+\sqrt{s_{13}})^2}{\sqrt{s_{12}}}} f(\sigma\sqrt{s_{23}}) ds_{23} \times \\ &\times \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \int_0^\infty \Phi(s_{14}) f(\sigma\sqrt{s_{14}}) ds_{14} \int_{\frac{(\sqrt{s_{12}}-\sqrt{s_{14}})^2}{\sqrt{s_{12}}}}^{\frac{(\sqrt{s_{12}}+\sqrt{s_{14}})^2}{\sqrt{s_{12}}}} f(\sigma\sqrt{s_{24}}) ds_{24}; \\ \beta_3 &= 180 \times \int_0^\infty 4\pi s_{12}^2 f(\sigma\sqrt{s_{12}}) ds_{12} \times \\ &\times \left[ \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \int_0^\infty \Phi(s_{13}) ds_{13} \int_{\frac{(\sqrt{s_{12}}-\sqrt{s_{13}})^2}{\sqrt{s_{12}}}}^{\frac{(\sqrt{s_{12}}+\sqrt{s_{13}})^2}{\sqrt{s_{12}}}} f(\sigma\sqrt{s_{23}}) ds_{23} \right]^2. \end{aligned}$$

Причем наиболее эффективным представляется одновременный расчет всех 15 простейших интегралов (их вычисление по сложности соответствует третьему вириальному коэффициенту [18]). Для этого на каждом шаге интегрирования по относительному положению 1-й и 2-й молекул (по переменной  $s_{12}$ ) заполняется всего одна двумерная таблица узлов по  $s_{1n}$  и  $s_{2n}$ , где  $n$  – номер любой из оставшихся молекул. В каждом узле для  $s_{1n}$  и  $s_{2n}$  определяются функции Майера  $f(\sigma\sqrt{s})$  и функции  $\Phi(s)$  (5), которые затем используются в нужных комбинациях для разных графов при суммировании по всей сетке.

Для тех графов, где с тройкой молекул  $ijn$  “связана” еще одна молекула  $m$ , определим другую функцию (интеграл по всем возможным положениям молекулы  $m$  при фиксированных  $ijn$ ):

$$\begin{aligned} \Psi(s_{ij}, s_{in}, s_{jn}) &= \frac{\sigma^3}{\sqrt{s_{ij}}} \int_0^\infty f(\sigma\sqrt{s_{im}}) ds_{im} \times \\ &\times \int_{(\sqrt{s_{im}-\sqrt{s_{ij}}})^2}^{(\sqrt{s_{im}+\sqrt{s_{ij}}})^2} f(\sigma\sqrt{s_{jm}}) ds_{jm} \int_0^\pi f(\sigma\sqrt{s_{nm}}) d\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $s_{nm}(s_{ij}, s_{in}, s_{jn}, s_{im}, s_{jm}, \varphi)$  – безразмерный квадрат расстояния между частицами  $n$  и  $m$ ;  $\varphi$  – угол между плоскостями  $ijn$  и  $ijm$ .

С помощью функции (6) или подобных ей квадратурными методами может быть рассчитано еще 26 графов шестого вириального коэффициента (11–13, 19–25, 27–35, 37, 39–42, 45, 49 на рис. 1). Например, интегралы, соответствующие графам 11, 22, 37 и 45 (рис. 1), имеют вид (с использованием описанной ранее нумерации частиц)

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 180 \times \int_0^\infty 4\pi s_{12}^2 ds_{12} \left( \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \int_0^\infty \Phi(s_{13}) ds_{13} \int_{(\sqrt{s_{12}-\sqrt{s_{13}}})^2}^{(\sqrt{s_{12}+\sqrt{s_{13}}})^2} f(\sigma\sqrt{s_{23}}) ds_{23} \right) \times \\ &\times \left( \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \int_0^\infty f(\sigma\sqrt{s_{14}}) ds_{14} \int_{(\sqrt{s_{12}-\sqrt{s_{14}}})^2}^{(\sqrt{s_{12}+\sqrt{s_{14}}})^2} f(\sigma\sqrt{s_{24}}) \cdot \Psi(s_{12}, s_{14}, s_{24}) ds_{24} \right); \\ \beta_{22} &= 90 \times \int_0^\infty 4\pi s_{12}^2 ds_{12} [\Phi(s_{12})]^2 \times \\ &\times \left( \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \int_0^\infty f(\sigma\sqrt{s_{14}}) ds_{14} \int_{(\sqrt{s_{12}-\sqrt{s_{14}}})^2}^{(\sqrt{s_{12}+\sqrt{s_{14}}})^2} f(\sigma\sqrt{s_{24}}) \cdot \Psi(s_{12}, s_{14}, s_{24}) ds_{24} \right); \\ \beta_{37} &= 45 \times \int_0^\infty 4\pi s_{12}^2 ds_{12} \left( \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{12}}} \right)^2 \times \\ &\times \left( \int_0^\infty f(\sigma\sqrt{s_{14}}) ds_{14} \int_{(\sqrt{s_{12}-\sqrt{s_{14}}})^2}^{(\sqrt{s_{12}+\sqrt{s_{14}}})^2} f(\sigma\sqrt{s_{24}}) \cdot \Psi(s_{12}, s_{14}, s_{24}) ds_{24} \right)^2; \\ \beta_{45} &= 60 \times \int_0^\infty 4\pi s_{34}^2 ds_{34} \frac{\pi\sigma^3}{2\sqrt{s_{34}}} \int_0^\infty f(\sigma\sqrt{s_{31}}) ds_{31} \times \\ &\times \int_{(\sqrt{s_{34}-\sqrt{s_{31}}})^2}^{(\sqrt{s_{34}+\sqrt{s_{31}}})^2} f(\sigma\sqrt{s_{41}}) \cdot [\Psi(s_{34}, s_{31}, s_{41})]^3 ds_{41}. \end{aligned}$$

К интегрированию по сетке положений  $(s_{in}, s_{jn})$  частицы  $n$  функция вида (6) добавляет двумерное интегрирование по такой же самой сетке узлов переменных  $s_{im}, s_{jm}$  и однократное интегрирование по  $\varphi$ , что, конечно же, значительно усложняет вычислительный процесс. Для его ускорения использовались возможности многопоточных вычислений на современных графических процессорах, которые сегодня предоставляют библиотека DirectX11 (с помощью технологии ComputeShader) или платформа CUDA. Причем в каждом узле интегрирования по  $s_{12}$  все 26 интегралов рассчитывались одновременно с 15 простыми, описанными ранее, с помощью той же самой двумерной сетки узлов  $(s_{1n}, s_{2n})$ .

Каждый вычислительный поток для своего узла сетки  $(s_{1n}, s_{2n})$ , независимо от остальных потоков, рассчитывал по всем узлам  $(s_{1m}, s_{2m})$  этой же сетки сумму интегралов по  $\varphi$ , т. е. определял в каждом узле значение функции  $\Psi$  из (6). Использование такой многопоточной технологии увеличивает скорость расчетов на два порядка (!) по сравнению с вычислениями на базе центрального процессора.

Таким образом, для каждой выбранной температуры одной процедурой квадратурным методом Гаусса для 30, 60 и 120 узлов рассчитывалась сумма сразу 41 из 56 интегралов шестого вириального коэффициента. Кроме того, для каждой температуры фиксировалось значение (и погрешность) одного простого интеграла (1 на рис. 1) для использования в качестве эталона на следующем этапе расчетов с помощью выборки Майера.

Действительно, любой из оставшихся 15 графов (26, 36, 38, 43, 44, 46–48, 50–56 на рис. 1) может быть получен из самого первого графа на рис. 1 путем добавления новых “связей”. Поэтому именно значение этого первого интеграла, уже определенное описанным выше способом, использовалось в качестве эталона  $\Gamma_0$  в (4), а его подынтегральное выражение (произведение соответствующих функций Майера) рассчитывалось в каждой конфигурации (точке конфигурационного пространства) как величина  $\gamma_0$ . Значение величины  $\gamma$  в той же точке определялось как сумма подынтегральных выражений (с соответствующими весами) всех оставшихся 15 интегралов.

При компьютерной реализации алгоритма прямой выборки Майера также использовалась многопоточная технология вычислений на базе графического процессора. Каждый поток моделировал свой образец из шести молекул, используя свой собственный генератор случайных чисел. Ввиду невозможности реализации в многопоточном режиме для получения случайных чисел вихря Мерсенна, некоторые авторы [27] предлагают использовать в подобных случаях линейный конгруэнтный генератор. Но сравнительно малый период такого генератора ( $\sim 2^{32}$ ) может приводить к значительным корреляциям результатов. Поэтому для каждого потока использовался генератор с большим периодом ( $\sim 2^{88}$ ) Taus88.

Ввиду довольно сложного поведения как  $\gamma$ , так и  $\gamma_0$ , для того чтобы гарантировать корректный учет всех весомых конфигураций, функция плотности вероятности имела вид  $\pi = |\gamma_0| + |\gamma|$ . Перед непосредственными расчетами искомой суммы интегралов  $\Gamma$  (4) в программе был предусмотрен предварительный режим подбора масштаба для случайного пространственного шага при переходе между точками с целью обеспечения устойчивого 50-процентного принятия конфигураций [9].

Для большей части температур сумма оставшихся 15 интегралов определялась усреднением результатов 100 опытов по  $10^9$  точек (конфигураций) каждый. В околоскритической области число опытов было увеличено до 250 для повышения точности.

Результирующие значения шестого вириального коэффициента для mLJ потенциала в безразмерной форме  $B_6^* = B_6/\sigma^{15}$  при различных приведенных температурах  $T^* = kT/\varepsilon$  представлены в таблице 1 и на рис. 2.

Погрешность полученных значений складывалась из стандартной ошибки среднего в выборке Майера и погрешности квадратурного интегрирования (оценивалась процессом Эйткена [29]).

Таблица 1. Шестой вириальный коэффициент  $B_6^*$  при различных значениях приведенной температуры  $T^*$ . В скобках указаны погрешности в единицах разряда последней значащей цифры

$T^*$	$B_6^*$	$T^*$	$B_6^*$	$T^*$	$B_6^*$	$T^*$	$B_6^*$
0,200	$-1,68(7) \times 10^{20}$	0,925	-167(7)	1,250	-16,9(5)	2,250	2,631(17)
0,250	$-6,55(8) \times 10^{15}$	0,950	-93(6)	1,300	-13,2(3)	2,500	2,388(12)
0,300	$-1,106(3) \times 10^{13}$	0,975	-55(3)	1,350	-11,0(2)	3,000	1,878(8)
0,400	$-4,819(4) \times 10^9$	1,000	-34(3)	1,400	-8,12(18)	4,000	1,249(5)
0,500	$-3,955(4) \times 10^7$	1,025	-22,6(19)	1,450	-5,66(17)	5,000	0,911(4)
0,550	$-6,097(8) \times 10^6$	1,050	-22,0(16)	1,500	-4,02(13)	7,000	0,579(2)
0,600	$-1,170(2) \times 10^6$	1,075	-20,3(14)	1,550	-2,36(10)	10,00	0,3560(18)
0,650	$-2,611(6) \times 10^5$	1,100	-22,7(10)	1,600	-0,91(8)	15,00	0,2029(11)
0,700	$-6,51(2) \times 10^4$	1,125	-21,0(8)	1,700	0,68(6)	20,00	0,1352(11)
0,750	$-1,728(10) \times 10^4$	1,150	-20,6(8)	1,800	1,70(5)	35,00	0,0626(4)
0,800	$-4,79(3) \times 10^3$	1,175	-20,3(7)	1,900	2,25(4)	50,00	0,0386(5)
0,850	$-1,335(18) \times 10^3$	1,200	-19,4(6)	2,000	2,49(3)	70,00	0,0246(3)
0,900	-364(10)	1,225	-18,2(5)	2,100	2,65(2)	100,0	0,0152(2)

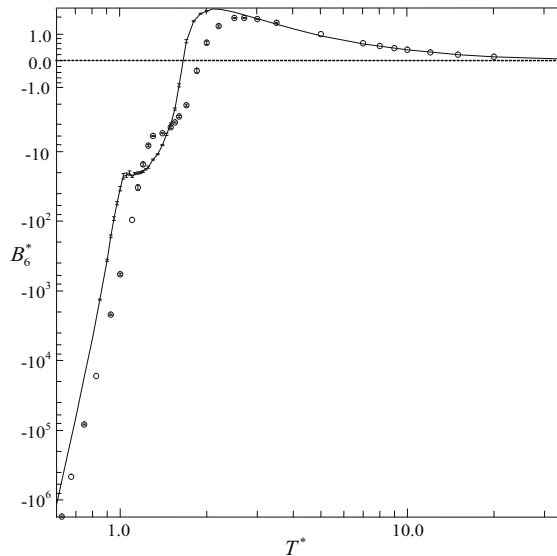


Рис. 2. Шестой вириальный коэффициент для mLJ потенциала. Вертикальные отрезки соответствуют погрешностям. Символы (o) показывают данные для LJ потенциала со своими погрешностями [26]

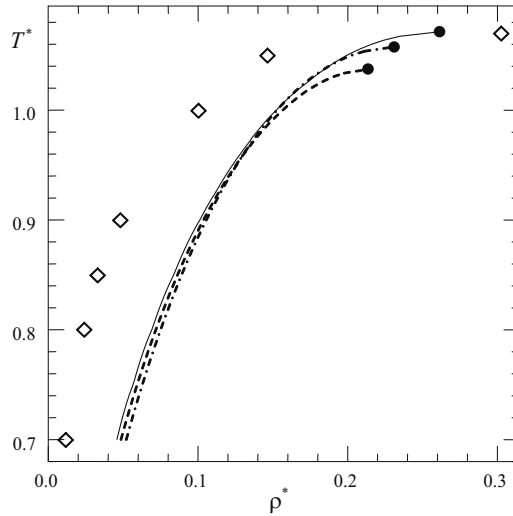


Рис. 3. Кривые нуля изотермического модуля упругости mLJ системы согласно вириальному уравнению с четвертым (штрих-пунктир), пятым (пунктир) и шестым (сплошная линия) коэффициентами. Символы ( $\diamond$ ) показывают точки экспериментальной бинадали [17]

На рис. 2 приводятся также значения шестого вириального коэффициента для немодифицированного LJ потенциала, полученные в работе [26] по эталону твердых сфер. Для сравнения — достижение в околоскритической области практически той же самой точности потребовало в [26] до 11700 (!) опытов (по  $10^9$  точек каждый) перекрывающейся (!) выборкой Майера.

В области низких температур шестые вириальные коэффициенты для mLJ и LJ потенциалов отличаются очень значительно. С ростом температуры эта разница постепенно уменьшается, как это наблюдалось и для коэффициентов более низких порядков [18].

В областях малой плотности при низких температурах и практически любой плотности при высоких температурах добавление в уравнение состояния (как вириальное, так и на базе точного разложения конфигурационного интеграла [19]) шестого коэффициента не слишком сильно сказывается на результатах. Но в области конденсации влияние шестого вириального коэффициента становится значительным. На рис. 3 показаны кривые  $T^*(\rho^*)$  ( $\rho^* = \rho\sigma^3$  — приведенная плотность) нуля изотермического объемного модуля упругости  $(\partial P/\partial V)_T = 0$ , рассчитанные с учетом различного числа вириальных коэффициентов.

Согласно исследованиям некоторых авторов [19, 20, 21], кривая нуля изотермического объемного модуля упругости не только является границей применимости вириального уравнения, но и представляет собой жидкостную ветку бинадали системы. Рис. 3 демонстрирует, как с ростом порядка уравнения кривые действительно постепенно приближаются к экспериментальной бинадали.

Учет в уравнении шестого коэффициента позволяет также получить значения

критических параметров  $T^* = 1,071$ ;  $\rho^* = 0,27$ ;  $P^* = P\sigma^3/\varepsilon = 0,093$ , значительно более близкие к экспериментальным  $T^* = 1,071$ ;  $\rho^* = 0,30$ ;  $P^* = 0,123$  [17] по сравнению с уравнением пятого порядка [18].

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Бесконечный радиус взаимодействия потенциала Леннарда-Джонса значительно затрудняет проведение численных экспериментов. Поэтому в теоретических исследованиях, как и в численном моделировании, предлагается использовать его модифицированную форму (1).

В дополнение к полученным ранее для такого модифицированного потенциала Леннарда-Джонса (mLJ) коэффициентам низших порядков [18] были рассчитаны значения шестого вириального коэффициента в широком диапазоне температур  $(0,2 \div 100)\varepsilon/k$ .

Для соответствующих расчетов была разработана комплексная методика, сочетающая в себе традиционные квадратурные методы интегрирования с современным статистическим методом выборки Майера. Разработанная методика в целом является более универсальной и эффективной по сравнению с оригинальной выборкой Майера, и может использоваться в будущем для вычисления вириальных коэффициентов более высоких порядков.

Полученные данные по шестому вириальному коэффициенту позволяют приблизить уравнения теории к результатам численных экспериментов для mLJ модели. В частности, были получены значения критических параметров этой системы, значительно более близкие к экспериментальным, чем ранее.

С другой стороны, сам факт того, что добавление в расчеты шестого вириального коэффициента все еще заметно влияет на получаемые результаты, может указывать на необходимость учета в дальнейшем и коэффициентов более высоких порядков.

1. **Chapman S.** The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases / S. Chapman, T. Cowling. – New York, Cambridge University Press, 1970. – 423 p.
2. **Lennard–Jones J.** On the Determination of Molecular Fields. I. From the Variation of the Viscosity of a Gas with Temperature / J. Lennard–Jones // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. – 1924. – V. 106. – P. 441.
3. **Lennard–Jones J.** On the Determination of Molecular Fields. II. From the Equation of State of a Gas / J. Lennard–Jones // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. – 1924. – V. 106. – P. 463.
4. **Wood W. W.** Monte Carlo Equation of State of Molecules Interacting with the Lennard–Jones Potential. I. A Supercritical Isotherm at about Twice the Critical Temperature / W. W. Wood, F. R. Parker // The Journal of Chemical Physics. – 1957. – V. 27. – P. 720.
5. **Rowley L. A.** Monte Carlo grand canonical ensemble calculation in a gas-liquid transition region for 12-6 Argon / L. A. Rowley, D. Nicholson, N. G. Parsonage // J. of Comp. Phys. – 1975. – V. 17. – P. 401.
6. **Panagiotopoulos A. Z.** Molecular simulation of phase coexistence: Finite-size effects and determination of critical parameters for two- and three-dimensional Lennard–Jones fluids / A. Z. Panagiotopoulos // International Journal of Thermophysics. – 1994. – V. 15. – P. 1057.

7. **Feng X.** Monte Carlo simulation of thermodynamic properties for two-dimensional Lennard-Jones fluids / X. Feng, Z. Li, Z. Guo // Chinese Science Bulletin 45. – 2000. – P. 2004.
8. **Kofke D. A.** Direct evaluation of phase coexistence by molecular simulation via integration along the saturation line / D. A. Kofke // The Journal of Chemical Physics. – 1993. – V. 98. – P. 4149.
9. **Frenkel D.** Understanding molecular simulation: from algorithms to applications / D. Frenkel, B. Smit // Computational Science Series 1: Academic Press. – 2002.
10. **Johnson J. K.** The Lennard-Jones equation of state revisited / J. K. Johnson, J. A. Zollweg, K. E. Gubbins // Molecular Physics. – 1993. – V. 78. – P. 591.
11. **Attard P.** Stochastic molecular dynamics: A combined Monte Carlo and molecular dynamics technique for isothermal simulations / P. Attard // The Journal of Chemical Physics. – 2002. – V. 116. – P. 9616.
12. **Nicolas J.** Equation of state for the Lennard-Jones fluid / J. Nicolas, K. Gubbins, W. Streett, D. Tildesley // Molecular Physics. – 1979. – V. 37. – P. 1429.
13. **Lotfi A.** Vapour liquid equilibria of the Lennard-Jones fluid from the NpT plus test particle method / A. Lotfi, J. Vrabec, J. Fischer // Molecular Physics. – 1992. – V. 76. – P. 1319.
14. **Ou-Yang W.-Z.** A molecular-dynamics simulation study on the dependence of Lennard-Jones gas-liquid phase diagram on the long-range part of the interactions / W.-Z. Ou-Yang, Z.-Y. Lu, T.-F. Shi, Z.-Y. Sun, L.-J. An // The Journal of Chemical Physics. – 2005. – V. 123, Is. 23, 234502.
15. **Broughton J. Q.** Molecular dynamics investigation of the crystal-fluid interface. I. Bulk properties / J. Q. Broughton, G. H. Gilmer // The Journal of Chemical Physics. – 1983. – V. 79. – P. 5095.
16. **Sakagami T.** Phase diagram of a modified Lennard-Jones system / T. Sakagami, K. Fuchizaki // Journal of Physics: Conference Series. – 2010. – V. 215, 012123.
17. **Asano Y.** Phase diagram of the modified Lennard-Jones system / Y. Asano, K. Fuchizaki // The Journal of Chemical Physics. – 2012. – V. 137, 174502.
18. **Ушкац М. В.** Віриальні коефіцієнти для модифікованого потенціалу Леннарда-Джонса / М. В. Ушкац // Укр. фіз. журн. – 2014. – Т. 59, вип. 2. – P. 172–178.
19. **Ushcats M. V.** Equation of State Beyond the Radius of Convergence of the Virial Expansion / M. V. Ushcats // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V. 109, 040601.
20. **Ushcats M. V.** Condensation of the Lennard-Jones fluid on the basis of the Gibbs single-phase approach / M. V. Ushcats // The Journal of Chemical Physics. – 2013. – V. 138, 094309.
21. **Ushcats M. V.** Adequacy of the virial equation of state and cluster expansion / M. V. Ushcats // Phys. Rev. E. – 2013. – V. 87, 042111.
22. **Mayer J. E.** Statistical Mechanics / J. E. Mayer, M. G. Mayer. – New York: John Wiley, 1977.
23. **Barker J. A.** Fifth Virial Coefficients / J. A. Barker, P. J. Leonard, A. Pompe // The Journal of Chemical Physics. – 1966. – V. 44. – P. 4206.
24. **Ушкац М. В.** П'ятий вириальний коефіцієнт для потенціалів Сазерленда, Морзе і Леннарда-Джонса / М. В. Ушкац, А. А. Гайша // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. – 2013. – № 1075. – С. 66–73.

25. **Singh J. K.** Mayer Sampling: Calculation of Cluster Integrals using Free-Energy Perturbation Methods / J. K. Singh, D. A. Kofke // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – V. 92, 220601.
26. **Schultz A. J.** Sixth, seventh and eighth virial coefficients of the Lennard–Jones model / A. J. Schultz, D. A. Kofke // *Molecular Physics.* – 2009. – V. 107. – P. 2309.
27. **Schultz A. J.** Mayer Sampling Monte Carlo calculation of virial coefficients on graphics processors / A. J. Schultz, N. S. Barlow, V. Chaudhary, D. A. Kofke // *Molecular Physics.* – 2013. – V. 111. – P. 535.
28. **Bennett C. H.** Efficient estimation of free energy differences from Monte Carlo data / C. H. Bennett // *Journal of Computational Physics.* – 1976. – V. 22. – P. 245.
29. **Крылов В. И.** Приближенное значение интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.



Mathematical Subject Classification: 15A24, 34B15, 34C25  
УДК 517.9

С. М. Чуйко

Славянский государственный педагогический университет

## О РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА

**Чуйко С. М. Про розв'язки матричного рівняння Сильвестра.** Матричні рівняння Ляпунова, а також їх узагальнення — матричні рівняння Сильвестра широко використовуються в теорії стійкості руху, а також при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккати і Бернуллі. Якщо структура загального рішення однорідної частини рівняння Ляпунова добре вивчена, то розв'язання неоднорідного рівняння Сильвестра і, зокрема, рівняння Ляпунова досить громіздке. У статті запропоновані умови розв'язності, а також схема побудови часткового розв'язку неоднорідного рівняння типу Ляпунова на основі псевдообернення оператора, породжуваного однорідною частиною рівняння Ляпунова. У статті запропонована конструктивна формула побудови часткового розв'язку неоднорідного рівняння Сильвестра і, зокрема, рівняння Ляпунова.

**Ключові слова:** матричне рівняння Ляпунова, рівняння Сильвестра, рівняння Ріккати, рівняння Бернуллі.

**Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра.** Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра широко используются в теории устойчивости движения, а также при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучена, то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного уравнения типа Ляпунова на основе псевдообращения оператора, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. В статье предложена конструктивная формула построения частного решения неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова.

**Ключевые слова:** матричное уравнение Ляпунова, уравнение Сильвестра, уравнение Риккати, уравнение Бернулли.

**Chuiiko S. M. On the solution of the matrix Sylvester equation.** Lyapunov matrix equations and their generalizations — Sylvester matrix equation widely used in the theory of stability of motion, as well as the solution of differential Riccati and Bernoulli equations. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation is quite cumbersome. The article suggests the solvability conditions, as well as a scheme for constructing a particular solution of the inhomogeneous equation based on Lyapunov type pseudo-operator corresponding to the homogeneous part of the Lyapunov equation. The paper proposes a structural formula for constructing a particular solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation.

**Key words:** Lyapunov matrix equation, Sylvester equation, Riccati equation, Bernoulli equation.

**ВВЕДЕНИЕ.** Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1, 2, 3, 4, 5] широко используются в теории устойчивости движения [3, с. 245], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [6, 7] и Бернулли [9, 10]. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучена [1, 5], то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. В статье [6] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного уравнения типа Ляпунова на основе псевдообращения оператора  $L$ , соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. Нами предложена конструктивная формула построения частного решения неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Исследуем задачу о построении решения линейного матричного уравнения Сильвестра [3, с. 239]

$$\sum_{i=1}^k Q_i C R_i = B. \quad (1)$$

Здесь  $Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ ,  $R_i \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$  и  $B \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$  — данные матрицы,  $C \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$  — неизвестная матрица. Как известно, общее решение уравнения (1) является суммой

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B]$$

общего решения  $\Phi[Q_i, R_i]$  однородного уравнения

$$\sum_{i=1}^k Q_i C R_i = 0 \quad (2)$$

и произвольного частного решения  $\Psi[B]$  уравнения (1). Обозначим

$$\left\{ \Theta_j \right\}_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$$

базис пространства  $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$ . Общее решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$C = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \left[ \sum_{i=1}^k Q_i \Theta_j R_i \right] c_j = B.$$

Обозначим матрицы

$$\Xi_j := \sum_{i=1}^k Q_i \Theta_j R_i \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}, \quad j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma.$$

Таким образом, уравнение (1) равносильно следующему:

$$\sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \Xi_j c_j = B.$$

Определим оператор

$$\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  вектор-столбец  $\mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ , составленный из  $n$  столбцов матрицы  $A$ , а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{M}[A] \right\} : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

который ставит в соответствие вектору  $\mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$  матрицу  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Заметим, что оператор  $\mathcal{M}[A]$ , как и обратный оператор  $\mathcal{M}^{-1}[B]$ , может быть представлен в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \quad \Upsilon_2 := (1001)^* \in \mathbb{R}^{4 \times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (100010001)^* \in \mathbb{R}^{9 \times 1}, \quad \Upsilon_4 := (1000010000100001)^* \in \mathbb{R}^{16 \times 1}, \dots$$

Вектор  $\Upsilon_m$  состоит из  $m - 1$  цепочки вида  $(100 \dots 0)^* \in \mathbb{R}^{(m-1) \times 1}$  и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \left( 100 \dots 0 \quad 100 \dots 0 \quad \dots \quad 100 \dots 0 \quad 1 \right)^* \in \mathbb{R}^{m^2 \times 1}.$$

В новых обозначениях оператор  $\mathcal{M}[A]$  представим в явном виде:

$$\mathcal{M}[A] = \left( I_n \otimes A \right) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m \cdot n}.$$

Определим также матрицы

$$\left[ E_n^m \right]_k := \left\{ \left[ E_n^m \right]_k^{(1)} \quad \left[ E_n^m \right]_k^{(2)} \quad \dots \quad \left[ E_n^m \right]_k^{(m)} \right\} \in \mathbb{R}^{n \times m \cdot n},$$

где

$$\left[ E_n^m \right]_k^{(j)} := I_n \cdot \delta_{jk};$$

$\delta_{jk}$  — символ Кронеккера:

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

В частности,

$$\left[ E_1^m \right]_k := \left\{ \left[ E_1^m \right]_k^{(1)} \quad \left[ E_1^m \right]_k^{(2)} \quad \dots \quad \left[ E_1^m \right]_k^{(m)} \right\} \in \mathbb{R}^{1 \times m},$$

где

$$\left[ E_1^m \right]_k^{(j)} := \delta_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, обратный оператор  $\mathcal{M}^{-1}[B]$  представим в явном виде:

$$\mathcal{M}^{-1}[B] = \sum_{k=1}^n \left[ E_n^m \right]_k \cdot B \cdot \left[ E_1^m \right]_k.$$

В новых обозначениях уравнение (1) равносильно уравнению

$$\mathcal{Q}c = \mathcal{M}[B] \tag{3}$$

относительно вектора  $c \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$ ; здесь

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mathcal{M}[\Xi_1] \quad \mathcal{M}[\Xi_2] \quad \dots \quad \mathcal{M}[\Xi_{\beta \cdot \gamma}] \right\} = \sum_{j=1}^{\alpha \beta} \left\{ \left[ E_1^{\alpha \beta} \right]_j \otimes \mathcal{M}[\Xi_j] \right\} \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta \times \beta \cdot \gamma}.$$

При условии [8]

$$P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[B] = 0,$$

и только при нем уравнение (3) разрешимо:

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

При этом уравнение (1) имеет  $r$ -параметрическое семейство решений

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$

где

$$\Phi[Q_i, R_i] := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] \right\}, \quad \Psi[B, c_r] := \mathcal{M}^{-1} \left[ P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right].$$

Здесь  $\mathcal{Q}$  — псевдообратная по Муру—Пенроузу матрица [1],  $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q})$ ,  $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta \times \alpha \cdot \delta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$  — ортопроекторы матриц  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{Q}^*$ . Матрица  $P_{\mathcal{Q}_r}$  составлена из  $r$  линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора  $P_{\mathcal{Q}}$ . Условия существования и вид общего решения матричного уравнения Сильвестра (1) определяет следующая теорема.

**Теорема.** *Матричное уравнение Сильвестра (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[B] = 0. \tag{4}$$

При условии (4), и только при нем, уравнение (1) имеет  $r$ -параметрическое семейство решений

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$

где

$$\Phi[Q_i, R_i] := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] \right\},$$

$$\Psi[B, c_r] := \mathcal{M}^{-1} \left[ P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right].$$

При условии  $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$  будем говорить, что для матричного уравнения Сильвестра (1) имеет место критический случай, при этом уравнение Сильвестра (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей  $B$ , для которых выполнено условие (4). При условии  $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$  будем говорить, что для матричного уравнения Сильвестра (1) имеет место некритический случай, при этом уравнение Сильвестра (1) разрешимо для любой неоднородности  $B$ .

**Следствие.** Матричное уравнение (1) в некритическом случае ( $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ ) разрешимо для любой неоднородности  $B \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$ . В этом случае уравнение (1) имеет  $r$ -параметрическое семейство решений

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r].$$

Доказанная теорема и следствие обобщают соответствующие условия разрешимости, а также схему построения частного решения неоднородного уравнения Ляпунова [6] на случай уравнения Сильвестра.

**Пример 1.** Матричное уравнение Сильвестра

$$\sum_{i=1}^2 Q_i C R_i = B \tag{5}$$

разрешимо при

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис пространства  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  составляют матрицы

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Theta_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Xi_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании матричного уравнения Сильвестра (5) матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет ортопроекторы

$$P_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $P_{Q^*} \neq 0$ , постольку для матричного уравнения Сильвестра (5) имеет место критический случай, при этом выполнено условие (4), следовательно,

поставленная задача разрешима. Искомое  $r := 5$  – параметрическое семейство решений

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r]$$

матричного уравнения Сильвестра (5) определяет матрица

$$\mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и  $r$  линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора  $P_{\mathcal{Q}}$  :

$$P_{\mathcal{Q}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение матричного уравнения Сильвестра (5) представимо в виде

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$

где

$$\Phi[Q_i, R_i] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi[B, c_r] = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ c_1 & c_3 & c_5 \\ 0 & c_4 & 0 \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}^1$  – произвольные константы.

Пусть условие (4) не выполнено:  $P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[B] \neq 0$ , при этом система (3) неразрешима, однако она всегда имеет псевдорешение

$$C^+ := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] \right\} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma},$$

минимизирующее невязку [8, 11]

$$\left\| \mathcal{Q} c - \mathcal{M}[B] \right\|_{\mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta}} \rightarrow \min$$

в решении системы (3) и среди всех векторов  $c \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$ , на которых невязка достигает наименьшего значения, вектор  $c^+ \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$  имеет наименьшую длину  $|c| := c^* c$ .

**Лемма.** Матричное уравнение Сильвестра (1) при условии  $P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[B] \neq 0$  не разрешимо, однако имеет псевдорешение

$$C^+ := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] \right\} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma},$$

минимизирующее невязку

$$\left\| \mathcal{Q} c - \mathcal{M}[B] \right\|_{\mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta}} \rightarrow \min$$

в решении системы (3).

Как и в случае некорректно поставленных нетеровых краевых задач [11, 12, 13, 14, 15], система (3) всегда имеет одно и только одно псевдорешение  $c^+ \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$ , наилучшее (в смысле наименьших квадратов), определяемое формулой  $\mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B]$ . При этом норма невязки  $\Delta$  равна норме выражения, входящего в левую часть выражения (3)

$$\Delta := \left\| \mathcal{Q} c^+ - \mathcal{M}[B] \right\|_{\mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta}} = \left\| P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[B] \right\|_{\mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta}}.$$

**Пример 2.** Матричное уравнение Сильвестра

$$\sum_{i=1}^2 Q_i C R_i = B \quad (6)$$

не разрешимо при

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

матрицы  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $R_1$  и  $R_2$  определены в примере 1.

Поскольку  $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ , постольку для матричного уравнения Сильвестра (6) имеет место критический случай, при этом условие (4) не выполнено, следовательно, матричное уравнение (6) не разрешимо, однако имеет псевдорешение

$$C^+ := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B] \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

наилучшее (в смысле наименьших квадратов).

В случае некорректно поставленной задачи [11, 12, 13, 14, 15] матричное уравнение Сильвестра (1) может быть регуляризовано аналогично [16, 17].

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В статье предложены условия разрешимости и схема построения частного решения неоднородного уравнения типа Ляпунова на основе псевдообращения оператора, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. Предложена конструктивная формула построения частного решения неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова.

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
3. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
4. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
5. Boichuk A. A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type / A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – Vol. 50, № 8. – P. 1162–1169.



6. **Boichuk A. A.** A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations / A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya // *Differential Equations*. – 2001. – Vol. 37, № 4. – P. 464–471.
7. **Захар-Иткин М. Х.** Матричное дифференциальное уравнение Риккати и подгруппа дробно-линейных преобразований / М. Х. Захар-Иткин // *Успехи мат. наук*. – 1973. – Т. XXVIII, № 3. – С. 83–120.
8. **Boichuk A. A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – 317 p.
9. **Деревенский В. П.** Матричные уравнения Бернулли. I / В. П. Деревенский // *Известия вузов. Математика*. – 2008. – № 2. – С. 14–23.
10. **Деревенский В. П.** Матричные уравнения Бернулли. II / В. П. Деревенский // *Известия вузов. Математика*. – 2008. – № 7. – С. 3–10.
11. **Кравчук М.** Вибрані математичні праці / М. Кравчук. – Київ; Нью-Йорк: Задруга, 2002. – 792 с.
12. **Chuiko S. M.** Emergence of solution of linear Noetherian boundary-value problem / S. M. Chuiko // *Ukr. Math. Zh.* 2007. – Vol. 59, № 8. – P. 1274–1279.
13. **Бойчук А. А.** Обобщенно–обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
14. **Чуйко С. М.** Метод наименьших квадратов в теории некорректно поставленных край-овых задач / С. М. Чуйко // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка*. – 2007. – № 7. – С. 51–53.
15. **Chuiko S. M.** On approximate solution of boundary value problems by the least square method / S. M. Chuiko // *Nonlinear Oscillations*. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 585–604.
16. **Чуйко С. М.** Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко // *Буковинський математичний журнал*. – 2013. – Т. 1, № 3–4. – С. 158–161.
17. **Chuiko S. M.** On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action / S. M. Chuiko // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2014. – Vol. 197, № 1. – P. 138–150.

Mathematical Subject Classification: 37L05  
УДК 517.9

**М. І. Яременко**

Міжнародний математичний центр НАН України

## НАБЛИЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ НАПІВГРУП В ПРОСТОРАХ $L^p(R^l, d^l x)$

**Яременко М. І. Наближення нелінійних напівгруп в просторах  $L^p(R^l, d^l x)$ .** Розглянуто умови збіжності послідовності функцій експоненціального типу, побудовано послідовність таких функцій, яка збігається до заданої функції експоненціального типу, запропоновано метод дослідження розв'язності задачі Коші для рівняння еволюційного типу.

**Ключові слова:** нелінійні полугрупи, задача Коші, рівняння еволюційного типу.

**Яременко Н. И. Приближение нелинейных полугрупп в пространствах  $L^p(R^l, d^l x)$ .** Рассмотрены условия сходимости последовательности функций экспоненциального типа, построена последовательность таких функций, которая сходится к заданной функции экспоненциального типа, предложен метод исследования разрешимости задачи Коши для уравнения эволюционного типа.

**Ключевые слова:** нелинейные полугруппы, задача Коши, уравнение эволюционного типа.

**Yaremenko M. I. Approximation of nonlinear semigroup in  $L^p(R^l, d^l x)$  spaces.** This paper is concerned with conditions of convergence of sequences of functions of exponential type, constructed a sequence of functions which converges to a given function of exponential type, the proposed method of researching of the solvability of the Cauchy problem for the equation of evolution type.

**Key words:** nonlinear semigroup, Cauchy problem, evolutionary equation.

**Вступ.** В статті розвивається метод видатного японського математика Міядери [5–7] для дослідження збіжності послідовностей, що апроксимують нелінійну напівгрупу в просторі  $L^p(R^l, d^l x)$ .

При дослідженні нелінійних напівгруп важливими є теореми типу Хілле–Іосіди [6, 7], які визначають необхідні і достатні умови для того, щоб замкнутий оператор був локальним генератором однопараметричної напівгрупи у відповідному просторі.

Важливою областю застосування теорії напівгруп є вивчення еволюційних рівнянь [1–3], особливо типу Шредінгера, де генератором напівгрупи є гамільтоніан деякої динамічної системи. Одним із підходів до дослідження таких рівнянь є побудова послідовностей, що наближують розв'язок відповідного рівняння в певному просторі та дослідження умов їх збіжності [6, 8].

За допомогою використання явного вигляду спряженого елемента доведено, що якщо задана послідовність нелінійних напівгруп класу  $\omega$ , генераторами яких є відповідна послідовність нелінійних операторів, що задовольняє певні умови, тоді сильне замикання сильної границі цих операторів буде оператором, що породжує нелінійну напівгрупу, і ця напівгрупа співпадає з рівномірною границею

послідовності заданих нелінійних напівгруп на скінченному інтервалі заданої часової змінної.

Цей результат дозволяє побудувати послідовність напівгруп, яка наближує нелінійну напівгрупу в просторі  $L^p(R^l, d^l x)$ .

Тобто якщо поставлена задача Коші для еволюційного рівняння певного вигляду, то можна побудувати послідовність задач Коші, про які буде відомо, що вони мають розв'язок і цей розв'язок належить певному функціональному класу. Далі встановлюється збіжність побудованої послідовності задач Коші до початкової задачі і показується, що границя відповідної послідовності розв'язків збігається до елемента, що буде розв'язком заданої задачі.

В даній роботі використовується той факт, що для просторів  $L^p(R^l, d^l x)$  явно відомий спряжений елемент, а саме він дорівнює  $u |u|^{p-2} \in L^q(R^l, d^l x)$ , де  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.** Спочатку сформулюємо деякі означення та узгодимо позначення, які будуть використовуватися.

**Означення 1.** Відображення  $A : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ , взагалі кажучи, багатозначне, називається дисипативним, якщо

$$\langle f' - g', (f - g) |f - g|^{p-2} \rangle \leq 0 \forall f' \in Af, g' \in Ag,$$

де  $Af, Ag$  — множина значень відображення  $A$  елементів  $f$  і  $g$  відповідно [3,4]. Якщо  $A$  — однозначний оператор, то умова дисипативності набуває вигляду

$$\langle Af - Ag, (f - g) |f - g|^{p-2} \rangle \leq 0 \forall f, g \in L^p(R^l, d^l x).$$

**Позначимо** відображення

$$A_0 f \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h f - f}{h}, f \in L^p(R^l, d^l x),$$

яке називається строго інфінітезимальним генератором.

**Означення 2.** Оператор  $A : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$  називається максимальним дисипативним, якщо  $A : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$  дисипативний і існують такі  $\lambda > 0$ , що область значень  $I - \lambda A$  співпадає з усім простором  $L^p(R^l, d^l x)$ .

**Означення 3.** Оператор  $A'$  називається конічним звуженням оператора  $A : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ , якщо  $f \in D(A)$  і  $A'f = \{g' : g' \in Af : \|g'\| = \inf_{\varphi \in Af} \|\varphi\|\}$ .

Позначимо через  $A_n$  оператор  $A_n = n \left( (I - \frac{A}{n})^{-1} - I \right)$ .

Оскільки оператор  $A - \omega I \in$  дисипативним, то за умови, що  $\alpha \in (0, \frac{1}{\omega})$  і  $f' \in Af, g' \in Ag$ , можна одержати оцінку

$$\|f - g - \alpha(f' - g')\| \geq (1 - \alpha\omega) \|f - g\|.$$

Тоді для  $(I - \alpha A)^{-1}$  і  $\alpha \in (0, \frac{1}{\omega})$  маємо оцінку:

$$\left\| (I - \alpha A)^{-1} f - (I - \alpha A)^{-1} g \right\| \leq (1 - \alpha\omega)^{-1} \|f - g\|.$$

Далі, використовуючи означення оператора  $A_n$ , отримаємо, що для всіх  $f \in L^p(R^l, d^l x) \in$  вірною належність  $A_n \in A\left(\frac{1}{1-\frac{A}{n}}\right) f$  і оцінка аналогічна дисипативності:

$$\left\langle A_n f - A_n g, (f - g) |f - g|^{p-2} \right\rangle \leq \omega (1 - n^{-1}\omega)^{-1} \|f - g\|^p$$

для всіх  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$ .

Оператори  $A_n$  породжують нелінійні напівгрупи  $\{T_t^n; t \geq 0\}$ , які для всіх  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$  і  $t \geq 0$  задовольняють оцінку:  $\|T_t^n f - T_t^n g\| \leq e^{\frac{\omega t}{1-n^{-1}\omega}} \|f - g\|$ . Також вірна оцінка  $\|A_n f\| \leq \frac{1}{1-n^{-1}\omega} \inf\{\|g\| : g \in Af\}$ .

Ці напівгрупи при кожному фіксованому  $f \in L^p(R^l, d^l x)$  є сильно неперервно диференційованими  $L^p(R^l, d^l x)$ -значними функціями на  $[0, \infty)$ , які при  $t \in [0, \infty)$  задовольняють еволюційному рівнянню  $\frac{d}{dt} T_t^n f = A_n T_t^n f$ .

Далі для збіжності напівгруп  $\{T_t^n; t \geq 0\}$  потрібно перевірити критерій Коші, тобто оцінити різницю  $T_t^n f - T_t^m f$  при кожному фіксованому  $f \in D(A)$ . Зауважимо, що  $\frac{\omega}{1-n^{-1}\omega} \leq 2\omega$  і  $\frac{1}{1-n^{-1}\omega} \leq 2$  при  $n \geq 2\omega$ .

Оцінимо різницю Коші:

$$\|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\| \leq \int_0^\alpha \|A_n T_\tau^n f - A_m T_\tau^m f\| d\tau \leq 2pe^{p\alpha\omega} \inf\{\|g\| : g \in Af\}\alpha.$$

$$\begin{aligned} & \left\| T_\alpha^n f - T_\alpha^m f - \left(I - \frac{A}{n}\right)^{-1} T_\alpha^n f + \left(I - \frac{A}{m}\right)^{-1} T_\alpha^m f \right\| \leq \\ & \leq \frac{\|A_n T_\alpha^n f\|}{n} + \frac{\|A_m T_\alpha^m f\|}{m} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{1}{n-\omega} + \frac{1}{m-\omega}\right) e^{p\alpha\omega} \inf\{\|g\| : g \in Af\}, \text{ при } \alpha \geq 0.$$

Отже при  $m, n \rightarrow \infty$  є збіжність різниці Коші до нуля.

Можемо записати:

$$\begin{aligned} & \left\| \left(I - \frac{A}{n}\right)^{-1} T_\alpha^n f - \left(I - \frac{A}{m}\right)^{-1} T_\alpha^m f \right\| \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{n-\omega} + \frac{1}{m-\omega}\right) e^{p\alpha\omega} \inf\{\|g\| : g \in Af\} + \|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\|. \end{aligned}$$

Але оскільки

$$\begin{aligned} & \left\langle A_n T_\alpha^n f - A_m T_\alpha^m f, \left(\left(I - \frac{A}{n}\right)^{-1} T_\alpha^n f - \left(I - \frac{A}{m}\right)^{-1} T_\alpha^m f\right) \right\rangle \times \\ & \times \left| \left(I - \frac{A}{n}\right)^{-1} T_\alpha^n f - \left(I - \frac{A}{m}\right)^{-1} T_\alpha^m f \right|^{p-2} \leq \\ & \leq \omega \left\| \left(I - \frac{A}{n}\right)^{-1} T_\alpha^n f - \left(I - \frac{A}{m}\right)^{-1} T_\alpha^m f \right\|^p, \end{aligned}$$

за аналогією отримуємо:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle A_n T_\alpha^n f - A_m T_\alpha^m f, (T_\alpha^n f - T_\alpha^m f) |T_\alpha^n f - T_\alpha^m f|^{p-2} \right\rangle \leq \\
 & \leq \left\langle A_n T_\alpha^n f - A_m T_\alpha^m f, (T_\alpha^n f - T_\alpha^m f) |T_\alpha^n f - T_\alpha^m f|^{p-2} \right\rangle - \\
 & - \left\langle A_n T_\alpha^n f - A_m T_\alpha^m f, \left( \left( I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_\alpha^n f - \left( I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_\alpha^m f \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left| \left( I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_\alpha^n f - \left( I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_\alpha^m f \right|^{p-2} \right\rangle + \\
 & \quad + \omega \left\| \left( I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_\alpha^n f - \left( I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_\alpha^m f \right\|^p \leq \\
 & \leq \inf\{\|g\| : g \in A_f\} \times \\
 & \times c(p) e^{p\omega\alpha} \left\| \left( T_\alpha^n f - T_\alpha^m f \right) |T_\alpha^n f - T_\alpha^m f|^{p-2} - \right. \\
 & \quad \left. - \left| \left( I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_\alpha^n f - \left( I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_\alpha^m f \right|^{p-1} \right\|.
 \end{aligned}$$

В просторі  $L^p(R^l, d^l x)$  є вірною формула

$$\|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\|^p = \int_0^\alpha \frac{d}{d\eta} \|T_\eta^n f - T_\eta^m f\|^p d\eta.$$

Оцінимо інтеграл за допомогою формул, що отримані вище:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\alpha \frac{d}{d\eta} \|T_\eta^n f - T_\eta^m f\|^p d\eta = \\
 & = p \int_0^\alpha \left\langle A_n T_\eta^n f - A_m T_\eta^m f, (T_\eta^n f - T_\eta^m f) |T_\eta^n f - T_\eta^m f|^{p-2} \right\rangle d\eta \leq \\
 & \leq \text{const}(p) e^{p\omega\alpha} \inf\{\|g\| : g \in A_f\} \times \\
 & \quad \times \int_0^\alpha \left\| (T_\eta^n f - T_\eta^m f) |T_\eta^n f - T_\eta^m f|^{p-2} - \right. \\
 & \quad \left. - \left( \left( I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_\eta^n f - \left( I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_\eta^m f \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left| \left( I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_\eta^n f - \left( I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_\eta^m f \right|^{p-2} \right\| d\eta + \\
 & \quad + p\omega \int_0^\alpha \left\| \left( I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_\eta^n f - \left( I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_\eta^m f \right\|^p d\eta.
 \end{aligned}$$

Отже оцінимо норму:

$$\begin{aligned}
& \|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\|^p \leq \text{const}(p)e^{p\omega\alpha} \inf\{\|g\| : g \in \mathbf{A}f\} \times \\
& \quad \times \int_0^\alpha \left\| (T_\eta^n f - T_\eta^m f) |T_\eta^n f - T_\eta^m f|^{p-2} - \right. \\
& \quad \left. - \left( \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^{-1} T_\eta^n f - \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^{-1} T_\eta^m f \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left\| \left( \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^{-1} T_\eta^n f - \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^{-1} T_\eta^m f \right) \right\|^{p-2} \right\| d\eta + \\
& + c_1(p)\omega \left( \frac{1}{n-\omega} + \frac{1}{m-\omega} \right)^p e^{2p\alpha\omega} \alpha \left( \inf\{\|g\| : g \in \mathbf{A}f\} + \|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\| \right)^p + \\
& \quad + p^2\omega \int_0^\alpha \|T_\eta^n f - T_\eta^m f\|^p d\eta.
\end{aligned}$$

Далі скористаємося позначенням, що було введено раніше, а саме класом  $\mathbf{K}(\beta)$  для дійсних значень параметра  $\beta$ , які строго більші нуля.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{K}(\beta) = \text{const}(p)e^{p\omega\beta} \inf\{\|g\| : g \in \mathbf{A}f\} \times \\
& \quad \times \int_0^\beta \left\| (T_\eta^n f - T_\eta^m f) |T_\eta^n f - T_\eta^m f|^{p-2} - \right. \\
& \quad \left. - \left( \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^{-1} T_\eta^n f - \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^{-1} T_\eta^m f \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left\| \left( \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^{-1} T_\eta^n f - \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^{-1} T_\eta^m f \right) \right\|^{p-2} \right\| d\eta + \\
& + c_1(p)\omega \left( \frac{1}{n-\omega} + \frac{1}{m-\omega} \right)^p e^{2p\beta\omega} \beta \left( \inf\{\|g\| : g \in \mathbf{A}f\} + \|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\| \right)^p.
\end{aligned}$$

Тоді запишемо оцінку для всіх дійсних чисел  $\alpha$ , що належать інтервалу  $[0, \beta]$  з використанням введеного позначення:

$$\|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\|^p \leq \mathbf{K}(\beta) + p^2\omega \int_0^\alpha \|T_\eta^n f - T_\eta^m f\|^p d\eta.$$

А отже, для  $\alpha \in [0, \beta]$  маємо формулу

$$\|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\|^p \leq \sqrt[p]{\mathbf{K}(\beta)} e^{p\alpha\omega}.$$

При  $m, n \rightarrow \infty$  маємо  $\mathbf{K}(\beta) \rightarrow 0$ , тобто збіжність різниці Коші до нуля, а отже

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|T_\alpha^n f - T_\alpha^m f\| = 0,$$

причому рівномірно по  $\alpha \in [0, \beta]$  для кожного  $f \in [D(\mathbf{A})]$ .

Отже існує напівгрупа  $T_\alpha f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\alpha^n f$ , де  $\alpha \geq 0$  і  $f \in [D(\mathbf{A})]$ .

Можна показати, що множина  $\{T_\alpha : \alpha \geq 0\}$  є нелінійною напівгрупою, визначеною на  $[D(A)]$ , і для неї при всіх  $t \geq 0$  на  $[D(A)]$  справедлива наступна оцінка:  $\|T_t f - T_t g\| \leq e^{\omega t} \|f - g\|$ .

**Теорема про послідовність нелінійних напівгруп.**

**Теорема 1.** *Нехай  $\{T_t^n : t \geq 0, n \in N\}$  – послідовність нелінійних напівгруп, які задовольняють умову:  $\|T_t^n f - T_t^n g\| \leq e^{\omega t} \|f - g\|$  і послідовність операторів  $\{A_n : n \in N\}$  є генераторами послідовності нелінійних напівгруп  $\{T_t^n : t \geq 0, n \in N\}$  і існує послідовність чисел  $\mu^n \in (0, \frac{1}{\omega})$ , така, що  $R(I - \mu^n A_n) = L^p(R^l, d^l x)$ , позначимо границю елементів з  $L^p(R^l, d^l x)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n f$  через  $Af$ , як границю в  $L^p(R^l, d^l x)$ -нормі.*

Тоді замикання  $A$  в нормі  $L^p(R^l, d^l x)$ , яке позначимо через  $[A]$ , породжує нелінійну напівгрупу  $\{T_t : t \geq 0\}$ , яку можна визначити, як  $L^p(R^l, d^l x)$ -рівномірну границю:  $T_t f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_t^n f$  на будь-якому скінченному інтервалі  $t \in [0, t_0]$ .

Крім того, напівгрупа  $\{T_t : t \geq 0\}$  є єдиною в класі напівгруп, що задовольняє наступні умови:

- 1) для будь-якого елемента  $f \in D(A)$  функція  $T_t f$  сильно абсолютно неперервна на будь-якому скінченному інтервалі;
- 2) для будь-якого елемента  $f \in D(A)$  для всіх  $t \geq 0$   $T_t f \in D(A)$  і  $D^+ T_t f = A_0 T_t f$  і  $A_0 T_t f$  є неперервною за нормою  $L^p(R^l, d^l x)$  при  $t \geq 0$  за  $t$ .
- 3) для будь-якого елемента  $f \in D(A)$  існує сильна неперервна похідна  $\frac{d}{dt} T_t f = A^0 T_t f$  за виключенням, можливо, зліченної кількості точок.

**Доведення.** При доведенні використовуються методи, аналогічні до тих, що були застосовані вище, для зручності і щоб уникнути плутанини індекс послідовності береться в дужки, тобто  $A_n$  генератор напівгрупи  $T_t^n$  будуть далі позначатися як  $A^{(n)}$ ;  $T_t^{(n)}$  відповідно.

Нехай  $f, g \in D(A) \subseteq L^p(R^l, d^l x)$ , тоді  $\langle A^{(n)} f - A^{(n)} g, (f - g) | f - g |^{p-2} \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \frac{T_\alpha^{(n)} f - f}{\alpha} - \frac{T_\alpha^{(n)} g - g}{\alpha}, (f - g) | f - g |^{p-2} \rangle \leq \omega \|f - g\|^p$ , отже оператор  $A^{(n)} - \omega I$  є дисипативним оператором.

Оскільки  $R(I - \mu_n A^{(n)}) = L^p(R^l, d^l x)$ , то для  $\eta_n = \mu_n \frac{1}{1 - \mu_n \omega}$  і для кожного  $n$  буде вірною рівність  $R(I - \eta_n (A^{(n)} - \omega I)) = L^p(R^l, d^l x)$ , отже  $(A^{(n)} - \omega I) -$  максимальний дисипативний оператор.

Далі зафіксуємо індекс послідовності, той, що в дужках, і використаємо попередні результати, що завжди можливо при  $m > \omega$ . Тоді існує  $(I - \frac{A^{(n)}}{m})^{-1}$  і для цього оператора вірна оцінка для  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$ :

$$\left\| \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right)^{-1} f - \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right)^{-1} g \right\| \leq \left( 1 - \frac{\omega}{m} \right)^{-1} \|f - g\|.$$

Покладемо за означенням  $A_m^{(n)} = m \left( \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right)^{-1} - I \right)$ . Отже нелінійні оператори  $A_m^{(n)}$  є генераторами нелінійних напівгруп  $\{T_{mt}^{(n)} : t \geq 0, n \in N\}$  і для цих напівгруп для  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$  вірна оцінка

$$\left\| T_{mt}^{(n)} f - T_{mt}^{(n)} g \right\| \leq e^{\frac{\omega t}{1 - \frac{\omega}{m}}} \|f - g\|.$$

Для елементів  $f \in [D(A^{(n)})]$  існує границя:  $T_t^{(n)} f = \lim_{m \rightarrow \infty} T_{mt}^{(n)} f, \quad t \geq 0$ .

Визначимо різницю Коші для послідовності напівгруп  $\{T_{mt}^{(n)} : t \geq 0, n \in N\}$  за індексом  $m$ :  $T_{mt}^{(n)} f - T_{kt}^{(n)} f, t \geq 0$  і позначимо її  $P_{mkt}^{(n)}$ , тобто  $P_{mkt}^{(n)} f = T_{mt}^{(n)} f - T_{kt}^{(n)} f, t \geq 0$ . Оскільки важливою є поведінка  $P_{mkt}^{(n)}$  лише для великих  $k, m$ , то можна вважати, що  $k, m \geq p\omega$ , досліджується "хвіст" послідовності  $P_{mkt}^{(n)}$ .

Використовуючи вже одержані оцінки, з урахуванням введених позначень одержуємо для  $\alpha \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \|P_{mkt}^{(n)} f\| &\leq 2pe^{p\alpha\omega} \|A^{(n)} f\| \alpha, \\ \left\| P_{mkt}^{(n)} f - \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\alpha}^{(n)} f + \left( I - \frac{A^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\alpha}^{(n)} f \right\| &\leq \\ &\leq \frac{\|A_m^{(n)} T_{m\alpha}^{(n)} f\|}{m} + \frac{\|A_k^{(n)} T_{k\alpha}^{(n)} f\|}{k} \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{m-\omega} + \frac{1}{k-\omega} \right) e^{p\alpha\omega} \|A^{(n)} f\|, \end{aligned}$$

далі якщо позначити

$$\begin{aligned} K_{mk}^{(n)}(\beta) &= \text{const}(p) e^{p\omega\beta} \inf\{\|g\| : g \in A^{(n)}\} \times \\ &\times \int_0^\beta \left\| \left( T_{m\eta}^{(n)} f - T_{k\eta}^{(n)} f \right) \left| T_{m\eta}^{(n)} f - T_{k\eta}^{(n)} f \right|^{p-2} - \right. \\ &- \left. \left( \left( I - \frac{A_m^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\eta}^{(n)} f - \left( I - \frac{A_k^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\eta}^{(n)} f \right) \right\} \times \\ &\times \left\| \left( \left( I - \frac{A_m^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\eta}^{(n)} f - \left( I - \frac{A_k^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\eta}^{(n)} f \right) \right\|^{p-2} d\eta + \\ &+ (c_1(p))^p \omega \left( \frac{1}{m-\omega} + \frac{1}{k-\omega} \right)^p e^{2p\beta\omega} \beta \|A^{(n)} f\|^p, \end{aligned}$$

аналогічно отримуємо оцінку  $L^p(R^l, d^l x)$  норми  $P_{mk\alpha}^{(n)}$  на сегменті  $\alpha \in [0, \beta]$ :

$$\|P_{mk\alpha}^{(n)}\| \leq \sqrt[p]{K_{mk}^{(n)}(\beta)} e^{p\alpha\omega}.$$

Далі доведемо, що збіжність в границі  $T_t^{(n)} f = \lim_{m \rightarrow \infty} T_{mt}^{(n)} f, \quad t \geq 0$ , будь-якого числа  $\alpha \in [0, \beta]$  є рівномірною відносно  $n$ .

*Доведення.* Зафіксуємо довільне число  $\alpha \in [0, \beta]$  і елемент  $f \in D(A)$ . Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} f = Af$ , то існує таке натуральне число  $n_0$  і число  $M > 0$ , що при



$n > n_0 f \in D(A^{(n)})$  і  $\|A^{(n)} f\| \leq M$ , тобто для великих індексів послідовності норми генераторів рівномірно обмежені на кожному елементі. Очевидно, що множина

$$B = \left\{ \left( T_{m\eta}^{(n)} f - T_{k\eta}^{(n)} f \right) \left| T_{m\eta}^{(n)} f - T_{k\eta}^{(n)} f \right|^{p-2}, \right. \\ \left. \left( I - \frac{A_m^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\eta}^{(n)} f - \left( I - \frac{A_k^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\eta}^{(n)} f : \eta \in [0, \beta]; n > n_0; m, k > p\omega \right\}$$

є обмеженою множиною.

Використовуючи попередні нерівності, далі маємо, що для кожного числа  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta(\varepsilon) > 0$  таке, що для елементів  $f, g \in B$  і  $\|f - g\| < \delta(\varepsilon)$  виконується нерівність  $\|f|f|^{p-2} - g|g|^{p-2}\| < \frac{\varepsilon^p}{2p^2 M \beta e^{p\omega\beta}} \text{const.}$

Вибираємо числа  $k, m > k_0 > \omega p$  досить великими, такими, щоб, виконувалась нерівність  $2 \frac{p^2 M e^{p\omega\beta}}{(k_0 - \omega) c_1(p)} \leq \min \left( \delta, \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{p^2 \omega \beta}} \right)$ , отримуємо при  $\alpha \in [0, \beta]$  і

$$\left\| P_{mkt}^{(n)} f - \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\alpha}^{(n)} f + \left( I - \frac{A^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\alpha}^{(n)} f \right\| \leq 2 \frac{M e^{p\omega\beta}}{(k_0 - \omega)} \leq \delta.$$

Отже при  $n > n_0$  маємо

$$\left\| P_{mkt}^{(n)} f \left| P_{mkt}^{(n)} f \right|^{p-2} - \left( \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\alpha}^{(n)} f + \left( I - \frac{A^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\alpha}^{(n)} f \right) \times \right. \\ \left. \times \left| \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\alpha}^{(n)} f + \left( I - \frac{A^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\alpha}^{(n)} f \right|^{p-2} \right\| \leq \\ \leq \frac{\varepsilon^p}{2p^2 M \beta e^{p\omega\beta}} \text{const.}$$

Покажемо, що для  $n > n_0$  є вірною нерівність:  $K_{mk}^{(n)}(\beta) \leq \varepsilon^p$ . Дійсно, маємо оцінки

$$\text{const}(p) e^{p\omega\beta} \inf \{ \|g\| : g \in A^{(n)} \} \times \\ \times \int_0^\beta \left\| \left( T_{m\eta}^{(n)} f - T_{k\eta}^{(n)} f \right) \left| T_{m\eta}^{(n)} f - T_{k\eta}^{(n)} f \right|^{p-2} - \right. \\ \left. - \left( \left( I - \frac{A_m^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\eta}^{(n)} f - \left( I - \frac{A_k^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\eta}^{(n)} f \right) \times \right. \\ \left. \times \left\| \left( \left( I - \frac{A_m^{(n)}}{m} \right)^{-1} T_{m\eta}^{(n)} f - \left( I - \frac{A_k^{(n)}}{k} \right)^{-1} T_{k\eta}^{(n)} f \right) \right\|^{p-2} \right\| d\eta \leq \\ \leq \frac{\varepsilon^p p^2 M \beta e^{p\omega\beta}}{2p^2 M \beta e^{p\omega\beta}}; \\ c_1(p) \omega \left( \frac{1}{m - \omega} + \frac{1}{k - \omega} \right)^p e^{2p\beta\omega} \|A^{(n)} f\|^p \leq (c_1(p))^p \left( \frac{p^2 M e^{p\omega\beta}}{(k_0 - \omega) c_1(p)} \right)^p \beta \leq \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Отже, для  $k, m > k_0$  є правильною оцінка

$$\sup_{\eta \in [0, \beta], n > n_0} \left\| T_{m\eta}^{(n)} f - T_{k\eta}^{(n)} f \right\| \leq e^{\rho\omega\beta} \varepsilon.$$

Оскільки  $[R(I - \mu_0 A)] = L^p(R^l, d^l x)$  і оператор  $A - I\omega$  дисипативний як границя операторів  $A^{(n)} - I\omega$  при  $n \rightarrow \infty$ , то отримуємо твердження про рівномірну збіжність напівгруп  $T_t^{(n)} f = \lim_{m \rightarrow \infty} T_{mt}^{(n)} f$ ,  $t \geq 0$ .

Доведемо наступну лему.

**Лема 1.** Нехай  $\omega > \omega$ , тоді оператор  $(I - \frac{A}{m})^{-1}$  має єдине розширення  $B_m$ , яке визначене на всьому просторі  $L^p(R^l, d^l x)$  і для якого на всьому  $L^p(R^l, d^l x)$  є вірною оцінка  $\|B_m f - B_m g\| \leq \frac{\|f - g\|}{1 - m^{-1}\omega}$ .

Крім того,  $B_m = (I - \frac{[A]}{m})^{-1}$  і оператор  $([A] - I\omega)^{-1}$  є максимальним дисипативним оператором.

**Доведення.** Спочатку використаємо дисипативність оператора  $A - I\omega$ , отже при  $n > \omega$  оператор  $(I - n^{-1}A)^{-1}$  існує, і для елементів  $f, g \in R(I - n^{-1}A)$  є вірною оцінка

$$\left\| (I - n^{-1}A)^{-1} f - (I - n^{-1}A)^{-1} g \right\| \leq \frac{\|f - g\|}{1 - m^{-1}\omega}.$$

Доведемо максимальну дисипативність оператора  $([A] - I\omega)^{-1}$ .

Нехай  $k, m > \omega$ . Запишемо наступні оцінки:

$$(I - m^{-1}A)^{-1} (I - k^{-1}A)^{-1} f = \left(1 - \frac{k}{m}\right) (I - n^{-1}A)^{-1} f + \frac{k}{m} f,$$

$$(I - k^{-1}A)^{-1} = (I - m^{-1}A)^{-1} \left( \left(1 - \frac{k}{m}\right) (I - k^{-1}A)^{-1} f + \frac{k}{m} f \right),$$

отже

$$B_k f = B_m \left( \left(1 - \frac{k}{m}\right) B_k f + \frac{k}{m} f \right).$$

Тобто оскільки  $[R(I - k^{-1}A)] = L^p(R^l, d^l x)$ , маємо, що для всіх  $f \in L^p(R^l, d^l x)$  вірно

$$B_k f = B_m \left( \left(1 - \frac{k}{m}\right) B_k f + \frac{k}{m} f \right).$$

Отже області значень  $B_k$  і  $B_m$  співпадають і  $m(f - B_m^{-1}f) = k(f - B_k^{-1}f)$ .

Покажемо, що оператор  $m(f - B_m^{-1}f)$  співпадає з замиканням оператора  $A$  за нормою  $L^p(R^l, d^l x)$ .

Дійсно,  $D(m(f - B_m^{-1}f)) \supset D(A)$  і  $Af \in m(f - B_m^{-1}f)$  для всіх  $f \in D(A)$ , також  $G(m(f - B_m^{-1}f))$  — графік оператора  $m(f - B_m^{-1}f)$  — є замкнутою множиною. Нехай  $g \in m(f - B_m^{-1}f)$ , тоді існує  $f' \in L^p(R^l, d^l x)$  такий, що  $f = B_m f'$  і  $g = m(f - f')$ , а отже існує така послідовність елементів  $\{f_l\} \supset D(A)$ , що  $(I - m^{-1}A) f_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f'$ .

Оскільки  $f_l = B_m (I - m^{-1}A) f_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} B_m f' = f$  і  $A f_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} m(f - f') = g$ , то одержуємо, що графік оператора  $m(f - B_m^{-1}f)$  співпадає із замиканням графіка оператора  $A$ . Отже оператор  $B_m$  співпадає з оператором  $(I - m[A])^{-1}$ , тобто доведено перше припущення, до цього це була лише гіпотеза.

Нехай  $f' \in [A]f$  і  $g' \in [A]g$ , тоді існують послідовності елементів  $\{f_l\} \subset D(A)$  і  $\{g_l\} \subset D(A)$  такі, що при  $f_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f$  маємо  $A f_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f'$  і при  $g_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} g$  маємо  $A g_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} g'$ .

Але оскільки

$$\left\langle (A - I\omega) f_l - (A - I\omega) g_l, (f_l - g_l) |f_l - g_l|^{p-2} \right\rangle \leq 0,$$

то

$$\left\langle (f' - f\omega) - (g' - g\omega), (f - g) |f - g|^{p-2} \right\rangle \leq 0,$$

що означає дисипативність оператора  $([A] - I\omega)^{-1}$ . Використовуючи той факт, що  $[R(I - m^{-1}[A])] = L^p(R^l, d^l x)$ ,  $m > \omega$ , одержимо

$$[R(I - \nu([A] - I\omega))] = L^p(R^l, d^l x), \quad \nu > 0,$$

тобто максимальну дисипативність оператора  $([A] - I\omega)^{-1}$ . Лема доведена.

Використовуючи лему, отримуємо, що оператор  $[A]$  породжує нелінійну напівгрупу  $\{T_\alpha : \alpha \geq 0\}$  і  $T_\alpha f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\alpha^n f$ , де  $\alpha \geq 0$  і  $f \in L^p(R^l, d^l x)$ , де збіжність рівномірна відносно  $\alpha$  на кожному скінченному інтервалі і послідовність напівгруп  $\{T_t^n : t \geq 0, n \in N\}$  породжена операторами  $A_n = n \left( (I - \frac{A}{n})^{-1} - I \right)$  і вірна оцінка  $\|T_\alpha^n f - T_\alpha^n g\| \leq e^{\frac{\omega \alpha}{1 - n^{-1}\omega}} \|f - g\|$ , де  $\alpha \geq 0$  і  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$ .

Нехай покладемо  $g = (I - \frac{A}{n})f$ , і  $B_m^{(n)} = \left( I - \frac{[A^{(n)}]}{m} \right)^{-1}$ . Запишемо оцінки

$$\begin{aligned} \|B_m^{(n)}g - B_m g\| &= \left\| B_m^{(n)}g - B_m^{(n)} \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right) f \right\| \leq \\ &\leq \left( 1 - \frac{\omega}{m} \right)^{-1} \left\| g - \left( I - \frac{A^{(n)}}{m} \right) f \right\| = \\ &\leq \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{\omega}{m} \right)^{-1} \|A^{(n)}f - Af\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $[R(I - \frac{A}{m})] = L^p(R^l, d^l x)$ , маємо, що для всіх  $f \in L^p(R^l, d^l x)$ ,  $m \in N$  існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_m^{(n)}f = B_m f$ . А отже, для всіх елементів  $f \in L^p(R^l, d^l x)$  і натуральних чисел  $m \in N$  існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_m^{(n)}f = A_m f$ . Оскільки  $A_m \in$  Липшицевими на  $L^p(R^l, d^l x)$ , то існують такі малі дійсні  $\varsigma > 0$ , що  $R(I - \varsigma A_m) = L^p(R^l, d^l x)$ . А отже при  $m \in N, \beta > 0$  і  $f \in L^p(R^l, d^l x)$  маємо оцінку

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \alpha \in [0, \beta]}} \|T_{m\alpha}^{(n)}f - T_{m\alpha} f\| = 0.$$

Далі здійснимо граничний перехід в границі  $T_\alpha f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\alpha^{(n)} f$ , зафіксуємо довільне  $\beta > 0$  і  $f \in D(A)$ . Тоді для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існує номер  $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  такий, що для всіх  $m > m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  виконуються нерівності

$$\sup_{\alpha \in [0, \beta]} \left\| T_\alpha^{(n)} f - T_{m\alpha}^{(n)} f \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{\alpha \in [0, \beta]} \|T_\alpha f - T_{m\alpha} f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже для  $m > m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  маємо

$$\sup_{\alpha \in [0, \beta]} \left\| T_\alpha^{(n)} f - T_\alpha f \right\| < \varepsilon + \sup_{\alpha \in [0, \beta]} \left\| T_{m\alpha}^{(n)} f - T_{m\alpha} f \right\|.$$

Спрямуємо  $n$  до нескінченності і, використовуючи попередні результати, одержуємо, що для всіх  $f \in [D(A)] = L^p(R^l, d^l x)$  існує границя

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \alpha \in [0, \beta]}} \left\| T_\alpha^{(n)} f - T_\alpha f \right\| = 0.$$

Теорема 1 доведена.

### Теорема про наближення напівгрупи нелінійних операторів.

Нехай  $\{T_t : t \geq 0\}$  — напівгрупа нелінійних операторів і оператор  $A$  її локальний генератор. Тоді доведемо теорему.

**Теорема 2.** *Нехай  $\{T_t : t \geq 0\}$  — напівгрупа нелінійних операторів, які задовольняють умову:  $\|T_t f - T_t g\| \leq e^{\omega t} \|f - g\|$ , і оператор  $A_h \equiv \frac{T_h - 1}{h}$ ,  $h > 0$  є локальним генератором напівгрупи  $\{T_t^h : t \geq 0\}$ . Тоді виконуються властивості:*

1. Для кожного елемента  $f \in L^p(R^l, d^l x)$  існує неперервна похідна  $\frac{d}{dt} T_t^h f$ ,  $t \geq 0$ , і  $\frac{d}{dt} T_t^h f = A_h T_t^h f$ ,  $f \in L^p(R^l, d^l x)$ ,  $t \geq 0$ .

2. Існує границя  $\limsup_{\substack{\varsigma \rightarrow 0 \\ f \neq g}} \frac{\|T_{t+\varsigma}^h f - T_{t+\varsigma}^h g - (T_t^h f - T_t^h g)\|}{\|f - g\|} = 0$  для кожного  $t \geq 0$ .

3. Для кожного  $f \in [D(A_0)]$  в кожному скінченному інтервалі існує рівномірна відносно  $t$  границя

$$T_t f = \lim_{h \rightarrow 0} T_t^h f.$$

**Доведення.** Зафіксуємо довільне дійсне число  $h > 0$ . Оскільки є вірною оцінка  $\|A_h f - A_h g\| \leq \frac{e^{\omega h} - 1}{h} \|f - g\|$ ,  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$ , то відображення  $f \rightarrow A_h f$  є відображенням Ліпшиця і задача Коші:  $\frac{d}{dt} T_t f = A_h T_t f$ ,  $t \geq 0$ ,  $T_0 f = f$ ,  $f \in L^p(R^l, d^l x)$ , має єдиний розв'язок, який позначимо через  $T_t^h f$ ,  $t \geq 0$ ,  $f \in L^p(R^l, d^l x)$ .

Отже  $\{T_t^h f : t \geq 0, f \in L^p(R^l, d^l x)\}$  є напівгрупою нелінійних операторів і оператор  $A_h$  є генератором цієї напівгрупи, тобто  $A_h$  породжує  $\{T_t^h f : t \geq 0, f \in L^p(R^l, d^l x)\}$ .

Встановимо оцінку росту, для цього зафіксуємо два елементи  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$  і складемо наступну задачу Коші:

$$\frac{d}{dt} (T_t^h f - T_t^h g) = A_h T_t^h f - A_h T_t^h g, \quad t \geq 0,$$

$$T_0^h f - T_0^h g = f - g, \quad f, g \in L^p(R^l, d^l x).$$

Норма  $\|T_t^h f - T_t^h g\|$  є майже скрізь диференційованою, оскільки вона є абсолютно неперервною функцією при  $t \geq 0$ , отже

$$\begin{aligned} & \|T_t^h f - T_t^h g\|^{p-1} \frac{d}{dt} \|T_t^h f - T_t^h g\| = \\ & = \left\langle A_h T_t^h f - A_h T_t^h g, (T_t^h f - T_t^h g) |T_t^h f - T_t^h g|^{p-2} \right\rangle, \end{aligned}$$

використаємо, що

$$\left\langle A_h f - A_h g, (f - g) |f - g|^{p-2} \right\rangle \leq \frac{e^{\omega h} + 1}{h} \|f - g\|^p,$$

при  $t \geq 0$  одержимо

$$\|T_t^h f - T_t^h g\|^{p-1} \frac{d}{dt} \|T_t^h f - T_t^h g\| \leq \frac{e^{\omega h} + 1}{h} \|T_t^h f - T_t^h g\|^p.$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} \|T_t^h f - T_t^h g\|^p &= \|T_0^h f - T_0^h g\|^p + \int_0^t \frac{d}{d\alpha} \|T_\alpha^h f - T_\alpha^h g\|^p d\alpha = \\ &= \|T_0^h f - T_0^h g\|^p + p \int_0^t \|T_\alpha^h f - T_\alpha^h g\|^{p-1} \frac{d}{d\alpha} \|T_\alpha^h f - T_\alpha^h g\| d\alpha \leq \\ &\leq \|T_0^h f - T_0^h g\|^p + p \frac{e^{\omega h} + 1}{h} \int_0^t \|T_\alpha^h f - T_\alpha^h g\|^p d\alpha. \end{aligned}$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} & \|T_t^h f - T_t^h g\|^p \leq \\ & \leq \|T_0^h f - T_0^h g\|^p \sum_{k=0}^m \frac{\left(p \frac{e^{\omega h} + 1}{h}\right)^k}{k!} + \frac{\left(p \frac{e^{\omega h} + 1}{h}\right)^{m+1}}{m!} \int_0^t (t - \alpha)^m \|T_\alpha^h f - T_\alpha^h g\|^p d\alpha \end{aligned}$$

для всіх  $m$  і  $t \geq 0$ . Тобто переходячи до границі при  $m$ , прямуючому до нескінченності, маємо оцінку

$$\|T_t^h f - T_t^h g\|^p \leq e^{p \frac{e^{\omega h} + 1}{h}} \|T_0^h f - T_0^h g\|^p,$$

отже при  $t \geq 0$  є вірною оцінка для напівгрупи

$$\|T_t^h f - T_t^h g\| \leq e^{\frac{e^{\omega h} + 1}{h}} \|f - g\|.$$

Доведемо другий пункт теореми. Для цього, при  $f, g \in L^p(R^l, d^l x)$ , скористаємось оцінкою

$$\|A_h f - A_h g\| \leq \frac{e^{\omega h} + 1}{h} \|f - g\|,$$

яку використаємо в наступній нерівності:

$$\begin{aligned} & \left\| T_{t+\varsigma}^h f - T_{t+\varsigma}^h g - (T_t^h f - T_t^h g) \right\| = \left\| \int_t^{t+\varsigma} (A_h T_\alpha^h f - A_h T_\alpha^h g) d\alpha \right\| \leq \\ & \leq \frac{e^{\omega h} + 1}{h} \left\| \int_t^{t+\varsigma} \|(T_\alpha^h f - T_\alpha^h g)\| d\alpha \right\| \leq \frac{e^{\omega h} + 1}{h} e^{\frac{\omega h + 1}{h}(t + |\varsigma|)} \|f - g\| |\varsigma| \xrightarrow{\varsigma \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Доведемо останнє твердження теореми. Нехай  $h_k$  — монотонна послідовність, що збігається до нуля. Позначимо послідовність напівгруп  $T_t^k = T_t^{h_k}$  і послідовність операторів  $A_k = A_{h_k} = \frac{T_{h_k} - 1}{h_k}$ . Зауважимо, що  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\omega h} + 1}{h} = \omega$ , отже

$$\|T_t^h f - T_t^h g\| \leq e^{ct} \|f - g\|, \quad f, g \in L^p(R^l, d^l x).$$

Отже  $\lim A_k f = A_0 f$ ,  $f \in D(A_0)$  і  $D(A_k) = L^p(R^l, d^l x)$ , тобто  $A = A_0$ ,  $f \in D(A_0)$  і, отже, існує рівномірна (відносно  $t$ ) на кожному скінченному інтервалі границя послідовності операторів напівгруп в  $L^p(R^l, d^l x)$  при кожному  $t \geq 0$ , має місце рівність  $T_t f = \lim_{k \rightarrow \infty} T_t^{h_k} f$ . Теорема 2 доведена.

**Висновки.** В роботі розвивається метод Міядери для дослідження апроксимаційних властивостей нелінійних напівгруп в просторах  $L^p(R^l, d^l x)$ . Доведено теореми про послідовність нелінійних напівгруп та наближення нелінійної напівгрупи за допомогою послідовності нелінійних напівгруп. В подальших роботах умови збіжності апроксимуючих послідовностей можуть бути уточнені.

1. **Andreu F.** Quasilinear elliptic and parabolic equations in  $L^1$  with nonlinear boundary conditions / F. Andreu, J. M. Mazyn, S. Segura, J. Toledo // J. Adv. Math. Sci. Appl. – 1997. – V. 7. – P. 183–213.
2. **Andreu F.** Existence and uniqueness for a degenerate parabolic equation with  $L^1$ -data / F. Andreu, J. M. Mazyn, S. Segura, J. Toledo // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 315. – P. 285–306.
3. **Engel K. J.** One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K. J. Engel, R. Nagel. – Graduate Texts in Mathematics. New York, 2000. – 194 p.
4. **Fujita H.** Operator Theory and Numerical Methods / H. Fujita. – North Holland. – 2001. – 319 p.
5. **Kato T.** Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375–402.
6. **Kato T.** Perturbation theory for linear operators / T. Kato. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1980. – 578 p.
7. **Miyadera I.** On perturbation theory for semi-groups of operators / I. Miyadera // Tohoku Math. J. – 1966. – V. 18. – P. 299 – 310.
8. **Reich S.** Nonlinear Semigroups Fixed Points, And Geometry of Domains in Banach Spaces / S. Reich. – Imperial College Press. – July 30., 2005. – 372 p.
9. **Xueli S.** Equivalence of  $L^p$  Stability and Exponential Stability of Nonlinear Lipschitzian Semigroups / S. Xueli, P. Jigen // Canad. Math. Bull. – 2012. – V. 55. – P. 882–889.

Mathematical Subject Classification: 11K45, 11T23, 11T71  
UDC 511

**S. Varbanets**

I. I. Mechnikov Odesa National University

## SEQUENCES OF PRN'S PRODUCED BY CIRCULAR GENERATOR

**Варбанець С. П. Послідовності ПВЧ, породжені циклічним генератором.** Ми досліджуємо послідовність псевдовипадкових чисел (аббревіатура: ПВЧ), породжену конгруентним генератором, асоційованим із групою точок цілих гаусових чисел, норми яких порівняні (конгруентні) з  $\pm 1 \pmod{p^m}$ , де  $p \equiv 1 \pmod{4}$  — просте число. Ці точки утворюють "нормену" підгрупу у групі класів вычитів  $\mathbb{Z}[i]/p^m$  і ця група циклічна. Порождувальна послідовність ПВЧ проходить  $s$ -мірний тест на рівномірність та статистичну незалежність.

**Ключові слова:** псевдовипадкові числа, дискріпансія, експоненціальні суми.

**Варбанець С. П. Последовательности ПСЧ, порождённые циклическим генератором.** Мы исследуем последовательность псевдослучайных чисел (аббревиатура: ПСЧ), порождённую конгруэнтным генератором, ассоциированным с группой точек целых гауссовых чисел, нормы которых сравнимы (конгруэнтны) с  $\pm 1 \pmod{p^m}$ , где  $p \equiv 1 \pmod{4}$  — простое число. Эти точки образуют "норменную" подгруппу в группе классов вычетов  $\mathbb{Z}[i]/p^m$  и эта группа циклическа. Порождаемая последовательность ПСЧ проходит  $s$ -мерный тест на равномерность и статистическую независимость.

**Ключевые слова:** псевдослучайные числа, дескрипансия, экспоненциальные суммы.

**Varbanets S. Sequences of PRN's produced by circular generator.** We investigate the sequence of pseudorandom numbers (abbreviation: PRN) produced by congruential generator that associated with the group of points of the gaussian integers with norms comparing (congruent) with  $\pm 1 \pmod{p^m}$ , where  $p \equiv 1 \pmod{4}$  is a prime number. These points produce norm subgroup over the residue classes group  $\mathbb{Z}[i]/p^m$  and this group is a cyclic. The generated sequence of PRN's passes  $s$ -dimensional test on equidistribution and statistical independency.

**Key words:** pseudo-random numbers, discrepancy, exponential sum.

**INTRODUCTION.** The sequence of real numbers  $\{a_n\}$ ,  $0 \leq a_n < 1$ , we call the sequence of pseudorandom numbers (arbitrary, PRN's) if it is produced by deterministic generator and being a periodical sequence has the statistical properties such that it looks like to implementation of the sequence of random numbers with independent and uniformly distributed values on  $[0, 1)$ . More acceptable sequences of PRN's generate by the congruential recursion

$$y_{n+1} \equiv f(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}) \pmod{m}, \quad (1)$$

where  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,  $f(u_1, \dots, u_k)$  is integer function over  $\mathbb{Z}_m^k$ .

In case  $f \in \mathbb{Z}_m[u_1, \dots, u_k]$  we have the congruential polynomial generator of periodical sequence  $\{y\}n$  with a period  $\tau$ ,  $\tau \leq m$ .

It emerged that linear function  $f(u) = au + b$  does not supply requirements of "affinity" to statistical independency (unpredictability) (see, for example [1]).

But quadratic function  $f(u) = au^2 + bu + c$  satisfies to condition of "practical" unpredictability (see [8]).

The generator associated with quadratic function  $f(c)$  we call parabolical.

The requirements to uniform distribution and unpredictability is satisfied the following inversive generator

$$y_{n+1} \equiv ay_n^{-1} + b \pmod{p^m}, \quad (2)$$

where  $p$  is a prime number,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $y_n^{-1}$  is a multiplicative inverse to  $y_n \pmod{p^m}$ .

The inversive generator (2) and its generalization was being investigated by many authors (see [3]–[10], [14]–[18]). Starting out from our reasoning we will call such inversive generator as hyperbolical.

To apply the sequence  $\{y_n\}$  in cryptography it is necessary to carry-out the requirement of secrecy as well. That means providing the impossibility to restore the generator parameters by single values of sequence elements. There are some interesting researches about this area (see, [1]–[4], [9], [10]). In the paper [18] there are being investigated the analogues of inversive congruential generators, that without any increases of computational complexity of finding the elements of sequence  $\{y_n\}$ , get essential complexity for intruder's work around parameters of inversive or linear generator to be recovered.

Let  $p \equiv 3 \pmod{4}$  be a prime rational number,  $m$  be a natural. Denote  $G$  the ring of gaussian integers,  $G = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ , and  $G_{p^m}$  (accordingly,  $G_{p^m}^*$ ) the ring of residue classes (accord., multiplicative group of this ring modulo  $p^m$ ) over  $G$ .

Let

$$E_m := \{\alpha \in G_{p^m}^* : N(\alpha) \equiv \pm 1 \pmod{p^m}\}.$$

It easy to check, that  $E_m$  is a subgroup in  $G_{p^m}^*$  with order  $2(p+1)p^{m-1}$ , that we call the norm group over the ring  $G_{p^m}$ . As far as  $E_m$  is a cyclic group, it means that every generated element  $u + iv$  defines two sequences of integer numbers modulo  $p^m$ :

$$Z_n = \Re((u + iv)^n) \quad \text{and} \quad W_n = \Im((u + iv)^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

We considered in [19] the sequence  $\left\{ \frac{aZ_n + bW_n}{p^m} \right\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , and there were shown that this congruence are uniformly distributed on  $[0, 1)$ . The main point of this work is to prove that the sequence  $\left\{ \frac{\Re(u+iv)^{2(p+1)n+k} \cdot \Im(u+iv)^{2(p+1)n+k}}{p^m} \right\}$  also is an uniformly distributed sequence on  $[0, 1)$ .

**AUXILIARY ARGUMENTS.** Before studying the sequences of PRN's produced by circular generator, we standardize some notations to be used throughout this paper.

Lower case Roman (respectively, Greek) letters usually denote rational (respectively, Gaussian) integers; inparticular,  $m, n, k$  are positive integers and  $p$  is always a rational prime number  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\gamma$  stands for the Gaussian odd prime number. We also define a *norm* over  $\mathbb{Q}(i)$  into  $\mathbb{Q}$  by  $N(\alpha) = |\alpha|^2$ . For the sake of convenience, we denote by  $G$  the set of the Gaussian integers. Let  $\mathbb{Z}_q$  (or  $G_\gamma$ ) denotes the ring of residue classes modulo  $q$  (respectively,  $\gamma \in G$ ), and  $\mathbb{Z}_q^*$  (or  $G_\gamma^*$ ) denotes the multiplicative group in  $\mathbb{Z}$  (or  $G_\gamma$ ). If  $x \in G_\gamma^*$  we write  $x^{-1}$  for the multiplicative inverse of



$x \pmod{\gamma}$ , i. e.  $x^{-1}$  is an arbitrary Gaussian integer sutysfying the condition  $xx^{-1} \equiv 1 \pmod{\gamma}$ . As usual,  $gcd(a, b)$  or  $(a, b)$  stand for the greater common divisor of  $a$  and  $b$  (or, respectively,  $\alpha$  and  $\beta$  in  $G$ ), Through  $\mathbb{Z}[x]$  (or  $G[x]$ ) we denote the polynomial ring over  $\mathbb{Z}$  (or  $G$ ). For  $a \in \mathbb{Z}$  ( $\alpha \in G$ ) stand  $\nu_p(a)$  (or  $\nu_p(\alpha)$ ) if  $p^{\nu(a)}|a$ ,  $p^{\nu(a)+1} \nmid a$ .

Before starting out the study of the sequences  $\{Z_n\}$  and  $\{W_n\}$  we need several lemmas being used in sequel.

**Lemma 1.** *Let  $f(\xi) = \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \dots + \alpha_k\xi^k$ , where  $\nu_3, \nu_4, \dots, \nu_k, n \geq 2$  be positive integers,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in G$ ,  $(\alpha_2, \mathfrak{p}) = \dots = (\alpha_k, \mathfrak{p}) = 1$ . Then we have*

$$|S(f, \mathfrak{p}^n)| \leq \begin{cases} 0 & \text{if } \mathfrak{p} \neq 1 + i, (\alpha_1, \mathfrak{p}) = 1 \\ & \text{or } \mathfrak{p} = 1 + i, \alpha_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}, \\ N(\mathfrak{p})^{\frac{n+1}{2}} & \text{if } \mathfrak{p} \neq 1 + i, \alpha_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \\ 2^{\frac{n+3}{2}} & \text{if } \mathfrak{p} = 1 + i, \alpha_1 \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

**Proof.** For  $n = 2$  the estimated sum is the Gaussian sun, and thus in such case our assertion holds.

For  $n \geq 3$ ,  $\mathfrak{p}$  be a odd prime. We put

$$\xi = \eta + \mathfrak{p}^{n-1}\zeta, \eta \in G_{\mathfrak{p}^{n-1}}, \zeta \in G_{\mathfrak{p}}.$$

Taking into account that  $\xi^k = \eta^k + k\eta^{k-1}\zeta \pmod{\mathfrak{p}^{n-1}}$ , we get

$$S(f, \mathfrak{p}^n) = \sum_{\eta \in G_{\mathfrak{p}^{n-1}}} e^{2\pi i \Re\left(\frac{f(\eta)}{\mathfrak{p}^n}\right)} \Re\left(\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2\eta}{\mathfrak{p}}\zeta\right) = N(\mathfrak{p}) \sum_{\substack{\eta \in G_{\mathfrak{p}^{n-1}} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2\eta \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}}} e^{2\pi i \Re\left(\frac{f(\eta)}{\mathfrak{p}^n}\right)}.$$

Let  $\alpha_1 + 2\alpha_2\eta_0 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ,  $\eta_0 \in G_{\mathfrak{p}}^*$ . We put  $\eta = \eta_0 + \mathfrak{p}\xi$ ,  $\xi \in G_{\mathfrak{p}^{n-2}}$ . Then we infer

$$f(\eta_0 + \mathfrak{p}\xi) = f(\eta_0) + \mathfrak{p}(\alpha_1 + 2\alpha_2\eta_0)\xi + \mathfrak{p}^2\alpha_2'\xi^2 + \dots = f(\eta_0) + \mathfrak{p}^2f_1(\xi),$$

where the polynomial  $f_1(\xi)$  has such type as  $f(\xi)$ .

So, after  $\left[\frac{n}{2}\right]$  steps we obtain

$$|S(f, \mathfrak{p}^n)| = \begin{cases} N(\mathfrak{p})^{\frac{n}{2}} & \text{if } n \text{ is even,} \\ N(\mathfrak{p})^{\frac{n-1}{2}} \left| \sum_{\xi \in G_{\mathfrak{p}}} e^{2\pi i \Re\left(\frac{\beta_1 + \beta_2\xi^2}{\mathfrak{p}}\right)} \right| & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

By the estimate of the Gauss sum we have the assertion of Lemma.

The case  $\mathfrak{p} = 1 + i$  can be considered similarly. ■

**Corollary 1.** *Let  $f(\xi) = \alpha\xi + \beta\xi^2 + \mathfrak{p}(\gamma\xi^2 + \dots)$  be a polynomial over  $G$ , and let  $(\beta, \mathfrak{p}) = 1$ . Then for any  $\delta \in G$ , we have*

$$\left| \sum_{\xi \in G_{\mathfrak{p}^n}^*} e^{2\pi i \Re\left(\frac{f(\xi) + \delta\xi^{-1}}{\mathfrak{p}^n}\right)} \right| \leq 2N(\mathfrak{p})^{\frac{n}{2}}.$$

Indeed, putting  $\xi = \eta + \mathfrak{p}^{n-1}\zeta$ ,  $\eta \in G_{\mathfrak{p}^{n-1}}^*$ ,  $\zeta \in G_{\mathfrak{p}}$ , and observing that  $\xi^{-1} = \eta^{-1} - \mathfrak{p}^{n-1}\xi(\eta^{-1})^2$ , where  $\eta^{-1}$  be a multiplicative inverse mod  $\mathfrak{p}^n$  for  $\eta$ , we immediately infer that inequality holds by Lemma 1.

Similarly, assertion holds for the same exponential sums over  $\mathbb{Z}_{p^n}$ .

Let us denote by  $E_m$  the following subgroup of  $G_{p^m}^*$ ,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $p$  be a prime number in  $\mathbb{Z}$ :

$$E_m^+ := \{x \in G_{p^m}^* : N(x) \equiv 1 \pmod{p^m}\}.$$

The subgroup  $E_m^+$  we will call the norm group in  $G_{p^m}^*$ .

Take into account that the multiplicative group of the field  $G_p$  is a cyclic group. It is easy to prove (as in  $\mathbb{Z}_{p^m}^*$ ) that it exists a generating element of the group  $E_1^+$ , such that it will generate every group  $E_m^+$ ,  $m > 1$ .

In order to find that element, we take such generating element  $g_0$  of group  $G_p^*$  for which  $g_0^{(p+1)p} = 1 + hp^2$  with  $(h, p) = 1$ . Then  $g_0^{p-1}$  is revealed generating element of group  $E_m^+$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Moreover, we have

**Lemma 2.** *Let us  $u + iv \in E_m$  be a generating element of  $E_m$ . Then  $\text{ord}(u + iv) = |E_m| = 2(p+1)p^{m-1}$  and*

$$\begin{aligned} (u + iv)^{2(p+1)} &= 1 + p^2x_0 + ipy_0, \\ x_0 + 2y_0^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \quad (x_0, p) = (y_0, p) = 1, \end{aligned}$$

and also for any  $t = 4, 5, \dots$ , we have modulo  $p^m$

$$\begin{aligned} \Re(u + iv)^{2(p+1)t} &= A_0 + A_1t + A_2t^2 + \dots + A_{m-1}t^{m-1}, \\ \Im(u + iv)^{2(p+1)t} &= B_0 + A_1t + B_2t^2 + \dots + B_{m-1}t^{m-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

where

$$\begin{cases} A_0 \equiv 1 \pmod{p^4}, \quad B_0 \equiv 0 \pmod{p^4}, \\ A_1 \equiv p^2x_0 + \frac{1}{2}p^2y_0^2 \equiv 0 \pmod{p^3}, \quad B_1 \equiv py_0 \pmod{p^3}, \\ A_2 \equiv -\frac{1}{2}p^2y_0^2 \pmod{p^3}, \quad B_2 \equiv 0 \pmod{p^3}, \\ A_j \equiv B_j \equiv 0 \pmod{p^3}, \quad j = 3, 4, \dots, m-1. \end{cases} \tag{4}$$

■

Denote

$$\begin{aligned} (u + iv)^{2k} &= u(k) + iv(k), \quad 0 \leq k \leq p, \\ (u + iv)^{2(p+1)t+2k} &\equiv \sum_{j=0}^{m-1} (A_j(k) + iB_j(k)) t^j \pmod{p^m}. \end{aligned}$$

It is clear

$$\begin{aligned} A_j(k) &= A_j u(k) - B_j v(k), \\ B_j(k) &= A_j v(k) + B_j u(k). \end{aligned}$$

Thus from Lemma 1 we have

**Corollary 2.** For  $k = 1, 2, \dots, p$ , we have

$$\begin{aligned} u(k) &\equiv u(-k), \quad v(k) \equiv -v(-k) \pmod{p^m}, \\ (u(k), p) &= (v(k), p) = 1, \quad \text{if } k \neq \frac{p+1}{2}, \frac{3(p+1)}{2}, \\ u(0) &= 1, \quad v(0) = 0, \\ u(k) &\equiv 0 \pmod{p}, \quad (v(k), p) = 1, \quad \text{if } k = \frac{p+1}{2}, \frac{3(p+1)}{2}. \end{aligned}$$

Moreover, for  $k \neq \frac{p+1}{2}, \frac{3(p+1)}{2}$

$$\begin{aligned} A_0(k) &\equiv u(k), \quad B_0(k) \equiv v(k) \pmod{p}, \\ p||A_1(k), \quad p||B_1(k), \quad p^2||A_2(k), \quad p^2||B_2(k) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} A_0(0) &\equiv 1, \quad B_0(0) \equiv 0, \\ A_1(0) &\equiv 0 \pmod{p^4}, \quad B_1(0) \equiv py_0 \pmod{p^4}, \quad p^2||A_2(0), \quad B_2(0) \equiv 0 \pmod{p^3}, \\ A_0(p+1) &\equiv -1 \pmod{p^3}, \quad B_0(p+1) \equiv 0 \pmod{p^3}, \\ A_0(k) &\equiv 0, \quad B_0(k) \equiv 0 \pmod{p}, \\ p||A_1(k), \quad p^2||B_1(k), \quad p^2||A_2(k), \quad B_2(k) &\equiv 0 \pmod{p^3} \quad \text{if } k = \frac{p+1}{2}, \frac{3(p+1)}{2}, \end{aligned}$$

moreover,

$$A_j(k) \equiv B_j(k) \equiv 0 \pmod{p^3}, \quad k = 0, 1, \dots, 2p+1, \quad j \geq 3.$$

In view the congruence

$$\begin{aligned} (u + iv)^{p+1} &= 1 + p^2x_0 + iy_0, \\ (x_0, p) &= (y_0, p) = 1, \\ 2x_0 + y_0^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \\ u^2 + v^2 &\equiv +1 \pmod{p^m}, \end{aligned}$$

the proof of Corollary 2 is a simple exercise and we omit.

## MAIN RESULTS

**Circular generator of PRN's.** We select a random number  $k$  from  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  and consider the sequence  $\{(u + iv)^{2(p+1)n+2k}\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, p^{m-1} - 1$ , where  $u + iv$  is a generating element of  $E_m$ .

Denote

$$\begin{aligned} Z_n(k) &= Z_n = \Re\left((u + iv)^{2(p+1)n+2k}\right), \\ W_n(k) &= W_n = \Im\left((u + iv)^{2(p+1)n+2k}\right). \end{aligned}$$

The description of this sequences there is in Lemma 2. We saw that  $(u + iv)^{2(p+1)} = u_0 + iv_0$ , where  $u_0 = 1 + p^2x_0$ ,  $v_0 = y_0$ ,  $(x_0, p) = (y_0, p) = 1$  and  $x_0 + 2y_0^2 \equiv 0 \pmod{p}$ .

Hence,

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &\equiv \Re((u_0 + iv_0)^n \cdot (u_0 + iv_0) \cdot (u(k) + iv(k))) \equiv \\ &\equiv Z_n u_0 - W_t v_0 \pmod{p^m}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$W_{n+1} \equiv Z_t v_0 + W_t u_0 \pmod{p^m} \quad (6)$$

for  $n = 0, 1, \dots, p^{m-1} - 1$ .

The sequence (5) and (6) satisfies that condition

$$Z_n^2 + W_n^2 \equiv 1 \pmod{p^n}$$

for any  $n \in \mathbb{Z}_{p^{n-1}}$  and  $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ .

Thus we call the sequences (5) and (6) circular sequences of PRN's.

Let  $X_n^{(k)} := X_n = \frac{Z_n}{W_n}$ .

**Theorem 1.** For  $k \in \{0, 1, \dots, 2p+1\} \setminus \left\{0, \frac{p+1}{2}, p+1, \frac{3(p+1)}{2}\right\}$  we have

$$S_X(A, p^m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{p^{m-1}}} e_{p^m}(AX_n) \ll 2p^{\frac{m}{2}} \quad (7)$$

with an absolute constant in symbol " $\ll$ ".

**Proof.** From Corollary we infer

$$X_n = c_0(k) + c_1(k)n + c_2(k)n^2 + \dots,$$

where

$$\begin{aligned} c_1(k) &= py_0(1 - 2v^2(k)) = py_0(3 + 2u^2(k)), \\ c_2(k) &\equiv x_0(p^2) - \frac{5}{3}u(k)v^{-1}(k)x_0y_0p^3 - u(k)v(k)^{-2}p^2y_0^2 \equiv \\ &\equiv p^2x_0(-1 + 2u - u^2) \equiv -p^2x_0(1 - u)^2 \pmod{p^3}, \\ c_j(k) &\equiv 0 \pmod{p^3}, \quad j \geq 3. \end{aligned} \quad (8)$$

Noting that the congruences

$$\begin{aligned} 3 + 2u^2(k) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1 - u(k) &\equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

cannot be realized simultaneously, we, by Lemma 1 (for rational case), obtain the statement of theorem.  $\blacksquare$

**Corollary 3.** For  $1 < N < p^{m-1}$  and any  $k \in \{0, 1, \dots, p\}$

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{aZ_n(k) + bW_n(k)}{p^m}} \right| \leq 2p^{\frac{m}{2}} \log p^m. \quad (9)$$

Indeed, the inequality (9) is consequence of well-known estimate of incomplete sum by complete sum.  $\blacksquare$

**Theorem 2.** Let  $s$  be positive integer,  $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{Z}_{p^m}$ ,  $(h_1, \dots, h_s, p) = 1$ . Then for  $s \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  the following estimate

$$S(h_1, \dots, h_s) = \sum_{n=0}^{p^{m-1}-1} e_{p^m}(h_1 X_n + h_2 X_{n+1} + \dots + h_s X_{n+s-1}) \ll p^{\frac{m}{2}}$$

holds (with an absolute constant depending only on  $s$ ).

**Proof.** Using (8) and calculating coefficients for  $n$  and  $n^2$  in presentation  $h_1 x(n) + h_2 x(n+1) + \dots + h_s x(n+s-1)$  as a polynomial of  $n$  or  $(n+1), \dots$ , or  $n+s-1$ , we obtain (by Lemma 1) that  $S(h_1, \dots, h_s) \neq 0$  only if  $3 + 2u^2(k) \equiv 0 \pmod{p}$ . In such case we estimate the sum  $S(h_1, \dots, h_s)$  as  $O(p^{\frac{m}{2}})$  with the absolute constant in symbol "O". In other cases this sum is zero. ■

**Corollary 4.** In the conditions of Theorem 2 we have

$$\sum_{n=0}^{N-1} e_{p^m}(h_1 X_n + h_2 X_{n+1} + \dots + h_s X_{n+s-1}) \ll p^{\frac{m}{2}} \log p^m.$$

**Discrepancy bound.** Consider the sequence  $\{X_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  of the elements of  $\mathbb{Z}_{p^m}$  defined above. Let  $\{Y_n\}$  be a sequence of PRN's in interval  $[0, 1)$  obtained by the normalization  $Y_n = \frac{X_n}{p^m}$ ,

The sequence  $\{y(n)\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , is purely periodic with the period length  $\tau = p^{m-1}$ .

Equidistribution and statistical independency properties of pseudorandom numbers can be analyzed based on the discrepancy of certain point sets in  $[0, 1)^s$ .

Besides the discrepancy, there exist other important criteria for the uniformity and independence of PRN's. We will restrict our attention to the discrepancy, since it is the most important measure of uniformity and independence in connection with PRN's.

For  $N$  arbitrary points,  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \in [0, 1)^d$ , the discrepancy is defined by

$$D_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = \sup_{I \subset [0, 1)^d} \left| \frac{A_N(I)}{N} - |I| \right|, \quad (10)$$

where the supremum is extended over all subintervals  $I$  of  $[0, 1)^d$ ,  $A_N(I)$  is the number of points among  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  falling into  $I$ , and  $|I|$  denotes the  $d$ -dimensional volume of  $I$ .

Our goal is to obtain a nontrivial discrepancy estimate for a part of period for the circular generators of pseudorandom numbers. In particular, we shall estimate discrepancy for the sequence  $\{\omega_\ell\}$ ,  $\omega_\ell = \frac{x_\ell}{p^m}$ ,  $\ell \geq 0$  and for the sequence  $\{\Omega_\ell\}$ ,  $\Omega_\ell = (\omega_\ell, \omega_{\ell+1}, \dots, \omega_{\ell+s-1})$ ,  $\ell \geq 0$ ,  $s \geq 2$ . Well-known that a small value  $D(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1})$  guarantees an uniform distribution  $\{\omega_\ell\}$ ,  $\ell \geq 0$  on  $[0, 1)$ , and a small value  $D(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1})$  means that the sequence  $\{\omega_\ell\}$ ,  $\ell \geq 0$ , pass the two-dimensional serial test on the statistical independence properties of this sequence. In the cryptographical applications the property of statistical independence means that the circulate congruential pseudorandom sequence  $\{x_\ell\}$ ,  $\ell \geq 0$ , is unpredictable.

In the following, some further notation is necessary.

For integers  $d \geq 1$  and  $q \geq 2$ , let  $C_d(q)$  be the set of all nonzero lattice points  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{Z}^d$  with  $-\frac{q}{2} < h_j \leq \frac{q}{2}$  for  $1 \leq j \leq d$ . Define for  $\mathbf{h} \in C_d(q)$

$$r(h, q) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = 0, \\ q \sin(\pi \frac{|h|}{q}) & \text{if } h \neq 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$r(\mathbf{h}, q) = \prod_{j=1}^d r(h_j, q).$$

Moreover, several auxiliary results are given.

**Lemma 3.** *Let  $N \geq 1$  and  $q \geq 2$  be integers. Suppose that  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N-1} \in \mathbb{Z}_q^d$ . Then the discrepancy of the points  $\mathbf{t}_\ell = \frac{\mathbf{y}_\ell}{q} \in [0, 1)^d$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, N-1$ , satisfies*

$$D_N(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{N-1}) \leq \frac{d}{q} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{h} \in C_d(q)} \frac{1}{r(\mathbf{h}, q)} \left| \sum_{\ell=0}^{N-1} e(\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}_\ell) \right| \quad (12)$$

(Proof see in [13], Theorem 3.1).

**Lemma 4.** *Let  $T$  be the period of the sequence  $\{\mathbf{y}_k\}$ ,  $T \geq N \geq 1$  and  $q \geq 2$  be integers,  $\mathbf{y}_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}^d$  for  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $\mathbf{t}_k = \frac{\mathbf{y}_k}{q} \in [0, 1)^d$ . Then*

$$D_N(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{N-1}) \leq \frac{d}{q} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{h} \in C_d(q)} \sum_{h_0 \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} \frac{1}{r(\mathbf{h}, q)r(h_0, T)} \times \left| \sum_{k=0}^T e(\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}_k + \frac{kh_0}{T}) \right|. \quad (13)$$

This assertion follows from Lemma 3 and from an estimate of uncomplete exponential sum through complete exponential sum.

Now it easy to prove the following theorems.

**Theorem 3.** *Let  $p \equiv 3 \pmod{4}$  be a prime number and let the sequence produced by circular generator (5)–(6) has a view  $X_n = \frac{\Re((u+iv)^{2(p+1)n+k})}{\Im((u+iv)^{2(p+1)n+k})}$ . Then we have for  $k \not\equiv 0 \pmod{\frac{p+1}{2}}$*

$$D_N \left( \frac{X_0}{p^m}, \frac{X_1}{p^m}, \dots, \frac{X_{N-1}}{p^m} \right) \leq \frac{1}{p^m} + \frac{2p^{\frac{m}{2}}}{N} \left( \frac{1}{p} \left( \frac{2}{\pi} \log p^m + \frac{7}{5} \right)^2 + 1 \right),$$

where  $1 \leq N \leq p^{m-1} - 1$ .

**Theorem 4.** *Let  $T_n$ ,  $n = \{0, 1, \dots, p^{m-1} + 1\}$  be a sequence of points  $T_n \in [0, 1)^s$ ,  $T_n = (X_n^{(k)}, X_{n+1}^{(k)}, \dots, X_{n+s-1}^{(k)})$ . Then for  $N \leq p^{m-1} - 1$ ,  $k \not\equiv 0 \pmod{\frac{p+1}{2}}$ ,  $s \leq p-1$*

$$D_N^{(s)} := D_N(T_0, T_1, \dots, T_{N-1}) \leq \frac{s}{p^m} + \frac{1}{p^{\frac{m-1}{2}}} \left( 1 + \frac{1}{p} \left( \frac{2}{\pi} \log p^m + \frac{7}{5} \right)^s \right).$$

The proof of these theorems follow from the estimates of theorems 1 and 2 and their corollaries.

From Theorem 3 and 4 it follows that the sequences  $\{\Re((u + iv)^{2(p+1)\ell+2k})\}$  and  $\{\Im((u + iv)^{2(p+1)\ell+2k})\}$  are equidistributed and pass  $s$ -dimensional test on unpredictability.

**CONCLUSION.** By congruence  $N(w) \equiv 1 \pmod{p^m}$  over the ring of Gaussian integers  $\mathbb{Z}[w]$ , we obtained the circle that produces a big family of circular generators. The description of solution obtained above for such congruence allows to construct new types of congruential generators. Also, this solution make possible to investigate quite efficiently the related sequences of PRN's on equidistribution and unpredictability in terms of exponential sums.

1. **Blackburn S. R.** Predicting nonlinear pseudorandom number generators / S. R. Blackburn, D. Gomez-Peres, I. Gutierrez, I. Shparlinski // *Math. Comp.* – 2004. – Vol. 74 (251). – P. 1471–1494.
2. **Blackburn S. R.** Reconstructing noisy polynomial evaluation in residue rings / S. R. Blackburn, D. Gomez-Peres, I. Gutierrez, I. Shparlinski // *J. of Algorithm.* – 2006. – Vol. 61 (2). – P. 47–59.
3. **Eichenauer-Herrmann J.** Inversive congruential pseudorandom numbers: a tutorial / J. Eichenauer-Herrmann // *Internat. Statist. Rev.* – 1992. – Vol. 60. – P. 167–176.
4. **Eichenauer-Herrmann J.** Pseudorandom number generation by nonlinear methods / J. Eichenauer-Herrmann // *Internat. Statist. Rev.* – 1995. – Vol. 63. P. 247–255.
5. **Eichenauer-Herrmann J.** A New Inversive Congruential Pseudorandom Number Generator with Power of Two Modulus / J. Eichenauer-Herrmann, H. Grothe // *ACM Transactions of Modelling and Computer Simulation.* – 1992. – Vol. 2(1). – P. 1–11.
6. **Eichenauer J.** A non-linear congruential pseudorandom number generator / J. Eichenauer, J. Lehn // *Statist. Hefte.* – 1986. – Vol. 27. – P. 315–326.
7. **Eichenauer J.** A nonlinear congruential pseudorandom number generator with power of two modulus / J. Eichenauer, J. Lehn, A. Topuzoğlu // *Math. Comp.* – 1988. – Vol. 51. – P. 757–759.
8. **Eichenauer-Herrmann J.** A survey of quadratic and inversive congruential pseudorandom numbers / J. Eichenauer-Herrmann, E. Herrmann, S. Wegenkittl // *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods, H. Niederreiter et al (eds.), Lecture Notes in Statist.* – 127, Springer, New York, 1998. – P. 66–97.
9. **Eichenauer-Herrmann J.** On the period of congruential pseudorandom number sequences generated by inversions / J. Eichenauer-Herrmann J., A. Topuzoğlu // *J. Comput. Appl. Math.* – 1990. – Vol. 31. P. 87–96.
10. **Kato T.** On a nonlinear congruential pseudorandom number generator / T. Kato, L. M. Wu, N. Yanagihara // *Math. of Comp.* – 1996. – Vol. 65. (213). – P. 227–233.
11. **Knuth D. E.** *The Art of Computer Programming, Vol. 2: Seminumerical algorithms*, Addison-Wesley, 1998.

12. **Niederreiter H.** Nonlinear methods for pseudorandom number and vector generation, Simulation and Optimization (G. Pflug and U. Dieter, eds.) // Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Springer, Berlin, – 1992. – Vol. 374. – P. 145–153.
13. **Niederreiter H.** Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods. SIAM, Philadelphia, Pa., 1992.
14. **Niederreiter H.** Exponential sums and the distribution of inversive congruential pseudorandom numbers with prime-power modulus / H. Niederreiter, I. Shparlinski // Acta Arith. – 2000. – Vol. 90 (1). P. 89–98.
15. **Varbanets S.** Exponential sums on the sequences of inversive congruential pseudorandom numbers / S. Varbanets // Šiauliai Math. Semin. – 2008. – Vol. 3 (11). P. 247–261.
16. **Varbanets S.** On inversive congruential generator for pseudorandom numbers with prime power modulus / S. Varbanets // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. — 2008. – Vol. 29. – P. 277–296.
17. **Varbanets P.** Exponential sums on the sequences of inversive congruential pseudorandom numbers with prime-power modulus / P. Varbanets, S. Varbanets // Voronoy’s Impact on modern science, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Book 4, Volume 1, Kyiv, Ukraine. – September 22–28, 2008. – P. 112–130.
18. **Varbanets P.** Generalizations of Inversive Congruential Generator, Analytic and probabilistic methods in number theory / P. Varbanets, S. Varbanets // Proceedings of the 5<sup>th</sup> international conference in honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, September 4–10, 2011. Vilnius: TEV. – P. 265–282.
19. **Varbanets P.** Circular generator of PRN’s / P. Varbanets, S. Varbanets // Proceedings, The 7th CHAOS2014 International Conference, 7–10 June 2014, Lisbon Portugal, 2014, to appear.



Mathematical Subject Classification: 34A34, 34A25  
UDC 517.926

S. A. Shchogolev  
Odesa I. I. Mechnikov national university

## ON A REDUCTION OF A LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL SYSTEM WITH OSCILLATING COEFFICIENTS TO A SYSTEM WITH SLOWLY-VARYING COEFFICIENTS

**Щоголев С. А. Про зведення лінійної однорідної диференціальної системи з коливними коефіцієнтами до системи з повільно змінними коефіцієнтами.** Для лінійної однорідної диференціальної системи, коефіцієнти якої зображені у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, отримано умови існування лінійного перетворення аналогічної структури, що зводить цю систему до системи з повільно змінними коефіцієнтами у нерезонансному випадку на асимптотично великому проміжку зміни незалежної змінної.

**Ключові слова:** диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'є.

**Щёголев С. А. О сведении линейной однородной системы с осциллирующими коэффициентами к системе с медленно меняющимися коэффициентами.** Для линейной однородной дифференциальной системы, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования линейного преобразования аналогичной структуры, приводящего эту систему к системе с медленно меняющимися коэффициентами в нерезонансном случае на асимптотически большом промежутке изменения независимой переменной.

**Ключевые слова:** дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье.

**Shchogolev S. A. On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients.** For the linear homogeneous differential system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly-varying coefficients and frequency, conditions of existence of the linear transformation with coefficients of similar structure, this system leads to a system with slowly-varying coefficients in a noresonance case in asymptotical large interval of independent variable, are obtained.

**Key words:** differential, slowly-varying, Fourier series.

**INTRODUCTION.** One of the important problems of the theory of the differential equations is a problem of the reduction of the differential system to a simpler form. In case of linear systems this can be a problem of the reduction to a system with constant coefficients (a reducibility), to a system with triangle (particularly, Jordan or diagonal) matrix of coefficients etc. In case of linear homogeneous system with oscillating coefficients this can be a problem of reduction to a system whose coefficients in some sense slowly-varying. In [1] the author considers the linear homogeneous differential system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly-varying coefficients and frequency in asymptotical large, but finite interval of independent variable. The conditions of the existence

of the transformation, reducing this system to the system with slowly-varying coefficients are researched. The system which considered contains two small parameters  $\mu$  and  $\varepsilon$ , the first of which characterized the smallness of the oscillating terms in the coefficients of the system, and the second is an indicator of the slow variability. In [1] the existence of desired transformation has been proved by the condition  $\mu^{r+1} \leq \varepsilon^2$ , where  $r \in \mathbf{N}$ . This condition is tough enough, although the study of a some specific systems it holds. Roles of parameters  $\mu$  and  $\varepsilon$  are substantially different, and these parameters can be considered independently of each other. Therefore the purpose of this paper is to provide such conditions for the existence of this transformation, which would not require communication between these parameters. This required a significant change in the method of proof used in comparison with the [1].

**NOTATION.** Let  $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, -L\varepsilon^{-1} \leq t \leq L\varepsilon^{-1}, 0 < L < +\infty\}$ .

**Definition 1.** We say, that a function  $f(t, \varepsilon)$  belong to class  $S(m, \varepsilon_0)$ ,  $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ , if

- 1)  $f : G(\varepsilon_0) \rightarrow \mathbf{C}$ ,
- 2)  $f(t, \varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$  with respect  $t$ ,
- 3)  $d^k f(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t, \varepsilon)$  ( $0 \leq k \leq m$ ),

$$\|f\|_{S(m, \varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^m \sup_{G(\varepsilon_0)} |f_k^*(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Under the slowly-varying function we mean a function of class  $S(m, \varepsilon_0)$ .

**Definition 2.** We say, that a function  $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$  belong to class  $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$  ( $m, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ), if this function can be represented as

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon))$$

and:

- 1)  $f_n(t, \varepsilon) \in S(m, \varepsilon_0)$ ;
- 2)  $\|f\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)} \stackrel{def}{=} \|f_0\|_{S(m, \varepsilon_0)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^l \|f_n\|_{S(m, \varepsilon_0)} < +\infty$ , particular

$$\|f\|_{F(m, 0, \varepsilon_0, \theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m, \varepsilon_0)};$$

- 3)  $\theta(t, \varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau$ ,  $\varphi(t, \varepsilon) \in \mathbf{R}^+$ ,  $\varphi(t, \varepsilon) \in S(m, \varepsilon_0)$ ,  $\inf_{G(\varepsilon_0)} \varphi_0 > 0$ .

We denote  $(A)_{jk}$  the element  $a_{jk}$  of the matrix  $A = (a_{jk})_{j, k=1, \overline{n}}$ .

We say, that  $(n \times n)$ -matrix  $A(t, \varepsilon, \theta)$  belong to class  $F(m, l, \varepsilon, \theta)$ , if all elements of this matrix are the functions of the class  $F(m, l, \varepsilon, \theta)$ . Then we define:

$$\|A\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}^* \stackrel{def}{=} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n \|(A)_{jk}\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}.$$

Let  $f(t, \varepsilon, \theta) \in F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ . We denote  $\forall n \in \mathbf{Z}$ :

$$\Gamma_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \varepsilon, \theta) \exp(-in\theta) d\theta,$$

particular

$$\Gamma_0[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \varepsilon, \theta) d\theta.$$

State some properties of norms  $\|\cdot\|_{S(m, \varepsilon)}$ ,  $\|\cdot\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}$ ,  $\|\cdot\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}^*$ . Let  $c = \text{const}$ ,  $p(t, \varepsilon), q(t, \varepsilon) \in S(m, \varepsilon_0)$ ,  $u(t, \varepsilon, \theta), v(t, \varepsilon, \theta) \in F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ ,  $(n \times n)$ -matrices  $A(t, \varepsilon, \theta), B(t, \varepsilon, \theta)$  belongs to class  $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ . Then  $cp, p \pm q, pq$  belongs to class  $S(m, \varepsilon_0)$ ;  $cu, u \pm v, uv$  belongs to class  $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ , matrices  $cA, A \pm B, AB$  belongs to class  $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ , and

- 1)  $\|kp\|_{S(m, \varepsilon_0)} = |k| \cdot \|p\|_{S(m, \varepsilon_0)}$ .
- 2)  $\|p + q\|_{S(m, \varepsilon_0)} \leq \|p\|_{S(m, \varepsilon_0)} + \|q\|_{S(m, \varepsilon_0)}$ .
- 3)  $\|p\|_{S(m, \varepsilon_0)} = \sum_{k=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{d^k p}{dt^k} \right\|_{S(0, \varepsilon_0)}$ .
- 4)  $\|pq\|_{S(m, \varepsilon_0)} \leq 2^m \|p\|_{S(m, \varepsilon_0)} \|q\|_{S(m, \varepsilon_0)}$ .

We prove this property. Obviously, that

$$\|pq\|_{S(0, \varepsilon_0)} \leq \|p\|_{S(0, \varepsilon_0)} \|q\|_{S(0, \varepsilon_0)}.$$

Based on the properties 3) we obtain:

$$\begin{aligned} \|pq\|_{S(m, \varepsilon_0)} &= \sum_{k=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{d^k (pq)}{dt^k} \right\|_{S(0, \varepsilon_0)} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \left\| \frac{d^j p}{dt^j} \right\|_{S(0, \varepsilon_0)} \left\| \frac{d^{k-j} q}{dt^{k-j}} \right\|_{S(0, \varepsilon_0)} \leq \\ &\leq 2^m \left( \sum_{j=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^j} \frac{d^j p}{dt^j} \right\|_{S(0, \varepsilon_0)} \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^j} \frac{d^j q}{dt^j} \right\|_{S(0, \varepsilon_0)} \right) = 2^m \|p\|_{S(m, \varepsilon_0)} \cdot \|q\|_{S(m, \varepsilon_0)}. \end{aligned}$$

- 5)  $\|cu\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)} = |c| \cdot \|u\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}$ .
- 6)  $\|u + v\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)} \leq \|u\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)} + \|v\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}$ .
- 7)  $\|uv\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)} \leq 2^m (2^l + 1) \|u\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)} \cdot \|v\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}$ .

We prove this property. Based on definition of norm  $\|\cdot\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)}$  we obtain:

$$\|u\|_{F(m, l, \varepsilon_0, \theta)} = \|u_0\|_{S(m, \varepsilon_0)} + \left\| \frac{\partial^l u}{\partial \theta^l} \right\|_{F(m, 0, \varepsilon_0, \theta)}.$$

According to Leibniz formula:

$$\frac{\partial^l (uv)}{\partial \theta^l} = \sum_{\nu=0}^l C_l^\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \theta^\nu} \cdot \frac{\partial^{l-\nu} v}{\partial \theta^{l-\nu}}.$$

From the property 4) implies

$$\|uv\|_{F(m, 0, \varepsilon_0, \theta)} \leq 2^m \|u\|_{F(m, 0, \varepsilon_0, \theta)} \cdot \|v\|_{F(m, 0, \varepsilon_0, \theta)}.$$

From there we obtain:

$$\begin{aligned} \|uv\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} &\leq \|\Gamma_0[uv]\|_{S(m,\varepsilon_0)} + \left\| \frac{\partial^l(uv)}{\partial\theta^l} \right\|_{F(m,0,\varepsilon_0,\theta)} \leq \\ &\leq \|\Gamma_0[uv]\|_{S(m,\varepsilon_0)} + \sum_{\nu=0}^l C_l^\nu 2^m \left\| \frac{\partial^\nu u}{\partial\theta^\nu} \right\|_{F(m,0,\varepsilon_0,\theta)} \cdot \left\| \frac{\partial^{l-\nu} v}{\partial\theta^{l-\nu}} \right\|_{F(m,0,\varepsilon_0,\theta)} \leq \\ &\leq 2^m \|u\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \cdot \|v\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} + 2^m 2^l \|u\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \cdot \|v\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} = \\ &= 2^m (2^l + 1) \|u\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \cdot \|v\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}. \end{aligned}$$

$$8) \|cA\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^* = |c| \cdot \|A\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^*.$$

$$9) \|A + B\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^* \leq \|A\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^* + \|B\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^*.$$

$$10) \|AB\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^* \leq 2^m (2^l + 1) \|A\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^* \cdot \|B\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^*.$$

This property follows directly from definition of norm  $\|\cdot\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}^*$  and properties 7).

## MAIN RESULTS

**1. Statement of the Problem.** Consider the following differential system:

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon A(t, \varepsilon) + \mu P(t, \varepsilon, \theta))x, \quad (1)$$

where  $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\Lambda(t, \varepsilon) = \text{diag}(\lambda_1(t, \varepsilon), \dots, \lambda_n(t, \varepsilon))$ ,  $\lambda_j - \lambda_k = i\omega_{jk}(t, \varepsilon)$ ,  $\omega_{jk} \in \mathbf{R}$ ,  $\omega_{jk} \in S(m, \varepsilon_0)$ ,  $A(t, \varepsilon) = (a_{jk}(t, \varepsilon))_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $a_{jk} \in S(m-1, \varepsilon_0)$ ,  $P(t, \varepsilon, \theta) = (p_{jk}(t, \varepsilon, \theta))_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $p_{jk} \in F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ ,  $\mu \in (0, \mu_0) \subset \mathbf{R}^+$ .

We study the problem of the existence of the transformation of the kind:

$$x = (E + \Phi(t, \varepsilon, \theta, \mu))z, \quad (2)$$

where  $\Phi \in F(m^*, l, \varepsilon^*, \theta)$  ( $m^* \leq m$ ,  $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$ ), reducing the system (1) to kind

$$\frac{dz}{dt} = (\tilde{\Lambda}(t, \varepsilon, \mu) + \varepsilon^2 H(t, \varepsilon) + \mu \varepsilon B(t, \varepsilon, \mu))z, \quad (3)$$

where  $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ ,  $H = (h_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $B = (b_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $\tilde{\lambda}_j, h_{jk}, b_{jk} \in S(m^*, \varepsilon^*)$ . Means coefficients of the system (3) are slowly-varying, while the coefficients of the system (1) are oscillating.

## 2. Auxiliary results.

**Lemma 1.** Suppose that the system (1) satisfies the following condition:

$$\forall \nu \in \mathbf{Z}, j, k = \overline{1, n} (j \neq k) : \inf_{G(\varepsilon_0)} |\omega_{jk}(t, \varepsilon) - \nu\varphi(t, \varepsilon)| \geq \gamma > 0. \quad (4)$$

Then  $\exists \mu_1 \in (0, \mu_0)$ ,  $\exists \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$  such that  $\forall \mu \in (0, \mu_1)$ ,  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  exists the transformation of kind

$$x = (E + \tilde{\Psi}(t, \varepsilon, \theta, \mu))y, \quad (5)$$

where  $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu))_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $\tilde{\psi}_{jk} \in F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$ , reducing the system (1) to kind:

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon \Lambda_1(t, \varepsilon) + \mu U(t, \varepsilon, \mu) + \varepsilon^2 H(t, \varepsilon) + \mu \varepsilon V(t, \varepsilon, \theta, \mu))y, \quad (6)$$

where  $\Lambda_1 = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ ,  $H = (h_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $h_{jk} \in S(m-2, \varepsilon_1)$ ,  $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ ,  $u_j \in S(m, \varepsilon_1)$ ,  $V = (v_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $v_{jk} \in F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$ .

**Proof.** We increase the first order of smallness with respect parameter  $\varepsilon$  of the off-diagonal elements in matrix of system (1). For this purpose in system (1) we make the substitution:

$$x = (E - \varepsilon Q(t, \varepsilon))x^1, \quad (7)$$

where  $Q = (q_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $q_{jj} \equiv 0$ ,  $q_{jk} = a_{jk}/(i\omega_{jk})$  ( $j \neq k$ ). Obviously that  $q_{jk} \in S(m-1, \varepsilon_0)$  and  $\exists \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$  such that  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  the transformation (7) is non-degenerate. As a result of its application, we obtain:

$$\frac{dx^1}{dt} = (\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon \Lambda_1(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 H(t, \varepsilon) + \mu P(t, \varepsilon, \theta) + \mu \varepsilon \tilde{P}(t, \varepsilon, \theta))x^1, \quad (8)$$

where  $\Lambda_1, H$  are defined in formulation of the theorem matrices,  $\tilde{P} = Q(E - \varepsilon Q)^{-1}P$ . Thus matrix  $\tilde{P}$  belong to class  $F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$ .

Consider now the following matrix equation:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= \Lambda(t, \varepsilon)\Psi - \Psi\Lambda(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon, \theta) - U(t, \varepsilon, \mu) + \\ &+ \mu(P(t, \varepsilon, \theta)\Psi - \Psi U(t, \varepsilon, \mu)), \end{aligned} \quad (9)$$

where  $(n \times n)$ -matrices  $U(t, \varepsilon, \mu)$ ,  $\Psi = \Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  must be defined. We show, that equation (9) has a solution  $\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$ , and matrix  $U(t, \varepsilon, \mu)$  will be defined as diagonal with elements from class  $S(m, \varepsilon_1)$ .

Together with equation (9) consider equation:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta} = \Lambda(t, \varepsilon)\Psi_0 - \Psi_0\Lambda(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon, \theta) - U_0(t, \varepsilon). \quad (10)$$

We show, that equation (10) for some choice of the matrix  $U_0(t, \varepsilon)$  has a solution, which belong to class  $F(m, l, \varepsilon_1, \theta)$ . We set:

$$U_0(t, \varepsilon) = \text{diag}(\Gamma_0[(P(t, \varepsilon, \theta))_{11}], \dots, \Gamma_0[(P(t, \varepsilon, \theta))_{nn}]), \quad (11)$$

$$(\Psi_0)_{jj} = \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_\nu[(P(t, \varepsilon, \theta))_{jj}]}{i\nu\varphi(t, \varepsilon)} \exp(i\nu\theta(t, \varepsilon)), \quad (12)$$

$$(\Psi_0)_{jk} = - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_\nu[(P(t, \varepsilon, \theta))_{jk}]}{i(\omega_{jk}(t, \varepsilon) - \nu\varphi(t, \varepsilon))} \exp(i\nu\theta(t, \varepsilon)) \quad (j \neq k). \quad (13)$$

For its choice the matrix  $U_0(t, \varepsilon)$  belong to class  $S(m, \varepsilon_1)$  and the matrix  $\Psi_0(t, \varepsilon, \theta)$  belong to class  $F(m, l, \varepsilon_1, \theta)$  and  $\exists K \in (0, +\infty)$  such that

$$\|U_0\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \leq K \|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^*, \quad (14)$$

$$\|\Psi_0\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \leq K \|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \quad (15)$$

(here we have that  $S(m, \varepsilon_1) \subset F(m, l, \varepsilon_1, \theta)$ ).

We seek the solution from class  $F(m, l, \varepsilon_1, \theta)$  of equation (9) by the method of successive approximations, defining the initial approximation  $\Psi_0(t, \varepsilon, \theta)$ , and the subsequent approximations defining as solutions from class  $F(m, l, \varepsilon_1, \theta)$ , of the equations:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) \frac{\partial \Psi_{s+1}}{\partial \theta} &= \Lambda(t, \varepsilon) \Psi_{s+1} - \Psi_{s+1} \Lambda(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon, \theta) + \\ &+ \mu(P(t, \varepsilon, \theta) \Psi_s - \Psi_s U_s(t, \varepsilon, \mu)) - U_{s+1}(t, \varepsilon, \mu), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

where matrices  $U_1, U_2, \dots$  must be defined also.

We set:

$$U_{s+1} = \text{diag}(\Gamma_0[(P + \mu(P\Psi_s - \Psi_s U_s))_{11}], \dots, \Gamma_0[(P + \mu(P\Psi_s - \Psi_s U_s))_{nn}]), \quad (17)$$

$$(\Psi_{s+1})_{jj} = \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_\nu[(P + \mu(P\Psi_s - \Psi_s U_s))_{jj}]}{i\nu\varphi(t, \varepsilon)} \exp(i\nu\theta(t, \varepsilon)), \quad (18)$$

$$(\Psi_{s+1})_{jk} = - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_\nu[(P + \mu(P\Psi_s - \Psi_s U_s))_{jk}]}{i(\omega_{jk}(t, \varepsilon) - \nu\varphi(t, \varepsilon))} \exp(i\nu\theta(t, \varepsilon)) \quad (j \neq k). \quad (19)$$

For its choice the matrices  $U_s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) belongs to class  $S(m, \varepsilon_1)$  and the matrices  $\Psi_s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) belongs to class  $F(m, l, \varepsilon_1, \theta)$ .

We define sets:

$$\Omega_1 = \{ \Psi \in F(m, l, \varepsilon_1, \theta) : \|\Psi - \Psi_0\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \leq d \},$$

$$\Omega_2 = \{ U \in S(m, \varepsilon_1) : \|U - U_0\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \leq d \}, \quad d > 0.$$

From estimations (14), (15) then follows, that  $\forall \Psi \in \Omega_1, \forall U \in \Omega_2$ :

$$\|\Psi\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \leq K\|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* + d, \quad (20)$$

$$\|U\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \leq K\|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* + d. \quad (21)$$

We show, that for sufficiently small values  $\mu$  all approximations  $\Psi$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) belongs to  $\Omega_1$ , and all approximations  $U_s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) belongs to  $\Omega_2$ . Obviously  $\Psi_0 \in \Omega_1, U_s \in \Omega_2$ . Suppose by induction, that  $\Psi_s \in \Omega_1, U_s \in \Omega_2$ , and show, that for sufficiently small  $\mu$   $\Psi_{s+1} \in \Omega_1, U_{s+1} \in \Omega_2$ . Really, from formulas (11), (12), (13), (17), (18), (19), inequalities (14), (15), (20), (21) and property 10) for norm  $\|\cdot\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^*$  we have:

$$\begin{aligned} \|\Psi_{s+1} - \Psi_0\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* &\leq \mu K \|P\Psi_s - \Psi_s U_s\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \leq \\ &\leq \mu 2^m (2^l + 1) K \left( \|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \|\Psi_s\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* + \|\Psi_s\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \|U_s\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* \right) \leq \\ &\leq \mu 2^m (2^l + 1) K \left( \|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* (K\|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* + d) + (K\|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* + d)^2 \right), \end{aligned}$$

and similarly

$$\begin{aligned} \|U_{s+1} - U_0\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* &\leq \\ &\leq \mu 2^m (2^l + 1) K \left( \|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* (K\|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* + d) + (K\|P\|_{F(m, l, \varepsilon_1, \theta)}^* + d)^2 \right). \end{aligned}$$

Require that  $\mu$  was so small that the inequality:

$$\begin{aligned} & \mu 2^m (2^l + 1) K \left( \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* (K \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + d) + \right. \\ & \left. + (K \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + d)^2 \right) \leq d_0 < d. \end{aligned} \quad (22)$$

Then  $\Psi_{s+1} \in \Omega_1$ ,  $U_{s+1} \in \Omega_2$  and thus  $\Psi_s \in \Omega_1$ ,  $U_s \in \Omega_2$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ).

We prove now convergence of process (17) – (19). From (16) we have:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) \frac{\partial(\Psi_{s+1} - \Psi_s)}{\partial \theta} &= \Lambda(t, \varepsilon)(\Psi_{s+1} - \Psi_s) - (\Psi_{s+1} - \Psi_s)\Lambda(t, \varepsilon) + \\ &+ \mu(P(t, \varepsilon, \theta)(\Psi_s - \Psi_{s-1}) - (\Psi_s U_s - \Psi_{s-1} U_{s-1})) - (U_{s+1} - U_s). \end{aligned}$$

Then from (14), (15), (17), (18), (19) we obtain:

$$\begin{aligned} & \|\Psi_{s+1} - \Psi_s\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \leq \mu K \|P(\Psi_s - \Psi_{s-1}) - (\Psi_s U_s - \Psi_{s-1} U_{s-1})\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \leq \\ & \leq \mu K 2^m (2^l + 1) \left( \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \|\Psi_s - \Psi_{s-1}\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + \right. \\ & \left. + \|\Psi_s - \Psi_{s-1}\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \|U_s\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + \|\Psi_s\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \|U_s - U_{s-1}\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \right) \leq \\ & \leq \mu K 2^m (2^l + 1) \left( (\|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + K \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + d) \|\Psi_s - \Psi_{s-1}\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + \right. \\ & \left. + (K \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + d) \|U_s - U_{s-1}\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \right). \end{aligned}$$

A similar estimate holds for  $\|U_{s+1} - U_s\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^*$ . Thus we obtain:

$$\begin{aligned} & \|\Psi_{s+1} - \Psi_s\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + \|U_{s+1} - U_s\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \leq 2\mu 2^m (2^l + 1) ((K+1) \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + d) \times \\ & \times \left( \|\Psi_s - \Psi_{s-1}\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + \|U_s - U_{s-1}\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* \right). \end{aligned}$$

Require that  $\mu$  was so small that the inequality:

$$2\mu 2^m (2^l + 1) ((K+1) \|P\|_{F(m,l,\varepsilon_1,\theta)}^* + d) < 1. \quad (23)$$

Then desired convergence is guaranteed.

Thus when the inequalities (22), (23), the equation (9) has a solution  $\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F(m, l, \varepsilon_1, \theta)$ , and diagonal matrix  $U(t, \varepsilon, \mu) \in S(m, \varepsilon_1)$ . We make now in the system (8) the substitution:

$$x^1 = (E + \mu \Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu))y. \quad (24)$$

As a result we obtain the system of kind (6) in which the matrix  $V(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  are defined from the equation:

$$(E + \mu \Psi)V = \Lambda_1 \Psi - \Psi \Lambda_1 + \tilde{P}((E + \mu \Psi) + \varepsilon(H\Psi - \Psi H) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial t}). \quad (25)$$

Obviously, that for sufficiently small  $\mu$  equation (25) has a unique solution  $V(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ , and this solution belong to class  $F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$ .

Lemma 1 are proved.

**Lemma 2.** *Let we have the scalar linear non-homogeneous first-order differential equation:*

$$\frac{dx}{dt} = (i\omega(t, \varepsilon) + \varepsilon\alpha(t, \varepsilon) + \mu u(t, \varepsilon))x + \varepsilon v(t, \varepsilon, \theta), \quad (26)$$

where  $\omega(t, \varepsilon) \in S(m, \varepsilon_1)$ ,  $\omega(t, \varepsilon) \in \mathbf{R}^+$ ,  $u(t, \varepsilon) \in S(m, \varepsilon_1)$ ,  $\alpha(t, \varepsilon) \in S(m-1, \varepsilon_1)$ ,  $v(t, \varepsilon, \theta) \in F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$  and the following conditions:

- 1)  $\inf_{G(\varepsilon_1)} |\omega(t, \varepsilon) - \nu\varphi(t, \varepsilon)| \geq \gamma > 0 \quad \forall \nu \in \mathbf{Z}$ ;
- 2) alternative holds: or  $\operatorname{Re} u(t, \varepsilon) \equiv 0$ , or  $\inf_{G(\varepsilon_1)} |\operatorname{Re} u(t, \varepsilon)| = \gamma_1 > 0$ .

Then  $\exists \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ ,  $\mu_2 \in (0, \mu_1)$  such that  $\forall \mu \in (0, \mu_2)$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$  the equation (26) has a particular solution  $x(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F(m-1, l, \varepsilon_2, \theta)$ , and  $\exists K_2 \in (0, +\infty)$  such that:

$$\|x(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F(m-1, l, \varepsilon_2, \theta)} \leq K_2 \|x(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F(m-1, l, \varepsilon_2, \theta)}.$$

**Proof** of this lemma is completely similar to proof of Lemma 2 from paper [2].

**Lemma 3.** *Let the function*

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)) \quad (27)$$

belong to class  $F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$ . Then the function

$$x(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \varepsilon \int_0^t f(\tau, \varepsilon, \theta(\tau, \varepsilon)) d\tau$$

belong to class  $F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$  also, and  $\exists K_3 \in (0, +\infty)$  such that:

$$\|x\|_{F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)} \leq K_3 \|f\|_{F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)}.$$

**Proof.** We define operators:

$$D_n^0 u = u, \quad D_n^1 u = \frac{d}{dt} \left( \frac{u(t, \varepsilon)}{in\varphi(t, \varepsilon)} \right), \quad D_n^k u = D_n^1(D_n^{k-1} u).$$

Consider

$$\varepsilon \int_0^t f(\tau, \varepsilon, \theta(\tau, \varepsilon)) d\tau = \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ (\nu \neq 0)}}^{\infty} \varepsilon \int_0^t f_n(\tau, \varepsilon, \theta(\tau, \varepsilon)) e^{in\theta(\tau, \varepsilon)} d\tau$$

(by the uniform convergence of the series (27) term by term integration lawfully). By the  $(m-1)$ -fold integration by parts we obtain:

$$\varepsilon \int_0^t f_n(\tau, \varepsilon, \theta(\tau, \varepsilon)) e^{in\theta(\tau, \varepsilon)} d\tau = a_n(t, \varepsilon) e^{in\theta(t, \varepsilon)} - a_n(0, \varepsilon),$$



where

$$a_n(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \frac{D_n^k(f_n(t, \varepsilon))}{in\varphi(t, \varepsilon)} + (-1)^{m-1} e^{-in\theta(t, \varepsilon)} \int_0^t D_n^{m-1}(f_n(\tau, \varepsilon)) e^{in\theta(\tau, \varepsilon)} d\tau.$$

Applicable to the function  $a_n(t, \varepsilon)$  operator  $D_n^s \left( \frac{d}{dt} \right)$ . We obtain:

$$D_n^s \left( \frac{da_n}{dt} \right) = \varepsilon \sum_{k=0}^{m-s-3} (-1)^k D_n^{k+s+1}(f_n(t, \varepsilon)) + (-1)^{m+s-2} in\varphi(t, \varepsilon) e^{-in\theta(t, \varepsilon)} \varepsilon \int_0^t D_n^{m-1}(f_n(\tau, \varepsilon)) e^{in\theta(\tau, \varepsilon)} d\tau.$$

Obviously, that  $D_n^k(f_n(t, \varepsilon)) = \varepsilon^k f_{nk}^*(t, \varepsilon)$ , and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \sup_{G(\varepsilon_1)} |f_{nk}^*(t, \varepsilon)| < +\infty \quad (k = \overline{1, m-1}).$$

So:

$$\left| \varepsilon \int_0^t D_n^{m-1}(f_n(\tau, \varepsilon)) e^{in\theta(\tau, \varepsilon)} d\tau \right| \leq L \varepsilon^{m-1} \sup_{G(\varepsilon_1)} |f_{n, m-1}^*(t, \varepsilon)|.$$

From these estimations follows, that  $\forall s = \overline{0, m-2}$ :  $d^{s+1} a_n(t, \varepsilon) / dt^{s+1} = \varepsilon^{s+1} a_{ns}^*(t, \varepsilon)$ , and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \sup_{G(\varepsilon_1)} |a_{ns}^*(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Lemma 3 are proved.

### 3. Principal Results.

**Theorem.** *Suppose the system (1) such, that:*

1)  $\forall \nu \in \mathbf{Z}, j, k = \overline{1, n} (j \neq k) : \inf_{G(\varepsilon_0)} |\omega_{jk}(t, \varepsilon) - \nu\varphi(t, \varepsilon)| \geq \gamma > 0;$  (28)

2) *the elements  $u_j(t, \varepsilon, \mu)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) of the diagonal matrix  $U(t, \varepsilon, \mu)$ , which defined in Lemma 1, have the alternative:*

or  $\text{Re}(u_j(t, \varepsilon, \mu) - u_k(t, \varepsilon, \mu)) \equiv 0$  ( $j, k = \overline{1, n}, j \neq k$ );

or  $\inf_{G(\varepsilon_1)} |\text{Re}(u_j(t, \varepsilon, \mu) - u_k(t, \varepsilon, \mu))| \geq \gamma_0 > 0$ , where  $\varepsilon_1$  are defined in Lemma 1.

Then  $\exists \varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_0), \mu_3 \in (0, \mu_0)$  such that  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_3), \forall \mu \in (0, \mu_3)$  exists the transformation of kind (2), where  $\Phi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F(m-1, l, \varepsilon_3, \theta)$ , which reducing the system (1) to form (3), where  $H \in S(m-2, \varepsilon_3), B \in S(m-1, \varepsilon_3)$ .

**Proof.** Based on the Lemma 1, we reduce the system (1) by the transformation (5) to kind (6). We construct now the transformation

$$y = (E + \mu X(t, \varepsilon, \theta, \mu))z, \tag{29}$$

reducing the system (6) to form (3). We obtain the follows differential equation with respect matrix  $X$ :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \tilde{\Lambda}(t, \varepsilon, \mu)X - X\tilde{\Lambda}(t, \varepsilon, \mu) + \varepsilon V(t, \varepsilon, \theta, \mu) - \varepsilon B(t, \varepsilon, \mu) + \\ &+ \varepsilon^2(H(t, \varepsilon)X - XH(t, \varepsilon)) + \mu\varepsilon(V(t, \varepsilon, \theta, \mu)X - XB(t, \varepsilon, \mu)), \end{aligned} \quad (30)$$

where  $\tilde{\Lambda} = \Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(t, \varepsilon) + \mu U(t, \varepsilon, \mu) = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ ,  $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j(t, \varepsilon) + \varepsilon a_{jj}(t, \varepsilon) + \mu u_j(t, \varepsilon, \mu) \in S(m-1, \varepsilon_1)$  ( $j = \overline{1, n}$ ). The matrix  $B(t, \varepsilon, \mu)$  must be defined.

With the equation (30) we consider the truncated equation:

$$\frac{dX_0}{dt} = \tilde{\Lambda}(t, \varepsilon, \mu)X_0 - X_0\tilde{\Lambda}(t, \varepsilon, \mu) + \varepsilon V(t, \varepsilon, \theta, \mu) - \varepsilon B_0(t, \varepsilon, \mu), \quad (31)$$

where the matrix  $B_0(t, \varepsilon, \mu)$  must be defined. In the component-wise form the equation (31) has the kind:

$$\frac{d((X_0)_{jk})}{dt} = (\tilde{\lambda}_j(t, \varepsilon, \mu) - \tilde{\lambda}_k(t, \varepsilon, \mu))(X_0)_{jk} + \varepsilon(V(t, \varepsilon, \theta, \mu) - B_0(t, \varepsilon, \mu))_{jk}, \quad j, k = \overline{1, n}. \quad (32)$$

Consider the case  $j = k$ . We have:

$$\frac{d((X_0)_{jj})}{dt} = \varepsilon(V(t, \varepsilon, \theta, \mu))_{jj} - \varepsilon(B_0(t, \varepsilon, \mu))_{jj}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (33)$$

Assume  $(B_0)_{jj} = \Gamma_0[(V)_{jj}]$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Then based on Lemma 3 the equation (33) has a particular solution  $(X_0)_{jj}$  from class  $F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)$ , and  $\exists K_4 \in (0, +\infty)$  such that:

$$\|(X_0)_{jj}\|_{F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)} \leq K_4 \|(V)_{jj}\|_{F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)}.$$

Let now  $j \neq k$ . Then we have:

$$\begin{aligned} \frac{d((X_0)_{jk})}{dt} &= (i\omega_{jk}(t, \varepsilon) + \varepsilon(a_{jj}(t, \varepsilon) - a_{kk}(t, \varepsilon)) + \mu(u_j(t, \varepsilon, \mu) - u_k(t, \varepsilon, \mu)))(X_0)_{jk} + \\ &+ \varepsilon(V(t, \varepsilon, \theta, \mu))_{jk} - \varepsilon(B(t, \varepsilon, \mu))_{jk}, \quad j, k = \overline{1, n}; \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (34)$$

Assume  $(B_0)_{jk} \equiv 0$  ( $j \neq k$ ). Then based on Lemma 2 by condition 2) of the theorem we obtain, that equation (34) has a particular solution  $(X_0)_{jk}$  from class  $F(m-1, l, \varepsilon_3, \theta)$  ( $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1$ ), and  $\exists K_5 \in (0, +\infty)$  such that:

$$\|(X_0)_{jk}\|_{F(m-1, l, \varepsilon_3, \theta)} \leq K_5 \|(V)_{jk}\|_{F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)}.$$

It follows that if  $B_0 = \text{diag}(\Gamma_0[(V)_{11}], \dots, \Gamma_0[(V)_{nm}])$ , then matrix equation (31) has a particular solution  $X_0(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  from class  $F(m-1, l, \varepsilon_4, \theta)$  ( $\varepsilon_4 \leq \varepsilon_1$ ), and  $\exists K_6 \in (0, +\infty)$  such that:

$$\|X_0\|_{F(m-1, l, \varepsilon_4, \theta)}^* \leq K_6 \|V\|_{F(m-1, l, \varepsilon_1, \theta)}^*.$$

Now pursuing arguments similar to the proof of the Lemma 1, it is easy to show that  $\exists \varepsilon_5 \in (0, \varepsilon_4)$ ,  $\mu_5 \in (0, \mu_1)$  such that  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_5)$ ,  $\mu \in (0, \mu_5)$  the equation (30) has a particular solution  $X(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  from class  $F(m-1, l, \varepsilon_5, \theta)$ .

The theorem are proved.

**CONCLUSION.** Thus, for the system (1) the sufficient conditions of the existence of the transformation, which reducing this system close to a system with slowly-varying coefficients and the algorithm for constructing this transformation are obtained.

1. **Shchogolev S. A.** On a full separation of some classes of the linear homogeneous systems of the differential equations [in Russian] // *Odessa National University Herald. Math. and Mechan.* – 2008. – V. 13. – Is. 18. – P. 119–131.
2. **Shchogolev S. A.** On a solutions, represented by a Fourier series with slowly varying parameters, of the quasilinear second-order differential systems [in Russian] // *Odessa National University Herald. Math. and Mechan.* – 2007. – V. 12. – Is. 7. – P. 156–176.

М Е Х А Н І К А

---

Mathematical Subject Classification: 76A02, 76A05

УДК 662.215.2

**С. К. Асланов**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**РЕОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ  
СТРУКТУРЫ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ  
В УЗКИХ ЗАЗОРАХ**

**Асланов С. К. Реологічне моделювання неоднорідної структури сдвигової течії рідини у вузьких зазорах.** Теорія структури зсувної течії в узких зазорах побудована на основі змінної в'язкості. Для неї у пристінних слоях використовується степенева залежність від місцевої швидкості деформації та відстані до обмежуючих твердих площин. Визначення основних параметрів цієї двошарової течії здійснюється за допомогою метода послідовного наближення.

**Ключові слова:** зсувна течія, вузькі зазори, змінна в'язкість, орієнтаційна впорядкованість, пристінні шари.

**Асланов С. К. Реологическое моделирование неоднородной структуры сдвигового течения жидкости в узких зазорах.** Теория структуры сдвигового течения в узких зазорах построена на основе переменной вязкости. Для нее в пристенных слоях используется степенная зависимость от местной скорости деформации и расстояния до ограничивающих твердых поверхностей. Определение основных параметров этого слоистого течения осуществляется при помощи метода последовательных приближений.

**Ключевые слова:** сдвиговое течение, узкие зазоры, переменная вязкость, ориентационная упорядоченность, пристенные слои.

**Aslanov S. K. The rheology simulation for a inhomogeneous structure of the shear fluid flow into slender clearances.** The theory of shear flow structure into slender clearances on the basis of variable viscosity was constructed. The power dependence on local velocity deformation and on distance bounding hard surfaces into priwall layers was used. These basic layered flow parameters by means of the successive approximation method was determined.

**Key words:** shear flow, narrow gaps, variable viscosity, orientational ordering, priwall layers.

**ВВЕДЕНИЕ.** Известно, что целый ряд жидкостей, в том числе и составляющих основу смазочных сред, проявляют свои аномальные свойства при течении в узких (микронных) зазорах между твердыми (металлическими) поверхностями. Структурная неоднородность, возникающая в таких прослойках, связана с образованием на их твердых границах сверхтонких приповерхностных слоев особой квазизжидкокристаллической фазы [1]. Это порождает неньютоновский характер течения в них с эффективным коэффициентом вязкости  $\eta_{eff}$ , зависящим от скорости деформации  $\gamma$  и отличным от такового  $\eta_0$  [2] для изотропного состояния

обычной "объемной" жидкости. Наличие структурированных жидкокристаллических слоев в смазочной прослойке триады трения тесно взаимосвязано с противозносными характеристиками трибосопряжения.

В реологических исследованиях структурно неоднородных масляных прослоек в напорном [3] и сдвиговом [4] течениях установлена их повышенная вязкость, обусловленная гомеотропной ориентацией молекул приповерхностных структурированных слоев. Молекулярные слои смазочной среды в непосредственной близости от обтекаемой твердой подложки можно трактовать как квазижесткокристаллическое состояние, образующееся за счет наиболее эффективного молекулярного взаимодействия с обтекаемой твердой границей. С удалением от нее молекулярное воздействие на смазочную среду ослабляется и жесткокристаллическое состояние переходит в жидкокристаллическое. Ориентационная упорядоченность молекулярной структуры смазочной среды, ослабляясь, заканчивается переходом в ее изотропное ньютоновское состояние с постоянной вязкостью  $\eta_0$  в срединной части зазора, если это позволяет его ширина  $D > 2d_s$  ( $d_s$  – толщина противоположных пристенных структурированных слоев). В случае  $D < 2d_s$  последние взаимно срезаются, и жидкокристаллическая фаза заполняет целиком весь зазор.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Попытка теоретического описания структур сверхтонких пристенных слоев была предпринята в [3], [4] с позиций динамики жидкости переменной вязкости как для напорного, так и для сдвигового течения. В качестве функциональной зависимости коэффициент вязкости предложен степенной тип интегральной формы от скорости деформации по любому элементарному подслою, непосредственно прилегающему к обтекаемой твердой стенке. В конечном итоге, это сводилось к степенной зависимости вязкости от местной скорости течения смазочной среды по отношению к стенке с подлежащим определению показателем. Такой подход обеспечивал лишь неявную зависимость коэффициента вязкости от расстояния до обтекаемой твердой подложки. Тем самым влияние этого расстояния на степень интенсивности молекулярного воздействия твердой поверхности на ориентационную упорядоченность структуры пристенного слоя определялось лишь через посредство характера возникающего функционального распределения скоростей в обтекающей жидкости. Такой интегральный вид зависимости вязкости от скорости деформаций не отвечает принятой в реологии неньютоновских жидкостей зависимости от местной скорости деформации. Этот недостаток был преодолен в [5], где для теоретического описания анизотропной структуры пристенных слоев в сдвиговом режиме течения была использована степенная зависимость коэффициента вязкости как от местной скорости деформации, так и явно от расстояния до обтекаемой твердой стенки, которое призвано отразить гидродинамически интенсивность ее молекулярного взаимодействия с обтекающей жидкостью.

Однако есть более существенное обстоятельство, которое имеет принципиальное значение. Теоретические исследования, выполненные во всех работах, упомянутых в двух предыдущих абзацах, базируются на решении сопряженной краевой задачи для случая  $D > 2d_s$ , когда в срединной части зазора присутствует изотропное течение жидкости с постоянной вязкостью  $\eta_0$ . Отсюда вытекает, что использование этого решения в области  $D < 2d_s$  с целью определения оценки величины параметра порядка следует признать незаконным. В этом случае за-

дача с течением в зазоре теряет сопряженный характер, и по этой причине в ее математической постановке отсутствует заданный масштаб вязкости  $\eta_0$  и второй линейный масштаб  $d_s$ .

В то же время именно решение задачи в случае  $D < 2d_s$  позволяет математически корректно дать теоретическую оценку для параметра порядка в пристенных слоях и с помощью экспериментальных данных из области  $D > 2d_s$  найти величину  $d_s$  толщины таких слоев. Поэтому в основу настоящего исследования положено решение задачи о структуре сложного течения жидкости переменной вязкости в узком зазоре между твердыми поверхностями, когда  $D < 2d_s$ ,  $D > 2d_s$ . Рассматривается сдвиговое течение в коаксиальном зазоре  $D$  между бесконечными круговыми цилиндрами радиусов  $\approx R$ , которые вращаются относительно друг друга с угловой скоростью  $\omega$ . Исключительная малость ширины зазора ( $D/R \ll 1$ ) позволяет воспользоваться асимптотическим приближением локально плоского установившегося течения жидкой среды между двумя параллельными стенками, одна из которых неподвижна, а сдвиговой режим порождается движением второй стенки со скоростью  $v_* = \omega R$ .

Поскольку полимомелкулярные пристенные слои квазикристаллической структуры формируются на каждой из противоположащих стенок одинаковым образом, течение среды в зазоре можно считать симметричным. Скоростной профиль, с одной стороны, будет симметричным относительно срединной линии зазора, где величина скорости принимает значение  $(v_*/2)$ , а с другой – он антисимметричен по отношению к своей средней линии поперечного сечения. Поэтому достаточно рассмотреть течение смазочной среды в полузазоре, примыкающем к неподвижной плоской стенке, расположив на ней начало системы координат и направив ось  $y$  по нормали к ней (ось  $x$  – вдоль стенки). Результаты для другого полузазора получаются из первого простым пересчетом.

Математическое исследование указанного сдвигового течения складывается из решения двух краевых задач существенно различного характера для уравнения движения  $d\tau/dy = 0$  с общим первым интегралом

$$\tau = \eta_j \frac{dv_j}{dy} = C_0 = const, \quad (1)$$

где  $\tau$  – напряжение сдвига,  $\eta$  – коэффициент вязкости среды,  $v$  – ее скорость, индекс  $j$  означает принадлежность к соответствующей зоне течения.

В случае  $D > D_* = 2d_s$  краевая область  $0 \leq y \leq D/2$  включает в себя разнофазные состояния одной и той же среды: пристенный слой  $j = 1$  ( $0 \leq y \leq d_s$ ) со структурой квазизжидкокристаллического характера, описываемой гидродинамически при помощи переменного коэффициента вязкости  $\eta$ , и промежутка  $j = 2$  ( $d_s \leq y \leq D/2$ ) изотропного течения жидкости с постоянной вязкостью  $\eta_2 = \eta_0$ , которые контактируют между собой на внутренней границе  $y = d_s$ . Для модельного распределения переменной вязкости предлагается степенной вид зависимости

$$\eta_1 = A_1 y^{-\alpha} (dv/dy)^{-\beta} \quad (2)$$

с постоянными показателями  $\alpha, \beta$ , подлежащими определению. Коэффициент  $A_1$  находится из условия сопряжения  $\eta_1 = \eta_0$  на границе  $y = d_s$ , что приводит к

$$\eta_1 = \eta_0 \left( \frac{y}{d_s} \right)^{-\alpha} \left[ \frac{dv_1/dy}{(dv_1/dy)_{y=d_s}} \right]^{-\beta}. \quad (3)$$

Реологическая зависимость от локальной скорости деформации  $dv_1/dy$  связана с ньютоновским характером течения среды в сверхузких зазорах. Введенная наряду с этим явная зависимость коэффициента вязкости от расстояния  $y$  до обтекаемой твердой стенки призвана гидродинамически отразить эффект молекулярного взаимодействия текущей среды с материалом подложки, распространяющийся на сверхтонкий пристенный слой, формируя ориентационную упорядоченность его молекулярной структуры. Степень такого упорядочивания будет определяться величиной показателя  $\alpha$ .

Чтобы модельное распределение (3) могло гидродинамически отражать квазижесткокристаллическую структуру молекулярных слоев среды, непосредственно примыкающих к обтекаемой твердой поверхности  $y = 0$ , следует считать  $\alpha > 0$ . Постоянство сдвигового напряжения (1) обеспечивает в таком случае исчезновение величины скорости деформации  $dv_1/dy$  на стенке  $y = 0$ . Предположение  $\beta > 0$  дает возможность согласовать увеличение коэффициента вязкости (3) с поведением экспериментальных реологических кривых обратной зависимости вязкости от скорости деформации [4]. Неограниченный рост коэффициента вязкости в непосредственной близости от обтекаемой стенки может служить в пользу модельной интерпретации образования жесткоориентационной молекулярной упорядоченности среды.

Подстановка (3) в (1) с точностью до постоянного множителя дает

$$\frac{dv_1/dy}{(dv_1/dy)|_{y=d_s}} \sim \left(\frac{y}{d_s}\right)^\delta, \text{ где } \delta = \frac{\alpha}{1-\beta}, \quad (4)$$

т. е. скоростной профиль в пристенном структурированном слое определяется единственным параметром  $\delta$ , который можно назвать параметром порядка. В результате коэффициент вязкости (3) будет выражаться в виде  $\eta_1/\eta_0 \sim (y/d_s)^{-\delta}$ , откуда в соответствии с вышесказанным следует необходимость  $\delta > 0$ . С другой стороны, среднеинтегральное значение вязкости по толщине пристенного слоя  $d_s$  будет выражаться

$$\langle \eta_1/\eta_0 \rangle \sim \frac{1}{d_s} \int_0^{d_s} \left(\frac{y}{d_s}\right)^{-\delta} dy = \frac{1}{1-\delta}$$

при  $\delta < 1$ , при  $\delta \geq 1$  интеграл расходится. Поэтому параметр ориентационного порядка оказывается заключенным в интервале

$$0 < \delta < 1. \quad (5)$$

При  $D > D_*$  краевая задача для скоростного профиля  $v_j(y)$  в полузоре  $0 \leq y \leq D/2$  носит сопряженный характер и включает следующие граничные условия:

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(D/2) = v_*/2, \quad v_1(d_s) = v_2(d_s). \quad (6)$$

Они соответственно выражают неподвижность вязкой среды на обтекаемой неподвижной поверхности, симметрию скоростного профиля и его непрерывность на внутренней границе  $y = d_s$ . Гладкий переход профиля через нее обусловлен постоянством сдвигового напряжения  $\tau_j(1)$  и непрерывностью коэффициента вязкости  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0$ , поскольку ориентационная упорядоченность полностью исчезает на границе пристенного слоя.

Появляющиеся при интегрировании (1) произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  (вместе с константой  $C_0$ ) находятся из удовлетворения условий (6), приводя к скоростному профилю в зазоре

$$v_1 = \frac{v_*}{2\delta} \frac{(y/d_s)^{1+\delta}}{K-1} \quad (0 \leq y \leq d_s), \quad (7)$$

$$v_2 = \frac{v_*}{2} \frac{(1+\frac{1}{\delta})(y/d_s)^{-1}}{K-1} \quad (d_s \leq y \leq D/2) \quad (8)$$

и постоянному напряжению сдвига

$$\tau = C_0 = \eta_0 \frac{v_*}{D} \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{-1}, \quad K = \frac{D}{2d_s} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right). \quad (9)$$

Случай течения с постоянной вязкостью  $\eta_0$  (линейным профилем скорости) во всем зазоре получается как предельный при  $\delta \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ),  $K \rightarrow \infty$ :  $\tau_0 = \eta_0 \gamma$  и  $\gamma = v_*/D$  представляет собой среднеинтегральное значение скорости деформации по зазору.

Сдвиговое напряжение  $\tau$  для сложной структуры течения можно записать в подобном виде, если ввести в рассмотрение так называемую эффективную вязкость  $\eta_{eff}$  (т. е.  $\tau = \eta_{eff} \gamma$ ), которая измеряема экспериментально через посредство напряжения сдвига. Тогда из (9) можно окончательно получить зависимость комплекса  $K$  от относительной эффективной вязкости:

$$K = [1 - (\eta_0/\eta_{eff})]^{-1}, \quad D_* \geq 2d_s. \quad (10)$$

В случае  $D < D_* = 2d_s$ , когда происходит взаимное срезание противоположных пристенных слоев, так что вся ширина зазора  $D$  оказывается заполненной структурированным течением, и толщина каждого из этих слоев всегда имеет величину  $D/2$ . В связи с отсутствием в задаче заданного масштаба вязкости коэффициент  $A_1$  в распределении (2) приходится выразить через внутренний параметр  $\eta_*$  (при  $y = D/2$ ), неизвестный заранее и имеющий смысл наименьшего значения коэффициента вязкости

$$\eta_1 = \eta_* (2y/D)^{-\alpha} \left[ \frac{dv_1/dy}{dv_1/dy|_{y=D/2}} \right]^{-\beta}. \quad (11)$$

Изменяемость  $\eta_*$  вместе с  $D$  составляет как раз принципиальное отличие данной краевой задачи от предыдущей.

Граничными условиями для решения уравнения (1) совместно с (11) служат теперь  $v_1(0) = 0$  и  $v_1(D/2) = v_x/2$ , что приводит к скоростному профилю

$$v_1 = \frac{v_*}{2} \left(\frac{2y}{D}\right)^{\delta+1} \quad (D < D_*) \quad (12)$$

и сдвиговому напряжению  $\tau = C_0 = \gamma \eta_* (\delta + 1)$ .

Используя понятие эффективной вязкости  $\eta_{eff}$ , последнее можно записать в окончательном виде

$$\eta_{eff} = \eta_* (1 + \delta) \quad (D < D_*), \quad (13)$$

который явно свидетельствует о постоянстве отношения  $(\eta_{eff}/\eta_*)$ .

При смыкании противоположных пристенных слоев, когда для каждого из них  $d_s = D/2$  область промежуточного изотропного течения с постоянной вязкостью



$\eta_0$  вырождается в срединную линию зазора  $y = D/2$ , так что  $\eta_*$  на ней совпадает с  $\eta_0$ , т. е. (13) в пределе превращается в

$$(\eta_{eff}/\eta_0) = \delta + 1 \text{ при } D = D_* = 2d_s \quad (14)$$

и естественно согласуется с таковым из (9) в силу непрерывности перехода решения при  $D > D_*$ ,  $D < D_*$  через их предельную точку  $D = D_*$ .

В случае дальнейшего сужения зазора, когда  $D/2$  становится меньше  $d_s$ , этот линейный масштаб вообще исключается из постановки задачи о взаимном разрушении пристенных структурных слоев. Его роль теперь принимает на себя величина  $D/2$ , так что отношение ширины зазора к удвоенной толщине срезаемых слоев остается равным единице для всей области  $D < D_*$  существования решения (12), (13), а комплекс  $K$  из (9) сохраняет постоянное значение

$$K = K_* = 1 + \left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (15)$$

Аналитическое выражение (14) может служить для оценки величины параметра порядка  $\delta$  на основе соответствующих значений относительной эффективной вязкости  $(\eta_{eff}/\eta_*)$ . Экспериментальные зависимости последней от скорости деформации  $\gamma = v_*/D$  построены с помощью ротационного вискозиметра [6] для четырех дискретных значений зазора  $D$  [4]. Вполне понятной будет зависимость от  $\gamma$  величины  $\delta$  и  $d_s$ . Чтобы упростить проблему в условиях двойной зависимости величин как от  $D$ , так и от сдвиговой скорости  $v_*$  (или  $\gamma$ ), имеет смысл воспользоваться предельным случаем  $\gamma \rightarrow 0$  ( $v_* \rightarrow 0$ ), который обеспечивает для каждого  $D$  наибольшее значение эффективной вязкости и  $d_s$ . Тем более, что толщина пристенных слоев в покоящейся смазочной среде будет определяться лишь ее составом независимо от ширины зазора  $D$ . Отметим указанные обстоятельства нулевыми индексами величин  $\eta_{eff}^0$ ,  $\delta_0$ ,  $d_{0s}$ ,  $K_0$ ,  $K_0^*$ , которые будут зависеть только от  $D$ .

В результате решения (10) и (15) принимают вид

$$K_0 = \begin{cases} \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_{eff}^0}\right)^{-1} & \text{при } D \geq 2d_{0s}, \\ = K_0^* = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) & \text{при } D < 2d_{0s}, \end{cases} \quad (16)$$

которые будут зависеть только от  $D$ . Первое из них имеет на плоскости  $(D, K_0)$ , вообще говоря, криволинейное представление через посредство  $\eta_{eff}^0(D)$ , а второму отвечает прямая, параллельная оси  $D$ . Их общая точка  $D = D_* = 2d_{0s}$  определит толщину пристенных слоев.

Однако чтобы этого достигнуть, необходимо иметь в (16) значение  $\delta_0$ , выражающееся согласно (14) через  $\left(\eta_{eff}^0/\eta_0\right)$  в точке  $D = D_*$ , которая сама подлежит предварительному определению. Для преодоления этого порочного круга предлагается следующий метод последовательных приближений. В качестве исходного положения предполагается, что переходная точка между решениями различных типов (16) попадает между двумя из четырех значений зазора  $D$  с экспериментально известными величинами  $\left(\eta_{eff}^0/\eta_0\right)$ . Среднему арифметическому из них присваивается смысл первого приближения для  $\left(\eta_{eff}^0/\eta_0\right)$ , что по (14) дает такие для  $\delta_0$  и  $K_0^*$  по (16), т. е. со стороны решения при  $D \leq 2d_s$ . С другой стороны,

по двум экспериментальным точкам для решения при  $D \geq 2d_s$  строится спрямленная зависимость  $K_0(D)$ . Ее общая точка с прямой (16)  $K_0 = K_0^*$  дает первое приближение для  $D_* = 2d_s$ . Следующие приближения получаются при помощи осреднения между известными экспериментально и найденными предыдущими приближениями  $(\eta_{eff}^0/\eta_0)$ . Процесс останавливается при достижении предела точности измерений. Однозначность сделанного исходного предположения о начале процедуры приближения доказывается противоречивостью результатов на базе иного выбора этого начала.

Реализацию указанного метода оценки  $\eta_{eff}^0(D_*)$  конкретно проследим на примере двух жидкостей: *n*-алкана гексадекана ( $C_{16}H_{34}$ ) и вазелинового масла с легирующей 1%-ной добавкой нематического жидкого кристалла ЖК37. В первом случае экспериментальные значения  $(\eta_{eff}^0/\eta_0)$ : 2,19; 1,79; 1,49; 1,25 получены из реологических кривых соответственно для величин зазора  $D$  (в мкм): 1,5; 4,5; 10,5; 15,0 [4]. Исходное предположение, что точка  $D = D_*$  попадает в интервал  $(4,5 \div 10,5)$ , дает в качестве первого приближения  $(\eta_{eff}^0/\eta_0)$  среднюю величину 1,64 и по (14) —  $\delta_0 = 0,64$ , а по (16)  $K_0^* = 2,56$ .

По двум точкам, отвечающим значениям  $D$  10,5 и 15,0 (т. е. при  $D > D_*$ ) можно построить прямую

$$K_0 = 0,44D - 1,6, \quad (17)$$

если воспользоваться соответствующим решением (16). Пересечение прямых  $K_0 = K_0^*$  и (17) дает  $D_* = 9,95$  или  $d_{0s} = 4,73$ .

В качестве второго приближения  $(\eta_{eff}^0/\eta_0) = 1,565$  используется среднее значение между первым и  $(\eta_{eff}^0/\eta_0) = 1,49$  на верхней границе (10,5) выбранного интервала. Отсюда во втором приближении будем иметь  $\delta_0 = 0,565$ ,  $K_0^* = 2,77$ , а значит,  $D_* = 9,93$  и  $d_{0s} = 4,97$ . Поскольку точность измерений составляет 0,5 мкм, остановиться можно на третьем приближении, которое получается осреднением между первым и вторым и дает  $(\eta_{eff}^0/\eta_0) = 1,6$ , а значит,  $\delta_0 = 0,6$ ,  $K_0^* = 2,66$ ,  $D_* = 9,68$  и  $d_{0s} = 4,84$ . Непосредственно видно, что величина  $D_*$  везде остается в пределах выбранного интервала  $(4,5 \div 10,5)$ .

Если предположить попадание  $D_*$  в другой возможный интервал  $(1,5 \div 4,5)$ , то область  $D > D_*$  будет содержать уже три экспериментальные точки, что позволяет по ним построить квадратичную зависимость

$$K_0 = 0,0293D^2 - 0,311D + 3,078.$$

Первое приближение в выбранном интервале дается средним значением на его концах,  $(\eta_{eff}^0/\eta_0) = 1,99$ , т. е.  $\delta_0 = 0,99$  и  $K_0^* = 2,01$ . Поэтому  $D_*$  как точка пересечения (18) с прямой  $K_0^* = 2,01$  находится из квадратного уравнения. Однако оба его корня, 9,68 и 0,933, находятся вне интервала  $(1,5 \div 4,5)$ , что противоречит исходному предположению. Поэтому окончательными результатами для *n*-гексадекана являются значение параметра порядка  $\delta_0 = 0,6$  и толщины пристенных структурированных слоев  $d_{0s} = 5$  мкм.

В случае вазелинового масла экспериментальные данные  $(\eta_{eff}^0/\eta_0)$ : 2,6; 1,6; 1,3; 1,1 имеются соответственно для четырех значений  $D$  (в мкм): 1,5; 4,5; 6,5; 8,5

[7]. Указанный метод последовательных приближений применяется совершенно аналогично предыдущему примеру. Исходное предположение — попадание точки  $D = D_*$  в интервал  $(4, 5 \div 6, 5)$ , за пределы которого не выходят три найденные приближения. В результате окончательно полученные модельные величины:  $\delta_0 = 0,41$ ,  $d_{0s} = 3$  мкм, поскольку другой возможный выбор начального интервала  $(1, 5 \div 4, 5)$  приводит к противоречию с исходным предположением о попадании в него точки  $D = D_*$ . В самом деле, в таком случае в области  $D > D_*$  оказываются три экспериментальные точки  $(4, 5 - 8, 5)$ , по которым строится квадратичная зависимость (18). Квадратное уравнение для пересечения этой кривой с прямой  $K_0 = K_0^*$  имеет комплексные корни.

Остается произвести оценку показателей степени в модельном представлении (2) переменного коэффициента вязкости. Коль скоро согласно (4)  $\beta = 1 - (\alpha/\delta)$  показатель  $\alpha$  приобретает роль свободного параметра данного моделирования, и для установления возможного диапазона его величины можно привести следующие соображения. Определяющим фактором в формировании анизотропной структуры сверхтонкого (3–5 мкм) пристенного слоя является эффект молекулярно-ориентационной упорядоченности за счет взаимодействия с обтекаемой твердой поверхностью. В настоящем моделировании этот эффект гидродинамически выражается посредством множителя  $y^{-\alpha}$  в коэффициенте переменной вязкости (2), неограниченно возрастающем ( $\alpha > 0$ ) с приближением к стенке  $y = 0$  в условиях гомеотропной ориентации молекул жидкости. Отводя этому модельному множителю преобладающее значение в организации пристенной структуры неньютоновского течения, можно положить  $\alpha > \beta$ . Вместе с (4) это дает окончательно

$$\frac{\delta_0}{\delta_0 + 1} < \alpha < \delta_0, \quad 0 < \beta < \frac{\delta_0}{\delta_0 + 1},$$

что соответственно составляет для н-гексадекана и вазелинового масла, легированного 1%-ной добавкой ЖК37,  $0,375 < \alpha < 0,6$ ,  $0 < \delta < 0,375$  со средними значениями  $\langle \alpha \rangle = 0,49$  и  $\langle \beta \rangle = 0,19$ .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В аналитическую теорию, построенную для объяснения структуры сложного сдвигового течения жидкости в сверхузких зазорах, существенным образом вошли решения двух соответствующих краевых задач различного характера. Это позволило исправить незаконное математическое действие, допущенное в предыдущих работах, где за пределами области существования использовалось единственное решение сопряженной краевой задачи, включающей внутри зазора изотропное течение с постоянной вязкостью. Использование же решения другой краевой задачи (случай взаимного срезания пристенных слоев) сделало возможным при помощи предложенного метода последовательных приближений определить математически корректно границу между указанными решениями и на ее основе замкнуть проблему нахождения структурных характеристик – параметра порядка и толщины пристенных квазижидкокристаллических слоев.

1. **Кириян С. В.** Реология моторных масел с квазижидкокристаллическими слоями в триаде трения / С. В. Кириян, Б. А. Алтоиз // Трение и износ. – 2007. – Т. 31, № 3. – С. 312–318.
2. **Дерягин Б. В., Чураев С. В., Муллер В. М.** Поверхностные силы. – М.: Наука, 1985.
3. **Алтоиз Б. А.** Моделирование структурированного приповерхностного слоя в динамике вязкой жидкости / Б. А. Алтоиз, С. К. Асланов // Доклады национальной академии наук Украины. – 2003. – Т. 9. – С. 76–79.
4. **Алтоиз Б. А.** Сдвиговое течение гетерофазной жидкой прослойки и ее структурно–реологическая модель / Б. А. Алтоиз, С. К. Асланов, С. В. Кириян // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81, вып. 8. – С. 42–47.
5. **Асланов С. К.** Об одном обобщении гидродинамической теории смазки / С. К. Асланов, Н. Н. Драгуновский, А. П. Царенко // Вісник Одеського національного університету імені І. І. Мечникова. Математика і механіка. – 2013. – Т. 16, вип. 16. – С. 144–151.
6. **Алтоиз Б. А.** Ротационный вискозиметр для исследования микронных прослоек / Б. А. Алтоиз, С. К. Асланов, А. Ф. Бутенко // Физика аэродисперсных систем. – 2005. – № 42. – С. 53–65.
7. **Кириян С. В.** Реологическая модель прослойки со структурированными слоями “переменной вязкости” / С. В. Кириян, Б. А. Алтоиз, С. К. Асланов // Дисперсные системы. Материалы научной конференции стран СНГ. – Одесса, 2010. – С. 147–148.

## ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал “Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка” має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямками:

1. Математика.
2. Механіка.
3. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друківаних примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

[www.onu.edu.ua](http://www.onu.edu.ua)

в розділі “Наука” → “Наукові видання” → “Вісник ОНУ” → “Математика і механіка”. Також їх можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- Mathematical Subject Classification (2010);
- назва статті;
- список авторів;
- анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме, причому текст резюме повинен мати не менше ста слів, а також список ключових слів відповідною мовою;

– основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України “Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України” від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невіршених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження

і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

*Редакційна колегія журналу*  
*"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"*  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
вул. Дворянська, 2,  
м. Одеса, 65082

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk\_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка" на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

*Українською, російською та англійською мовами*

Свідоцтво про державну реєстрацію  
друкованого засобу масової інформації:  
серія КВ № 11456-329Р від 07.07.2006 р.

Затверджено до друку вченою радою  
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова  
Протокол № 6 від 18 лютого 2014 р.

Адреса редколегії:  
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
visnyk\_math@onu.edu.ua

Тираж 100 прим. Зам. № 375 (72).

Видавництво і друкарня «Астропринт»  
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21  
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-24-26, 33-07-17, 37-14-25  
[www.astroprint.odessa.ua](http://www.astroprint.odessa.ua); [www.fotoalbom-odessa.com](http://www.fotoalbom-odessa.com)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

ISSN 2304–1579. Вісник ОНУ ім. І. І. Мечникова. Математика і механіка. 2014. Т. 19. Вип. 1(21). 1–104.

