МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. И. МЕЧНИКОВА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ

В. И. Коляда, А. А. Кореновский

ВВЕДЕНИЕ
в
АНАЛИЗ ФУРЬЕ

Учебное пособие

ОДЕССА
ОНУ
2014

УДК 517.518.45:517.443(075.8)
ББК 22.161.2я73
К 629

Рекомендовано к печати Научно-методическим советом
Одесского национального университета имени И. И. Мечникова.
Протокол № 1 от 24 октября 2013 г.

Рецензенты:

И. А. Шевчук, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа Киевского национального университета имени Тараса Шевченко;

Д. В. Дмитришин, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики информационных технологий Одесского национального политехнического университета;

А. И. Третьяк, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики Южноукраинского национального педагогического университета имени К. Д. Ушинского.

Коляда В. И., Кореновский А. А.

К 629 Введение в анализ Фурье : учебное пособие / В. И. Коляда, А. А. Кореновский – Одесса: – «Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова», 2014. – 140 с.

ISBN 978-617-689-061-4

Предлагаемое учебное пособие представляет собой краткое введение в классический анализ Фурье. В нем изложены основные понятия и результаты, относящиеся к тригонометрическим рядам Фурье, преобразованиям Фурье и ортогональным многочленам Лежандра. Изложение носит элементарный характер. Оно основано на базовом университетском курсе математического анализа; в частности, интегрируемость функций понимается в смысле Римана. Сведения, необходимые для изучения курса, изложены в вводной главе. Пособие содержит также упражнения по каждой из основных глав.

УДК 517.518.45:517.443(075.8)
ББК 22.161.2я73

ISBN 978-617-689-061-4

Оглавление

Предварительные сведения

В этом разделе приводятся предварительные сведения из анализа, необходимые для дальнейшего понимания курса.

1. Четные и нечетные, периодические функции

Определение 1. Пусть функция f задана на симметричном относительно нуля множестве $E \subset \mathbb{R}$, т. е. таком, что при любом $x \in E$ значение $-x \in E$. Такая функция называется *четной*, если для любого $x \in E$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. Если же $f(-x) = -f(x)$ при каждом $x \in E$, то функция f называется *нечетной*.

Например, при натуральном n функции x^{2n}, $\cos nx$ четные, а функции x^{2n-1}, $\sin nx$, функция знака $\operatorname{sign} x$ – нечетные на $\mathbb{R}$.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства.

(a) График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

(b) Произведение двух четных функций – четная функция.

(c) Произведение двух нечетных функций – четная функция.

(d) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

(e) Если f – нечетная функция, то для любого $h > 0$

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx = 0.$$

(f) Если f – четная функция, то для любого $h > 0$

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{h} f(x)\,dx.$$

Определение 2. Пусть функция f задана на $[0, b)$. Доопределим ее на $(-b, 0)$, положив $f(x) = f(-x)$ $(x \in (-b, 0))$. В результате получим функцию f_1, которую называют *четным продолжением* функции f. Если же положим $f(x) = -f(-x)$ $(x \in (-b, 0))$, то полученная функция f_2 называется *нечетным продолжением* функции f.

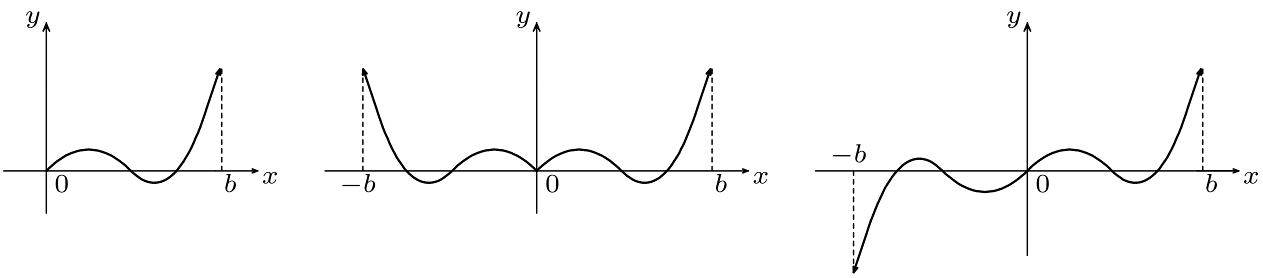

Рис. 1. Графики исходной функции, ее четного и нечетного продолжений.

Замечание 1. Если нечетная функция f задана в точке $x = 0$, то, в силу определения, имеем $f(0) = 0$. Поэтому, для того чтобы у заданной на $[0, b)$ функции f нечетное продолжение было нечетной функцией, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие $f(0) = 0$.

Определение 3. Заданная на действительной оси $\mathbb{R}$ функция f называется *периодической* с *периодом* $T > 0$, если $f(x + T) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

График периодической функции может быть получен сдвигом на nT $(n \in \mathbb{N})$ как вправо, так и влево его части, соответствующей полуинтервалу $[0, T)$ (или любому полуинтервалу длины T). Это означает, что число nT также является периодом. Очевидно также, что $f(x - nT) = f(x)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Типичными примерами 2π-периодических функций являются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$. Другим примером может быть 1-периодическая функция дробной части $\{\,x\,\}$, или же функция Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

периодом которой является любое положительное рациональное число.

Также допускается, что периодическая функция может быть задана не на всей действительной оси; например, π-периодическая функция $\operatorname{tg} x$ не определена в точках $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), а π-периодическая функция $\operatorname{ctg} x$ не определена в точках $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Предложение 2. Предположим, что f – периодическая функция с периодом $T > 0$ и что f интегрируема на $[0, T]$. Тогда f интегрируема на любом отрезке $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Кроме того, для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,dx = \int\limits_{kT}^{(k+1)T} f(x - kT)\,dx = \int\limits_0^T f(u)\,du$$

(заменой переменной $u = x - kT$). Отсюда следует, что f интегрируема на любом отрезке вида $[-nT, nT]$ и поэтому f интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Далее, для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Также имеем (заменой переменной $u = x - T$)

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_T^{a+T} f(x - T)\,dx = \int\limits_0^a f(u)\,du.$$

Из этого равенства следует (1). $\square$

Определение 4. Пусть функция f_0 определена на $[a,b]$ и $f_0(a) = f_0(b)$. Положим $L = (b-a)/2$. *Периодическим продолжением* функции f_0 с периодом $2L$ называется функция f, определенная на $\mathbb{R}$ следующим равенством

$$f(x+2kL) = f_0(x) \quad (x \in [a,b],\ k \in \mathbb{Z})\,.$$

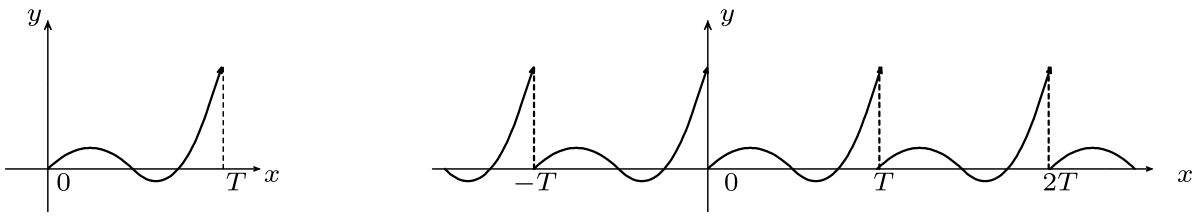

Рис. 2. Графики исходной функции и ее периодического продолжения.

2. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции

Совокупность непрерывных на множестве E функций обозначается через $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(E)$.

Определение 5. Функция f, заданная на интервале (a,b), называется *кусочно непрерывной* на (a,b), если она имеет не более чем конечное число точек разрыва и, кроме того, в каждой точке разрыва $x_0 \in (a,b)$ односторонние пределы

$$f\left(x_0+\right) = \lim_{x\to x_0+} f(x), \quad f\left(x_0-\right) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

существуют и конечны. Если функция f задана на отрезке $[a,b]$, то она называется кусочно непрерывной на $[a,b]$, если f кусочно непрерывна на (a,b) и существуют конечные $f(a+)$ и $f(b-)$. Функцию f, заданную на всей действительной прямой $\mathbb{R}$, будем называть кусочно непрерывной на $\mathbb{R}$, если она кусочно непрерывна на любом отрезке. Совокупность всех таких функций обозначаем через $\mathcal{PC}$.

Если $f(x_0+) \neq f(x_0-)$, то говорят, что f имеет *скачок*; *величина скачка* полагается равной $f(x_0+) - f(x_0-)$.

Если функция $f \in \mathcal{PC}$, то она интегрируема на любом отрезке.

Определение 6. Функция f называется *кусочно гладкой* на ограниченном интервале (a, b) если:

(i) f кусочно непрерывна на (a, b);

(ii) производная f' существует и непрерывна всюду на (a, b), за исключением, быть может, конечного числа точек;

(iii) f' имеет конечные односторонние пределы в каждой точке $x \in (a, b)$.

Скажем, что f кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$, если она кусочно гладкая на (a, b) и существуют конечные $f'(a+)$ и $f'(b-)$. Будем называть функцию f кусочно гладкой на $\mathbb{R}$, если она кусочно гладкая на любом отрезке. Совокупность всех таких функций обозначаем через $\mathcal{PS}$.

Заметим, что кусочно гладкая функция не обязана быть непрерывной. Далее, если $f \in \mathcal{PS}$, то, доопределив произвольным образом ее производную f' в тех точках, где она не существует, получим, что $f' \in \mathcal{PC}$.

3. Числовые и функциональные ряды

Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{2}$$

называется *числовым рядом.* Числа a_n называются *слагаемыми*, а числа $S_n \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, \dots)$ – *частичными суммами* ряда (2). Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (2) называется *сходящимся*, а число S называют *суммой* этого ряда и пишут $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если предел последовательности частичных сумм ряда (2) не существует, то этот ряд называется *расходящимся.*

Следующая теорема содержит *необходимое условие сходимости.*

Теорема 3. Если ряд (2) сходится, то его слагаемые a_n стремятся к нулю.

Говорят, что ряд (2) сходится *абсолютно*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . \tag{3}$$

Если же ряд (2) сходится, а ряд (3) расходится, то говорят, что ряд (2) сходится *условно.*

Теорема 4. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Пусть на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$ задана последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Говорят, что эта последовательность *сходится на множестве* E, если числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в каждой точке $x \in E$. В этом случае функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ называют *предельной функцией.* Говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции f *равномерно* на множестве E, если для любого положительного ε существует такой номер N, зависящий только от ε, что при всех $n \geq N$ и при всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Пусть на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$ задана последовательность функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится на множестве* E, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ сходится на E. В этом случае функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ называют *суммой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится *равномерно* на множестве E, если последовательность его частичных сумм сходится на множестве E равномерно.

Основные свойства функциональных рядов содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 5. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций u_n сходится равномерно на этом отрезке к функции f, то f непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 6. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ из интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций u_n сходится равномерно на этом отрезке к функции f, то f интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx.$$

Теорема 7. Пусть функции u_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится в некоторой точке из отрезка $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ сходится равномерно на этом отрезке, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится на $[a,b]$ равномерно к непрерывно дифференцируемой функции f и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (x \in [a,b]).$$

4. Интеграл

Совокупность функций, интегрируемых в смысле Римана на отрезке $[a,b]$, будем обозначать через $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}[a,b]$.

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Неопределенный интеграл* функции f определяется равенством

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \quad (a \le x \le b).$$

Он является непрерывной функцией на $[a,b]$.

Следующие две теоремы являются фундаментальными в интегральном исчислении.

Теорема 8. Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то ее неопределенный интеграл F дифференцируем в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Эту теорему называют *основной теоремой интегрального исчисления.*

Следствие 9. Если $f \in \mathcal{PC}$ на $[a,b]$, то $F \in \mathcal{PS}$ и непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 10. Пусть $f \in \mathcal{PS}[a,b]$ и непрерывна на $[a,b]$. Доопределим ее производную f' в тех точках, где она не существует, произвольным образом. Тогда $f' \in \mathcal{PC}$ и

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Последнее равенство называют *основной формулой интегрального исчисления.*

Будем также рассматривать функции, заданные на неограниченных интервалах.

Пусть функция f задана на $[a,+\infty)$ и интегрируема на каждом отрезке $[a,b]$ $(a < b < +\infty)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то его обозначают $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и называют *несобственным интегралом* (говорят также, что несобственный интеграл *сходится*).

Если сходится $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится *абсолютно.* При этом функцию f называют *абсолютно интегрируемой* на $[a,\infty)$.

Теорема 11. Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Аналогично определяется интеграл $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$. Если функция f задана на $(-\infty,\infty)$, то полагают

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^\infty f(x)\,dx,$$

в предположении, что оба интеграла в правой части сходятся. Легко видеть, что это определение не зависит от выбора a.

5. Приближение интегрируемых функций

В этом разделе приводятся некоторые утверждения о приближении произвольных интегрируемых функций непрерывными или ступенчатыми функциями.

Функция g, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$, что g постоянна на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) $(i = 0, \ldots, m-1)$. Очевидно, что любая ступенчатая на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Теорема 12. Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая функция g, что

$$\int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Для произвольного разбиения

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

обозначим

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу критерия интегрируемости, существует такое разбиение, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \, \Delta x_i < \varepsilon.$$

Положим $g(x) = m_i$ при $x \in [x_i, x_{i+1})$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, $g(b) = m_{n-1}$. Тогда g – ступенчатая функция, и

$$\int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - g(x)| \, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - m_i| \, dx \le \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \, \Delta x_i < \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 13. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a,b]$ функция g, что

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx < \varepsilon^2.$$

Доказательство. Обозначим $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$; естественно предполагать, что $M > m$. Найдем такое разбиение $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \, \Delta x_i < \frac{\varepsilon^2}{M - m}.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)^2 \, \Delta x_i < \varepsilon^2.$$

Пусть $g(x) = f(x)$ для $x = x_i$ и g линейна на $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Если $x \in [x_i, x_{i+1}]$, то $m_i \le f(x) \le M_i$, $m_i \le g(x) \le M_i$ и, следовательно, $|f(x) - g(x)| \le M_i - m_i$. Отсюда

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - g(x)|^2 \, dx$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)^2 \, \Delta x_i < \varepsilon^2. \quad \square$$

Замечание 14. В теореме 13 функцию g можно выбрать так, чтобы $g(a) = g(b) = 0$. В самом деле, обозначим через f_1 функцию, совпадающую с f на (a,b), и равную нулю в точках a и b. Для f_1 построим функцию g как в доказательстве теоремы 13. По построению, $g(a) = g(b) = 0$. Поскольку функции $f - g$ и $f_1 - g$ отличаются не более, чем в двух точках, то

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx = \int_a^b [f_1(x) - g(x)]^2 \, dx < \varepsilon^2.$$

Очевидно также, что функцию g в теореме 13 можно выбрать так, чтобы выполнялось и неравенство

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \int_a^b |f_1(x) - g(x)|\ dx < \varepsilon.$$

Функцию g, заданную на всей действительной оси $\mathbb{R}$, будем называть *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого отрезка.

Теорема 15. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$ и интегрируема на любом отрезке, а f^2 интегрируема на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная, финитная функция g, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2\ dx < \varepsilon^2. \tag{4}$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое $A > 0$, что

$$\int_{-\infty}^{-A} f^2(x)\, dx + \int_A^{\infty} f^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Далее, используя теорему 13 и замечание 14, построим такую непрерывную на $[-A, A]$ функцию g_1, что $g_1(-A) = g_1(A) = 0$ и

$$\int_{-A}^{A} [f(x) - g_1(x)]^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Определим на $\mathbb{R}$ функцию g, положив ее равной g_1 на $[-A, A]$ и нулю вне этого отрезка. Тогда g финитная, непрерывна на $\mathbb{R}$ и выполняется неравенство (4). $\square$

6. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Предположим, что функция $f(x,y)$ определена для $x \geq a$, $y \in Y$, и при любом $y \in Y$ сходится несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx. \tag{5}$$

Этот интеграл называют *несобственным интегралом, зависящим от параметра.* Говорят, что интеграл (5) сходится *равномерно относительно y на Y,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $A \geq a$, что

$$\left| \int_\xi^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

для всех $\xi \geq A$ и всех $y \in Y$.

Теорема 16 (признак Вейерштрасса). Если существует такая неотрицательная на $[a, +\infty)$ функция Φ, что

$$|f(x,y)| \leq \Phi(x) \quad (x \geq a,\ y \in Y),$$

и интеграл $\int\limits_a^\infty \Phi(x)\,dx$ сходится, то интеграл (5) сходится равномерно относительно y на Y.

Необходимые в дальнейшем свойства интегралов, зависящих от параметра, содержатся в следующих теоремах. Будем предполагать, что функция f определена на $[a,\infty) \times Y$ (Y – интервал) и функция φ определена на $[a,\infty)$.

Теорема 17. Предположим, что функция f непрерывна на $[a,\infty) \times Y$, а функция φ интегрируема на $[a, A]$ при любом $A > a$. Если интеграл

$$\int_a^\infty \varphi(x) f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на Y, то он является непрерывной на Y функцией переменной y.

Теорема 18. Пусть f непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$ на $[a,\infty)\times Y$. Пусть φ интегрируема на любом отрезке $[a,A]$ $(A>a)$. Предположим, что интеграл

$$I(y)=\int\limits_a^\infty \varphi(x)f(x,y)\,dx$$

сходится при любом $y\in Y$, а интеграл

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x)f'_y(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y на Y. Тогда функция $I(y)$ непрерывно дифференцируема на Y и

$$I'(y)=\int\limits_a^\infty \varphi(x)f'_y(x,y)\,dx \quad (y\in Y).$$

Теорема 19. Пусть f непрерывна на $[a,\infty)\times Y$, а φ интегрируема на $[a,A]$ при любом $A>a$. Предположим, что интеграл

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x)f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на Y. Тогда:

(i) если $Y=[c,d]$, то

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^\infty \varphi(x)f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_a^\infty \varphi(x)\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx;$$

(ii) если $Y=[c,\infty)$, φ абсолютно интегрируема на $[a,\infty)$ и интеграл

$$\int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy$$

сходится равномерно относительно x на $[a, \infty)$, то

$$\int_c^\infty \left(\int_a^\infty \varphi(x) f(x,y)\, dx \right) dy = \int_a^\infty \varphi(x) \left(\int_c^\infty f(x,y)\, dy \right) dx$$

в предположении, что интеграл в правой части сходится, т. е., существует

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A \varphi(x) \left(\int_c^\infty f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Отметим, что теоремы 17, 18 и 19 (i) в курсе классического анализа доказываются в случае $\varphi(x) \equiv 1$. Те же доказательства остаются в силе и в общем случае. Что же касается теоремы 19 (ii), то она выводится из теоремы 19 (i). Без предположения абсолютной интегрируемости функции φ теорема 19 (ii), вообще говоря, неверна.

Нам понадобится также следующая теорема о перестановке порядка интегрирования.

Теорема 20. Пусть $F(x,y)$ определена на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Предположим, что

(i) при любом фиксированном значении одной из переменных x, y функция $F(x,y)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ по другой переменной;

(ii) интегралы

$$\int_{-\infty}^\infty F(x,y)\, dy, \qquad \int_{-\infty}^\infty |F(x,y)|\, dy$$

(как функции переменной x) интегрируемы по x на каждом отрезке, а интегралы

$$\int_{-\infty}^\infty F(x,y)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty |F(x,y)|\, dx$$

(как функции переменной y) интегрируемы по y на каждом отрезке.

Если сходится один из интегралов

$$\int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty |F(x,y)|\, dy, \qquad \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty |F(x,y)|\, dx,$$

то сходится и другой интеграл, и имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx.$$

Эта теорема обычно не включается в стандартный курс математического анализа, однако она может быть доказана в рамках этого курса.

7. Неравенство Коши – Шварца

Теорема 21 (неравенство Коши). Пусть $a_1,\ldots,a_n$ и $b_1,\ldots,b_n$ – действительные числа. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Доказательство. Можем предполагать, что $a_k, b_k \ge 0$. Имеем

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Поэтому

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = A + B$$

(естественно, мы предполагаем, что $A, B > 0$). Заменим a_k на $a_k\sqrt{\lambda}$ и b_k на $b_k/\sqrt{\lambda}$, где число $\lambda > 0$ выберем ниже. Тогда левая часть останется такой же и получим

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \lambda A + \frac{B}{\lambda}.$$

Выберем λ исходя из равенства $\lambda A = \frac{B}{\lambda}$; тогда $\lambda = \sqrt{\frac{B}{A}}$. Получили

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le 2\sqrt{AB},$$

а это и есть (6). $\square$

Следствие 22. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно.

Теорема 23 (неравенство Шварца). Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\left| \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx \right)^{1/2}.$$

Для доказательства достаточно повторить доказательство неравенства Коши, в котором суммы заменить интегралами.

В этом неравенстве значения a и (или) b могут быть бесконечными.

8. Суммируемость последовательностей и рядов

Пусть $\{x_n\}$ – числовая последовательность. Рассмотрим *арифметические средние*

$$\xi_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *суммируется* к числу ξ методом *средних арифметических* (или $(C,1)$-*суммируема*), если

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi.$$

Теорема 24 (Коши). Если $\{x_n\}$ сходится к числу ξ, то $\{x_n\}$ $(C,1)$-суммируема к ξ.

Доказательство. Обозначим $\alpha_n = x_n - \xi$. Тогда $\alpha_n \to 0$. Имеем

$$\xi_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \xi + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

Докажем, что $\beta_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое N, что

$$|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k \geq N).$$

Пусть $n > N$. Тогда

$$|\beta_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| < \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{2}(n-N) \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|.$$

Далее, пусть N' таково, что

$$\frac{1}{N'}\sum_{k=1}^{N}|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|\beta_n| < \varepsilon$ для всех $n \geq N'$. Итак, $\beta_n \to 0$, т. е., $\xi_n \to \xi$. $\square$

Таким образом, из сходимости следует $(C,1)$-суммируемость к тому же пределу. Как показывает следующий пример, обратное неверно.

Пример 25. Пусть $x_n = (-1)^n$. Тогда $\{x_n\}$ расходится. В то же время,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} = 0, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k-1} = -1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \to 0$. $\square$

Для заданного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{7}$$

рассмотрим последовательность его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Скажем, что ряд (7) *суммируем* методом *средних арифметических* к сумме S, если последовательность $\{S_n\}$ является $(C,1)$-суммируемой к S, т. е., если

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1} \to S.$$

Если ряд (7) сходится к числу S, то он $(C,1)$-суммируем к S. Обратное неверно.

Пример 26. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.$$

Имеем $S_{2k+1} = 0$, $S_{2k} = 1$. Таким образом,

$$\frac{S_0 + \cdots + S_{2k+1}}{2k+2} = \frac{k+1}{2k+2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_0 + \cdots + S_{2k}}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1} \to \frac{1}{2}.$$

Поэтому ряд $(C,1)$-суммируем к $\frac{1}{2}$ и при этом расходится. $\square$

Замечание 27. Ряд с положительными слагаемыми сходится тогда и только тогда, когда он $(C,1)$-суммируем. Это вытекает из следующего утверждения: *если* $x_n \to \pm\infty$, *то* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \to \pm\infty$.

1. Ряды Фурье

1.1. Тригонометрическая система

Будем рассматривать функции периода 2π, интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$. Совокупность 2π-периодических функций

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

называется *тригонометрической системой.*

Скалярное произведение функций $f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ определяется равенством

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Функции $f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ называются *ортогональными,* если их скалярное произведение равно нулю. Система функций называется *ортогональной*, если для каждой функции из этой системы интеграл от ее квадрата по отрезку $[-\pi, \pi]$ положителен, а две любые различные функции этой системы ортогональны. Например, тригонометрическая система является ортогональной. Это вытекает из следующих равенств ($m, n \in \mathbb{N}$):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

Тригонометрическим рядом называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{1.1}$$

где a_n, b_n – действительные числа (*коэффициенты*).

Предложение 1.1. Предположим, что ряд (1.1) сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$, и пусть f – его сумма. Тогда f – непрерывная, 2π-периодическая функция и

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (m = 0,1,\dots), \tag{1.2}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \quad (m = 1,2,\dots). \tag{1.3}$$

Доказательство. Функция f непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Умножим равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

на $\cos mx$. При этом, так как функция $\cos mx$ ограничена, то справа получим равномерно сходящийся ряд. Интегрируя его от $-\pi$ до π почленно и используя ортогональность тригонометрической системы, для $m = 1,2,\dots$ имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right)\cos mx\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right) = \pi a_m,$$

т. е., справедливо равенство (1.2). Аналогично доказываем (1.2) при $m = 0$ и (1.3) при $m = 1,2,\dots$. $\square$

Определение 1.2. Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$. Тогда числа

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,\dots), \tag{1.4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{1.5}$$

называются *коэффициентами Фурье* функции f. Ряд (1.1), где a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции f, называется *рядом Фурье* функции f.

Будем обозначать

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,.$$

В этой записи символом $\sim$ обозначается соответствие, оно означает лишь, что функции f ставится в соответствие ее ряд Фурье. Тогда предложение 1.1 можно сформулировать в следующем виде: *если тригонометрический ряд сходится равномерно на* $[-\pi, \pi]$, *то он является рядом Фурье своей суммы.*

Заметим, что если $f(x) = g(x)$, за исключением конечного числа точек из отрезка $[-\pi, \pi]$, то ряды Фурье этих функций совпадают.

Пример 1.3. Построим ряд Фурье для 2π-периодического продолжения функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0, \end{cases} \qquad f(k\pi) = \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

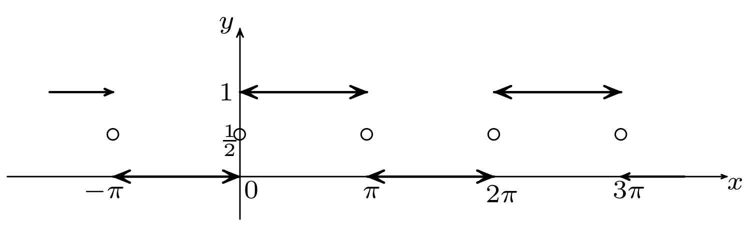

Рис. 3. График периодического продолжения функции $y = f(x)$.

Для этого вычислим коэффициенты Фурье данной функции

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \left.\frac{1}{\pi n}\sin nx\right|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx\,dx = \left.\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(1+(-1)^{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, данной функции соответствует следующий ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x. \quad \square$$

Функция вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + \sin kx\right),$$

где $n \in \mathbb{N}$, a_k и b_k – действительные числа, и $|a_n| + |b_n| > 0$, называется *тригонометрическим полиномом* порядка n (при $n = 0$ считаем, что функция f тождественно постоянна). Очевидно, что для каждой такой функции ее ряд Фурье совпадает с самой функцией.

Пример 1.4. Так как функция $f(x) = 4 - 3\sin 2x + \cos 5x$ представляет собой тригонометрический полином, то ее ряд Фурье совпадает с самой функцией, т. е., все коэффициенты Фурье данной функции равны нулю, кроме $a_0 = 8$, $b_2 = -3$, $a_5 = 1$.

Пример 1.5. Функция $f(x) = \sin^2 x$ может быть представлена в виде тригонометрического полинома $f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. Поэтому этот же полином является также и рядом Фурье данной функции.

Пример 1.6. Аналогично, функцию $f(x) = \sin^3 x$ также можно представить в виде тригонометрического полинома (по синусам). В самом деле, $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \frac{1-\cos 2x}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. Таким образом, этот же полином является также и рядом Фурье данной функции.

Пример 1.7. Покажем, что функция $(\cos x)^n$ является тригонометрическим полиномом порядка n по косинусам, т. е.,

$$(\cos x)^n = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \cos kx, \tag{1.6}$$

где $a_n^{(n)} \neq 0$. Для этого применим индукцию. При $n = 1$ утверждение справедливо. Предположим, что оно справедливо при некотором n. Тогда, применяя равенство

$$\cos kx \cos x = \frac{1}{2}(\cos(k+1)x + \cos(k-1)x),$$

легко получим, что представление вида (1.6) имеет место и для $n+1$.

Предложение 1.8. Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Тогда:

(i) если f – четная, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{1.7}$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx;$$

(ii) если f – нечетная, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{1.8}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Доказательство. (i) Если функция f – четная, то $f(x)\cos x$ – также четная, и поэтому

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

При этом функция $f(x)\sin x$ – нечетная; стало быть,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Аналогично получаем (ii). $\square$

Ряды (1.7) и (1.8) называются *косинус-* и *синус-рядом*, соответственно.

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Тогда, очевидно,

$$f(-x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx)\,.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

и

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Эти функции можно назвать *четной* и *нечетной частями* функции f.

Пример 1.9. Функция $f(x) = |x|$ $(\pi \le x \le \pi)$ – четная, и поэтому ее ряд Фурье представляет собой косинус-ряд.

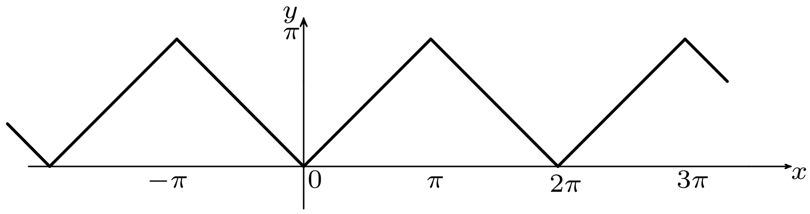

Рис. 4. График периодического продолжения функции $f(x) = |x|$ $(\pi \le x \le \pi)$.

Вычислим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

а для $n = 1, 2, \ldots$, используя уже вычисленный нами ранее интеграл $\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases}$ имеем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{n}\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x \quad (|x| \le \pi). \quad \square$$

Пример 1.10. Функция $f(x) = \operatorname{sign}\sin x$ – нечетная, и поэтому ее ряд Фурье представляет собой синус-ряд.

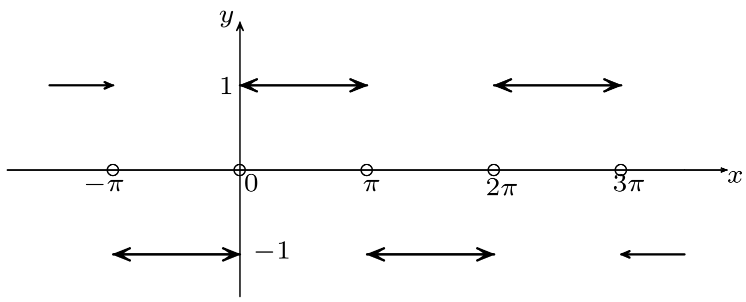

Рис. 5. График функции $y = \operatorname{sign}\sin x$.

Вычислим коэффициенты Фурье

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\operatorname{sign}\sin x \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x. \quad \square$$

Пример 1.11. Функция $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ – нечетная, и поэтому ее ряд Фурье представляет собой синус-ряд.

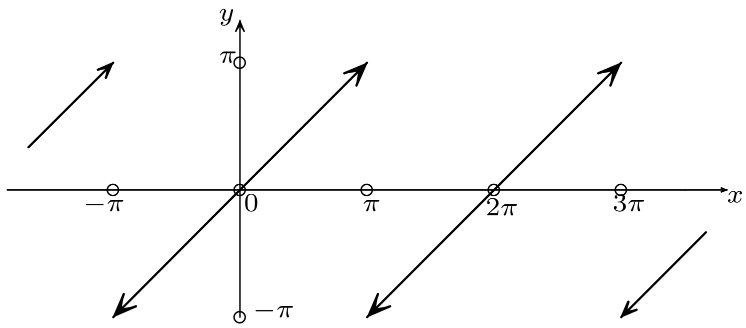

Рис. 6. График периодического продолжения функции $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$.

Вычислим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx\,dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Тогда

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \quad (|x| < \pi). \quad \square$$

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right).$$

Положим $g(x) = f(\pi - x)$. Пусть

$$g(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'\cos nx + b_n'\sin nx\right).$$

Тогда, выполняя замену переменной $x = \pi - t$ и учитывая периодичность, получаем

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(\pi - t)\,dt$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = (-1)^n a_n,$$

и, аналогично, $b'_n = (-1)^{n+1} b_n$. Таким образом,

$$f(\pi - x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a_n \cos nx - b_n \sin nx \right).$$

Пример 1.12. Выше уже был построен ряд Фурье

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad (|x| < \pi).$$

Если $x \in [-\pi, \pi]$, то $\pi - x \in [0, 2\pi]$, и поэтому для 2π-периодического продолжения функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$ имеем

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad (0 < x < 2\pi).$$

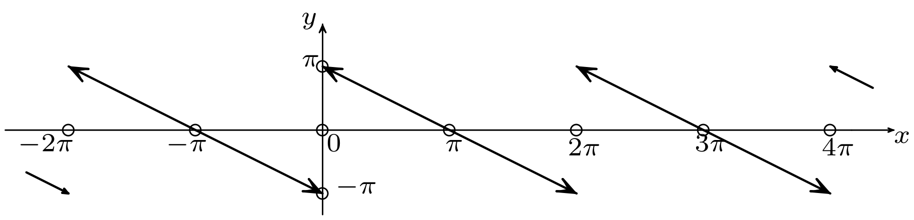

Рис. 7. График периодического продолжения функции $y = \frac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$.

□

1.2. Комплексная форма рядов Фурье

Напомним хорошо известную *формулу Эйлера*

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

где i – мнимая единица. Из этой формулы сразу вытекает, что

$$\cos \varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2\,i}.$$

Пусть
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{1.9}$$
Перепишем n-ю частичную сумму этого ряда в виде
$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$
$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \mathrm{e}^{ikx} + a_k \mathrm{e}^{-ikx} - ib_k \mathrm{e}^{ikx} + ib_k \mathrm{e}^{-ikx}\right)$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\mathrm{e}^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}\mathrm{e}^{-ikx}\right).$$
Положим
$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.10}$$
Получили, что
$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \mathrm{e}^{ikx} + c_{-k}\mathrm{e}^{-ikx}\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}.$$
Учитывая (1.10) и формулы для коэффициентов Фурье, для любого целого $k \geq 0$ имеем
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,dx.$$
Аналогично, для отрицательного целого k
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,dx.$$
Таким образом, ряд (1.9), соответствующий функции f, можно переписать в виде
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,dx. \tag{1.11}$$

Заметим, что $c_{-n} = \overline{c}_n$, где черта сверху означает *комплексное сопряжение*, т. е., $\overline{a + b\,i} = a - b\,i$. В частности, $\overline{\mathrm{e}^{i\varphi}} = \mathrm{e}^{-i\varphi}$, $\left|\mathrm{e}^{i\varphi}\right|^2 = \mathrm{e}^{i\varphi} \cdot \overline{\mathrm{e}^{i\varphi}} = \mathrm{e}^{i\varphi} \cdot \mathrm{e}^{-i\varphi} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, $\mathrm{e}^{i\varphi} \neq 0$ при любом $\varphi \in \mathbb{R}$.

Ряд Фурье в комплексной форме может быть определен для любой комплекснозначной 2π-периодической функции $f = u + iv$ (где u, v – действительные функции), интегрируемой на $[-\pi, \pi]$, т. е., такой, что $u, v \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$.

Определение 1.13. *Экспоненциальной системой* называется система функций $\left\{\mathrm{e}^{in\varphi}\right\}$ $(\varphi \in [-\pi, \pi])$, где n пробегает множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел.

Для определенных на $[-\pi, \pi]$ комплекснозначных функций f, g *скалярное произведение* определяется равенством

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Предложение 1.14. Экспоненциальная система ортогональна, точнее,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{inx}\mathrm{e}^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n. \end{cases}$$

Доказательство. Если $m, n \in \mathbb{Z}$, то, используя ортогональность тригонометрической системы, получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{inx}\mathrm{e}^{-imx}\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos nx + i\sin nx)(\cos mx - i\sin mx)\,dx$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x + i\sin(n-m)x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n. \end{cases} \qquad \square$$

Пусть задан тригонометрический полином

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

где $|a_n| + |b_n| > 0$. Представим его в комплексной форме

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}.$$

Имеем

$$T_n(x)\mathrm{e}^{inx} = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{i(n+k)x} = \sum_{m=0}^{2n} c'_m \mathrm{e}^{imx}, \quad \text{где } c'_m = c_{m-n}.$$

Таким образом, $T_n(x) = \mathrm{e}^{-inx} P_{2n}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)$, где

$$P_{2n}(z) = \sum_{m=0}^{2n} c'_m z^m, \quad c'_{2n} = \overline{c}_0 \neq 0,$$

– алгебраический полином порядка $2n$. Так как $\mathrm{e}^{-inx} \neq 0$ для всех x, то имеем следующее утверждение. *Любой тригонометрический полином T_n порядка n имеет на $(-\pi, \pi]$ не более, чем $2n$ действительных корней.*

Пример 1.15. Построим ряд Фурье в комплексной форме функции $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$. Вычислим коэффициенты Фурье. Имеем

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = 0,$$

а если целое $n \neq 0$, то

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \mathrm{e}^{-inx}\, dx & v = -\frac{1}{in}\mathrm{e}^{-inx} \end{array} \right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{2\pi in} x\mathrm{e}^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-inx}\, dx = \frac{-1}{2in}\left(\mathrm{e}^{-i\pi n} + \mathrm{e}^{i\pi n}\right) = i\frac{(-1)^n}{n}.$$

Таким образом,

$$x \sim i \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^n}{n}\, \mathrm{e}^{inx} \quad (|x| < \pi).$$

Ранее мы уже построили ряд Фурье этой же функции в действительной форме:

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad (|x| < \pi). \quad \square$$

1.3. Функции произвольного периода

Пусть функция f определена на действительной оси $\mathbb{R}$. Предположим, что f имеет период $T = 2L$ $(L > 0)$. Положим

$$\varphi(z) = f\left(\frac{Lz}{\pi}\right) \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Если z изменяется на $[-\pi, \pi]$, то $x = \frac{Lz}{\pi}$ изменяется на $[-L, L]$. Функция φ имеет период 2π. Если $f \in \mathcal{R}[-L, L]$, то $\varphi \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Пусть

$$\varphi(z) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz)\,, \tag{1.12}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \cos nz\, dz \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \sin nz\, dz \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Выполним замену переменной $z = \frac{\pi x}{L}$. Тогда $\varphi(z) = f(x)$. Вместо $\cos nz$, $\sin nz$ имеем функции

$$1, \cos\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{\pi}{L}x, \dots, \cos\frac{n\pi}{L}x, \sin\frac{n\pi}{L}x, \dots \tag{1.13}$$

периода $2L$. Функции (1.13) составляют тригонометрическую систему с периодом $2L$. Они ортогональны на $[-L, L]$ (т.е., интеграл от произведения двух различных функций по отрезку $[-L, L]$ равен нулю). Далее,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi}{L}x\, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \tag{1.14}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.15}$$

Числа a_n, b_n, определенные равенствами (1.14) и (1.15), называются *коэффициентами Фурье* функции f. Ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

называется *рядом Фурье* $2L$-периодической функции f. Он может быть формально получен из ряда (1.12) заменой $z = \frac{\pi x}{L}$.

Пример 1.16. Функция $f(x) = |\sin x|$ – четная и π-периодическая, здесь $L = \frac{\pi}{2}$.

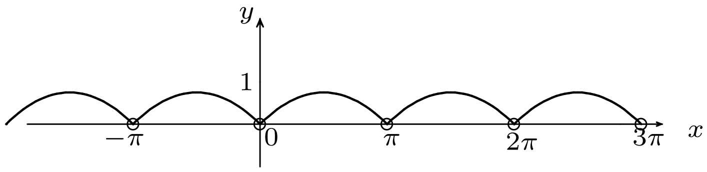

Рис. 8. График функции $y = |\sin x|$.

Ее коэффициенты Фурье $b_n = 0$. Вычислим

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos 2nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\,dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx. \quad \square$$

Пример 1.17. Построим ряд Фурье 2-периодического продолжения функции

$$f(x) = |x| \quad (-1 \le x \le 1).$$

Здесь $L = 1$. Выше уже был построен ряд Фурье функции $\varphi(z) = |z|$ $(-\pi \le z \le \pi)$:

$$|z| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)z \quad (|z| \le \pi).$$

Положим $z = \frac{\pi x}{L} = \pi x$ $(-1 \le x \le 1)$ и получим

$$|x| = \frac{1}{\pi}|\pi x| = \frac{1}{\pi}\varphi(\pi x) \sim \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x\right).$$

Итак,

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x \quad (|x| \le 1). \quad \square$$

Пример 1.18. Периодическое продолжение функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \le x < 3, \end{cases}$$

заданной на отрезке $[0, 3]$, является четной 3-периодической функцией. Построим для нее ряд Фурье, учитывая, что $L = \frac{3}{2}$. Имеем $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \frac{4}{3}\int_0^1 x\,dx + \frac{4}{3}\int_1^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \frac{4}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2\pi nx}{3}\,dx + \frac{4}{3}\int_1^{\frac{3}{2}}\cos\frac{2\pi nx}{3}\,dx = \begin{cases} 0, & n = 3k, \\ -\frac{9}{2\pi^2 n^2}, & n \ne 3k. \end{cases}$$

Поэтому

$$f(x) \sim \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{3}$$

$$-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(3k-1)^2}\cos\frac{2(3k-1)\pi x}{3} + \frac{1}{(3k+1)^2}\cos\frac{2(3k+1)\pi x}{3}\right)$$

(поскольку полученный ряд Фурье сходится абсолютно, то мы можем группировать его слагаемые в пары). $\square$

Пример 1.19. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases}$$

и пусть g – четное продолжение f на $[-\pi,\pi]$. Построим ряд Фурье функции g на $[-\pi,\pi]$. Для этого заметим, что функция g является π-периодической и $g(x)=\frac{1}{2}h(2x)$, где h – 2π-периодическое продолжение функции $|x|$ $(-\pi\le x\le\pi)$. Выше мы уже построили ряд Фурье для такой функции

$$h(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

Поэтому

$$g(x)=\frac{1}{2}h(2x)\sim\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos 2(2k-1)x. \quad \square$$

1.4. Ортогональные системы

Определение 1.20. Последовательность $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ действительнозначных функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$, называется *ортогональной системой* на $[a,b]$, если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=0 \quad (m\ne n), \qquad \int_a^b \varphi_n^2(x)>0 \quad (n=0,1,\dots).$$

Если при этом $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx=1$ $(n=0,1,\dots)$, то Φ называется *ортонормированной системой* на $[a,b]$.

Для произвольной функции $f\in\mathcal{R}[a,b]$ число

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

называется *квадратичной нормой* (или L^2-*нормой*) функции f на $[a,b]$.

Тригонометрическая система

$$1,\cos x,\sin x,\dots,\cos nx,\sin nx,\dots$$

ортогональна на $[-\pi,\pi]$. Нормы этих функций на $[-\pi,\pi]$ равны

$$\|1\|_2=\sqrt{2\pi},\ \|\cos nx\|_2=\|\sin nx\|_2=\sqrt{\pi}.$$

Соответствующей ортонормированной системой является

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots. \tag{1.16}$$

Существует много различных ортогональных систем. Например, *система Радемахера*

$$r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ортонормирована на $[0, 1]$. Другими примерами ортогональных на $[0, \pi]$ систем являются системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ортогональная система на $[a, b]$. *Коэффициенты Фурье* функции $f \in \mathcal{R}[a, b]$ по системе Φ определяются равенствами

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2} \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\, dx \quad (n = 0, 1, \dots). \tag{1.17}$$

Обозначаем

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{1.18}$$

Ряд в правой части (1.18) называется *рядом Фурье* функции f.

Если $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система, то

$$c_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\, dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Если $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, то ее коэффициентами Фурье относительно нормированной тригонометрической системы (1.16) будут

$$\widetilde{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$\widetilde{a}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad \widetilde{b}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Сравнивая с формулами (1.4) и (1.5) для обычных тригонометрических коэффициентов, имеем

$$\widetilde{a}_n = \sqrt{\pi} a_n, \ \widetilde{b}_n = \sqrt{\pi} b_n.$$

Поэтому ряд с коэффициентами $\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n$ по системе (1.16) совпадает с обычным рядом Фурье.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}$ – ортогональная система. Рассмотрим конечные линейные комбинации (*полиномы* относительно системы Φ):

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \quad (\alpha_k \in \mathbb{R}).$$

Лемма 1.21. Справедливо равенство

$$\|P_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \, \|\varphi_k\|_2^2 \,. \tag{1.19}$$

Доказательство. Имеем

$$P_n^2(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_k \alpha_j \varphi_k(x) \varphi_j(x).$$

Поэтому, в силу ортогональности, имеем

$$\int\limits_a^b P_n^2(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\, dx,$$

т. е., (1.19). $\square$

Замечание 1.22. Равенство (1.19) представляет собой разновидность теоремы Пифагора

$$\|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \quad (u \perp v).$$

Действительно, легко проверить, что функции f и g ортогональны на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b [f + g]^2\, dx = \int\limits_a^b f^2(x)\, dx + \int\limits_a^b g^2(x)\, dx.$$

Из леммы 1.21 мгновенно вытекает

Следствие 1.23. Для произвольного тригонометрического полинома

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\, dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right).$$

В случае ортонормированной системы равенство (1.19) принимает вид

$$\int_a^b P_n^2(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2. \tag{1.20}$$

Квадратичным (*евклидовым*) *расстоянием* между функциями $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ называется

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx}$$

(континуальный аналог евклидового расстояния).

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ортогональная система на $[a,b]$. Рассмотрим приближение функции f полиномами

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

в смысле квадратичного расстояния.

Следующая теорема выражает так называемое *минимальное свойство* частичных сумм рядов Фурье.

Теорема 1.24 (Грам). Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Среди всех полиномов P_n порядка не выше, чем n, наилучшее квадратичное приближение $\|f - P_n\|_2$ получаем, если P_n является n-й частичной суммой

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

ряда Фурье функции f.

Доказательство. Можем предполагать, что Φ – ортонормированная система. Применяя (1.20), получаем

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right]^2 dx$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - c_k)^2,$$

где c_k – коэффициенты Фурье. Ясно, что наименьшее значение правой части достигается при $\alpha_k = c_k$. В этом случае имеем

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2. \quad \square \tag{1.21}$$

Равенство (1.21) называется *тождеством Бесселя.* Так как левая часть этого тождества неотрицательна, то из него вытекает

Теорема 1.25. Для заданной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n\}$ и для любой функции $f \in \mathcal{R}[a, b]$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1.22}$$

Неравенство (1.22) называется *неравенством Бесселя.*

Замечание 1.26. Равенство (1.21) можно переписать в виде

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \int_a^b S_n^2(x)\,dx.$$

Это – *равенство Пифагора.* Как уже отмечалось выше, оно означает, что $f - S_n$ и S_n ортогональны.

Для произвольной ортогональной системы неравенство Бесселя (1.22) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|_2^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

В частности, для тригонометрической системы имеем

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Отсюда вытекает, что ряд в левой части сходится. Тогда, в силу необходимого условия сходимости числового ряда, его слагаемые стремятся к нулю. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1.27 (лемма Римана – Лебега). Для функции $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ ее коэффициенты Фурье a_n, b_n стремятся к нулю при $n \to \infty$.

1.5. Интегральное представление частичных сумм

Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Рассмотрим ее ряд Фурье и обозначим через $S_n(x)$ его частичную сумму

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right). \tag{1.23}$$

Коэффициенты Фурье a_k и b_k определяются равенствами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\,dt \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\,dt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Подставив это представление в (1.23), получим

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\cos kx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\sin kx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]\,dt.$$

Обозначим

$$D_n(u) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku. \tag{1.24}$$

Функция $D_n(u)$ – 2π-периодическая (как сумма 2π-периодических функций).

Имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt.$$

Выполняя замену переменной $t = x+u$ (x фиксировано), получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)D_n(u)\,du.$$

Так как подынтегральная функция имеет период 2π, то имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du. \tag{1.25}$$

Это – *интегральное представление* частичной суммы ряда Фурье функции f (*формула Дирихле*).

Функция $D_n(u)$ называется *ядром Дирихле*. Она представляет собой четный тригонометрический полином порядка n. Интегрируя (1.24) от $-\pi$ до π, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = 1.$$

Представим ядро Дирихле в другой форме. Для этого умножим обе части (1.24) на $2\sin\frac{u}{2}$ и получим

$$2\sin\frac{u}{2}D_n(u) = \sin\frac{u}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{u}{2}\cos ku.$$

Применяя равенство

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$

имеем

$$2\sin\frac{u}{2}\cos ku = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)u.$$

Поэтому

$$2\sin\frac{u}{2}D_n(u) = \sin\frac{u}{2}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)u\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u.$$

Таким образом, для $0 < |u| \le \pi$

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{1.26}$$

1.6. Поточечная сходимость ряда Фурье

Лемма 1.28. Пусть функция $g \in \mathcal{R}[0,\pi]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0.$$

Доказательство. Определим две функции

$$h_1(t) = \begin{cases} g(t)\cos\frac{t}{2}, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & -\pi \le t < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad h_2(t) = \begin{cases} g(t)\sin\frac{t}{2}, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & -\pi \le t < 0. \end{cases}$$

Так как $h_1, h_2 \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, то

$$\int_0^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$= \int_0^\pi g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt + \int_0^\pi g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t)\sin nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} h_2(t)\cos nt\,dt.$$

В силу леммы Римана – Лебега (лемма 1.27), каждый из двух последних интегралов стремится к нулю при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 1.29 (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{PS}$ (кусочно гладкая). Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ ряд Фурье функции f сходится к значению

$$S(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Доказательство. Имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi f(x+t)D_n(t)\,dt + \int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)\,dt\right].$$

Заменяя переменную $t = -u$ в последнем интеграле и учитывая, что ядро Дирихле $D_n(t)$ четно, получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[f(x+t) + f(x-t)\right] D_n(t)\,dt.$$

Далее, поскольку D_n четно и $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$, то имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$S_n(x)-S(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+t)-f(x+)]D_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x-t)-f(x-)]D_n(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(I_n^{(1)}(x)+I_n^{(2)}(x)\right).$$

Покажем, что $I_n^{(1)}(x), I_n^{(2)}(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Положим (x фиксировано)

$$g(t)=\frac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}\quad (t\in(0,\pi]).$$

Функция g кусочно непрерывна на $(0,\pi]$. Кроме того, поскольку предел

$$\lambda=\lim_{t\to 0+} f'(x+t)$$

существует и конечен, то, применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{t\to 0+} g(t)=\lim_{t\to 0+}\frac{f'(x+t)}{\cos\frac{t}{2}}=\lambda.$$

Таким образом, $g\in\mathcal{PC}$ (кусочно непрерывна) на $[0,\pi]$ и, следовательно, $g\in\mathcal{R}[0,\pi]$. В силу формулы (1.26) и леммы 1.28,

$$I_n^{(1)}(x)=\int\limits_0^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\to 0\quad (n\to\infty).$$

Аналогично получаем, что и $I_n^{(2)}(x)\to 0$ $(n\to\infty)$. Итак,

$$S_n(x)\to S(x)\quad (n\to\infty).\quad\square$$

Следствие 1.30. Предположим, что 2π-периодическая функция $f\in\mathcal{PC}$ (кусочно непрерывна). Если f дифференцируема в точке x_0, то ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

В самом деле, в доказательстве теоремы 1.29 мы использовали лишь тот факт, что $g(t)$ имеет конечный предел при $t\to 0+$ (и, аналогично,

$$\frac{f(x_0-t)-f(x_0-)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

имеет конечный предел при $t \to 0+$).

Пример 1.31. Функция $f(x) = |\sin x|$ – непрерывная и кусочно гладкая. Поэтому она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле 1.29. Согласно этой теореме, ее ряд Фурье сходится к функции в каждой точке. Ряд Фурье этой функции был построен нами ранее (см. пример (1.16)). Таким образом, имеем равенство

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Пример 1.32. Функция $f(x) = \operatorname{sign}\sin x$ – кусочно гладкая, и поэтому удовлетворяет условиям теоремы Дирихле 1.29. Из этой теоремы следует, что ряд Фурье сходится к функции в каждой точке. Заметим также, что $\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Ряд Фурье был построен нами ранее (пример (1.10)), так что имеем следующее равенство

$$\operatorname{sign}\sin x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

В частности, при $x = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

Пример 1.33. Пусть $f_0(x) = x^2$ $(x \in [-\pi, \pi])$ и f – 2π-периодическое продолжение функции f_0. Функция f – четная. Имеем $a_0 = \pi^2/3$; дважды интегрируя по частям, получаем для $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Ясно, что $f \in \mathcal{PS}$ и f непрерывна на $\mathbb{R}$. По теореме Дирихле 1.29, ряд Фурье функции f в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ сходится к $f(x)$. Таким образом, получаем

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (|x| \le \pi).$$

В частности, при $x = \pi$ имеем

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда вытекает следующее полезное равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Полагая $x = 0$, получим еще одно равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad \square$$

Пример 1.34. Выше мы уже построили ряд Фурье для 2π-периодического продолжения f функции $f_0(x) = |x|$ $(-\pi \le x \le \pi)$ (пример (1.9)). Как и в предыдущем примере, легко убедиться в том, что полученный ряд сходится к $f(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, справедливо равенство

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \quad (|x| \le \pi).$$

Полагая $x = 0$, получаем такое равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \square$$

Выше уже отмечалось, что если две 2π-периодические функции $f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ отличаются в конечном числе точек отрезка $[-\pi, \pi]$, то они имеют одинаковые коэффициенты Фурье. Следующая теорема позволяет обратить это утверждение для кусочно гладких функций.

Теорема 1.35. Пусть все соответствующие коэффициенты Фурье 2π-периодических функций $f, g \in \mathcal{PS}$ совпадают. Тогда $f(x) = g(x)$ кроме, быть может, конечного числа точек из отрезка $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Действительно, на отрезке $[-\pi, \pi]$ существует лишь конечное число точек, в которых хотя бы одна из функций f или g не имеет производной. В силу следствия 1.30, в каждой точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$, в которой обе функции f и g дифференцируемы, их ряды Фурье сходятся к $f(x_0)$ и $g(x_0)$, соответственно. Так как у функций f и g ряды Фурье совпадают, то $f(x_0) = g(x_0)$. $\square$

1.7. Равномерная сходимость ряда Фурье

1.7.1. Дифференцирование ряда Фурье

В дальнейшем допускаем, что функция может быть не определена в конечном числе точек отрезка $[-\pi, \pi]$.

Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{PS}$. Тогда ее производная f' принадлежит классу $\mathcal{PC}$ и, следовательно, $f' \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ (заметим, что f' может не существовать в конечном числе точек отрезка $[-\pi, \pi]$). Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.27}$$

$$f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx). \tag{1.28}$$

Рассмотрим следующий вопрос. *Может ли ряд* (1.28) *быть получен почленным дифференцированием ряда* (1.27)*?* Другими словами, *верно ли, что* $a'_0 = 0$*,* $a'_n = nb_n$*,* $b'_n = -na_n$ *?*

В общем случае ответ отрицательный. Действительно, выше мы уже построили ряд Фурье функции $\operatorname{sign}\sin x$:

$$\operatorname{sign}\sin x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x.$$

Дифференцируя почленно, получим ряд

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k-1)x.$$

Этот ряд не является рядом Фурье функции $f'(x) = 0$; на самом деле, он не является рядом Фурье любой функции, поскольку коэффициенты этого ряда не стремятся к нулю.

Такой пример оказывается возможным только лишь потому, что функция имеет точки разрыва. Действительно, справедлива

Теорема 1.36. Предположим, что 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{PS}$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Если

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

– ряд Фурье функции f, то рядом Фурье производной f' будет

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)\,.$$

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{C}$, то $f(-\pi) = f(\pi)$ и поэтому, в силу основной формулы интегрального исчисления (теорема 10),

$$a_0' = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Далее, интегрируя по частям (что также возможно в силу основной теоремы интегрального исчисления), имеем

$$a_n' = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos nx|_{-\pi}^{\pi} + n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx \right] = nb_n.$$

Аналогично,

$$b_n' = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \sin nx|_{-\pi}^{\pi} - n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \right] = -na_n. \quad \square$$

Замечание 1.37. Как показывает рассмотренный перед формулировкой теоремы 1.36 пример, условие непрерывности в этой теореме нельзя отбросить.

1.7.2. Равномерная сходимость

Теорема 1.38. Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{PS}$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно и абсолютно на $\mathbb{R}$ к функции f.

Доказательство. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Сначала покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty. \tag{1.29}$$

По теореме о дифференцировании ряда Фурье (теорема 1.36),

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(nb_n \cos nx - na_n \sin nx\right).$$

Поэтому

$$a_n = -\frac{1}{n} b'_n, \quad b_n = \frac{1}{n} a'_n,$$

где a'_n, b'_n – коэффициенты Фурье производной f'. Отсюда, в силу неравенства Коши (теорема 21), следует, что для любого натурального N

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} \frac{|b'_n|}{n} \le \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} (b'_n)^2\right)^{1/2}.$$

Далее, так как $f' \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, то, в силу неравенства Бесселя (1.22),

$$\left(\sum_{n=1}^{N} (b'_n)^2\right)^{1/2} \le \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

также сходится. Обозначая его сумму через C_0, получаем, что для любого натурального N

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq C_1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 \, dx \right)^{1/2},$$

где $C_1 = \sqrt{C_0/\pi}$. Устремляя $N \to \infty$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq C_1 \left\| f' \right\|_2 .$$

Аналогично,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq C_1 \left\| f' \right\|_2 .$$

Таким образом, получили (1.29). Далее,

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Применяя это неравенство, (1.29) и признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда, получаем, что ряд Фурье функции f сходится равномерно и абсолютно на $\mathbb{R}$. В силу теоремы Дирихле 1.29, при любом x он сходится к $f(x)$. $\square$

Замечание 1.39. Если f кусочно гладкая, но имеет точки разрыва, то ряд Фурье функции f не может сходиться равномерно (иначе f была бы непрерывной). Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.40. Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{PS}$. Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на любом отрезке, не содержащем точек разрыва f.

Вместе с тем, если f имеет точки разрыва, то ее ряд Фурье не может быть абсолютно сходящимся в некотором интервале. Этот факт хорошо известен в теории тригонометрических рядов.

1.7.3. Почленное интегрирование ряда Фурье

Напомним, что кусочно непрерывная функция не обязана быть непрерывной.

Теорема 1.41. Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{PC}$ на $\mathbb{R}$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

Тогда для любого $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо равенство

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{a_0}{2} x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right), \tag{1.30}$$

где C – постоянная, и ряд справа сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Положим $\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0.$$

Далее, обозначим

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Тогда Φ непрерывна и кусочно гладкая на $[-\pi, \pi]$. Кроме того,

$$\Phi(\pi) - \Phi(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0,$$

и поэтому Φ может быть продолжена на $\mathbb{R}$ до 2π-периодической кусочно гладкой и непрерывной функции. Пусть

$$\Phi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) .$$

По теореме о почленном дифференцировании ряда Фурье (теорема 1.36),

$$\Phi'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-nA_n \sin nx + nB_n \cos nx) .$$

Но $\Phi'(x) = \varphi(x)$ всюду, за исключением конечного числа точек из отрезка $[-\pi, \pi]$. При этом

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Таким образом, $A_n = -\frac{b_n}{n}$, $B_n = \frac{a_n}{n}$. Также имеем $\Phi(0) = 0$ и ряд Фурье функции Φ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к Φ. Итак,

$$\Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right)$$

для любого x. Отсюда следует равенство (1.30) с постоянной $C = A_0/2$. Полагая $x = 0$, получаем

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad \square$$

Следствие 1.42. Если 2π-перодическая функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $a_0 = 0$, $a_n = b_n = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

В самом деле, $\int\limits_0^x f(t)\,dt = 0$; дифференцируя, получим, что $f(x) = 0$ для каждого x.

Следствие 1.42 представляет собой так называемое *свойство единственности.* Иначе его можно сформулировать следующим образом. *Если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то эти функции равны тождественно.* Отметим, что для непрерывных кусочно-гладких функций это свойство уже было доказано выше (теорема 1.35).

1.8. Полные ортогональные системы

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность интегрируемых функций f_n. Говорят, что эта последовательность *сходится* на $[a, b]$ к функции $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *в среднем квадратичном,* если $\|f_n - f\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Скажем, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *сходится* на $[a,b]$ к функции $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *в среднем квадратичном*, если последовательность его частичных сумм $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ сходится к f в среднем квадратичном.

Определение 1.43. Ортогональная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *полной*, если для любой непрерывной функции f ее ряд Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ сходится в среднем квадратичном к f.

Теорема 1.44. Ортонормированная система полна тогда и только тогда, когда для любой непрерывной функции f

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1.31}$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированная система, c_n – коэффициенты Фурье непрерывной функции f, S_n – частичные суммы ряда Фурье функции f по этой системе. Перепишем доказанное ранее тождество Бесселя (1.21) в следующем виде

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2.$$

Отсюда видно, что условие $\|f - S_n\|_2 \to 0$ равносильно (1.31). $\square$

Равенство (1.31) называется *равенством Парсеваля.* Это равенство представляет собой континуальный аналог теоремы Пифагора.

Теорема 1.45. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – полная ортогональная система. Если непрерывная функция f ортогональна к каждой φ_n $(n = 0, 1, \dots)$, то $f(x) = 0$ для всех $x \in [a,b]$.

Доказательство. Можем предположить, что $\|\varphi_n\|_2 = 1$ для всех n. Все коэффициенты Фурье функции f равны нулю. Поэтому, в силу равенства Парсеваля (1.31),

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0.$$

Поскольку f непрерывна, то отсюда следует, что $f(x) = 0$ для всех $x \in [a, b]$. $\square$

Замечание 1.46. Обратное утверждение также верно. Именно, если не существует ненулевой функции, ортогональной ко всем функциям φ_n, то $\{\varphi_n\}$ полная. Доказательство этого факта выходит за рамки этого курса.

Теорема 1.47 (единственность). Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}$ полная ортогональная система. Если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье относительно Φ, то эти функции совпадают на $[a, b]$.

Действительно, разность таких функций ортогональна ко всем φ_n, и, следовательно, эта разность тождественно равна нулю.

Заметим, что для тригонометрической системы свойство единственности было другим способом получено ранее (см. следствие 1.42). В следующем параграфе будет установлено, что тригонометрическая система полна, и поэтому к ней применима теорема 1.47.

1.9. Суммирование рядов Фурье

Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.32}$$

– ее ряд Фурье и $S_n(x)$ – частичные суммы ряда (1.32). Согласно формуле Дирихле (1.25),

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt, \tag{1.33}$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt, \quad D_0(t) = \frac{1}{2},$$

– ядро Дирихле. Напомним (см. (1.26)), что

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}. \tag{1.34}$$

Рассмотрим арифметические средние

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}$$

(они называются *средними Фейера* порядка n функции f). Выведем интегральное представление для $\sigma_n(x)$. В силу (1.33), имеем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\, dt, \tag{1.35}$$

где

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1}.$$

Функция F_n представляет собой тригонометрический полином порядка n. Она называется *ядром Фейера* порядка n. Преобразуем его представление. В силу (1.34), имеем

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}} \left[\sin\frac{t}{2} + \cdots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right].$$

Обозначим

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t.$$

Умножая на $2\sin\frac{t}{2}$ и применяя равенство

$$2\sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t \sin\frac{t}{2} = \cos kt - \cos(k+1)t,$$

получаем

$$2\sin\frac{t}{2}\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} [\cos kt - \cos(k+1)t] = 1 - \cos(n+1)t = 2\sin^2(n+1)\frac{t}{2}.$$

Поэтому,

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Легко видеть, что ядро Фейера F_n обладает следующими свойствами.

(1) F_n – четная и неотрицательная функция.

(2) $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt = 1.$

(3) $F_n(t) \le \frac{n+1}{2}$.

(4) $F_n(t) \le \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}$ $\quad (0 < \delta \le t \le \pi)$ и поэтому

$$\mu_n(\delta) = \max_{\delta \le t \le \pi} F_n(t) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{при любом } \delta > 0.$$

Теорема 1.48 (Фейер). Пусть 2π-периодическая функция f интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Предположим, что в точке x функция f имеет односторонние пределы $f(x+)$ и $f(x-)$. Тогда

$$\sigma_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (n \to \infty).$$

Доказательство. Так как ядро F_n четно, то имеем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]F_n(t)\,dt.$$

Можем предполагать, что

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Поскольку

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1,$$

то получаем

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi_x(t)F_n(t)\,dt,$$

где

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Имеем

$$\varphi_x(t) \to 0 \quad (t \to 0+).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, что

$$|\varphi_x(t)| < \varepsilon \quad (0 \le t \le \delta).$$

Теперь, учитывая, что $F_n \geq 0$, имеем

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\delta |\varphi_x(t)|\, F_n(t)\, dt + \int_\delta^\pi |\varphi_x(t)|\, F_n(t)\, dt\right]$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\, dt + \frac{\mu_n(\delta)}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_x(t)|\, dt,$$

где $\mu_n(\delta) = \max\limits_{\delta \leq t \leq \pi} F_n(t)$.

Заметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\, dt = \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_x(t)|\, dt \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (|f(x+t)| + |f(x-t)|)\, dt + 2|f(x)|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |f(u)|\, du + 2sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)| = M.$$

(f ограничена, поскольку она интегрируема на $[-\pi, \pi]$). Таким образом,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M\mu_n(\delta).$$

Поскольку $\mu_n(\delta) \to 0$ $(n \to \infty)$ и δ зависит от x и ε, то существует такое $N = N(x, \varepsilon)$, что

$$M\mu_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq N).$$

Отсюда следует, что

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (n \geq N). \quad \square$$

Следствие 1.49. Пусть 2π-периодическая функция f кусочно непрерывна. Тогда в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ ряд Фурье функции f суммируем методом средних арифметических к сумме

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Следствие 1.50. Пусть 2π-периодическая функция f интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Предположим, что в точке x функция f имеет односторонние пределы $f(x\pm)$. Если ряд Фурье функции f сходится в точке x, то его сумма равна

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

В частности, если ряд Фурье сходится в точке непрерывности x функции f, то его сумма равна $f(x)$.

Теорема 1.51 (Фейер). Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда средние арифметические $\sigma_n(x)$ ряда Фурье функции f сходятся к f равномерно на $\mathbb{R}$.

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 1.48. Следует только заметить, что, в силу равномерной непрерывности функции f, число $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать не зависящим от x.

Одним из важных приложений теоремы 1.51 является классическая *теорема Вейерштрасса о приближении тригонометрическими полиномами.*

Теорема 1.52 (Вейерштрасс). Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический полином T, что

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Действительно, по теореме 1.51 средние арифметические σ_n сходятся равномерно к функции f. Поэтому в качестве T можно взять σ_n при достаточно большом n.

Теорема 1.51 позволяет также легко получить свойство *полноты тригонометрической системы.*

Теорема 1.53. Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в среднем к f, т. е.,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 1.51, найдется такой номер N, что

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$$

для всех $n \geq N$ и для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда, в силу минимального свойства частичных сумм S_n ряда Фурье (см. теорему 1.24),

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2 \, dx < \varepsilon \quad (n \geq N). \quad \square$$

Замечание 1.54. Теорема 1.53 остается справедливой, если вместо непрерывности f потребовать лишь ее интегрируемость на $[-\pi, \pi]$. Для доказательства достаточно использовать теорему 13 о приближении интегрируемой функции непрерывной.

Другая формулировка теоремы 1.53: *Тригонометрическая система полна.*

Упражнения к разделу 1

1.1. Построить графики следующих периодических функций.

1.1.a.
$$f(x) = x \quad (-1 < x < 1), \quad f(x+2) = f(x).$$

1.1.b.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \cos x, & 0 < x < \pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

1.1.c.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 2\pi, \end{cases} \qquad f(x+3\pi) = f(x).$$

1.2. Вычислить коэффициенты Фурье заданных функций (все функции предполагаются 2π-периодическими). Построить графики этих функций.

1.2.a.
$$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi).$$

1.2.b.
$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi).$$

1.2.c.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

1.2.d.
$$f(x) = x \quad (0 < x < 2\pi).$$

1.3. Построить ряды Фурье для каждой из следующих функций. Начертить графики периодического продолжения каждой функции.

1.3.a.
$$f(x) = |x| \quad (-1 < x < 1).$$

1.3.b.
$$f(x) = \begin{cases} -3, & -2 < x < 0, \\ 3, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

1.4. Построить периодические продолжения следующих функций.

1.4.a.
$$f(x) = x \quad (-1 < x \le 1).$$

1.4.b. $$f(x) = x \quad (-1 \le x < 1).$$

1.4.c. $$f(x) = x^2 \quad (-1 \le x \le 1).$$

1.4.d. $$f(x) = x^3 \quad (-2 < x \le 2).$$

1.5. Построить косинус- и синус-ряды для следующих функций. Изобразить графики четного и нечетного продолжений и их периодических продолжений.

1.5.a. $$f(x) = 1 \quad \text{на} \quad (0, a).$$

1.5.b. $$f(x) = x \quad \text{на} \quad (0, a).$$

1.5.c. $$f(x) = \sin x \quad \text{на} \quad (0, 1).$$

1.5.d. $$f(x) = \sin x \quad \text{на} \quad (0, \pi).$$

1.6. Построить ряды Фурье следующих функций.

1.6.a. $$f(x) = x \quad \text{на} \quad (-2, 2).$$

1.6.b. $$f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

1.7. Построить ряд Фурье функции $(\cos x)^n$.

1.8.a. Доказать, что совокупность функций $\left\{\sqrt{(1/\pi)}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональную систему на $[-\pi, \pi]$.

1.8.b. Применяя этот результат и неравенство Бесселя, привести альтернативное доказательство равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x\, dx = 0 \quad (f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]).$$

1.9. Показать, что применение неравенства Бесселя к системе функций $\left\{\sqrt{(2/\pi)}\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ влечет неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

где

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

1.10. Пусть $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$, найти тригонометрический полином T_n порядка n, который минимизирует норму

$$\|f - T_n\|_2 = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left[f(x) - T_n(x)\right]^2\,dx\right)^{1/2}.$$

1.11. Пусть f – 2π-периодическая непрерывная функция. Для произвольных α, β, γ положим

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \alpha - \beta\cos x - \gamma\cos 10x\right]^2\,dx.$$

Доказать, что F достигает минимума в единственной точке $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ и найти эту точку, если:

1.11.a. $f(x) = \cos^2 x$;

1.11.b. $f(x) = x^2$;

1.11.c. $f(x) = \sin x$;

1.11.d. $f(x) = 1 - 2\cos x$;

1.11.e. $f(x) = |x|$;

1.11.f. $f(x) = |\sin x|$.

1.12. То же самое для

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[x - \alpha - \beta\cos x - \gamma\sin 2x\right]^2\,dx.$$

1.13. Предположим, что 2π-периодическая непрерывная функция f такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие числа α_n, β_n, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha_n - \beta_n \sin x]^2 \ dx \leq \frac{1}{n}.$$

Определить f.

1.14. Предположим, что 2π-периодическая непрерывная функция f такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие числа $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \alpha_n - \beta_n \cos x - \gamma_n \sin x]^2 \ dx \leq \frac{1}{n}.$$

Определить f.

1.15. Пусть функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Вычислить:

1.15.a. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \cos^2 nx \, dx$;

1.15.b. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \cos^3 nx \, dx$.

1.16. Доказать, что модули *всех* экстремальных значений (максимумов и минимумов) ядра Дирихле D_n не меньше $\frac{1}{2}$. Доказать, что на интервале $[-\pi, \pi]$ существует по крайней мере $2n+1$ экстремальных значений функции D_n.

1.17. Пусть f кусочно гладкая на интервале $(0, a)$. Доказать, что косинус- и синус-ряды функции f сходятся к $f(x_0)$, если x_0 точка непрерывности f, а если x_0 – точка разрыва f, то оба ряда сходятся в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$.

1.18. Будем говорить, что f имеет в точке x_0 *правую производную*, если существует

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0}.$$

Скажем, что f имеет в точке x_0 *левую производную*, если существует

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0}.$$

Доказать следующую теорему.

Теорема. *Предположим, что 2π-периодическая функция f кусочно непрерывна. Если в точке x_0 функция f имеет левую и правую производные, ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к* $\frac{1}{2}[f(x_0+)+f(x_0-)]$.

1.19. Объяснить почему ряд Фурье для $\sqrt[3]{x}$ на интервале $(-\pi,\pi)$ сходится к $\sqrt[3]{x}$ для всех x из интервала $(-\pi,\pi)$.

1.20. *Липшицевы функции.* Функция f называется *липшицевой* порядка $\alpha>0$ в точке x_0, если на некотором открытом интервале, содержащем x_0, справедливо неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|^{\alpha},$$

где C – некоторая положительная постоянная. [1]

1.20.a. Показать, что $f(x)=x^{1/3}$ является липшицевой порядка 1/3 в точке 0.

1.20.b. Показать, что $f(x)=x\cos(1/x)$ при $x\neq 0$ и равная 0 при $x=0$ является липшицевой порядка 1 в точке 0.

1.20.c. Доказать, что если f дифференцируема в точке x_0, то она является липшицевой порядка 1 в точке x_0.

1.20.d. Показать, что функции из 1.20.a и 1.20.b являются липшицевыми в каждой точке x (порядок может быть разным для различных x).

1.21. Вычислить

1.21.a.
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\sin 100t\,dt;$$

1.21.b.
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\cos 100t\,dt.$$

1.22. Вычислить $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t)\,dt$ при $n=100$.

1.23. Пусть $g(t)=\begin{cases}\frac{\sin(t/2)}{t}, & t\neq 0,\\ 1/2, & t=0.\end{cases}$

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)g(t)\,dt$.

[1] Говорят также, что f удовлетворяет *условию Гельдера порядка* α.

1.24. Пусть $f(x) = 1 - x^2$ $(x \in [-\pi, \pi])$.

1.24.a. Вычислить $a_0,\ a_n,\ b_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

1.24.b. К каким значениям ряд Фурье функции f сходится в точках $x = 5\pi$ и $x = 6\pi$?

1.25. Построить ряд Фурье 1-периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} x - [x], & x \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

К каким значениям сходится ряд Фурье в точках $x = 5$, $x = 3$, и $x = 1,5$?

1.26.a. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

1.26.b. Вычислить $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ для $-2\pi < x < 0$.

1.26.c. Доказать, что

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \quad (0 < x < \pi).$$

1.26.d. Показать, что из упражнений 1.26.a и 1.26.c вытекает равенство

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (0 < x < \pi).$$

1.26.e. Разложить в ряд Фурье функцию $\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x$ $(|x| < \pi)$. Доказать равенство из упражнения 1.26.d, используя это разложение и теорему Дирихле 1.29.

1.27. Пусть $f_1(x) = x$ $(x \in (-\pi, \pi])$. Построить ряд Фурье функции f_1.

1.28. Применяя упражнение 1.27 и интегрирование, разложить в ряды Фурье следующие функции (сформулировать теорему об интегрировании ряда Фурье и проверить выполнение ее условий)

1.28.a. $$f_2(x) = x^2 \quad (x \in (-\pi, \pi]);$$

1.28.b. $$f_3(x) = x^3 \quad (x \in (-\pi, \pi]);$$

1.28.c.
$$f_4(x) = x^4, \quad (x \in (-\pi, \pi]).$$

1.29. Применяя разложение в ряд Фурье функции f_2 из упражнения 1.28.a, вычислить

1.29.a.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

1.29.b.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

1.30. Пусть f – 2π-периодическая функция. Предположим, что $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ $(r \geq 1)$ (т. е., что f имеет непрерывную производную $f^{(r)}$). Доказать, что

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| = \frac{1}{n^r}\left(\left|a_n\left(f^{(r)}\right)\right| + \left|b_n\left(f^{(r)}\right)\right|\right)$$

для любого $n \geq 1$.

1.31. Пусть f – 2π-периодическая, непрерывно дифференцируемая функция. Доказать, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1),$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ ($S_n(x)$ обозначает n-ю частичную сумму ряда Фурье функции f).

1.32. Пусть $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ $(r \geq 1)$ – 2π-периодическая функция. Доказать, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| = \frac{\varepsilon_n}{n^{r-1/2}} \quad (n \geq 1),$$

где $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$.

1.33.a. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

1.33.b. Пусть $f(x)$ – сумма данного ряда. Является ли данный ряд рядом Фурье функции f ?

1.33.c. Доказать, что $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, и ряд Фурье для f' может быть получен почленным дифференцированием исходного ряда.

1.33.d. Показать, что f' кусочно гладкая, непрерывная, и

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in (0, 2\pi))$$

(применить теорему о почленном интегрировании к ряду в правой части и упражнение 1.26.a).

1.33.e. Определить f.

1.34. Доказать, что если f кусочно непрерывна на (a, b) и $\| f \|_2 = 0$, то $f(x) = 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек.

1.35. Доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть f – периодическая функция. Если f имеет k непрерывных производных, то при некоторой положительной постоянной C коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют неравенствам*

$$|A_n| \le \frac{C}{n^k}, \quad |B_n| \le \frac{C}{n^k}$$

при всех n.

1.36. Пусть $f(x) = \begin{cases} Ax + B, & -\pi \le x < 0, \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ Для каких значений A и B ряд Фурье функции f сходится равномерно к f на $[-\pi, \pi]$?

1.37. Пусть $f(x) = \pi x - x|x|$ $(x \in (-\pi, \pi])$, и пусть f периодически продолжена с периодом 2π на $\mathbb{R}$. Будет ли ряд Фурье функции f сходиться равномерно?

1.38. Пусть $g(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x < 0, \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.38.a. Построить ряд Фурье функции g.

1.38.b. Определим функцию

$$h(x) = \int_{-\pi}^{x} g(t)\, dt + \alpha \sin \frac{x}{2} \quad (-\pi < x \le \pi),$$

$h(x + 2\pi) = h(x)$. При каком значении α ряд Фурье функции h сходится равномерно к h на $[-\pi, \pi]$?

1.39.a. Какие из приведенных ниже рядов являются рядами Фурье?

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx; \quad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}; \quad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

1.39.b. Какие из этих рядов сходятся равномерно на $\mathbb{R}$?

1.40. Пусть $\{g_n\}$ – ортогональная система на отрезке $[a, b]$. Пусть f - непрерывная функция на $[a, b]$, и $\{c_n\}$ – ее коэффициенты Фурье по системе $\{g_n\}$.

1.40.a. Доказать, что последовательность квадратичных норм

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n g_n \right\|_2$$

убывает с ростом N.

1.40.b. Доказать, что *равенство Парсеваля*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|g_n\|_2^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx$$

справедливо тогда и только тогда, когда $\{g_n\}$ – полная ортогональная система на $[a, b]$.

1.41. Используя полноту тригонометрической системы, т. е., равенство

$$\frac{1}{2} A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^2 + B_n^2\right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx,$$

где A_n, B_n – обычные коэффициенты Фурье функции f, доказать, что тригонометрическая система с периодом $2a$ является полной на $[-a, a]$, и что системы синусов и косинусов полные ортогональные системы на $[0, a]$.

1.42. Равенство Парсеваля можно применять для вычисления сумм числовых рядов. Например, применяя равенство из упражнения 1.41 к функции $f(x) = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12}$, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

1.43. Показать, что $\{\sin nx\}_{n=2}^{\infty}$ является неполной ортогональной системой на $[0, \pi]$.

1.44. Теорема Парсеваля.

1.44.a. Доказать, что произвольная ортонормированная на $[a, b]$ система функций $\{g_n\}$ полна тогда и только тогда, когда для любых двух кусочно непрерывных на (a,b) функций f и g справедливо равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n d_n = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ (где c_n и d_n – коэффициенты Фурье f и g относительно $\{g_n\}$).

1.44.b. Обобщить этот результат на случай ортогональных систем функций.

1.45. Пусть $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\cos kx - \sin kx) + 1$. Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n^2(x)\,dx$.

1.46. Пусть $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $(-\pi < x \le \pi)$. Вычислить $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, где a_n – косинус-коэффициенты функции f.

1.47. Пусть f – кусочно гладкая функция на $[0,\pi]$. Предположим, что f удовлетворяет хотя бы одному из условий

$$f(0) = f(\pi) = 0 \quad \text{или} \quad \int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать *неравенство Стеклова*

$$\int\limits_0^{\pi} f^2(x)\,dx \le \int\limits_0^{\pi} \left(f'\right)^2(x)\,dx.$$

В каких случаях оно обращается в равенство?

1.48. Пусть f – 2π-периодическая, непрерывная, кусочно гладкая функция и пусть

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать *неравенство Виртингера*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f'\right)^2(x)\,dx.$$

1.49. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ несуммируем в смысле средних арифметических, т. е., $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ не существует.

1.50. Доказать, что для средних Фейера справедливо равенство

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)[A_k \cos kx + B_k \sin kx],$$

где A_k, B_k – коэффициенты Фурье функции f.

1.51. Предположим, что 2π-периодическая функция f кусочно непрерывна. Доказать, что из условия $m \le f(x) \le M$ вытекает неравенство $m \le \sigma_n(x) \le M$ для всех x.

1.52. Доказать, что для любого m

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{2}\pi + 1.$$

Указание: сравнить средние арифметические частичных сумм ряда Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ с его частичными суммами, используя упражнение 1.50.

1.53. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ – числовой ряд, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ – его частичные суммы,

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1}$$

– средние арифметические.

1.53.a. Показать, что

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)u_k.$$

1.53.b. Показать, что $S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$.

1.53.c. Применяя равенство из упражнения 1.53.b, показать, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ суммируем методом средних арифметических, то

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{u_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

1.54. Показать, что

$$F_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos kt$$

(F_n – ядро Фейера порядка n).

1.55.a. Показать, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ его средние арифметические равны

$$\sigma_n(x) = -\frac{1}{2}x + \int\limits_0^x F_n(t)\,dt.$$

1.55.b. Показать, что $\sigma_n(x) < \frac{\pi - x}{2}$ для всех $0 < x < \pi$.

1.56. Показать, что ряд $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ суммируем к нулю в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$, исключая $x = 0$. Является ли он рядом Фурье? Сходится ли этот ряд в некоторой точке?

1.57. Показать, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ его средние арифметические равны

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\sin(n+2)x - \sin x}{4(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}$$

и $\sigma_n(x) \to \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ для любого $x \in [-\pi, \pi]$, $x \neq 0$.

1.58. Доказать, что каждая из систем

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots\right\} \quad \text{и} \quad \{\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots\}$$

ортогональна и полна на $[0, \pi]$.

1.59. Пусть f – 2π-периодическая и $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Предположим, что $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Указание: использовать средние арифметические $\sigma_n(x)$. Имеем

$$M \geq \sigma_n(0) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)a_k + \frac{a_0}{2} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)a_k + \frac{a_0}{2} \quad (n \geq N).$$

2. Преобразование Фурье

2.1. Основные свойства

2.1.1. Определение и примеры

Скажем, что определенная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная функция f *абсолютно интегрируема на* $\mathbb{R}$, если f интегрируема в смысле Римана на любом отрезке $[a,b]$ и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

сходится. Этот интеграл называется *нормой* функции f *порядка* 1 и обозначается через $\| f \|_1$. В данном разделе через $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ будем обозначать класс всех функций, абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$.

Определение 2.1. Для функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ *преобразование Фурье* $\widehat{f}$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}\,dx. \tag{2.1}$$

Так как $\left|\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}\right| = 1$, то интеграл (2.1) сходится абсолютно при любом $\xi \in \mathbb{R}$.

Для $2\pi-$периодической, интегрируемой на $[0,2\pi]$ функции мы определили ее коэффициенты Фурье a_n, b_n равенствами (1.4) и (1.5) (или комплексные коэффициенты Фурье c_n равенством (1.11)). Понятно, что преобразование Фурье является континуальным аналогом коэффициентов Фурье для функций, определенных на $\mathbb{R}$ (непериодических). Коэффициенты Фурье зависят от дискретной переменной n, а преобразование

Фурье является функцией переменной ξ, которая изменяется на всей действительной оси $\mathbb{R}$ (т. е., f и $\widehat{f}$ имеют ту же самую область определения $\mathbb{R}$).

Прежде всего, отметим следующие простые свойства.

Теорема 2.1. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Тогда:

(i) если функция f – четная, то $\widehat{f}$ – также четная функция, и

$$\widehat{f}(\xi) = 2\int\limits_0^\infty f(x)\cos 2\pi\xi x\,dx; \tag{2.2}$$

(ii) если f – нечетная, то $\widehat{f}$ – также нечетная, и

$$\widehat{f}(\xi) = -2i\int\limits_0^\infty f(x)\sin 2\pi\xi x\,dx. \tag{2.3}$$

Доказательство. Имеем $\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x} = \cos 2\pi\xi x - i\sin 2\pi\xi x$. Пусть f – четная. Тогда $f(x)\sin 2\pi\xi x$ – нечетная функция переменной x, и поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\sin 2\pi\xi x\,dx = 0.$$

С другой стороны, $f(x)\cos 2\pi\xi x$ является четной функцией переменной x, и поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\cos 2\pi\xi x\,dx = 2\int\limits_0^\infty f(x)\cos 2\pi\xi x\,dx.$$

Отсюда вытекает (2.2). Аналогично получаем (2.3). □

Рассмотрим некоторые важные примеры.

Пример 2.2. Пусть

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{\Pi}(\xi) = \frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi} \quad (\xi \ne 0), \quad \widehat{\Pi}(0) = 1. \tag{2.4}$$

Действительно, функция Π – четная, и поэтому, в силу (2.2),

$$\widehat{\Pi}(\xi) = 2\int\limits_0^\infty \Pi(x)\cos 2\pi\xi x\,dx = 2\int\limits_0^{1/2}\cos 2\pi\xi x\,dx = \frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}$$

для любого $\xi \neq 0$. При $\xi = 0$ имеем

$$\widehat{\Pi}(0) = 2\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = 1.$$

Функция (2.4) называется *ядром Дирихле.* Так как

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,$$

то эта функция (2.4) неперерывна на всей действительной оси $\mathbb{R}$. $\square$

Пример 2.3. Пусть

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{\Lambda}(\xi) = \frac{\sin^2\pi\xi}{\pi^2\xi^2} \quad (\xi \neq 0), \quad \widehat{\Lambda}(0) = 1. \tag{2.5}$$

В самом деле, учитывая четность Λ, интегрированием по частям получаем

$$\widehat{\Lambda}(\xi) = 2\int\limits_0^\infty \Lambda(x)\cos 2\pi\xi x\,dx = 2\int\limits_0^1 (1-x)\cos 2\pi\xi x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi\xi}\int\limits_0^1 \sin 2\pi\xi x\,dx = \frac{1-\cos 2\pi\xi}{2\pi^2\xi^2} = \frac{\sin^2\pi\xi}{\pi^2\xi^2}$$

для любого $\xi \neq 0$. При $\xi = 0$ имеем

$$\widehat{\Lambda}(0) = 2\int\limits_0^\infty \Lambda(x)\,dx = 1.$$

Функция (2.5) называется *ядром Фейера.* Как и ядро Дирихле, ядро Фейера непрерывно на всей действительной оси $\mathbb{R}$. $\square$

Пример 2.4. Пусть $f(x) = \mathrm{e}^{-2\pi|x|}$. Тогда

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi\,(1+\xi^2)}. \tag{2.6}$$

Действительно, функция f – четная, и поэтому

$$\widehat{f}(\xi) = 2\int\limits_0^\infty f(x)\cos 2\pi\xi x\,dx = 2\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2\pi x}\cos 2\pi\xi x\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\cos\xi t\,dt.$$

Интегрируя дважды по частям, получаем (2.6). $\square$

2.1.2. Непрерывность и стремление к нулю преобразования Фурье

Рассмотренные выше примеры преобразований Фурье являются непрерывными функциями. Покажем, что это – характерное свойство любого преобразования Фурье.

Теорема 2.5. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Тогда преобразование Фурье $\widehat{f}$ непрерывно на $\mathbb{R}$ и

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R}). \tag{2.7}$$

Доказательство. Имеем

$$\left|f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\right| = |f(x)|. \tag{2.8}$$

Поскольку f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то, в силу теоремы Вейерштрасса, интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,dx, \quad \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,dx$$

сходятся равномерно относительно $\xi \in \mathbb{R}$. Далее, $\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$ является непрерывной на $\mathbb{R}^2$ функцией от переменных x и ξ. Поэтому, в силу теоремы 17, функция

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,dx$$

непрерывна на $\mathbb{R}$. Кроме того, в силу (2.8),

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx,$$

а это и означает, что для любого ξ имеет место (2.7). $\square$

Функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ может быть неограниченной на $\mathbb{R}$ и иметь точки разрыва. Однако, как мы показали, ее преобразование Фурье непрерывно и ограничено на $\mathbb{R}$. Более того, $\widehat{f}(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$. Это вытекает из следующего важного утверждения, которое называется *леммой Римана – Лебега*.

Теорема 2.6. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x\, dx = 0, \tag{2.9}$$

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x\, dx = 0. \tag{2.10}$$

Доказательство. Докажем (2.9); доказательство (2.10) аналогично. Сначала предположим, что f – финитная ступенчатая функция, т. е., f обращается в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$, и этот отрезок можно разбить точками

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

так, что $f(x) = c_j$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Тогда для любого $\xi \ne 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x\, dx = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos \xi x\, dx = \frac{1}{\xi} \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\sin \xi x_{j+1} - \sin \xi x_j\right).$$

Поэтому

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x\, dx \right| \le \frac{C}{|\xi|},$$

где $C = 2\sum\limits_{j=0}^{n-1}|c_j|$. Отсюда следует (2.9) для финитной ступенчатой функции f.

Пусть теперь f – произвольная абсолютно интегрируемая функция на $\mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $A > 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx + \int\limits_{A}^{\infty}|f(x)|\,dx < \varepsilon. \qquad (2.11)$$

Далее, в силу теоремы 12, существует такая ступенчатая функция h, равная нулю при $|x| > A$, что

$$\int\limits_{-A}^{A}|f(x) - h(x)|\,dx < \varepsilon. \qquad (2.12)$$

Имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x\,dx\right| \le \int\limits_{|x|\ge A}|f(x)|\,dx + \int\limits_{-A}^{A}|f(x)-h(x)|\,dx + \left|\int\limits_{-A}^{A} h(x)\cos\xi x\,dx\right|$$

$$< 2\varepsilon + \left|\int\limits_{-A}^{A} h(x)\cos\xi x\,dx\right|.$$

Как показано выше, последний интеграл стремится к нулю при $|\xi| \to \infty$. Поэтому найдется такое число $E > 0$, что

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x\,dx\right| < 3\varepsilon \quad (|\xi| \ge E).$$

Этим доказано (2.9) в общем случае. $\square$

Из леммы Римана – Лебега (теорема 2.6) мгновенно вытекает

Теорема 2.7. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\widehat{f}(\xi) \to 0 \quad (|\xi| \to \infty).$$

Замечание 2.8. Эта теорема представляет собой аналог леммы Римана – Лебега (лемма 1.27) для коэффициентов Фурье, которая была получена из неравенства Бесселя (1.22).

2.1.3. Преобразование Фурье гауссиана

Функция $g(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ называется *гауссианом.* Эта функция играет важную роль во многих разделах метематики. Будем использовать известное из курса классического анализа равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\, dx = 1. \tag{2.13}$$

Теорема 2.9. Пусть $g(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$. Тогда $\widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$.

Доказательство. Так как g четная, то, в силу теоремы 2.1,

$$\widehat{g}(\xi) = 2\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2} \cos 2\pi\xi x\, dx.$$

Положим

$$f(x,\xi) = \mathrm{e}^{-\pi x^2} \cos 2\pi\xi x \quad (x \ge 0,\ \xi \in \mathbb{R}).$$

Тогда функции $f(x,\xi)$ и $f'_\xi(x,\xi) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}(-2\pi x)\sin 2\pi\xi x$ непрерывны. Кроме того,

$$|f(x,\xi)| \le \mathrm{e}^{-\pi x^2}, \quad \left|f'_\xi(x,\xi)\right| \le 2\pi x \mathrm{e}^{-\pi x^2} \quad (x \ge 0,\ \xi \in \mathbb{R}).$$

Поэтому, в силу теоремы Вейерштрасса, интегралы

$$\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2} \cos 2\pi\xi x\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2} x \sin 2\pi\xi x\, dx$$

сходятся равномерно относительно $\xi \in \mathbb{R}$. Значит, можем дифференцировать под знаком интеграла. Получаем

$$\left(\widehat{g}\right)'(\xi) = -4\pi \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2} x \sin 2\pi\xi x\, dx.$$

Интегрируем последний интеграл по частям. В результате имеем

$$\left(\widehat{g}\right)'(\xi) = 2\mathrm{e}^{-\pi x^2} \sin 2\pi\xi x\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - 4\pi\xi \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2} \cos 2\pi\xi x\, dx = -2\pi\xi\widehat{g}(\xi).$$

Итак, функция $y = \widehat{g}(\xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{d\xi} = -2\pi\xi y.$$

Его решением является

$$y(\xi) = C\mathrm{e}^{-\pi\xi^2}.$$

Полагая $\xi = 0$ и учитывая (2.13), находим

$$C = y(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\, dx = 1.$$

Окончательно, $\widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$. $\square$

2.1.4. Основные свойства преобразования Фурье

В этом разделе собраны основные формулы, связанные с преобразованием Фурье.

Пусть функция φ определена на $\mathbb{R}$. Для фиксированного $h \in \mathbb{R}$ обозначим $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x - h)$. Операция τ_h называется *сдвигом.* Далее, для фиксированного $\lambda > 0$, положим $\delta_\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x)$. Операция δ_λ называется *растяжением.*

Теорема 2.10. Пусть комплекснозначные функции f, g абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие свойства.

(i) Линейность.

$$\widehat{(f+g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$$

и для любого комплексного числа α

$$\widehat{(\alpha f)}(\xi) = \alpha\widehat{f}(\xi).$$

(ii) Сдвиг. Для любого $h \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i h\xi}\widehat{f}(\xi).$$

(iii) Растяжение. Для любого $\lambda > 0$

$$\widehat{\delta_\lambda f}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

(iv) Сдвиг преобразования Фурье. Пусть $f_\eta(x) = f(x)\mathrm{e}^{i2\pi\eta x}$, где $\eta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{f_\eta}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta) = \tau_\eta \widehat{f}(\xi).$$

Кроме того, для $g_\eta(x) = f(x)\cos 2\pi\eta x$ и $h_\eta(x) = f(x)\sin 2\pi\eta x$ имеем

$$\widehat{g_\eta}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\widehat{f}(\xi - \eta) + \widehat{f}(\xi + \eta)\right], \quad \widehat{h_\eta}(\xi) = \frac{i}{2}\left[\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi - \eta)\right].$$

Доказательство. (i) В силу линейности интеграла,

$$\widehat{(f+g)}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x) + g(x)]\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}\,dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}\,dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-i2\pi u\xi x}\,dx = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi),$$

$$\widehat{\alpha f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}\,dx = \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}\,dx = \alpha\widehat{f}(\xi).$$

(ii) Полагая $x - h = y$, получаем

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-h)\mathrm{e}^{-i2\pi x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi(y+h)}\,dy$$

$$= \mathrm{e}^{-i2\pi\xi h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi y}\,dy = \mathrm{e}^{-i2\pi\xi h}\widehat{f}(\xi).$$

(iii) Аналогично, замена переменной $\lambda x = y$ приводит к равенству

$$\widehat{\delta_\lambda f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}dx = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-i2\pi\xi y/\lambda}\,dy = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

(iv) Прежде всего, имеем

$$\widehat{f_\eta}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi(\xi-\eta)x}dx = \widehat{f}(\xi - \eta).$$

Далее,

$$\cos(2\pi\eta x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i2\pi\eta x} + \mathrm{e}^{-i2\pi\eta x}\right), \quad \sin(2\pi\eta x) = \frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{-i2\pi\eta x} - \mathrm{e}^{i2\pi\eta x}\right).$$

Таким образом, равенства для $\widehat{g_\eta}$ и $\widehat{h_\eta}$ вытекают из свойства линейности.

□

В силу теоремы 2.5, для любой функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ непрерывно на $\mathbb{R}$. Покажем теперь, что если f убывает на бесконечности достаточно быстро, то функция $\widehat{f}$ дифференцируема и $\left(\widehat{f}\right)'$ получается дифференцированием по параметру ξ под знаком интеграла в (2.1).

Теорема 2.11. Предположим, что функции f и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразование Фурье $\widehat{f}$ непрерывно дифференцируемо на $\mathbb{R}$. Более того,

$$\left(\widehat{f}\right)'(\xi) = -2\pi i \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\, dx. \tag{2.14}$$

Доказательство. Имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\, dx. \tag{2.15}$$

Пусть $F(x,\xi) = \mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}$. Тогда частная производная

$$F'_\xi(x,\xi) = -2\pi i x \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}$$

является непрерывной функцией переменных $x, \xi \in \mathbb{R}$. Далее,

$$\left| x f(x) \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\right| \le |x f(x)|.$$

Отсюда следует, что интеграл в правой части (2.14) сходится равномерно относительно $\xi \in \mathbb{R}$. Поэтому, применяя теорему 18 к интегралу (2.15), получаем, что этот интеграл является непрерывно дифференцируемой функцией переменной ξ, и его производная может быть получена дифференцированием под знаком интеграла. Этим завершается доказательство.

□

Применяя индукцию и теорему 2.11, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.12. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что функции f и $g(x) = x^m f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразование Фурье $\widehat{f}$ имеет непрерывную производную $\left(\widehat{f}\right)^{(m)}$ на $\mathbb{R}$ и

$$\left(\widehat{f}\right)^{(m)}(\xi) = (-2\pi i)^m \widehat{g}(\xi). \tag{2.16}$$

Следующая теорема содержит преобразование Фурье производной.

Теорема 2.13. Пусть f – непрерывная, абсолютно интегрируемая, кусочно гладкая функция на $\mathbb{R}$. Предположим, что f' также абсолютно интегрируема. Тогда

$$\widehat{(f')}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi). \tag{2.17}$$

Доказательство. В силу основной теоремы интегрального исчисления (см. теорему 10), имеем

$$f(x) - f(0) = \int\limits_0^x f'(t)\, dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Поскольку интегралы $\int\limits_0^\infty f'(t)\, dt$ и $\int\limits_{-\infty}^0 f'(t)\, dt$ сходятся, то существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Так как f абсолютно интегрируема, то оба эти предела равны нулю. Интегрируя по частям, имеем

$$\widehat{f'}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x) \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\, dx = \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} - \lim_{x\to-\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}$$

$$+2\pi i\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\, dx = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi). \quad \square$$

Применяя индукцию, приходим к такому следствию.

Следствие 2.14. Пусть $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Предположим также, что $f^{(n-1)}$ – кусочно гладкая, и $f^{(n)}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{\left(f^{(n)}\right)}(\xi) = (2\pi i)^n \xi^n \widehat{f}(\xi).$$

2.2. Обращение методом Гаусса – Вейерштрасса

Рассмотрим *формулу обращения*, которая решает задачу восстановления функции f по ее преобразованию Фурье $\widehat{f}$. Эта формула имеет вид

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi.$$

Она представляет собой аналог ряда Фурье. Однако, интеграл может и не существовать ($\widehat{f}$ может не быть абсолютно интегрируемой). Для решения поставленной задачи умножим $\widehat{f}(\xi)$ на $\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}$ $(\alpha > 0)$. Так как $\widehat{f}$ ограничена на $\mathbb{R}$, то это произведение является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией.

Лемма 2.15. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\alpha > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2} \mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t) W(t,\alpha)\, dt, \tag{2.18}$$

где

$$W(t,\alpha) = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-\pi t^2/\alpha^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2} \mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{-i2\pi y\xi}\, dy \right] \mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2} \mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{-i2\pi\xi(y-x)}\, dy \right] \mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}\, d\xi.$$

Заметим, что при любом $\alpha > 0$ функция $\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, и при любом фиксированном x интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{-i2\pi\xi(y-x)}\, dy$

сходится равномерно относительно ξ на $\mathbb{R}$. Поэтому, в силу теоремы 19 (ii), можем менять порядок интегрирования в правой части последнего равенства. Воспользуемся также тем, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}\mathrm{e}^{-i2\pi\xi(y-x)}\,d\xi \tag{2.19}$$

(относительно переменной ξ) равен $\widehat{g_\alpha}(y-x)$, где $g_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\pi\alpha^2 t^2}$. Имеем $g_\alpha(t) = g(\alpha t)$, где g – гауссиан. В силу теорем 2.9 и 2.10 (iii), интеграл (2.19) равен

$$\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\pi(y-x)^2/\alpha^2} = W(y-x,\alpha).$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)W(y-x,\alpha)\,dy.$$

Окончательно, меняя y на $x-t$, получаем (2.18). $\square$

Функция $W(t,\alpha)$ называется *ядром Гаусса – Вейерштрасса.*

Для устранения множителя $\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}$ в (2.18) устремим $\alpha \to 0$. Применим для этого следующую лемму.

Лемма 2.16. Семейство функций

$$W(t,\alpha) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t^2/\alpha^2} \quad (\alpha > 0)$$

удовлетворяет следующим условиям:

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} W(t,\alpha)\,dt = 1 \quad (\alpha > 0);$$

(ii) $$W(t,\alpha) > 0;$$

(iii) $$\mu_\delta(\alpha) = \sup_{|t|\ge\delta} W(t,\alpha) \to 0 \quad (\alpha \to 0+) \quad \text{при любом } \delta > 0;$$

(iv) $$\int_{|t|\ge\delta} W(t,\alpha)\,dt \to 0 \quad (\alpha \to 0+) \quad \text{при любом } \delta > 0.$$

Доказательство. Равенство (i) вытекает непосредственно из (2.13), а неравенство (ii) очевидно. Пусть $\delta > 0$. Прежде всего, имеем

$$W(t,\alpha) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\pi t^2/\alpha^2} \le \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\pi\delta^2/\alpha^2} \quad (|t| \ge \delta).$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\pi\delta^2/\alpha^2} = 0.$$

Отсюда следует (iii). Далее, выполняя замену переменной $t = \alpha z$, имеем

$$\frac{1}{\alpha}\int_{\delta}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi t^2/\alpha^2} = \int_{\delta/\alpha}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi z^2}dz, \quad \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{-\delta}\mathrm{e}^{-\pi t^2/\alpha^2} = \int_{-\infty}^{-\delta/\alpha}\mathrm{e}^{-\pi z^2}dz.$$

В силу (i), из этих равенств следует (iv). □

Докажем теперь теорему, которая позволяет восстановить непрерывную функцию f по ее преобразованию Фурье (*суммирование методом Гаусса – Вейерштрасса*).

Теорема 2.17. Пусть f – непрерывная, абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\,d\xi = f(x) \tag{2.20}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. Используя (2.18), перепишем равенство (2.20) в следующем эквивалентном виде

$$\lim_{\alpha\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)W(t,\alpha)\,dt = f(x). \tag{2.21}$$

Обозначим

$$\gamma(\alpha,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)W(t,\alpha)\,dt - f(x).$$

В силу леммы 2.16 (i),

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)W(t,\alpha)\,dt.$$

Отсюда

$$\gamma(\alpha, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x-t) - f(x)] W(t, \alpha)\, dt.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f, существует такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \quad (|t| \leq \delta).$$

Потому, учитывая утверждения (ii) и (i) леммы 2.16, получаем

$$|\gamma(\alpha, x)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)| W(t, \alpha)\, dt$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{|t| \leq \delta} W(t, \alpha)\, dt + \int\limits_{|t| \geq \delta} |f(x-t) - f(x)| W(t, \alpha)\, dt$$

$$\leq \varepsilon + \int\limits_{|t| \geq \delta} |f(x-t)| W(t, \alpha)\, dt + |f(x)| \int\limits_{|t| \geq \delta} W(t, \alpha)\, dt.$$

В силу леммы 2.16 (iv), существует такое $\eta > 0$ (зависящее от ε и x), что

$$|f(x)| \int\limits_{|t| \geq \delta} W(t, \alpha)\, dt < \varepsilon \quad (0 < \alpha < \eta).$$

Далее, имеем

$$\int\limits_{|t| \geq \delta} |f(x-t)| W(t, \alpha)\, dt \leq \sup_{|t| \geq \delta} W(t, \alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du. \tag{2.22}$$

В силу леммы 2.16 (iii), существует такое $0 < \eta' \leq \eta$, что для всех $0 < \alpha < \eta'$ правая часть неравенства (2.22) меньше, чем ε. Таким образом, $|\gamma(\alpha, x)| < 3\varepsilon$ при любом $0 < \alpha < \eta'$. Отсюда следует (2.21). $\square$

Замечание 2.18. Утверждение теоремы 2.17 останется справедливым, если f лишь кусочно непрерывна и

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Главным результатом этого раздела является следующая *теорема об обращении преобразования Фурье.*

Теорема 2.19. Предположим, что f непрерывна и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Если $\widehat{f}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.23}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и положим

$$\Phi_x(\xi, \alpha) = \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}.$$

Тогда $\Phi_x(\xi, \alpha)$ – непрерывная функция переменных $(\xi, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Кроме того,

$$|\Phi_x(\xi, \alpha)| \leq \left|\widehat{f}(\xi)\right|.$$

Так как $\widehat{f}$ абсолютно интегрируема, то интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\xi, \alpha)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}\, d\xi$$

сходится равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$ и, в силу теоремы 17, этот интеграл является непрерывной функцией переменной $\alpha \in \mathbb{R}$. Из непрерывности в точке $\alpha = 0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\xi, \alpha)\, d\xi \;\to\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\xi, 0)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi \quad (\alpha \to 0+).$$

С другой стороны, в силу теоремы 2.17,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\xi, \alpha)\, d\xi \to f(x) \quad (\alpha \to 0+).$$

Таким образом, имеем (2.23). $\square$

Замечание 2.20. Интеграл в левой части (2.23) равен $\widehat{\varphi}(x)$, где $\varphi(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$. Поэтому, в силу теоремы 2.5, этот интеграл представляет собой непрерывную функцию переменной x. Это означает, что равенство (2.23) перестает быть верным без предположения непрерывности f. Более того, можно показать, что если f имеет скачок в некоторой точке, то ее преобразование Фурье не может быть абсолютно интегрируемым на $\mathbb{R}$.

Справедлива следующая теорема о *единственности преобразования Фурье.*

Теорема 2.21. Пусть функции f и g непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Если $\widehat{f} = \widehat{g}$, то $f = g$.

Это утверждение сразу следует из теоремы 2.17 (или теоремы 2.19), примененной к функции $f - g$.

Теорему 2.19 можно использовать для вычисления некоторых интегралов.

Пример 2.22. Пусть $f(x) = \mathrm{e}^{-2\pi|x|}$. Как было установлено в примере 2.4,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi\,(1+\xi^2)}.$$

Функции f и $\widehat{f}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, и f непрерывна на $\mathbb{R}$. Поэтому выполнены условия теоремы 2.19. Применяя эту теорему, для любого $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}}{\pi\,(1+\xi^2)}\,d\xi = \mathrm{e}^{-2\pi|x|},$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x\xi}{\pi\,(1+\xi^2)}\,d\xi = \mathrm{e}^{-2\pi x}$$

для любого $x \geq 0$ *(интеграл Лапласа).* □

Пример 2.23. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/\alpha, & |x| \leq \alpha, \\ 0, & |x| > \alpha \end{cases} \qquad (\alpha > 0).$$

Из примера 2.3 и теоремы 2.10 (iii) вытекает, что

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\alpha}\frac{\sin^2 \alpha\pi\xi}{(\pi\xi)^2}.$$

Так как выполнены условия теоремы 2.19, то имеем

$$\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha\pi\xi}{(\pi\xi)^2}\mathrm{e}^{i2\pi\xi x}\,d\xi = f(x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и любого $\alpha > 0$. В частном случае $x = 0$, $\alpha = 1$, полагая $\pi\xi = t$, получаем

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Как мы видели выше, преобразование Фурье гауссиана $g(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ совпадает с ним, т. е., $\widehat{g} = g$. Применяя теорему 2.19, рассмотрим следующий

Пример 2.24. Пусть функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ непрерывна на $\mathbb{R}$, отлична от тождественного нуля и такова, что $\widehat{f}(\xi) = \lambda f(\xi)$ при некоторой постоянной λ. Доказать, что λ равно $1, -1, i$ или $-i$.

Для доказательства обозначим $f_1 = \widehat{f}$. Имеем $f_1 = \lambda f$. Поэтому $f_1 \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и, следовательно, преобразование Фурье $\widehat{f_1}$ существует. Обозначим $f_2 = \widehat{f_1}$. Тогда $f_2 = \lambda^2 f$. С другой стороны, в силу теоремы 2.19,

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\,d\xi = \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\,d\xi = \lambda\widehat{f}(-x).$$

Итак, $f_1(x) = f(-x)/\lambda$. Отсюда имеем

$$f_2(\xi) = \widehat{f_1}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{\lambda}f_1(-\xi) = \frac{1}{\lambda^2}f(\xi).$$

Учитывая, что $f_2 = \lambda^2 f$, получаем $f = \lambda^4 f$. Так как $f \not\equiv 0$, то отсюда следует, что $\lambda^4 = 1$. $\square$

2.3. Обращение методом Дирихле

Теорема 2.19 показывает, что непрерывная функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ может быть представлена равенством (2.23) в предположении, что ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ также абсолютно интегрируемо на $\mathbb{R}$. Однако, последнее условие может оказаться невыполненным, т. е., интеграл в левой части (2.23) может не существовать. Следующая *теорема Дирихле* показывает, что для функций, обладающих некоторыми хорошими разностными свойствами, этот интеграл *сходится в смысле главного значения*, т. е., существует предел

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i2\pi \xi x}\, d\xi.$$

Теорема 2.25. Пусть функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Если f дифференцируема в точке x, то

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\, d\xi = f(x). \tag{2.24}$$

Доказательство. Для произвольного $A > 0$

$$I_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i2\pi\xi x}\, d\xi = \int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{-i2\pi\xi y}\, dy \right) \mathrm{e}^{i2\pi\xi x}\, d\xi$$

$$= \int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathrm{e}^{i2\pi\xi(x-y)}\, dy \right) d\xi.$$

Заметим, что выполнены условия теоремы 19 (i) о перемене порядка интегрирования. В самом деле, внутренний интеграл сходится равномерно относительно ξ. Поэтому

$$I_A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{i2\pi\xi(x-y)}\, d\xi \right) dy. \tag{2.25}$$

Применяя формулу Эйлера

$$\sin u = \frac{\mathrm{e}^{iu} - \mathrm{e}^{-iu}}{2i},$$

получаем, что внутренний интеграл в (2.25) равен

$$\frac{1}{i2\pi(x-y)} \mathrm{e}^{i2\pi\xi(x-y)} \Bigg|_{\xi=-A}^{\xi=A} = \frac{\mathrm{e}^{i2\pi A(x-y)} - \mathrm{e}^{-i2\pi A(x-y)}}{i2\pi(x-y)} = \frac{\sin 2\pi A(x-y)}{\pi(x-y)}.$$

Поэтому

$$I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin 2\pi A(x-y)}{x-y}\, dy.$$

Заменой переменной $y - x = t$ получаем

$$I_A(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin 2\pi At}{t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin 2\pi At}{t}\, dt.$$

Заметим, что для любого $a > 0$

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin at}{t}\, dt = 1$$

(интеграл Дирихле). Следовательно,

$$I_A(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi_x(t) \frac{\sin 2\pi At}{t}\, dt, \tag{2.26}$$

где

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Покажем, что интеграл в правой части (2.26) стремится к 0 при $A \to \infty$. Пусть $K \geq 1$. Представим этот интеграл в виде суммы двух: по отрезку $[0, K]$ и по $[K, +\infty)$. Имеем

$$\left| \int\limits_{K}^{\infty} \varphi_x(t) \frac{\sin 2\pi At}{t}\, dt \right| \leq \frac{1}{K} \int\limits_{K}^{\infty} |f(x+t) + f(x-t)|\, dt + \left| 2f(x) \int\limits_{K}^{\infty} \frac{\sin 2\pi At}{t}\, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{K} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du + 2|f(x)| \left| \int\limits_{2\pi AK}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du \right|.$$

Предположим, что $A \geq 1$. Слагаемые в правой части стремятся к 0 при $K \to +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$; тогда существует такое K, что

$$\left| \int\limits_{K}^{\infty} \varphi_x(t) \frac{\sin 2\pi At}{t}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.27}$$

Зафиксируем такое K. Так как f дифференцируема в точке x, то

$$\frac{\varphi_x(t)}{t} \to 0 \quad (t \to 0+).$$

Таким образом, функция $\frac{\varphi_x(t)}{t}$ интегрируема в смысле Римана на $[0, K]$. В силу леммы Римана – Лебега (теорема 2.6),

$$\int\limits_0^K \frac{\varphi_x(t)}{t} \sin 2\pi At\, dt \to 0 \quad (A \to +\infty).$$

Поэтому существует такое $A_\varepsilon > 1$, что

$$\left| \int\limits_0^K \frac{\varphi_x(t)}{t} \sin 2\pi At\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (A \geq A_\varepsilon).$$

Вместе с (2.27), это показывает, что интеграл в (2.26) стремится к 0 при $A \to +\infty$ и поэтому

$$I_A(x) \to f(x) \quad (A \to +\infty). \quad \square$$

Аналогично, имеем

Теорема 2.26. Пусть f – абсолютно интегрируемая и кусочно гладкая функция на $\mathbb{R}$. Тогда в каждой точке $x \in \mathbb{R}$

$$\text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i2\pi\xi x}\, d\xi = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Пример 2.27. Пусть $a > 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{e}^{-i2\pi\xi x}\, dx = \frac{1}{a + i2\pi\xi}.$$

Применяя теорему 2.26, получаем

$$\text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}}{a+2\pi i\xi}\,d\xi = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax}, & x>0, \\ 1/2, & x=0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Обозначим $f_-(x) = f(-x)$. Тогда $\widehat{f_-}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$.

Пусть $\varphi = f + f_-$, $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ (четное продолжение f). Тогда

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 2\pi^2\xi^2}.$$

В силу теоремы 2.19,

$$2a \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i2\pi x\xi}}{a^2+4\pi^2\xi^2}\,d\xi = \mathrm{e}^{-a|x|} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

или

$$\frac{a}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{iux}}{a^2+u^2}\,du = \mathrm{e}^{-a|x|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Иначе говоря,

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a|x|}$$

(*интеграл Лапласа*). $\square$

2.4. Свертки

В этом разделе мы рассмотрим новую операцию, которая играет важную роль в математике и особенно в интегральных преобразованиях.

Пусть функции f и g определены на $\mathbb{R}$. Тогда их *сверткой* называется функция $f * g$, определенная равенством

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy, \tag{2.28}$$

в предположении, что интеграл существует.

Прежде всего, справедливо следующее свойство *симметричности.*

Предложение 2.28. Пусть функции f и g определены на $\mathbb{R}$. Тогда $f*g = g*f$ в предположении, что существует хотя бы одна из двух частей этого равенства.

Доказательство. Предположим, что существует интеграл (2.28). Полагая $x - y = u$, получаем, что $y = x - u$ и

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du.$$

По определению, последний интеграл является сверткой $g * f$. $\square$

Можно накладывать различные условия на f и g, гарантирующие абсолютную сходимость интеграла (2.28) при всех $x \in \mathbb{R}$. Будем применять следующее предложение.

Предложение 2.29. Предположим, что f и g определены на $\mathbb{R}$ и интегрируемы на любом ограниченном отрезке. Тогда любое из следующих условий гарантирует, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \tag{2.29}$$

сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$:

(i) функции f^2 и g^2 интегрируемы на $\mathbb{R}$;

(ii) одна из функций f, g принадлежит классу $\mathcal{A}(\mathbb{R})$, а другая ограничена на $\mathbb{R}$;

(iii) одна из функций f, g обращается в нуль вне некоторого ограниченного отрезка $[a, b]$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что для любого $x \in \mathbb{R}$ и для любого отрезка $[\alpha, \beta]$ произведение $f(x-y)g(y)$ является интегрируемой на $[\alpha, \beta]$ функцией переменной y.

(i) Применяя неравенство Шварца (теорема 23), имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x-y)g(y)|\,dy \le \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(x-y)\,dy\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} g^2(y)\,dy\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x-y)\,dy\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\alpha}^{\infty} g^2(y)\,dy\right)^{1/2}.$$

Полагая $u = x - y$ в первом интеграле в правой части, получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\alpha}^{\infty} g^2(y)\,dy\right)^{1/2}.$$

Подынтегральная функция в левой части неотрицательна. Следовательно, для любого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ и любого $x \in \mathbb{R}$ интеграл

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \tag{2.30}$$

сходится. Более того,

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\alpha}^{\infty} g^2(y)\,dy\right)^{1/2}$$

для любого α. Правая часть не зависит от x, и второй интеграл справа стремится к нулю при $\alpha \to +\infty$. Отсюда следует, что интеграл (2.30) сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$.

Аналогично получаем, что для любого $\beta_0 \in \mathbb{R}$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\beta_0} |f(x-y)g(y)|\,dy \tag{2.31}$$

сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Учитывая симметрию, можем предполагать, что $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и f ограничена,

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Тогда для любого отрезка $[\alpha, \beta]$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq M \int\limits_{\alpha}^{\beta} |g(y)|\,dy \leq M \int\limits_{\alpha}^{\infty} |g(y)|\,dy.$$

Как и выше, отсюда следует, что при любом $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ интеграл (2.30) сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Аналогично получаем также, что и интеграл (2.31) сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Предположим, что g обращается в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\beta} |f(x-y)g(y)|\, dy = 0$$

при любом $\alpha > b$ и любом $\beta < a$. Отсюда следует равномерная сходимость интеграла (2.29). $\square$

В дальнейшем будем изучать свертки $f * g$, предполагая, что функции f, g удовлетворяют одному из условий (i)-(iii). Такие функции могут иметь точки разрыва, однако их свертка является непрерывной.

Предложение 2.30. Пусть функции f и g определены на $\mathbb{R}$ и интегрируемы на каждом отрезке. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий (i)-(iii) предложения 2.29. Тогда свертка $\varphi = f * g$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Приведем доказательство только для случая (i) (именно этот случай будет использоваться ниже при доказательстве тождества Планшереля). Пусть функции f^2 и g^2 интегрируемы на $\mathbb{R}$. Положим $\varphi(x) = (f * g)(x)$.

Сначала предположим, что f непрерывна и обращается в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$; тогда f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Применяя неравенство Шварца (теорема 23), получаем

$$|\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x_0+h-y) - f(x_0-y)||g(y)|\, dy$$

$$\le \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x_0+h-y) - f(x_0-y)]^2\, dy \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(y)\, dy \right)^{1/2}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то существует такое

$0 < \delta < 1$, что если $|h| < \delta$, то

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x_0 + h - y) - f(x_0 - y)]^2\, dy$$

$$= \int\limits_{a-1}^{b+1} [f(x+h) - f(x)]^2\, dx \le \varepsilon^2(b - a + 2),$$

если только $|h| < \delta$. Полагая $A = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(y)\, dy\right)^{1/2}$, получаем

$$|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)| < \varepsilon A\sqrt{b - a + 2} \quad (|h| < \delta).$$

Отсюда следует, что φ непрерывна в точке x_0.

Пусть теперь f – произвольная функция, такая, что f^2 интегрируема на $\mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу теоремы о приближении (теорема 15), существует такая непрерывная функция f_ε с компактным носителем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f_\varepsilon(x)]^2\, dx < \varepsilon^2.$$

Пусть $\varphi_\varepsilon = f_\varepsilon * g$. Как и выше, применяя неравенство Шварца (теорема 23), находим

$$|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-y)[f(y) - f_\varepsilon(y)]\, dy\right|$$

$$\le A\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(y) - f_\varepsilon(y)]^2\, dz\right)^{1/2} < A\varepsilon$$

при любом $x \in \mathbb{R}$. По доказанному, φ_ε непрерывна на $\mathbb{R}$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что если $|h| < \delta$, то

$$|\varphi_\varepsilon(x_0 + h) - \varphi_\varepsilon(x_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)|<(2A+1)\varepsilon \quad (|h|<\delta).$$

Это означает, что φ непрерывна в точке x_0. $\square$

Основной результат этого раздела составляет следующая *теорема о свертке.*

Теорема 2.31. Пусть функции f и g принадлежат $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ и удовлетворяют одному из условий (i), (ii) или (iii). Тогда $f*g\in\mathcal{A}(\mathbb{R})$ и

$$\widehat{f*g}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \tag{2.32}$$

Доказательство. Пусть

$$I(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|\,dy.$$

В силу предложения 2.30, функция $I=|f|*|g|$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и, следовательно, интегрируема на каждом отрезке. Далее, пусть

$$J(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|\,dx.$$

Тогда

$$J(y)=|g(y)|\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|\,dx=|g(y)|\|f\|_1.$$

Таким образом, $J(y)$ интегрируема на каждом отрезке; более того,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}J(y)\,dy=\|f\|_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dy=\|f\|_1\|g\|_1.$$

Применяя теорему 20 к функции $F(x,y)=|f(x-y)g(y)|$, получаем, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}I(x)\,dx$ также сходится. Так как $|f*g(x)|\le I(x)$, то отсюда следует, что $f*g\in\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь преобразование Фурье свертки

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f*g(x)\mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right)\mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,dx.$$

Как и выше, используя теорему 20, поменяем порядок интегрирования в последнем повторном интеграле. Таким образом, получаем

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,dx\right)dy$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-i2\pi y\xi}\,dy\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{-i2\pi u\xi}\,du = \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi). \quad \square$$

2.5. Тождество Планшереля

В этом разделе будет доказана одна из фундаментальных теорем теории преобразования Фурье – *тождество Планшереля*. Это тождество можно интерпретировать как континуальный аналог равенства Парсеваля.

Будем рассматривать комплекснозначные функции $f = u + iv$, где u и v действительнозначные функции на $\mathbb{R}$. Если $u, v \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, то будем говорить, что $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. В этом случае преобразование Фурье функции f определяем, как обычно, равенством

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,dx.$$

Теорема 2.32. Пусть комплекснозначная функция f принадлежит $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. Предположим, что $|f|^2$ интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда $\left|\widehat{f}\right|^2$ также интегрируема на $\mathbb{R}$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi. \tag{2.33}$$

Доказательство. Обозначим $g(x) = \overline{f(-x)}$. Тогда g и $|g|^2$ интегрируемы на $\mathbb{R}$. Пусть $h = f * g$. В силу теоремы о свертке (теорема 2.31),

$h \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$. Но

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}\mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)}\mathrm{e}^{i2\pi y\xi}\,dy = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Таким образом, $\widehat{h}(\xi) = \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2$.

В силу предложения 2.30, функция h непрерывна на $\mathbb{R}$. Применяя теорему 2.17, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}\mathrm{e}^{i2\pi\xi x}\,d\xi \to h(x) \quad (\alpha \to 0)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Полагая $x = 0$, получаем

$$\Phi(\alpha) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2}\,d\xi \to h(0) \quad (\alpha \to 0). \tag{2.34}$$

Заметим еще, что $\widehat{h}(\xi) = \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \geq 0$. Следовательно, Φ – неотрицательная невозрастающая функция на $(0, \infty)$ и, в силу (2.34), $\Phi(\alpha) \leq h(0)$ для $\alpha > 0$. Далее, если $|\xi| \leq 1/\alpha$ $(\alpha > 0)$, то $\mathrm{e}^{-\pi\alpha^2\xi^2} \geq \mathrm{e}^{-\pi}$. Таким образом,

$$\int\limits_{-1/\alpha}^{1/\alpha} \widehat{h}(\xi)\,d\xi \leq \mathrm{e}^{\pi}h(0)$$

для любого $\alpha > 0$. Отсюда следует, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\,d\xi$$

сходится. Поэтому можем применить теорему 2.19 (формулу обращения преобразования Фурье). По этой теореме,

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i2\pi x\xi}\widehat{h}(\xi)\,d\xi$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. При $x = 0$ это означает, что

$$h(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\, d\xi.$$

Так как $\widehat{h}(\xi) = \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2$, то $\left|\widehat{f}\right|^2$ интегрируема на $\mathbb{R}$ и

$$h(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

С другой стороны,

$$h(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(-t) f(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt.$$

Отсюда следует (2.33). $\square$

Пример 2.33. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = 1$. Далее,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\xi}{(\pi\xi)^2}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2}\, dz = \pi. \quad \square$$

Это равенство уже было получено выше (см. пример 2.23).

Упражнения к разделу 2

2.1. Вычислить преобразования Фурье следующих функций

2.1.a.
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

2.1.b.
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

2.1.c.
$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|};$$

2.1.d.
$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \cos 2\pi x;$$

2.1.e.
$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} + i\Pi(x)$$

(определение функции Π см. в примере 2.2);

2.1.f.
$$f(x) = \Lambda(x) + i\mathrm{e}^{-3|x|} \cos 2\pi x$$

(определение функции Λ см. в примере 2.3).

2.2. *Косинус-преобразование.*

2.2.a. Доказать, что если функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ четная, то

$$\widehat{f}(u) = 2 \int\limits_0^\infty f(x) \cos 2\pi ux \, dx.$$

2.2.b. Для функции $f \in \mathcal{A}(0, \infty)$ ее *косинус-преобразование* $\widehat{f}_C$ определяется равенством $\widehat{f}_C(u) = 2 \int\limits_0^\infty f(x) \cos 2\pi ux \, dx$. Доказать, что косинус-преобразование функции f равно преобразованию Фурье четного продолжения f.

2.3. Вычислить косинус-преобразования следующих функций

2.3.a.
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x};$$

2.3.b.
$$h(x)=\begin{cases}1, & 0<x<2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$$

2.3.c.
$$k(x)=\begin{cases}1-2x, & 0<x<1/2,\\ 0, & x>1/2.\end{cases}$$

2.4. Вычислить преобразования Фурье следующих функций

2.4.a.
$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le a,\\ 0, & |x|>a;\end{cases}$$

2.4.b.
$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$$

2.4.c.
$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$$

2.4.d.
$$f(x)=|x|\mathrm{e}^{-|x|};$$

2.4.e.
$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ -\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

2.5. Вычислить преобразования Фурье следующих функций

2.5.a.
$$f(x)=\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right);$$

2.5.b.
$$f(x)=\Pi\left(\frac{x-\frac{1}{2}a}{a}\right)\quad (a>0);$$

2.5.c.
$$f(x)=\Pi(x)\,\mathrm{sign}\,x;$$

2.5.d.
$$f(x)=\mathrm{e}^{-c|x-b|}\quad (c>0,\ b\in\mathbb{R});$$

2.5.e. $$f(x) = \mathrm{e}^{-(x-b)^2/c} \quad (c > 0,\ b \in \mathbb{R});$$

2.5.f. $$f(x) = \mathrm{e}^{-c|x|} \sin bx \quad (c > 0,\ b \in \mathbb{R}).$$

2.6. Доказать, что $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \sin cx\, dx = \frac{c}{a^2+c^2}$ и $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos cx\, dx = \frac{a}{a^2+c^2}$, где $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

2.7. Используя свойства преобразований Фурье, вычислить преобразования Фурье следующих функций

2.7.a. $$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2}c, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}c; \end{cases}$$

2.7.b. $$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{c}, & |x| < \frac{1}{2}c, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}c; \end{cases}$$

2.7.c. $$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{c}, & |x| < \frac{1}{2}c, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}c; \end{cases}$$

2.7.d. $$f(x) = \frac{1}{c} \Lambda \left(\frac{x}{c} \right) \quad (c > 0);$$

2.7.e. $$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-\pi x^2};$$

2.7.f. $$f(x) = \left(4\pi x^2 - 1 \right) \mathrm{e}^{-\pi x^2}.$$

2.8. Используя равенство $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$.

2.9. Вычислить преобразования Фурье следующих функций

2.9.a. $$f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|} \quad (a > 0);$$

2.9.b.
$$f(x) = \mathrm{e}^{-4x^2-4x-1};$$

2.9.c.
$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

2.10. Пусть $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ Вычислить преобразования Фурье следующих функций

2.10.a.
$$f(x) = H(x)\mathrm{e}^{-ax} \quad (a > 0);$$

2.10.b.
$$f(x) = H(x)\mathrm{e}^{-ax}\cos bx \quad (a > 0,\ b \neq 0);$$

2.10.c.
$$f(x) = H(x)\mathrm{e}^{-ax}\sin bx \quad (a > 0,\ b \neq 0).$$

2.11. Пусть функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Вычислить преобразование Фурье следующих функций

2.11.a.
$$f(-x);$$

2.11.b.
$$f\left(x - x_0\right) \quad (x_0 \in \mathbb{R});$$

2.11.c.
$$f(x)\mathrm{e}^{i\xi_0 x} \quad (\xi_0 \in \mathbb{R});$$

2.11.d.
$$f(x)\sin\xi_0 x;$$

2.11.e.
$$f(3x)\mathrm{e}^{ix};$$

2.11.f.
$$f(2x).$$

2.12. Предполагая, что функция f непрерывно дифференцируема, f' кусочно гладкая, f, f', f'' и $xf'(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, применить преобразование Фурье для решения уравнения

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 0.$$

2.13. Если $\widehat{f}(u)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, то будем обозначать это следующим образом $f(x) \supset \widehat{f}(u)$. Доказать, что если f и $\widehat{f}$ непрерывны и абсолютно интегрируемы, то $\widehat{f}(x) \supset f(-u)$. Используя этот результат, проверить, что

2.13.a.
$$\frac{1}{1+x^2} \supset \pi \mathrm{e}^{-2\pi|u|};$$

2.13.b.
$$\frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \supset \Lambda(u).$$

2.14. Используя 2.13.b, доказать равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi$.

2.15. Доказать, что если вторая производная $f'' \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и кусочно непрерывна, то $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Указание: применить следствие 2.14.

2.16. Предположим, что функции $f,\ g \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и кусочно непрерывны. Доказать, что если $\widehat{f} = \widehat{g}$, то $f = g$, за исключением, быть может, конечного числа точек на любом ограниченном интервале.

2.17. Привести пример непрерывной, ограниченной функции, которая не является абсолютно интегрируемой. Обратно, привести пример непрерывной, абсолютно интегрируемой функции, которая не является ограниченной.

2.18. Пусть кусочно непрерывная функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ имеет точки неустранимого разрыва и такова, что $0 < \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. Доказать, что $\widehat{f}$ не может быть абсолютно интегрируемой.

2.19.a. Доказать, что $i\pi \mathrm{e}^{-2\pi|x|} \operatorname{sign} x \supset \frac{u}{1+u^2}$.

2.19.b. Показать, что $\widehat{f}(u) = \frac{u}{1+u^2}$ не является абсолютно интегрируемой.

2.20.a. Используя пример 2.2 и основные свойства преобразования Фурье, доказать, что $\frac{i}{2}\Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{2}\Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) \supset \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u}$.

2.20.b. Показать, что $\widehat{f}(u) = \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u}$ не является абсолютно интегрируемой.

2.21. Функцию f назовем *двусторонне липшицевой в точке* x, если

$$|f(x+s) - f(x+)| \le A\, s^{\alpha} \quad (\delta_1 > s > 0),$$

$$|f(x+s)-f(x-)| \le B\, s^{\beta} \quad (-\delta_2 < s < 0),$$

где A, B, α, β, δ_1, δ_2 – некоторые положительные постоянные. Доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и кусочно непрерывна. Если f двусторонне липшицева в точке x, то*

$$\text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u) \mathrm{e}^{2\pi i u x}\, du = \frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)].$$

2.22. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и непрерывна. Известно, что

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 1-\xi^2, & |\xi| \le 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Найти f.

2.23. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и непрерывна. Известно, что

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 1-|\xi|, & |\xi| \le 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Найти f.

2.24. Используя формулу обращения преобразования Фурье, доказать следующие равенства

2.24.a. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{a^2+\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2a} \mathrm{e}^{-a|x|} \quad (x \in \mathbb{R},\ a > 0);$$

2.24.b. $$\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} \cos \xi x\, d\xi = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0);$$

2.24.c. $$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \cos(2\xi x)\ d\xi = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

2.24.d. Из упражения 2.24.c получить равенство

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

2.25. Найти такую непрерывную и абсолютно интегрируемую на $[0,\infty)$ функцию f, что

$$\int_0^\infty f(x)\cos\xi x\,dx = \frac{1}{1+\xi^2} \quad (\xi\in\mathbb{R}).$$

Является ли f определенной однозначно?

2.26. Найти такую непрерывную и абсолютно интегрируемую на $[0,\infty)$ функцию f, что

$$\int_0^\infty f(x)\cos\xi x\,dx = \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} \quad (\xi\in\mathbb{R}).$$

Является ли f определенной однозначно?

2.27. Используя преобразование Фурье функции Π из примера 2.2 и тождество Планшереля (2.33), доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

2.28. Пусть $\widehat{g}(\xi) = \frac{\xi\cos\xi - \sin\xi}{\xi^2}$.

2.28.a. Применяя правило дифференцирования преобразования Фурье, найти g.

2.28.b. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \left[\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right]^2 dx.$$

2.29. Доказать тождество

$$\frac{x\sin\pi x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\pi(1-x)}{1-x} + \frac{\sin\pi(1+x)}{1+x}\right] \quad (x\neq\pm1).$$

Применяя это тождество, вычислить

2.29.a. $$\int_0^\infty \frac{x\sin\pi x}{1-x^2}\,dx;$$

2.29.b.
$$\int_0^\infty \left(\frac{x\sin\pi x}{1-x^2}\right)^2\,dx.$$

2.30. Пусть $W(t,\alpha)$ – ядро Гаусса – Вейерштрасса (его свойства см. в лемме 2.16). Обозначим правую часть равенства (2.18) (см. лемму 2.15) через

$$_\alpha W * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)W(t,\alpha)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)W(x-s,\alpha)\,ds.$$

Пусть функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ ограничена и кусочно непрерывна. Доказать, что $_\alpha W * f(x)$ равномерно по x на $\mathbb{R}$ стремится к нулю при $\alpha \to \infty$.

2.31. Предполагая функцию $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |_\alpha W * f(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

2.32. Пусть функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ непрерывна и $m \le f(x) \le M$ $(x \in \mathbb{R})$. Доказать, что $m \le {_\alpha W} * f(x) \le M$ $(x \in \mathbb{R})$.

2.33. Пользуясь определением свертки, доказать, что $\Pi*\Pi(x) = \Lambda(x)$.

2.34. Вычислить свертку $\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right] * \left[\frac{1}{b^2+x^2}\right]$.

2.35. Пусть функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ и пусть

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\frac{1-\cos u}{u^2}\,du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Выразить $\widehat{g}$ в терминах $\widehat{f}$.

2.36. Используя преобразование Фурье, решить уравнения

2.36.a.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = \mathrm{e}^{-4\pi x^2};$$

2.36.b.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Полиномы Лежандра

3.1. Определение и рекуррентная формула

Классические *полиномы Лежандра* представляют собой алгебраические полиномы и образуют ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$.

Сначала введем общее понятие производящей функции, которое будет использовано для определения полиномов Лежандра.

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – числовая последовательность. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Если радиус сходимости этого ряда положителен, то его сумма называется *производящей функцией* последовательности $\{a_n\}$. Например, если все $a_n = 1$, то

$$F(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Обозначим

$$F(x,r) = \frac{1}{(1-2rx+r^2)^{1/2}}.$$

Для фиксированного $x \in [-1,1]$ рассмотрим $F(x,r)$ как функцию переменного r. Если $x = 1$, то

$$F(1,r) = \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Если $x = -1$, то

$$F(-1,r) = \frac{1}{1+r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n.$$

Зафиксируем теперь произвольное $x \in [-1, 1]$. Функция $r \mapsto F(x, r)$ бесконечно дифференцируема в точке $r = 0$. Обозначим через $P_n(x)$ n-й коэффициент Тейлора этой функции при $r = 0$, т. е.,

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n F(x, 0)}{\partial r^n}. \tag{3.1}$$

В частности,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \tag{3.2}$$

Таким образом, разложение в ряд Тейлора функции $F(x, r)$ относительно r представляет собой степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n. \tag{3.3}$$

Ниже будет установлено, что этот ряд сходится к $F(x, r)$ при $|x| \leq 1$ и $|r| < 1$. Для малых значений $|r|$ это можно доказать, используя разложение по формуле Тейлора для $(1 - z)^{-1/2}$ при $|z| < 1$, полагая $z = 2xr - r^2$, и применяя формулу бинома Ньютона к каждой степени $(2xr - r^2)^n$.

Выведем *рекуррентную формулу* для $P_n(x)$. Прежде всего, заметим, что нет необходимости использовать сходимость ряда (3.3), поскольку мы можем оперировать только коэффициентами Тейлора.

Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial r}(x, r) = \frac{x - r}{(1 - 2xr + r^2)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$\left(1 - 2xr + r^2\right) \frac{\partial F}{\partial r}(x, r) = (x - r) F(x, r). \tag{3.4}$$

Из (3.3) следует, что рядом Тейлора для $\partial F / \partial r$ является

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) P_{n+1}(x) r^n$$

(этот ряд получен формальным почленным дифференцированием ряда (3.3)). Следовательно, для любого $n \geq 1$ коэффициент Тейлора при r^n функции в левой части (3.4) равен

$$(n + 1) P_{n+1}(x) - 2nx P_n(x) + (n - 1) P_{n-1}(x).$$

С другой стороны, для функции в правой части (3.4) коэффициент Тейлора при r^n равен

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Так как эти коэффициенты равны, то имеем

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{3.5}$$

Это соотношение называется *рекурентной формулой.* Применение метода индукции и (3.2) влечет, что $P_n(x)$ представляет собой алгебраический полином порядка n. Полиномы $P_n(x)$ называются *полиномами Лежандра.* Функция $F(x,r)$ называется *производящей функцией* для полиномов Лежандра.

Предложение 3.1. Совокупность полиномов Лежандра обладает следующими свойствами:

(i) старший коэффициент полинома $P_n(x)$ равен

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!};$$

(ii) $P_{2n}(x)$ состоит только из *четных* степеней x; $P_{2n-1}(x)$ состоит только из *нечетных* степеней x;

(iii) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$;

(iv) для любого $n \in \mathbb{N}$ степень x^n является линейной комбинацией полиномов $P_k(x)$, $k = 0, \dots, n$;

(v) любой алгебраический полином Q порядка m может быть представлен в виде

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x).$$

Доказательство. В самом деле, для доказательства (i) заметим, что, в силу рекуррентной формулы (3.5),

$$(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n,$$

и поэтому

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n.$$

Остается применить индукцию.

Утверждения (ii) – (iv) также легко могут быть доказаны по индукции с использованием рекуррентной формулы (3.5); (v) следует из (iv). □

3.2. Формула Родригеса

Формула Родригеса дает явное представление для полиномов Лежандра. Иногда именно она используется для определения этих полиномов.

Будем применять следующее *правило Лейбница.* Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные порядка n. Тогда

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Теорема 3.2. Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n. \tag{3.6}$$

Доказательство. Обозначим через $R_n(x)$ правую часть (3.6). Очевидно, что

$$R_0(x) = 1 = P_0(x) \quad \text{и} \quad R_1(x) = x = P_1(x).$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что полиномы R_n удовлетворяют той же рекуррентной формуле, что и P_n.

Имеем

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 - 1\right)^{n+1} = 2(n+1)x \left(x^2 - 1\right)^n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(x^2 - 1\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x \left(x^2 - 1\right)^n\right]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

По правилу Лейбница, получаем

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n + n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^2 - 1\right)^n\right]$$

$$= xR_n(x) + \frac{n}{2^n n!}\Phi_n(x),$$

где

$$\Phi_n(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n.$$

Выполняя одно дифференцирование в правой части (3.7), имеем

$$\left(x\left(x^2-1\right)^n\right)' = \left(x^2-1\right)^n + 2nx^2\left(x^2-1\right)^{n-1}$$

$$= (2n+1)\left(x^2-1\right)^n + 2n\left(x^2-1\right)^{n-1}.$$

Отсюда и из (3.7) следует

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(2n+1)\left(x^2-1\right)^n + 2n\left(x^2-1\right)^{n-1}\right]$$

$$= R_{n-1}(x) + \frac{2n+1}{2^n n!}\Phi_n(x).$$

Таким образом,

$$R_{n+1}(x) - R_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{2^n n!}\Phi_n(x). \tag{3.8}$$

Выше мы уже получили, что

$$R_{n+1}(x) - xR_n(x) = \frac{n}{2^n n!}\Phi_n(x).$$

Из этих равенств легко следует, что

$$(n+1)R_{n+1}(x) - (2n+1)xR_n(x) + nR_{n-1}(x) = 0,$$

а это совпадает с рекуррентной формулой для P_n. Итак, $R_n = P_n$. □

Из (3.8) вытекает *вторая рекуррентная формула* для полиномов Лежандра.

Теорема 3.3. Для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x). \tag{3.9}$$

3.3. Ортогональность

В этом параграфе мы покажем, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему на $[-1, 1]$.

Теорема 3.4. Полиномы Лежандра удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2/(2n+1), & m = n. \end{cases}$$

Доказательство. Используя формулу Родригеса, для любой функции $\varphi \in C^{(n)}[-1, 1]$ имеем

$$2^n n! \int_{-1}^{1} \varphi(x)P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\,dx$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} \varphi^{(n)}(x)\left(x^2-1\right)^n\,dx.$$

Последнее равенство получается последовательным n-кратным интегрированием по частям; на каждом шаге двойные подстановки обращаются в нуль. Если $m < n$ и $\varphi(x) = P_m(x)$, то $\varphi^{(n)}(x) = 0$. Стало быть,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n). \tag{3.10}$$

Обозначим теперь

$$C_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx.$$

Пусть a_n – старший коэффициент многочлена P_n. Имеем

$$P_n(x) = \frac{a_n}{a_{n-1}}xP_{n-1}(x) + Q(x),$$

где $Q(x)$ – полином степени не выше, чем $n-1$. В силу предложения 3.1 (v) и равенства (3.10), полиномы P_n и Q ортогональны на $[-1,1]$ и, следовательно,

$$C_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \int\limits_{-1}^{1} P_n(x) x P_{n-1}(x)\, dx.$$

По рекуррентной формуле (3.5),

$$xP_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)\right].$$

Отсюда следует, что

$$C_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{n}{2n+1} C_{n-1}.$$

В силу предложения 3.1 (i),

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{n}.$$

Таким образом,

$$C_n = \frac{2n-1}{2n+1} C_{n-1}.$$

Кроме того, $C_0 = 2$. Значит $C_n = 2/(2n+1)$. $\square$

Следствие 3.5. Для любого $n \in \mathbb{N}$ полином P_n на отрезке $[-1,1]$ ортогонален любому полиному Q степени не выше $n-1$.

Действительно, в силу предложения 3.1 (v), любой такой полином Q представляется в виде

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x).$$

Остается применить теорему 3.4.

Справедливо и следующее, в некотором смысле обратное, утверждение.

Предложение 3.6. Пусть G – полином степени n, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что полином G на отрезке $[-1,1]$ ортогонален любому полиному степени $n-1$. Тогда $G(x) = c\,P_n(x)$, где c – некоторая постоянная.

Доказательство. В силу предложения 3.1 (v), полином G может быть представлен в виде

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x).$$

Для любого $m \leq n-1$ имеем в силу теоремы 3.4,

$$\int_{-1}^{1} G(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2m+1} c_m.$$

С другой стороны, по условию, интеграл в левой части равен нулю. Стало быть, $c_m = 0$ для любого $m \leq n-1$, и $G(x) = c_n P_n(x)$. $\square$

Итак, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – ортогональная система на $[-1,1]$. Будем рассматривать разложения в ряды Фурье по этой системе. Пусть функция f интегрируема по Риману на $[-1,1]$. Учитывая, что

$$\|P_n\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2n+1}},$$

и применяя формулу (1.17), определим *коэффициенты Фурье – Лежандра* функции f равенством

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \quad (n = 0, 1, ...). \tag{3.11}$$

Пример 3.7. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

в ряд по полиномам Лежандра.

Решение. Из (3.11) имеем

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{0}^{1} P_n(x)\, dx \quad (n = 0, 1, ...).$$

Прежде всего, $c_0 = 1/2$. Далее, для $n \geq 1$ применим формулу Родригеса (3.6). Получим

$$c_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!}\int\limits_0^1 \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\,dx = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\Big|_0^1.$$

Положим $\varphi(x) = (x^2-1)^n$. Очевидно, $\varphi^{(n-1)}(1) = 0$. С другой стороны, по формуле бинома Ньютона,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^{2k}.$$

Производные порядка $n-1$ степенной функции x^{2k} в точке $x=0$ равны 0, кроме случая, когда $2k = n-1$. Для четного n этот случай невозможен и поэтому $c_n = 0$ для четных n. Пусть $n = 2m+1$. Тогда простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} c_{2m+1} &= \frac{4m+3}{(2m+1)!2^{2m+2}}(-1)^m\binom{2m+1}{m}(2m)! \\ &= (-1)^m\frac{4m+3}{4^{m+1}}\frac{(2m)!}{m!(m+1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{4m+3}{4^{m+1}}\frac{(2m)!}{m!(m+1)!}P_{2m+1}(x). \qquad \square$$

3.4. Полнота

В этом параграфе мы покажем, что система полиномов Лежандра является полной. Согласно определению 1.43, это означает, что для любой непрерывной на $[-1,1]$ функции f ее *ряд Фурье – Лежандра*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{3.12}$$

(где c_n определены равенством (3.11)) сходится в среднем квадратичном к f. Доказательство этого факта основано на применении следующей *теоремы Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.*

Теорема 3.8 (Вейерштрасс). Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический полином Q, что

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in [a, b].$$

Доказательство. Получим эту теорему из теоремы Вейерштрасса о приближении тригонометрическими полиномами (теорема 1.52). Можем считать, что $[a, b] = [0, \pi]$ (иначе выполним линейную замену переменной $x = a + t(b - a)/\pi$, $0 \le t \le \pi$, и рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(a + t(b - a)/\pi)$). Далее, продолжим функцию f на $[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю числовую ось периодическим образом с периодом 2π. Продолженную функцию обозначим через g. Ясно, что функция g четная, 2π−периодическая, непрерывна и

$$g(x) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in [0, \pi]. \tag{3.13}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 1.52, существует такой тригонометрический полином T, что

$$|g(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Ряд Тейлора функции T сходится к $T(x)$ равномерно на любом отрезке (так как T представляет собой линейную комбинацию синусов и косинусов). Пусть S_m – частичная сумма ряда Тейлора функции T. Тогда для достаточно большого m имеем

$$|T(x) - S_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех} \quad x \in [0, \pi]. \tag{3.15}$$

Итак, из (3.13), (3.14) и (3.15) вытекает

$$|f(x) - S_m(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in [0, \pi].$$

Так как S_m – алгебраический полином (степени m), то этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Докажем теперь *полноту системы полиномов Лежандра.*

Теорема 3.9. Система полиномов Лежандра $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ полна на $[-1, 1]$.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на $[-1,1]$. Через S_n обозначим n-ю частичную сумму разложения Лежандра функции f, т. е.,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

где c_k определены равенством (3.11). Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0. \tag{3.16}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме Вейерштрасса 3.8, существует такой алгебраический полином Q степени m, что

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in [-1,1]. \tag{3.17}$$

Тогда

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x).$$

Используя минимальное свойство частичных сумм рядов Фурье (теорему Грама 1.24) и применяя (3.17), получим

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \leq \int_{-1}^{1} [f(x) - Q(x)]^2 dx < 2\varepsilon^2$$

для всех $n \geq m$. Отсюда следует (3.16). $\square$

В силу теоремы 1.44, свойство полноты можно выразить в следующей эквивалентной форме.

Теорема 3.10. Для каждой непрерывной на $[-1,1]$ функции f справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} c_n^2 = \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx.$$

3.5. Уравнение Лежандра

В этом параграфе мы покажем, что полиномы Лежандра удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка.

Теорема 3.11. Полином Лежандра $y = P_n(x)$ порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{3.18}$$

Доказательство. При $n = 0, 1$ теорема справедлива (см. (3.2)). Пусть $n \geq 2$. Уравнение (3.18) может быть записано также в виде

$$\left[\left(1 - x^2\right) y'\right]' + n(n+1)y = 0. \tag{3.19}$$

Пусть $g(x) = \left[\left(1 - x^2\right) P_n'(x)\right]'$. Поскольку P_n'есть полином степени $n-1$, то $\left(1 - x^2\right) P_n'(x)$ – полином степени $n+1$, и g является полиномом степени n. Покажем, что полином g ортогонален любому полиному степени не выше $n-1$. Пусть Φ – такой полином. Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} g(x)\Phi(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \left[\left(1 - x^2\right) P_n'(x)\right]' \Phi(x)\,dx$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) P_n'(x)\Phi'(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} P_n(x)\left[\left(1 - x^2\right) \Phi'(x)\right]'\,dx \tag{3.20}$$

(двойные подстановки равны нулю ввиду наличия множителя $1-x^2$). Поскольку степень полинома $\Phi'(x)$ не превосходит $n-2$, то $\left[\left(1 - x^2\right) \Phi'(x)\right]'$ есть полином степени не выше $n-1$. В силу следствия 3.5, интеграл в правой части (3.20) равен нулю. Итак, на отрезке $[-1, 1]$ полином g степени n ортогонален любому полиному степени не выше $n-1$. В силу предложения 3.6, отсюда следует, что $g(x) = c\,P_n(x)$, где c – некоторая постоянная. Применяя предложение 3.1 (i), легко получаем, что старший коэффициент полинома g равен $-n(n+1)a_n$, где a_n – старший коэффициент полинома P_n. Таким образом, $g(x) = -n(n+1)P_n(x)$. Отсюда следует, что P_n удовлетворяет уравнению (3.19). $\square$

Уравнение (3.18) называется *уравнением Лежандра.* Как уже отмечалось, его можно переписать в виде

$$\left(\left(1-x^2\right)y'\right)' + n(n+1)y = 0.$$

3.6. Интегральное представление Лапласа

Наряду с формулой Родригеса, известны различные интегральные представления для полиномов Лежандра. Следующее представление принадлежит *Лапласу.*

Теорема 3.12. Для каждого n

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[x + \left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\varphi\right]^n d\varphi. \tag{3.21}$$

Доказательство. Обозначим через $y_n(x)$ правую часть (3.21). Имеем

$$y_0(x) = 1 = P_0(x),$$

$$y_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[x + \left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\varphi\right] d\varphi = x = P_1(x).$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что $y_n(x)$ удовлетворяет той же рекуррентной формуле, что и $P_n(x)$.

Обозначим $Q = x + (x^2-1)^{1/2}\cos\varphi$. Тогда

$$y_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi Q^{n-1}\,d\varphi,$$

$$y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[x + \left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\varphi\right] Q^{n-1}\,d\varphi$$

и

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[x + \left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\varphi\right]^2 Q^{n-1}\,d\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$(n+1)y_{n+1}(x) - (2n+1)xy_n(x) + ny_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi WQ^{n-1}d\varphi, \qquad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} W = (n+1)\left[x^2 + 2x(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi + (x^2-1)\cos^2\varphi\right] \\ -(2n+1)x\left[x + \left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\varphi\right] + n \\ = -n(x^2-1)\sin^2\varphi + (x^2-1)^{1/2}Q\cos\varphi \equiv U + V. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^\pi VQ^{n-1}d\varphi = (x^2-1)^{1/2}\int\limits_0^\pi Q^n\cos\varphi d\varphi$$

$$= (x^2-1)^{1/2}\left[(Q^n\sin\varphi)\,|_0^\pi + n(x^2-1)^{1/2}\int\limits_0^\pi Q^{n-1}\sin^2\varphi d\varphi\right]$$

$$= n(x^2-1)\int\limits_0^\pi Q^{n-1}\sin^2\varphi d\varphi = -\int\limits_0^\pi UQ^{n-1}d\varphi.$$

Итак, правая часть равенства (3.22) равна 0. Отсюда следует, что $y_n(x)$ удовлетворяет рекуррентной формуле (3.5) и поэтому (3.21) справедливо для всех n. □

Применяя теорему 3.12, найдем оценку сверху для полиномов Лежандра.

Следствие 3.13. Имеем

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad \text{для всех} \quad x \in [-1,1] \quad \text{и всех} \quad n. \qquad (3.23)$$

Доказательство. Действительно,

$$\left|x + i\left(1-x^2\right)^{1/2}\cos\varphi\right|^2 = x^2 + \left(1-x^2\right)\cos^2\varphi \leq x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

С учетом (3.21), отсюда следует (3.23). □

Используя (3.23) и признак Вейерштрасса, получаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n \tag{3.24}$$

сходится при всех $x \in [-1, 1]$ и всех $r \in (-1, 1)$.

Далее, применяя (3.23) и рекуррентную формулу

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x), \tag{3.25}$$

(см. (3.9)), получаем, что

$$|P'_n(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad (x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}). \tag{3.26}$$

Действительно, обозначим через A_n максимум $|P'_n(x)|$ на $[-1, 1]$. Из (3.25) и (3.23) следует, что

$$A_{n+1} \leq A_{n-1} + 2n + 1. \tag{3.27}$$

Имеем также $A_0 = 0$ и $A_1 = 1$. Применяя эти равенства и (3.27), с помощью индукции легко получаем оценку (3.26).

Пусть $r \in (-1, 1)$ фиксировано. В силу (3.26), ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P'_n(x)||r|^n$$

сходится равномерно для $|x| \leq 1$. Поэтому, в силу теоремы 7, получаем следующий результат.

Следствие 3.14. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) r^n \tag{3.28}$$

для всех $x \in [-1, 1]$ и всех $r \in (-1, 1)$.

Ранее мы уже отмечали, что для достаточно малых $|r|$ сумма ряда (3.24) совпадает с производящей функцией

$$F(x, r) = \frac{1}{1 - 2rx + r^2}.$$

Сейчас мы можем показать, что

$$F(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n \tag{3.29}$$

для всех $x \in [-1,1]$ и всех $r \in (-1,1)$.

В самом деле, зафиксируем $x_0 \in [-1,1]$. Функция $y = F(x_0, r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 + r^2 - 2rx_0)\frac{dy}{dr} + (r - x_0)y = 0 \tag{3.30}$$

при всех $r \in (-1,1)$. С другой стороны, положим

$$g_{x_0}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x_0) r^n, \quad |r| < 1.$$

Тогда функция g_{x_0} непрерывно дифференцируема на $(-1,1)$. Более того, используя рекуррентную формулу (3.5), получаем, что g_{x_0} тоже удовлетворяет уравнению (3.30). Но это уравнение равносильно такому

$$(\ln y(r))' = \frac{x_0 - r}{1 + r^2 - 2rx_0}.$$

Легко видеть, что его решение единственно с точностью до постоянного множителя. Так как $g_{x_0}(0) = F(x_0, 0) = 1$, то имеем $g_{x_0}(r) = F(x_0, r)$ для всех $r \in (-1,1)$. Поскольку x_0 произвольно, то получили, что равенство (3.29) справедливо для всех $x \in [-1,1]$ и всех $r \in (-1,1)$.

Пример 3.15. Представим функцию $f(x) = (5-4x)^{-1/2}$ в виде ряда по полиномам Лежандра на отрезке $[-1,1]$. Имеем

$$f(x) = \frac{1}{2(1 - x + 1/4)^{1/2}} = \frac{1}{2} F\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Поэтому, в силу (3.29),

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{2^{n+1}} \quad (|x| \leq 1).$$

Упражнения к разделу 3

3.1. Доказать, что каждая из систем

$$\{P_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{P_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$$

3.1.a. ортогональна на $[0,1]$;

3.1.b. полна на $[0,1]$.

3.2. Представить функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{10-6x}}$ в виде ряда по полиномам Лежандра на отрезке $[-1,1]$.

3.3. Использовать рекуррентные формулы (3.5) и (3.9) для полиномов Лежандра для решения следующих задач.

3.3.a. Показать, что

$$P_n(0) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(0) \quad (n \geq 2),$$

и вычислить $P_n(0)$.

3.3.b. Показать, что $P_n'(0) = nP_{n-1}(0)$.

3.4. Разложить каждую из следующих функций в ряды по полиномам Лежандра двумя способами:

1) используя формулу Родригеса (3.6) и упражнение 3.3.a;

2) используя рекуррентную формулу (3.9) и упражнение 3.3.a.

3.4.a.
$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

3.4.b.
$$f_2(x) = \operatorname{sign} x \quad (|x| \leq 1).$$

3.4.c.
$$f_3(x) = |x| \quad (|x| \leq 1).$$

3.5. Показать, что

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j \leq n/2} \frac{(-1)^j (2n-2j)! x^{n-2j}}{j!(n-j)!(n-2j)!}.$$

Указание: использовать формулу Родригеса (3.6) и разложение $\left(x^2-1\right)^n$ по формуле бинома Ньютона.

3.6. Показать, что

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)|\, dx \le \frac{C}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где C – некоторая постоянная.

3.7. Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-1,1]$. Доказать, что для коэффициентов Фурье функции f по системе Лежандра справедлива оценка

$$|c_n| \le \frac{A}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где A – некоторая постоянная.

Указание: использовать рекуррентную формулу (3.9), предложение 3.1 (iii) и упражнение 3.6.

3.8. Показать, что

$$|P_n''(x)| \le \frac{1}{2} n^4 \quad (|x| \le 1).$$

Указание: использовать рекуррентную формулу (3.9), неравенства (3.23) и (3.26).

3.9. Доказать равенства

$$\begin{gathered}\left(1-x^2\right) \frac{d}{dx} P_n(x) \\ = \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)\right] \\ = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) \\ = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x).\end{gathered}$$

Указание: использовать формулу Родригеса (3.6), равенство (3.8) и рекуррентную формулу (3.5).

3.10. Используя равенства из упражнения 3.9, доказать, что

$$(1-x)\left[P_n'(x) + P_{n+1}'(x)\right] = (n+1)\left[P_n(x) - P_{n+1}(x)\right].$$

3.11. Используя интегральное представление Лапласа (3.21), доказать оценку

$$|P_n(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left[1 - \left(1 - x^2\right) \sin^2 \varphi\right]^{n/2} d\varphi \quad (|x| \leq 1).$$

3.12*. Доказать оценку

$$|P_n(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n\,(1 - x^2)}} \quad (|x| < 1),$$

где C – некоторая постоянная.

Указание: использовать упражнение 3.11 и неравенства

$$\mathrm{e}^t \geq 1 + t \quad (t \in \mathbb{R});$$

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответы

1.2.a. $a_n = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$, $b_n = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$. **1.2.b.** $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$ $(n = 1, 2, \dots)$. **1.2.c.** $a_0 = 1$, $a_n = 0$, $b_n = 0$ $(n = 2k)$, $b_n = \frac{2}{\pi n}$ $(n = 2k-1)$, $(k = 1, 2, \dots)$. **1.2.d.** $a_0 = 2\pi$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$. **1.3.a.** $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$. **1.3.b.** $\frac{12}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)}{2}x$. **1.5.a.** Четн. прод.: 1. Нечетн. прод.: $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)}{a}x$. **1.5.b.** Четн. прод.: $\frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)}{a}x$. Нечетн. прод.: $\frac{2a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{\pi n}{a}x$. **1.5.c.** Четн. прод.: $1 - \cos 1 - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos 1}{\pi^2 n^2 - 1}\cos\pi n x$. Нечетн. прод.: $2\pi\sin 1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{\pi^2 n^2-1}\sin\pi n x$. **1.5.d.** Четн. прод.: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$. Нечетн. прод.: $\sin x$. **1.6.a.** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{\pi n}{2}x$. **1.6.b.** $\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\pi x$. **1.7.** $(\cos x)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}\binom{n}{k}\cos(n-2k)x + B_n$, где $B_n = 2^{-n}\binom{n}{n/2}$ $(n = 2k)$, $B_n = 0$ $(n = 2k-1, k = 1, 2, \dots)$. **1.10.** $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx$. **1.11.a.** $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $F\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = 1$. **1.11.b.** $\alpha_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $\beta_0 = -4$, $\gamma_0 = \frac{1}{25}$, $F(\alpha_0, \beta_0\gamma_0) = \frac{8}{45}\pi^4 - \frac{10001}{625} \approx 1{,}3$. **1.11.c.** $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$, $F(0,0,0) = 1$. **1.11.d.** $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = -2$, $\gamma_0 = 0$, $F(1, -2, 0) = 0$. **1.11.e.** $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_0 = -\frac{4}{\pi}$, $\gamma_0 = 0$, $F\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{4}{\pi}, 0\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{16}{\pi^2}$. **1.11.f.** $\alpha_0 = \frac{2}{\pi}$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = -\frac{4}{99\pi}$, $F\left(\frac{2}{\pi}, 0, -\frac{4\pi}{99}\right) = 1 - \frac{78424}{9801\pi^2}$. **1.12.** $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = -1$, $F(0,0,-1) = \frac{2}{3}\pi^2 - 1$. **1.13.** $f(x) = \alpha + \beta\sin x$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. **1.14.** $f(x) = \alpha + \beta\cos x + \gamma\sin x$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

1.15.a. $\frac{1}{2}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. **1.15.b.** 0. **1.21.a.** 0. **1.21.b.** 0 $(n < 100)$, π $(n \geq 100)$. **1.22.** 2,01. **1.23.** $\frac{1}{2}$. **1.24.a.** $a_0 = 1 - \frac{2}{3}\pi^2$, $a_n = \frac{4}{\pi^2}(-1)^{n-1}$, $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$. **1.24.b.** π^2 и 0, соотв. **1.25.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi n x$; 0, 0, $\frac{1}{2}$, соотв. **1.26.b.** $-\frac{\pi+x}{2}$. **1.26.e.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$. **1.27.** $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. **1.28.a.** $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$. **1.28.b.** $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right)\sin nx$. **1.28.c.** $\frac{\pi^4}{5} + 8\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right)\cos nx$. **1.29.a.** $\frac{\pi^2}{6}$. **1.29.b.** $-\frac{\pi^2}{12}$. **1.33.b.** Да. **1.33.e.** $\frac{\pi^2}{6}x - \frac{\pi^2}{4}x^2 + \frac{x^3}{12}$. **1.36.** $A = \frac{2}{\pi}$, $B = 1$. Да. **1.38.a.** $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left(\cos 2kx + k\sin 2kx\right)$. **1.38.b.** -1. **1.39.a.** Все, кроме четвертого. **1.39.b.** 1), 2), 6). **1.42.** $\frac{\pi^4}{90}$. **1.45.** $2\pi(n+1)$. **1.46.** $1 + \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi}$. **1.47.** $f(x) = \alpha\sin x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; $f(x) = \beta\cos x$ $(\beta \in \mathbb{R})$. **1.56.** Нет.

2.1.a. $\widehat{f}(0) = 2$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi}$ $(\xi \neq 0)$. **2.1.b.** $\widehat{f}(0) = 0$, $\widehat{f}(\xi) = -2i\frac{\sin^2 \pi\xi}{\pi\xi}$ $(\xi \neq 0)$. **2.1.c.** $\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$. **2.1.d.** $\frac{1}{1+4\pi^2(\xi+1)^2} + \frac{1}{1+4\pi^2(\xi-1)^2}$. **2.1.e.** $\widehat{f}(0) = 2 + i$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} + i\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}$ $(\xi \neq 0)$. **2.1.f.** $\widehat{f}(0) = 1 + \frac{6i}{9+4\pi^2}$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin^2\pi\xi}{\pi^2\xi^2} + 3i\left(\frac{1}{9+4\pi^2(\xi+1)^2} + \frac{1}{9+4\pi^2(\xi-1)^2}\right)$ $(\xi \neq 0)$. **2.3.a.** $\frac{2}{1+4\pi^2u^2}$. **2.3.b.** $\widehat{h}_C(0) = 4$, $\widehat{h}_C(u) = \frac{\sin 4\pi u}{\pi u}$ $(u \neq 0)$. **2.3.c.** $\widehat{k}_C(0) = \frac{1}{2}$, $\widehat{k}_C(u) = 2\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2}}{\pi^2u^2}$ $(u \neq 0)$. **2.4.a.** $\widehat{f}(0) = 2a$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}$ $(\xi \neq 0)$. **2.4.b.** $\widehat{f}\left(\pm\frac{1}{2\pi}\right) = \pi$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{4\pi\xi}{1-4\pi^2\xi^2}\sin 2\pi^2\xi$ $\left(\xi \neq \pm\frac{1}{2\pi}\right)$. **2.4.c.** $\widehat{f}\left(\pm\frac{1}{2\pi}\right) = \mp\pi i$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{-2i}{1-4\pi^2\xi^2}\sin 2\pi^2\xi$ $\left(\xi \neq \pm\frac{1}{2\pi}\right)$. **2.4.d.** $2 \cdot \frac{1-4\pi^2\xi^2}{(1+4\pi^2\xi^2)^2}$. **2.4.e.** $\frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}$. **2.5.a.** $\widehat{f}(0) = 1$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\pi i\xi}\right)$ $(\xi \neq 0)$. **2.5.b.** $\widehat{f}(0) = a$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\pi i a\xi}\right)$ $(\xi \neq 0)$. **2.5.c.** $\widehat{f}(0) = 0$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{i}{\pi\xi}(\cos\pi\xi - 1)$ $(\xi \neq 0)$. **2.5.d.** $\frac{2c\mathrm{e}^{-2\pi i b\xi}}{c^2+4\pi^2\xi^2}$. **2.5.e.** $\sqrt{\pi}c\mathrm{e}^{-\pi\left(\pi c^2\xi^2 + 2ib\xi\right)}$. **2.5.f.** $-\frac{8\pi b c i\xi}{(c^2+(2\pi\xi+b)^2)(c^2+(2\pi\xi-b)^2)}$. **2.7.a.** $\widehat{f}(0) = c$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin\pi c\xi}{\pi\xi}$ $(\xi \neq 0)$. **2.7.b.** $\widehat{f}\left(\pm\frac{1}{2}c\right) = \frac{c}{2}$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{2c}{\pi}\frac{\cos\pi c\xi}{1-4c^2\xi^2}$ $\left(\xi \neq \pm\frac{1}{2}c\right)$. **2.7.c.** $\widehat{f}(0) = \frac{c}{2}$, $\widehat{f}\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{c}{4}$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin\pi c\xi}{2\pi\xi(1-c^2\xi^2)}$, $\left(\xi \neq 0, \frac{1}{c}\right)$. **2.7.d.** $\widehat{f}(0) = c$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin^2\pi c\xi}{\pi^2 c\xi^2}$ $(\xi \neq 0)$. **2.7.e.** $\left(\frac{1}{2\pi} - \xi^2\right)\mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$. **2.7.f.** $\left(1 - 4\pi\xi^2\right)\mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$. **2.8.** $\frac{\pi}{2}\left(|\xi| = \frac{a}{2\pi}\right), \pi\left(|\xi| < \frac{a}{2\pi}\right), 0\left(|\xi| > \frac{a}{2\pi}\right)$. **2.9.a.** $\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$. **2.9.b.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\pi i\xi - \frac{\pi^2}{4}\xi^2}$. **2.9.c.** $-\pi^{\frac{3}{2}}i\xi\mathrm{e}^{-\pi^2\xi^2}$. **2.10.a.** $\frac{1}{a+2\pi i\xi}$. **2.10.b.** $\frac{a+2\pi i\xi}{(a+2\pi i\xi)^2+b^2}$. **2.10.c.** $\frac{b}{(a+2\pi i\xi)^2+b^2}$. **2.11.a.** $\widehat{f}(-\xi)$. **2.11.b.** $\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x_0}\widehat{f}(\xi)$. **2.11.c.** $\widehat{f}\left(\xi - \frac{\xi_0}{2\pi}\right)$. **2.11.d.** $\frac{1}{2i}\left[\widehat{f}\left(\xi - \frac{\xi_0}{2\pi}\right) - \widehat{f}\left(\xi + \frac{\xi_0}{2\pi}\right)\right]$. **2.11.e.** $\frac{1}{3}\widehat{f}\left(\frac{2\pi\xi - 1}{6\pi}\right)$. **2.11.f.** $\frac{1}{2}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{2}\right)$. **2.12.**

$e^{-\frac{x^2}{2}}$. **2.17.** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 1$; $f(x) = 0$ $\left(x \leq \frac{15}{8}\right)$, $f(k) = k$, $f\left(k \pm \frac{1}{k^3}\right) = 0$ $(k = 2, 3, \dots)$, а между любыми двумя соседними точками, в которых f уже определена, полагаем f линейной. **2.22.** $f(0) = \frac{4}{3}$, $f(x) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} - \cos 2\pi x\right)$ $(x \neq 0)$. **2.23.** $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ $(x \neq 0)$. **2.25.** e^{-x}, определена однозначно. **2.26.** $f(x) = 1 - x$ $(0 \leq x \leq 1)$, $f(x) = 0$ $(x > 1)$, определена однозначно. **2.28.a.** $g(x) = -2\pi^2 ix$ $\left(|x| \leq \frac{1}{2\pi}\right)$, $g(x) = 0$ $\left(|x| > \frac{1}{2\pi}\right)$. **2.28.b.** $\frac{\pi}{6}$. **2.29.a.** $\frac{\pi}{2}$. **2.29.b.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2.34.** $\frac{\pi(a+b)}{ab(x^2+(a+b)^2)}$. **2.35.** $\widehat{g}(\xi) = \pi(1 - 2\pi|\xi|)\widehat{f}(\xi)$ $\left(|\xi| \leq \frac{1}{2\pi}\right)$, $\widehat{g}(\xi) = 0$ $\left(|\xi| > \frac{1}{2\pi}\right)$. **2.36.a.** $\pm 2e^{-8\pi x^2}$. **2.36.b.** $\pm\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+4x^2}$.

3.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{3^{n+1}}$. **3.3.a.** $P_{2k-1}(0) = 0$, $P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k k!}$ $(k = 1, 2, \dots)$. **3.4.a.** $\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+3)\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n(n+1)!}P_{2n+1}(x)$. **3.4.b.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2}P_{2n+1}(x)$. **3.4.c.** $\frac{1}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n+1}{2n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}P_{2n}(x)$.

Предметный указатель

Литература

1. Д. Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М., ИЛ, 1948.

2. А. Я. Дороговцев. Математический анализ: Сборник задач. Киев, Вища школа. Головное изд-во, 1987.

3. В. А. Зорич. Математический анализ, часть II. М., Наука. 1984.

4. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.

5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. М., Наука, 1969.

6. G. B. Folland. Fourier Analysis and its Applications. Brooks / Cole Pul. Company, 1992.

7. A. Pinkus and S. Zafrany. Fourier Series and Integral Transforms. Cambridge Univ. Press, 1997.

8. J. S. Walker. Fourier Analysis. Oxford Univ. Press, New York, Oxford, 1988.

Навчальне видання

Коляда Віктор Іванович

Кореновський Анатолій Олександрович

Вступ до аналізу Фур'є

Навчальний посібник

Підп. до друку 21.02.2014. Формат 60х84/16.
Умов.-друк. арк. 8,14. Тираж 50 прим.
Зам. № 814.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua